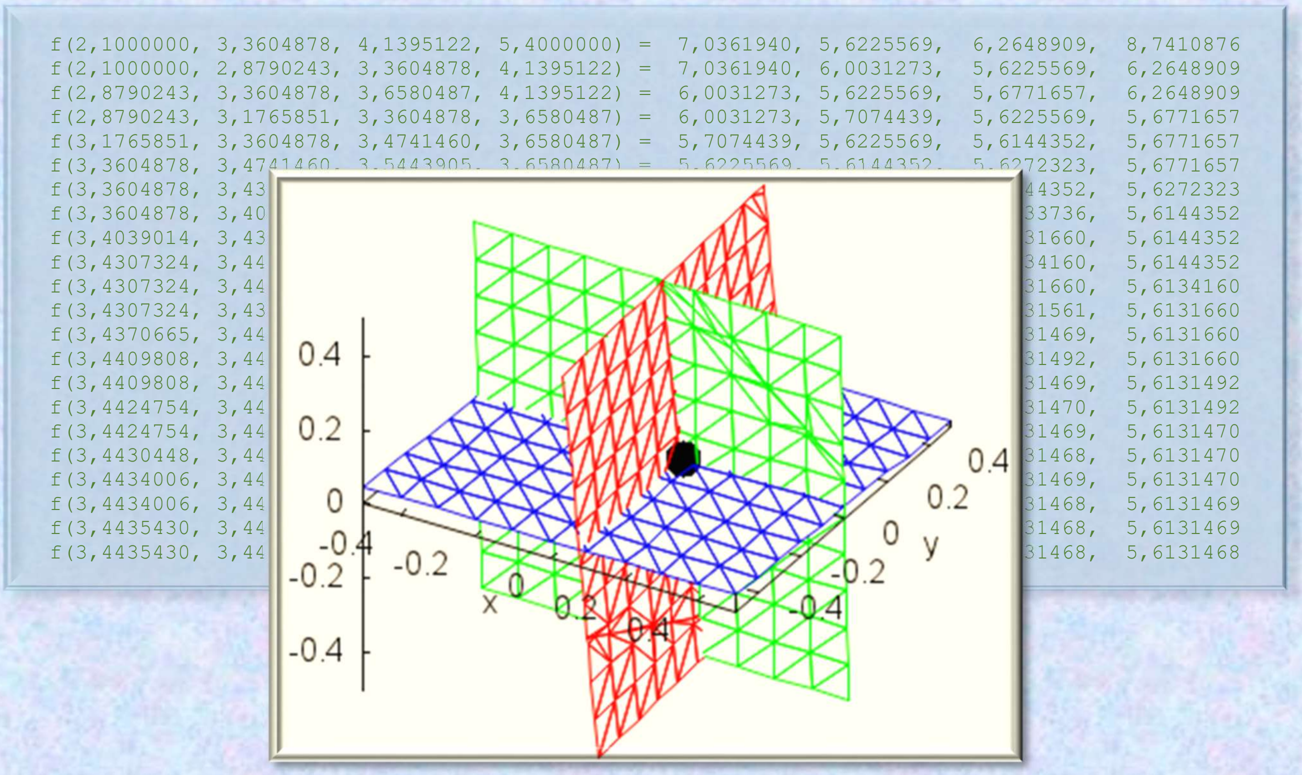
Beregszászi István

Numerikus módszerek

Laboratóriumi munkák és hozzá megoldási útmutató



Beregszászi István

Numerikus módszerek. Laboratóriumi munkák és hozzá megoldási útmutató

(módszertani segédlet 3. évfolyamos matematika-informatika szakos hallgatók számára)

Закарпатський угорський інститут ім. Ф. Ракоці II

Кафедра математики та інформатики

II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Matematika és informatika tanszék

Beregszászi István

Numerikus módszerek. Laboratóriumi munkák és hozzá megoldási útmutató

(módszertani segédlet 3. évfolyamos matematika-informatika szakos hallgatók számára)

Методи обчислень. Лабораторні роботи та методичний посібник для виконання цих лабораторних робіт

(методичний посібник для студентів 3-го курсу спеціальності математика та інформатика)

Beregszász, 2020

УДК: 519.612(076.2)
Б-54

Beregszászi István

NUMERIKUS MÓDSZEREK.
LABORATÓRIUMI MUNKÁK ÉS HOZZÁ MEGOLDÁSI ÚTMUTATÓ

Módszertani segédlet 3. évfolyamos matematika-informatika szakos hallgatók számára

Берегсасі Степан

МЕТОДИ ОБЧИСЛЕНЬ.
ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ ТА МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК ДЛЯ ВИКОНАННЯ ЦИХ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

Методичний посібник для студентів 3-го курсу спеціальності математика та інформатика

A megoldási útmutató numerikus módszerek tantárgyi körhöz tartozó laboratóriumi munkák elvégzéséhez nyújt módszertani segítséget. A numerikus matematika módszereinek alkalmazásához számítógéppel elősegített megoldási módszerek is társulnak. Többek között széles körben alkalmazottak e kiadványban a Java programozási nyelven megvalósított numerikus matematikai számítási eljárások, továbbá a matematikai Maxima programcsomag wxMaxima grafikus felületű része, valamint a Geogebra és Excel is szerepet kapnak. A megoldási útmutatóban erős hangsúlyt kap az absztrakt matematikai számítások mellett a megoldások grafikus szemléltetése is, ahol ez lehetséges. A kiadvány a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola harmadik évfolyamos matematika és informatika szakos hallgatói számára ajánlott.

У методичному посібнику містяться методи розв'язання лабораторних завдань з чисельних методів. До методів обчислень застосовуються також комп'ютерні методи числового розв'язання математичних задач. Широко застосовуються алгоритмічні методи розв'язання математичних числових задач, реалізовані на мові програмування Java, а також графічний пакет wxMaxima математичної програми Maxima, програми Geogebra і Excel. В методичному посібнику поряд із абстрактними математичними обчисленнями значну роль відіграє наочне графічне представлення розв'язків, де це можливо. Видання розраховано на студентів третього курсу Закарпатського угорського інституту ім. Ф. Ракоці II за спеціальністю «Математика та інформатика».

Lektorálta:
Dr. prof. Holovács József,
II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola, Matematika és informatika Tanszék
Dr. Kucsinka Katalin,
II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola, Matematika és informatika Tanszék

Рецензенти:
Головач Йосип Ігнатович, доктор технічних наук,
Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II, кафедра математики та інформатики
Кучінка Каталін Йожефівна, кандидат фізико-математичних наук,
Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II, кафедра математики та інформатики

Jóváhagyta a Matematika és informatika Tanszék 2020. november 30-án összehívott tanszéki értekezlete, 4.sz.protokol.
Затверджено на засіданні кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського інституту ім. Ф. Ракоці II, протокол № 4 від 30 листопада 2020 року.

Tartalomjegyzék

I. Fejezet. Feladatok

1. Laboratóriumi munka. Gépi számábrázolás. Hibabecslés

1.1. 8-bites szám ábrázolása 10-es számrendszerben

Feladat

Ábrázolja 8-bites számként 10-es számrendszerben a megadott számokat! (Kupán, 5. old.)

Változatok

1. 236,83571
2. –147,91057
3. 609,15668
4. –213,45026
1. 678,54199
2. –596,34091
3. 370,41701
4. 779,28667
5. –354,24108
6. 152,52517
7. –179,96096
8. 484,42307
9. 193,15563
10. 117,90529
11. –455,79093
12. 633,98529
13. –343,12502
14. –703,84970
15. 205,27973
16. 671,35509
17. –346,21852
18. 590,73548
19. –353,55829
20. 198,47818

1.2. 64-bites szám ábrázolása 2-es számrendszerben (IEEE-754)

Feladat

Ábrázolja az 1.1. feladatban szereplő a változatának megfelelő értéket 64-bites számként 2-es számrendszerben (IEEE-754)! (Kupán, 6.-7. old.)

1.3. 8-bites szám ábrázolása valós számként

Feladat

Ábrázolja az alábbi nyolcbites számot valós számként (Kupán, 5. old.)!

Változatok

1)

1	2	3	4	5	6	7	8
0	7	3	2	8	2	1	9

2)

1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	4	7	1	7	7	8

3)

1	2	3	4	5	6	7	8
1	6	6	1	7	6	6	6

4)

1	2	3	4	5	6	7	8
0	2	3	1	8	9	1	0

5)

1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	1	1	6	7	9	1

6)

1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	5	5	7	8	9	9

7)

1	2	3	4	5	6	7	8
1	5	9	7	6	2	6	8

8)

1	2	3	4	5	6	7	8
0	9	3	8	4	7	2	1

9)

1	2	3	4	5	6	7	8
1	9	4	3	2	1	1	2

10)

1	2	3	4	5	6	7	8
0	8	7	8	7	8	3	1

11)

1	2	3	4	5	6	7	8
1	9	8	8	1	2	0	2

12)

1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	4	1	7	5	7	1

13)

1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	1	2	5	4	7	4

14)

1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	1	2	2	3	4	5

15)

1	2	3	4	5	6	7	8
0	2	4	8	6	2	4	7

16)

1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	5	3	6	5	5	2

17)

1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	5	9	6	6

18)

1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	4	4	7	5

19)

1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	7	5	6	9	1	7

20)

1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	7	7	8	5	3	2

21)

1	2	3	4	5	6	7	8
0	5	6	1	1	1	8	1

22)

1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	0	5	6	7	2	8

1.4. Hibabecslés

Feladat

Határozza meg az ***a*** és a ***b*** táblázatban megadott hibáit (Kupán, Holovács), ($n+m>10$, normál Csebotárjov ($n>10$)). Az ***S*** összegek kiszámításához vegyen ***n*** értéket a táblázat elejéről az ***a*** számára ($a_k, k=\overline{1,n}$), és ***m*** értéket – a ***b*** számára ($b_j, j=\overline{1,m}$)! Az $S_a=\sum_{k=1}^{n} a_k, k=\overline{1,n}$ összeg abszolút hibájának statisztikai hibabecslésnek, a Δ_s-nek a kiszámításához használja a táblázatból vett Δ_k értéket az abszolút hibák körülbelül azonos nagyságrendjei számára (alkalmazza Csebotárjov-féle szabályt)! Az S_a összeg δ_s relatív hibájának statisztikai hibabecslésének a kiszámításához pedig – a táblázatból vett δ értéket a relatív hibák körülbelül azonos nagyságrendjeiként!

Változatok

№	***a***	±	Δ_k	***n***	***m***	δ	***b***	±
1.	1,553071	0,041422	0,04	12	6	0,011	3,041339	0,037714
2.	1,814977	0,024793	0,02	12	7	0,013	3,529256	0,042899
3.	1,334035	0,037453	0,04	15	5	0,012	2,598385	0,014296
4.	3,121853	0,029003	0,03	11	9	0,011	2,868443	0,004762
5.	2,548067	0,040415	0,04	14	6	0,014	2,976536	0,049563
6.	4,714331	0,043488	0,04	12	8	0,012	1,219006	0,038431
7.	1,534734	0,024491	0,02	11	4	0,013	2,992226	0,027693
8.	2,295359	0,017831	0,02	14	6	0,014	4,153420	0,049937
9.	2,511150	0,027372	0,03	11	9	0,015	1,888115	0,028372
10.	2,772458	0,027166	0,03	11	7	0,012	1,332234	0,047197
11.	2,817209	0,017683	0,02	15	5	0,013	1,881836	0,043621
12.	3,041141	0,033180	0,03	11	8	0,012	2,750445	0,031116
13.	3,185625	0,043009	0,04	11	9	0,011	3,918961	0,009736
14.	3,150075	0,018468	0,02	11	7	0,012	2,511719	0,047319
15.	2,878626	0,049218	0,05	12	8	0,011	2,235123	0,038583
16.	2,713422	0,008794	0,01	12	6	0,016	3,782745	0,025892
17.	3,238716	0,037182	0,04	13	5	0,017	4,451234	0,042285
18.	4,456158	0,025329	0,03	11	5	0,011	1,817753	0,018828
19.	3,627272	0,045719	0,05	14	6	0,014	3,612318	0,005979
20.	2,345928	0,023915	0,02	12	6	0,011	2,562747	0,036834
21.	3,142671	0,013718	0,01	13	7	0,012	1,263446	0,026781
22.	2,012572	0,021619	0,02	12	6	0,013	2,062345	0,015612
23.	4,256287	0,014267	0,04	11	5	0,012	4,263481	0,034567
24.	2,316783	0,025673	0,03	12	7	0,011	2,364456	0,024349
25.	1,306082	0,015677	0,02	11	6	0,014	1,168498	0,014246
26.	2,465011	0,025376	0,03	14	8	0,011	2,263447	0,024257
27.	3,465067	0,015273	0,04	15	7	0,012	3,223346	0,014654
28.	1,161018	0,025651	0,02	13	6	0,011	1,125362	0,024627
29.	2,202011	0,015155	0,01	12	9	0,012	2,223461	0,013223

A meghatározandó hibaértékek

1)	Az ***a*** abszolút hibája	Δ_a
2)	A ***b*** abszolút hibája	Δ_b
3)	Az ***a*** relatív hibája	δ_a
4)	A ***b*** relatív hibája	δ_b
5)	Az ***a* + *b*** összeg abszolút hibája	Δ_{a+b}
6)	Az ***a* + *b*** összeg relatív hibája	δ_{a+b}
7)	Az ***a* – *b*** különbség abszolút hibája	Δ_{a-b}
8)	Az ***a* – *b*** különbség relatív hibája	δ_{a-b}
9)	Az ***a* · *b*** szorzat abszolút hibája	$\Delta_{a\cdot b}$
10)	Az ***a* · *b*** szorzat relatív hibája	$\delta_{a\cdot b}$
11)	Az ***a* / *b*** hányados abszolút hibája	$\Delta_{a/b}$
12)	Az ***a* / *b*** hányados relatív hibája	$\delta_{a/b}$
13)	Az ***a*** összegének abszolút hibája (statisztikai hibabecsléssel)	$\Delta_{\Sigma a}$
14)	Az ***a*** összegének relatív hibája	$\delta_{\Sigma a}$
15)	Az ***b*** összegének abszolút hibája	$\Delta_{\Sigma b}$
16)	Az ***b*** összegének relatív hibája	$\delta_{\Sigma b}$
17)	Az **a** és a ***b*** szorzatai hányadosának ***r*** értéke	r
18)	Az ***r*** relatív hibája (statisztikai hibabecsléssel)	δ_r

2. Laboratóriumi munka. Nemlineáris egyenletek megoldása

2.1. Nemlineáris egyenletek megoldása

Feladat

Oldja meg az egyenletet numerikusan a feltűntetett módszerrel és végezzen a módszernek megfelelő hibabecslést is! Válassza külön a gyököket, és a módszernek megfelelően önállóan határozza meg a megoldási intervallumot, illetve a kezdőpontokat! Ábrázolja grafikusan a függvényt!

Változatok

1. Szelő módszer; $-\dfrac{2\cos^2\left(\dfrac{ax}{2}\right)\left(\ln\left(\cos\left(\dfrac{ax}{2}\right)\right)-\ln\left(\sin\left(\dfrac{ax}{2}\right)\right)\right)+1}{2a(\cos(ax)+1)}=0$
2. Felező módszer; $\dfrac{2\sin^2\left(\dfrac{bx}{3}\right)\left(\lg\left(2-\cos\left(\dfrac{ax}{b}\right)\right)+\log_2\left(\sin\left(\dfrac{a+x}{2-x}\right)\right)\right)-0.41}{2a+(\sin(a-x)-1.1)}=0$
3. Felező módszer; $\dfrac{1}{8}\left(\sqrt{x^2+1}\left(2x^3+x\right)-\operatorname{arsh}x\right)=0$
4. Érintő módszer; $\dfrac{1}{192a}\left(-45\sin(2(ax+b))+9\sin(4(ax+b))-\sin(6(ax+b))+60ax+60b\right)=0$
5. Húr módszer; $\dfrac{\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x\sqrt{a^2+b^2}}{b\sqrt{a^2-x^2}}\right)}{b\sqrt{a^2+b^2}}=0$
6. Fixpont módszer; $\dfrac{1}{9}(3x\sin(3x)+\cos(3x))=0$
7. Érintő és a húr együttes módszere; $x\log_2\left(a+\dfrac{b}{x}\right)+\dfrac{b\log_3(ax+b)}{a}=0$
8. Szelő módszer; $\dfrac{b^2\log_2 x}{a^3}-\dfrac{b^2\log_3(ax+b)}{a^3}+\dfrac{b}{a^2x}-\dfrac{1}{2ax^2}=0$
9. Felező módszer; $\dfrac{5\sin x-2x^{\frac{3}{4}}}{4{,}6\sqrt{3+\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x^2+5\right)}}=0$
10. Érintő módszer; $\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right)+\operatorname{arctg}x=0$

11. Húr módszer; $\dfrac{2a^2+x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}=0$

12. Newton módszer; $\dfrac{2\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)^b\left(b\left(x+\sqrt{2}\sqrt{x}\right)+x-2\right)}{b^2+3b+2}=0$

13. Szelő módszer; $\dfrac{2(a+bx)^{\frac{n}{2}+1}\left(b(n+2)x-2a\right)}{b^2(n+2)(n+4)}=0$

14. Húr módszer; $\left(\sqrt{5}-1\right)\log_2\left(x^2+\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)x+1\right)-\left(1+\sqrt{5}\right)=0$

15. Felező módszer; $-x+\dfrac{2x\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}}+2\ln\left(-\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}\right)=0$

16. Fixpont módszer; $\dfrac{1}{2}\left(x+\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x\right)=0$

17. Érintő módszer; $\dfrac{-ax\sqrt{1-a^2x^2}+2a^2x^2\arccos ax+\arcsin ax}{4a^2}=0$

18. Szelő módszer; $\dfrac{1}{48}\left(x\sqrt{x^2-1}\left(8x^4-26x^2+33\right)-15\ln\left(2\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)\right)\right)=0$

19. Newton módszer; $\dfrac{1}{3}\left(3x+\log_4(5-5x)-4\ln\left(5(x+2)\right)\right)=0$

20. Húr módszer; $\dfrac{\ln\left(\sin\left(\frac{a}{2}+\frac{bx}{2}\right)+\cos\left(\frac{a}{2}+\frac{bx}{2}\right)\right)}{b}-\dfrac{\log_3\left(\cos\left(\frac{a}{2}+\frac{bx}{2}\right)-\sin\left(\frac{a}{2}+\frac{bx}{2}\right)\right)}{b}=0$

21. Felező módszer;

$$\sqrt{a}\log_3\left(a^{\frac{3}{2}}x\right)+\sqrt{a+x(b+cx)}-\sqrt{a}\log_2\left(2\sqrt{a}\sqrt{a+x(b+cx)}+2a+bx\right)+$$
$$+\frac{b\log_3\left(2\sqrt{c}\sqrt{a+x(b+cx)}+b+2cx\right)}{2\sqrt{c}}=0$$

22. Érintő és a húr együttes módszere; $\dfrac{440x+8(5x+8)^2\ln\left(2(5x+8)\right)+583}{250(5x+8)^2}=0$

23. Szelő módszer; $\dfrac{\sin\left(x(a-b)\right)}{2(a-b)}+\dfrac{\sin\left(x(a+b)\right)}{2(a+b)}=0$

24. Húr módszer; $\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\left(\log_4\left(2\sin\frac{x}{4}\right)-\log_2\left(2\cos\frac{x}{4}\right)\right)}{\sqrt{1-\cos x}}=0$

25. Érintő módszer; $\frac{1}{16}\left(3\log_3(5-10x)-7\log_5(5(2x+3))\right)=0$

26. Felező módszer; $-\arcsin\left(\frac{1}{5}(1-2x)\right)=0$

27. Newton módszer; $\frac{1}{2}\left(x^2 \operatorname{arcctg} x + x - \operatorname{arctg} x\right)=0$

28. Húr módszer; $\frac{1}{34}e^{3x}\left(5\sin(5x+7)+3\cos(5x+7)\right)=0$

29. Szelő módszer; $\frac{1}{2}\left(\left(x^2+1\right)\operatorname{arctg} x - x\right)=0$

30. Érintő módszer; $\frac{1}{4}\left(-x\sqrt{1-x^2}+2x^2\arccos x+\arcsin x\right)=0$

31. Húr módszer; $-\frac{5\cos(ax)}{8a}+\frac{5\cos(3ax)}{48a}-\frac{\cos(5ax)}{a}=0$

32. Fixpont módszer; $-\log_6\left(c^2-cx+x^2\right)+\frac{3c^2x}{c^3+x^3}=0$

33. Newton módszer; $2\log_2(c+x)+2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-c}{\sqrt{3}\,c}\right)=0$

34. Szelő módszer; $\frac{2\operatorname{arctg}\left(\frac{b+2cx}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)}{\sqrt{4ac-b^2}}=0$

35. Érintő és a húr együttes módszere; $2\ln\left(5^{\frac{2}{3}}x+5\right)+2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\cdot 5^{\frac{2}{3}}x-5}{5\sqrt{3}}\right)=0$

36. Húr módszer; $\frac{1}{35}\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}\left(x^2-a^2\right)\left(2a^2+5x^2\right)=0$

37. Szelő módszer; $\frac{2\sin x}{\cos x-\sin x}-x=0$

38. Érintő módszer; $-\frac{2ax+2\sqrt{ax}\sin\left(2\sqrt{ax}\right)+\cos\left(a\sqrt{ax}\right)}{4a}=0$

39. Fixpont módszer; $\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-b^2x^2}+\frac{a^2\operatorname{arctg}\left(\frac{bx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}\right)}{2b}=0$

40. Newton módszer; $-\frac{2\sin(ax)}{7(x-a)}+\frac{1{,}1\sin(2a-x)}{48+a}-\frac{\sin(4+ax)}{80-a^3}=0$

41. Felező módszer; $2\sqrt{3}(a-b)\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+2c\log_2\left(x^3-1\right)=0$

42. Szelő módszer; $\operatorname{arctg}\left(\frac{a+x}{\sqrt{-a-b}}\right)-2x\left(\sqrt{a+b}+a\right)+x^2=0$

43. Érintő módszer; $\frac{1}{2}x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+x\operatorname{arcsch}x\right)=0$

44. Húr módszer; $x\ln\left(\sqrt{a^2+x^2}+x\right)-\sqrt{a^2+x^2}=0$

45. Szelő módszer; $\dfrac{\log_7\left(c^2+cx+x^2\right)-\log_3(x-c)-2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{c+2x}{\sqrt{3}\,c}\right)}{6c}=0$

46. Húr módszer; $\sin x\cdot e^{5x}+\operatorname{arctg}\frac{5}{x}=0$

47. Érintő módszer; $\cos x+10\sin 3x=0$

48. Fixpont módszer; $3\ln\left(4^{\frac{3}{2}}\cdot 5x\right)+5x=0$

49. Szelő módszer; $\operatorname{tg}4x\cdot e^{-3x}=0$

50. Newton-Raphson módszer; $\operatorname{arctg}5x\cdot\left(x^3+2x^2+4\right)=0$

51. Érintő módszer; $\dfrac{\cos 4x}{\sin\left(5x^3+6x^2\right)}=0$

52. Newton-Raphson módszer; $x^4\sin x+\dfrac{x}{\cos 4x}=0$

53. Fixpont módszer; $\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{4}\right)x+7=0$

54. Szelő módszer; $\dfrac{e^{-4x}}{\sin x}+45x^3=0$

55. Húr módszer; $\dfrac{\cos 3x}{\arcsin 5x}+\dfrac{x^2}{x+\sin x}=0$

3. Laboratóriumi munka. Numerikus integrálás

3.1. Numerikus integrálás

Feladat

Határozza meg numerikusan az integrált a megadott módszerrel és végezze el hozzá a módszenek megfelelő hibabecslést is! Önállóan állapítsa meg az integrálás határait is és a paraméterek értékeit! Készítsen grafikont, amelyen ábrázolja az integrálást: az integrált függvény, az integrálási határokat!

Változatok

1. Bal téglalap: $\int \frac{x}{\left(5-4x-x^2\right)^{\frac{3}{2}}} dx$
2. Trapéz: $\int \left(-2b^3 - x^4 + 1\right)^{-\frac{5}{2}} dx$
3. Simpson: $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4} dx$
4. Simpson 3/8: $\int \frac{x}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x}} dx$
5. Bal téglalap: $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}\left(b^2 + x^2\right)} dx$
6. Trapéz: $\int e^{3x} \operatorname{ch}(5x+7) dx$
7. Simpson: $\int \lg\left(a + \frac{b}{x^2}\right) dx$
8. Simpson 3/8: $\int \frac{\sqrt{-a^2 + x^2}}{x} dx$
9. Jobb téglalap: $\int \frac{1}{1 + \cos(ax) - \sin(ax)} dx$
10. Közép téglalap: $\int x \operatorname{arcth}\left(\frac{x}{a}\right) dx$
11. Jobb téglalap: $\int x(a + bx)^{\frac{n}{2}} dx$
12. Trapéz: $\int \frac{x}{\left(a + bx + cx^2\right)^{\frac{3}{2}}} dx$

13. Simpson: $\int \frac{\lg(b+ax)}{x^2}dx$

14. Bal téglalap: $\int \left(\sqrt{2}+\sqrt{x}\right)^b dx$

15. Jobb téglalap: $\int \frac{x}{1+\sin x}dx$

16. Közép téglalap: $\int x \arccos(ax)dx$

17. Trapéz: $\int \left(-1+x^3\right)^{\frac{5}{2}}dx$

18. Simpson: $\int \frac{x^2}{(-1+x)(2+x)}dx$

19. Simpson 3/8: $\int \sec(a+bx)dx$

20. Bool módszer: $\int \frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{x}dx$

21. Romberg módszer: $\int \frac{(2x+1)^2}{(5x+8)^3}dx$

22. Bal téglalap: $\int \cos(ax)\cos(bx)dx$

23. Jobb téglalap: $\int x \sin^3(ax)dx$

24. Közép téglalap: $\int e^{2x}x^3 dx$

25. Trapéz: $\int \frac{1}{e^{(a+x)^2} s^2}dx$

26. Simpson: $\int \frac{1}{x\left(-a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx$

27. Simpson 3/8: $\int \left(a+bx^2\right)^{-1-m}dx$

28. Bool integrál: $\int \frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}dx$

29. Romberg integrál: $\int \frac{1}{\cos ax+\sin ax}dx$

30. Bal téglalap: $\int x \arccos x dx$

31. Jobb téglalap: $\int \sin^5 ax dx$

32. Közép téglalap: $\int \frac{1}{\left(c^3 + x^3\right)^2} dx$

33. Trapéz: $\int x(a + bx)^n dx$

34. Simpson: $\int \frac{1}{a + bx + cx^2} dx$

35. Simpson 3/8: $\int \sin^2\left(\sqrt{ax}\right) dx$

36. Bool integrál: $\int \frac{x^m}{\lg^n x} dx$

37. Romberg integrál: $\int \frac{\operatorname{arcsec} ax}{x^2} dx$

38. Gauss-Legendre integral: $\int \sqrt{2 + 2\sin x} dx$

39. Bal téglalap: $\int \frac{1}{-2 + x^3} dx$

40. Jobb téglalap: $\int \frac{\sin x}{a + b\sin x} dx$

41. Közép téglalap: $\int \frac{x}{\cos^n ax} dx$

42. Trapéz: $\int \frac{\ln(a + bx)}{a - bx} dx$

43. Simpson: $\int x^m \sin ax dx$

44. Simpson 3/8: $\int \sin\left(a + bx + cx^2\right) dx$

4. Laboratóriumi munka. Lineáris egyenletrendszerek megoldása

4.1. Direkt módszer

Feladat

Oldja meg numerikusan a mátrix formában megadott egyenletrendszereket! Végezzen hibabecslést!

Alkalmazzon Gauss részleges (páros változat) vagy teljes (páratlan változat) főelem kiválasztású módszerrel a lineáris egyenletrendszer megoldásához!

Változatok

1. $$\begin{cases} 35{,}91923x_1 + 0{,}814247x_2 + 0{,}560417x_3 = 0{,}40327, \\ 0{,}442374x_1 + 85{,}20431x_2 + 0{,}840056x_3 = 0{,}352024, \\ 0{,}656788x_1 + 0{,}079356x_2 + 62{,}05779x_3 = 0{,}724384. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 5{,}578612x_1 + 0{,}520287x_2 + 0{,}101544x_3 = 0{,}069777, \\ 0{,}364009x_1 + 79{,}49641x_2 + 0{,}472725x_3 = 0{,}020952, \\ 0{,}784662x_1 + 0{,}799101x_2 + 41{,}83723x_3 = 0{,}623483. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} 19{,}55251x_1 + 0{,}326017x_2 + 0{,}979571x_3 = 0{,}061864, \\ 0{,}287736x_1 + 12{,}61928x_2 + 0{,}702781x_3 = 0{,}057810, \\ 0{,}448147x_1 + 0{,}997591x_2 + 53{,}36999x_3 = 0{,}950638. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} 23{,}96007x_1 + 0{,}119682x_2 + 0{,}822201x_3 = 0{,}947823, \\ 0{,}641252x_1 + 44{,}23698x_2 + 0{,}580313x_3 = 0{,}876599, \\ 0{,}432806x_1 + 0{,}454799x_2 + 93{,}29253x_3 = 0{,}125442. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 0{,}245215x_1 + 0{,}004942x_2 + 0{,}118225x_3 = 0{,}002815, \\ 0{,}204149x_1 + 0{,}274568x_2 + 0{,}864390x_3 = 0{,}851829, \\ 0{,}200361x_1 + 0{,}885371x_2 + 0{,}353821x_3 = 0{,}734879. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} 0{,}214658x_1 + 0{,}628885x_2 + 0{,}186782x_3 = 0{,}538905, \\ 0{,}730521x_1 + 0{,}823082x_2 + 0{,}799244x_3 = 0{,}153078, \\ 0{,}396091x_1 + 0{,}156627x_2 + 0{,}796227x_3 = 0{,}102751. \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} 0{,}421460x_1 + 0{,}595396x_2 + 0{,}724455x_3 = 0{,}209665, \\ 0{,}832215x_1 + 0{,}946093x_2 + 0{,}209065x_3 = 0{,}794738, \\ 0{,}669902x_1 + 0{,}063311x_2 + 0{,}866184x_3 = 0{,}654699. \end{cases}$$

8. $\begin{cases} 0,228828x_1 + 0,451821x_2 + 0,993381x_3 = 0,610151, \\ 0,054431x_1 + 0,777736x_2 + 0,115844x_3 = 0,508703, \\ 0,993420x_1 + 0,567391x_2 + 0,734185x_3 = 0,771457. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 0,824384x_1 + 0,026909x_2 + 0,305908x_3 = 0,192422, \\ 0,443365x_1 + 0,224927x_2 + 0,669502x_3 = 0,634129, \\ 0,689703x_1 + 0,048346x_2 + 0,440563x_3 = 0,822026. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 0,318013x_1 + 0,236689x_2 + 0,312772x_3 = 0,766426, \\ 0,707226x_1 + 0,366602x_2 + 0,412352x_3 = 0,040515, \\ 0,469668x_1 + 0,826381x_2 + 0,637323x_3 = 0,868224. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 60,58577x_1 + 83,54187x_2 + 61,53701x_3 = 65,47089, \\ 48,98789x_1 + 51,98024x_2 + 32,50892x_3 = 31,24354, \\ 33,0855x_1 + 10,6174x_2 + 61,44393x_3 = 63,38626. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 78,03662x_1 + 54,90151x_2 + 53,43118x_3 = 63,90977, \\ 85,8458x_1 + 34,5535x_2 + 83,12906x_3 = 17,53165, \\ 40,33862x_1 + 79,44659x_2 + 16,78158x_3 = 63,01442. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 87,79888x_1 + 94,02917x_2 + 70,31773x_3 = 21,56886, \\ 14,14699x_1 + 62,48924x_2 + 40,03589x_3 = 21,47136, \\ 85,7935x_1 + 40,06417x_2 + 58,31376x_3 = 60,06335. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 14,38169x_1 + 52,26452x_2 + 26,80747x_3 = 75,0002, \\ 46,69315x_1 + 14,77966x_2 + 24,48031x_3 = 63,45059, \\ 68,68113x_1 + 93,9211x_2 + 76,15033x_3 = 27,7466. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 54,73581x_1 + 59,95452x_2 + 83,10172x_3 = 14,83696, \\ 94,42408x_1 + 20,18205x_2 + 66,3218x_3 = 23,01771, \\ 50,00594x_1 + 23,34483x_2 + 22,48848x_3 = 65,67509. \end{cases}$

4.2. Iterációs módszer

Feladat

Oldja meg numerikusan a mátrix formában megadott egyenletrendszereket! Végezzen hibabecslést!

Alkalmazzon Gauss-Seidel (páros változat) vagy Jacobi (páratlan változat) iterációs módszert a lineáris egyenletrendszer megoldásához!

Változatok

1. $$\begin{cases} 17{,}26877x_1 + 0{,}516428x_2 + 0{,}137029x_3 + 0{,}559230x_4 = 0{,}847263, \\ 0{,}197494x_1 + 30{,}12265x_2 + 0{,}421857x_3 + 0{,}787856x_4 = 0{,}663992, \\ 0{,}691028x_1 + 0{,}462780x_2 + 62{,}17704x_3 + 0{,}910502x_4 = 0{,}687311, \\ 0{,}311692x_1 + 0{,}426234x_2 + 0{,}711114x_3 + 57{,}76903x_4 = 0{,}395235. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 50{,}63783x_1 + 0{,}784241x_2 + 0{,}589425x_3 + 0{,}666466x_4 = 0{,}306703, \\ 0{,}414650x_1 + 41{,}77486x_2 + 0{,}328375x_3 + 0{,}306709x_4 = 0{,}685916, \\ 0{,}232464x_1 + 0{,}488236x_2 + 3{,}344311x_3 + 0{,}638093x_4 = 0{,}546426, \\ 0{,}751963x_1 + 0{,}688221x_2 + 0{,}560589x_3 + 2{,}506248x_4 = 0{,}227726. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} 70{,}75378x_1 + 0{,}603227x_2 + 0{,}744627x_3 + 0{,}346279x_4 = 0{,}290257, \\ 0{,}951432x_1 + 28{,}43758x_2 + 0{,}869558x_3 + 0{,}151911x_4 = 0{,}007223, \\ 0{,}023102x_1 + 0{,}962053x_2 + 4{,}997622x_3 + 0{,}895940x_4 = 0{,}184494, \\ 0{,}161156x_1 + 0{,}869260x_2 + 0{,}458158x_3 + 17{,}03502x_4 = 0{,}005724. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} 3{,}991380x_1 + 0{,}277404x_2 + 0{,}521384x_3 + 0{,}171310x_4 = 0{,}419346, \\ 0{,}513077x_1 + 34{,}43421x_2 + 0{,}154603x_3 + 0{,}083525x_4 = 0{,}044807, \\ 0{,}430859x_1 + 0{,}614997x_2 + 33{,}29358x_3 + 0{,}615004x_4 = 0{,}925840, \\ 0{,}242939x_1 + 0{,}394051x_2 + 0{,}735367x_3 + 21{,}30425x_4 = 0{,}616630. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 42{,}07901x_1 + 0{,}827490x_2 + 0{,}898131x_3 + 0{,}653226x_4 = 0{,}540523, \\ 0{,}529275x_1 + 35{,}72780x_2 + 0{,}228358x_3 + 0{,}893762x_4 = 0{,}183164, \\ 0{,}665165x_1 + 0{,}309868x_2 + 2{,}821009x_3 + 0{,}086899x_4 = 0{,}540408, \\ 0{,}897402x_1 + 0{,}514826x_2 + 0{,}423499x_3 + 57{,}92929x_4 = 0{,}809877. \end{cases}$$

6. $\begin{cases} 28,35838x_1 + 0,351080x_2 + 0,805710x_3 + 0,141813x_4 = 0,107357, \\ 0,901849x_1 + 6,542138x_2 + 0,057856x_3 + 0,513376x_4 = 0,220702, \\ 0,847080x_1 + 0,484930x_2 + 52,48295x_3 + 0,802724x_4 = 0,051720, \\ 0,854824x_1 + 0,106632x_2 + 0,809400x_3 + 42,65716x_4 = 0,114292. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 34,58671x_1 + 0,584654x_2 + 0,339489x_3 + 0,974311x_4 = 0,105214, \\ 0,313785x_1 + 85,61961x_2 + 0,196060x_3 + 0,131427x_4 = 0,002132, \\ 0,241287x_1 + 0,791479x_2 + 19,63500x_3 + 0,464695x_4 = 0,238716, \\ 0,895830x_1 + 0,612506x_2 + 0,430208x_3 + 15,92934x_4 = 0,516314. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 10,039344x_1 + 0,364774x_2 + 0,615021x_3 + 0,615088x_4 = 0,50677, \\ 0,207465x_1 + 20,596358x_2 + 0,182535x_3 + 0,933521x_4 = 0,453519, \\ 0,691243x_1 + 0,953191x_2 + 8,756518x_3 + 0,612748x_4 = 0,587488, \\ 0,252281x_1 + 0,619897x_2 + 0,567523x_3 + 7,095509x_4 = 0,431365. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 9,340983x_1 + 0,513444x_2 + 0,786522x_3 + 0,5783x_4 = 0,29893, \\ 0,966957x_1 + 8,433444x_2 + 0,516828x_3 + 0,765944x_4 = 0,558664, \\ 0,578774x_1 + 0,64144x_2 + 9,528194x_3 + 0,769472x_4 = 0,936578, \\ 0,881809x_1 + 0,482363x_2 + 0,965493x_3 + 5,363701x_4 = 0,724125. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 7,148301x_1 + 0,99615x_2 + 0,432901x_3 + 0,625102x_4 = 0,327046, \\ 0,905225x_1 + 10,162665x_2 + 0,761287x_3 + 0,016371x_4 = 0,052359, \\ 0,834717x_1 + 0,145343x_2 + 8,920756x_3 + 0,404883x_4 = 0,264852, \\ 0,659081x_1 + 0,034195x_2 + 0,628652x_3 + 6,909797x_4 = 0,110583. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 9,212039x_1 + 0,376884x_2 + 0,274295x_3 + 0,640731x_4 = 0,467997, \\ 0,733658x_1 + 8,730471x_2 + 0,935117x_3 + 0,139078x_4 = 0,427763, \\ 0,859228x_1 + 0,124463x_2 + 9,639954x_3 + 0,871362x_4 = 0,123171, \\ 0,812222x_1 + 0,35969x_2 + 0,01197x_3 + 11,285888x_4 = 0,214959. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 11,080688x_1 + 0,499774x_2 + 0,759945x_3 + 0,504396x_4 = 0,14904, \\ 0,300308x_1 + 12,35479x_2 + 0,846310x_3 + 0,095542x_4 = 0,037097, \\ 0,506042x_1 + 0,468325x_2 + 6,168972x_3 + 0,893555x_4 = 0,345146, \\ 0,889006x_1 + 0,272725x_2 + 0,758605x_3 + 8,808183x_4 = 0,449175. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 7,868992x_1 + 0,433917x_2 + 0,527164x_3 + 0,527578x_4 = 0,504202, \\ 0,628755x_1 + 12,342528x_2 + 0,09707x_3 + 0,014307x_4 = 0,883196, \\ 0,534315x_1 + 0,869385x_2 + 8,938104x_3 + 0,635246x_4 = 0,106841, \\ 0,039314x_1 + 0,141100x_2 + 0,821750x_3 + 9,110844x_4 = 0,194297. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 9{,}176534x_1 + 0{,}817661x_2 + 0{,}106139x_3 + 0{,}732071x_4 = 0{,}807099, \\ 0{,}664486x_1 + 8{,}605326x_2 + 0{,}820582x_3 + 0{,}251427x_4 = 0{,}932132, \\ 0{,}871797x_1 + 0{,}086738x_2 + 33{,}19418x_3 + 0{,}302488x_4 = 0{,}217108, \\ 0{,}247395x_1 + 0{,}476393x_2 + 0{,}655719x_3 + 83{,}57659x_4 = 0{,}145911. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 50{,}05011x_1 + 0{,}515775x_2 + 0{,}976113x_3 + 0{,}093033x_4 = 0{,}828738, \\ 0{,}930677x_1 + 38{,}02979x_2 + 0{,}762059x_3 + 0{,}073613x_4 = 0{,}97771, \\ 0{,}725304x_1 + 0{,}473308x_2 + 68{,}72043x_3 + 0{,}131461x_4 = 0{,}248667, \\ 0{,}304546x_1 + 0{,}358602x_2 + 0{,}138018x_3 + 35{,}55707x_4 = 0{,}501132. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 95{,}96441x_1 + 0{,}772924x_2 + 0{,}193148x_3 + 0{,}349451x_4 = 0{,}889488, \\ 0{,}768957x_1 + 79{,}82903x_2 + 0{,}47539x_3 + 0{,}045464x_4 = 0{,}604161, \\ 0{,}403962x_1 + 0{,}670835x_2 + 22{,}86719x_3 + 0{,}051691x_4 = 0{,}301037, \\ 0{,}248846x_1 + 0{,}043903x_2 + 0{,}106487x_3 + 64{,}02906x_4 = 0{,}356797. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 96{,}93981x_1 + 0{,}486777x_2 + 0{,}040894x_3 + 0{,}031951x_4 = 0{,}095601, \\ 0{,}78661x_1 + 2{,}566508x_2 + 0{,}837053x_3 + 0{,}439221x_4 = 0{,}836789, \\ 0{,}843356x_1 + 0{,}813573x_2 + 62{,}62846x_3 + 0{,}504225x_4 = 0{,}827147, \\ 0{,}486959x_1 + 0{,}804666x_2 + 0{,}866312x_3 + 4{,}082968x_4 = 0{,}787627. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 24{,}50773x_1 + 0{,}316578x_2 + 0{,}438544x_3 + 0{,}859557x_4 = 0{,}53462, \\ 0{,}56068x_1 + 60{,}63393x_2 + 0{,}057019x_3 + 0{,}084134x_4 = 0{,}383907, \\ 0{,}483762x_1 + 0{,}189961x_2 + 0{,}563362x_3 + 0{,}030522x_4 = 0{,}2077, \\ 0{,}763283x_1 + 0{,}052505x_2 + 0{,}00188x_3 + 5{,}42198x_4 = 0{,}756128. \end{cases}$

5. Laboratóriumi munka. Differenciálegyenletek numerikus megoldása

5.1. Közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldása

Feladat

Oldja meg numerikusan a differenciális egyenletet különböző feltűntetett (Euler, Runge-Kutta stb. módszerrel)! Végezzen hibabecslést! Ellenőrizze, hogy egybeesik-e a numerikus megoldás az analitikus megoldással! Teljesülnek-e a Lipsits feltételek?

Változatok

1. Euler módszer: $xy'+2y=3x, y(-1)=1.$
2. Runge-Kutta2 módszer: $yy'=3, y(6)=10.$
3. Runge-Kutta4 módszer: $x^3 y = 6x^2 y - 7, y(1) = 2.$
4. Adams-Bashforth-Moulton módszer: $y'-2xy - y = 0, y(0) = \sqrt{3}.$
5. Euler módszer: $y' = \frac{1}{x+a}, y(1) = 1.$
6. Runge-Kutta2 módszer: $y' = \frac{1}{2+3x^2}, y(0) = 1.$
7. Runge-Kutta4 módszer: $y' = \frac{1}{\sin x}, y(1) = 1.$
8. Runge-Kutta-Fehlberg (RKF45) módszer: $y' = \frac{1+x}{1-x}, y(2) = 2.$
9. Adams-Bashforth-Moulton módszer: $y' = \frac{x^2}{1-x}, y(1) = 1.$
10. Milne-Simpson módszer: $y' = \frac{1}{(x-1)(x-3)}, y(-1) = 2.$
11. Módosított Euler módszer: $x^2 + xy' = y, y(1) = 0.$
12. Euler módszer: $y'-y\,\mathrm{tg}(x) = \frac{1}{\cos^3 x}, y(0) = 0.$
13. Runge-Kutta2 módszer: $xy'+y = y^2, y(1) = \frac{1}{2}.$
14. Runge-Kutta4 módszer: $y' = (1+y^2)\ln x, y(1) = 0.$
15. Módosított Euler módszer: $y = 4x\sqrt{y}, y(1) = 1.$

16. Runge-Kutta-Fehlberg (RKF45) módszer: $xy'+2y=x^2-x+1, y(1)=\frac{1}{2}$.

17. Adams-Bashforth-Moulton módszer: $xy'+(x+1)y=x, y(\ln 2)=1$.

18. Milne-Simpson módszer: $y'=\frac{2x}{y+x^2y}, y(0)=-2$.

19. Euler módszer: $y'=\frac{2x}{1+2y}, y(2)=0$.

20. Módosított Euler módszer: $y'=-\frac{\sin 2x}{\cos 3y}, y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$.

21. Runge-Kutta2 módszer: $(1-x)y'=y, y(0)=1$.

22. Runge-Kutta4 módszer: $ye^{-x}y'=-x, y(0)=1$.

23. Runge-Kutta-Fehlberg (RKF45) módszer: $y'-2y=e^{2x}, y(0)=2$.

24. Adams-Bashforth-Moulton módszer: $y'+\frac{2}{x}y=\frac{\cos x}{x^2}, y(\pi)=0$.

25. Milne-Simpson módszer: $y'+y\operatorname{ctg} x=4\sin x, y\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$.

26. Euler módszer: $y'+y=\frac{1}{1+x^2}, y(0)=0$.

27. Módosított Euler módszer: $x^3y'+4x^2y=e^{-x}, y(-1)=0$.

28. Runge-Kutta2 módszer: $(1-x^2)y'-xy=x(1-x^2), y(0)=2$.

29. Runge-Kutta4 módszer: $y'=xy^3(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}, y(0)=1$.

30. Runge-Kutta-Fehlberg (RKF45) módszer: $y'=\frac{x(x^2+1)}{4y^3}, y(0)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

31. Adams-Bashforth-Moulton módszer: $y'=2(1+x)(1+y^2), y(0)=0$.

32. Milne-Simpson módszer: $y'=\frac{2x}{y+x^2y}, y(0)=-2$.

33. Euler módszer: $y'=\frac{2x}{1+2y}, y(2)=0$.

34. Módosított Euler módszer: $y'=\frac{\sin(2+x)}{\cos(3-y)}, y(\pi-2)=\pi-3$.

35. Runge-Kutta2 módszer: $2xydx+(y-x^2)dy=0, y(-2)=4$.

36. Runge-Kutta4 módszer: $y'=2y-x+e^x, y(0)=-1$.

37. Runge-Kutta-Fehlberg (RKF45) módszer: $y'+3y=e^{2x}y^2, y(0)=1.$

38. Adams-Bashforth-Moulton módszer: $y'+y\,\mathrm{tg}\,x=\dfrac{1}{\cos x}, y(\pi)=5.$

39. Milne-Simpson módszer: $y^2dx=\left(x+ye^{\frac{1}{y}}\right)dy, y(0)=-3.$

40. Euler módszer: $y'-7y=e^{3x}y^2, y(0)=2.$

41. Módosított Euler módszer: $xdy=\left(e^{-x}-y\right)dx, y(1)=1.$

42. Runge-Kutta2 módszer: $y'-\dfrac{y}{x-3}=\dfrac{y^2}{x-3}, y(1)=-2.$

43. Runge-Kutta4 módszer: $y'+\dfrac{y}{x}=1+2\ln x, y(1)=1.$

44. Runge-Kutta-Fehlberg (RKF45) módszer: $y'+4xy=2xe^{-x^2}\sqrt{y}, y(0)=0.$

45. Adams-Bashforth-Moulton módszer: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{y-x}, y(0)=1.$

46. Milne-Simpson módszer: $y'=\dfrac{2y-x-5}{2x-y+4}, y(1)=0.$

47. Euler módszer: $\dfrac{dy}{dx}-y\,\mathrm{ctg}\,x=2x\sin x, y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}.$

48. Módosított Euler módszer: $y'=y\cos x=e^{-\sin x}, x_0=0, y_0=1.$

49. Runge-Kutta2 módszer: $y'+2xy=2x^3y^3, y(0)=\dfrac{3}{2}.$

50. Runge-Kutta4 módszer: $y'-\dfrac{y}{x}=y^2+\dfrac{1}{x^2}, y(1)=1.$

51. Runge-Kutta-Fehlberg (RKF45) módszer: $y'+\sin\dfrac{x+y}{2}=\sin\dfrac{x-y}{2}, y(0)=1.$

52. Adams-Bashforth-Moulton módszer: $y'=(2y+1)\,\mathrm{ctg}\,x; x_0=\dfrac{\pi}{4}, y_0=\dfrac{1}{2}.$

53. Milne-Simpson módszer: $(x^3+3xy^2)dx+(y^3+3x^2y)dy=0, y(0)=1.$

54. Módosított Euler módszer: $x(1+y^2)dx-y(1+x^2)dy=0, y(0)=2.$

6. Laboratóriumi munka. Nemlineáris egyenletrendszerek

6.1. Nemlineáris egyenletrendszerek megoldása iterációs módszerrel

Feladat

Oldja meg numerikusan a nemlineáris egyenletrendszert iterációs módszerrel! Végezzen hibabecslést! Ábrázolja grafikusan az egyenletrendszert!

Változatok

Iterációs módszerrel megoldandó feladatok

1. $\begin{cases} \cos(x+0{,}5)+y=1; \\ \sin y-2x=2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \sin(y+1)-x=1; \\ 2y+\cos x=2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \sin(x+2)-y=2; \\ x+\cos(y-1)=1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \cos(y-1)+x=0{,}8; \\ y-\cos x=2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \sin(y+0{,}5)-x=1; \\ \cos(x-2)+y=0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \cos(y+0{,}5)+x=0{,}8; \\ \sin x-2y=1{,}6. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \sin(y-1)+x=1.3 \\ y-\sin(x+1)=0.8. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x-\cos(y+1)=0 \\ y+\sin x=-0.4. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \cos(y+0.5)-x=2 \\ \sin x-2y=1. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \sin(y+0.5)-x=1 \\ \cos(x-2)+y=0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \cos(y+0.5)-x=2 \\ \sin x-2y=1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \cos(y+0.5)+x=0.8 \\ \sin x-2y=1.6. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \sin(y-1)+x=1.3 \\ y-\sin(x+1)=0.8. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x-\cos(y+1)=0 \\ y+\sin x=-0.4. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \sin(x-1)=1.3-y \\ x-\sin(y+1)=0.8. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2y-\cos(x+1)=0 \\ x+\sin y=-0.4. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \cos(x+0.5)-y=2 \\ \sin y-2x=1. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \sin(x+2)-y=1.5 \\ x+\cos(y-2)=0.5. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \sin(y+1)-x=1.2 \\ 2y+\cos x=2. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \cos(y-1)+x=0.5 \\ y-\cos x=3. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \sin y + 2x = 2 \\ \cos(x - 1) + y = 0.7. \end{cases}$ 22. $\begin{cases} \cos(x + 0.5) + y = 0.8 \\ \sin y - 2x = 1.6. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \sin(x + 1) - y = 1.2 \\ 2x - \cos y = 2. \end{cases}$ 24. $\begin{cases} \cos(x - 1) + y = 0.5 \\ x - \cos y = 3. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \sin x + 2y = 2 \\ \cos(y - 1) + x = 0.7. \end{cases}$ 26. $\begin{cases} \cos x + y = 1.5 \\ 2x - \sin(y - 0.5) = 1. \end{cases}$

27. $\begin{cases} \sin(x + 0.5) - y = 1 \\ \cos(y - 2) + x = 0. \end{cases}$

6.2. Nemlineáris egyenletrendszerek megoldása Newton módszerrel

Feladat

Oldja meg numerikusan a nemlineáris egyenletrendszert Newton módszerrel! Végezzen hibabecslést! Ábrázolja grafikusan az egyenletrendszert!

Változatok

Newton módszerrel megoldandó feladatok

1. $\begin{cases} \sin(x + y) - 1{,}5x = 0{,}2; \\ x + y = 1. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \mathrm{tg}(xy) = x; \\ 0{,}6x + 2y = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \sin(x - y) + 1{,}1x = 0; \\ x - y = 2. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \mathrm{tg}(xy + 0{,}3) = x; \\ 0{,}5x + 2y = 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \mathrm{tg}(xy + 0{,}1) = x; \\ 0{,}9x + 2y = 1. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} \sin(x + y) - 1.4x = 0, \\ x + y = 1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \mathrm{tg}(xy + 0.1) = x \\ 0.5x + 2y = 1 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} \sin(x + y) = 1.1x - 0.1, \\ x + y = 1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \mathrm{tg}(x - y) - xy = 0 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ 10. $\begin{cases} \mathrm{tg}(xy + 0.4) = x \\ 0.8x + 2y = 1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} tg(xy + 0.1) = x \\ 0.9x + 2y = 1 \end{cases}$

12. $\begin{cases} \sin(x + y) - 1.4x = 0, \\ x + y = 1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} tg(xy + 0.1) = x \\ 0.5x + 2y = 1 \end{cases}$

14. $\begin{cases} \sin(x + y) = 1.1x - 0.1, \\ x + y = 1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} tg(x - y) - xy = 0 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$

16. $\begin{cases} \sin(x + y) - 1.3x = 0, \\ x + y = 1. \end{cases}$

17. $\begin{cases} tg(xy) = x \\ 0.8x + 2y = 1 \end{cases}$

18. $\begin{cases} \sin(x + y) - 1.5x = 0.1, \\ x + y = 1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} tg(xy) = x \\ 0.7x + 2y = 1 \end{cases}$

20. $\begin{cases} \sin(x + y) - 1.2x = 0.1, \\ x + y = 1. \end{cases}$

21. $\begin{cases} tg(xy + 0.2) = x \\ 0.6x + 2y = 1 \end{cases}$

22. $\begin{cases} \sin(x + y) = 1.5x - 0.1, \\ x + y = 1. \end{cases}$

23. $\begin{cases} tg(xy + 0.4) = x \\ 0.6x + 2y = 1, x > 0, y > 0 \end{cases}$

24. $\begin{cases} \sin(x + y) - 1.6x = 0, \\ x + y = 1, x > 0, y > 0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} tg(xy + 0.1) = x \\ x + 2y = 1 \end{cases}$

26. $\begin{cases} \sin(x + y) - 1.2x = 0.2, \\ x + y = 1. \end{cases}$

27. $\begin{cases} tg(xy + 0.3) = x \\ 0.9x + 2y = 1 \end{cases}$

7. Laboratóriumi munka. Lagrange interpolációs polinom

7.1. Lagrange interpolációs polinom megszerkesztése

Feladat

Hozzon létre egy Lagrange interpolációs polinomot. Végezzen hibabecslést! Ábrázolja grafikusan az eredményt!

Adva van egy táblázattal megadott függvény (*x, y*) számpárokkal. Határozza meg a függvény értékét nem azonos szakaszközökkel (1. feladat) és azonos szakaszközökkel (2. feladat) megadott formában az x_0 pontban! Használjon Lagrange approximációs polinomot!

Változatok

1. függvény: $f(x) = 0{,}3\sin(10x) - 0{,}2\cos(50x)$ 2. függvény: $f(x) = 0{,}71\cos(5x) + 0{,}11\ln x$

1. feladat				
x	*y*		változat	x_0
0,35	2,73951		1	0,526
0,41	2,30080		2	0,453
0,47	1,96864		3	0,482
0,51	1,78776		4	0,552
0,56	1,59502		5	0,436
0,64	1,34310			
1. feladat				
x	*y*		változat	x_0
0.43	1.63597		6	0.702
0.48	1.73234		7	0.512
0.55	1.87686		8	0.645
0.62	2.03345		9	0.736
0.70	2.22846		10	0.608
0.75	2.35973		11	0.671
1. feladat				
x	*y*		változat	x_0
0.02	1.02316		12	0.102
0.08	1.09590		13	0.114
0.12	1.14725		14	0.125
0.17	1.21483		15	0.203
0.23	1.30120		16	0.154
0.30	1.40976		17	0.162
0.36	1.52145		18	0.144

2. feladat				
x	*y*		változat	x_0
0,41	2,57418		1	0,102
0,46	2,32530		2	0,114
0,52	2,09336		3	0,125
0,60	1,86203		4	0,203
0,65	1,74926		5	0,154
0,72	1,62098			
2. feladat				
x	*y*		változat	x_0
1.375	5.04192		6	1.3832
1.380	5.17744		7	1.3926
1.385	5.32016		8	1.3862
1.390	5.47069		9	1.3934
1.395	5.62968		10	1.3866
1.400	5.79788		11	1.3798
2. feladat				
x	*y*		változat	x_0
0.115	8.65729		12	0.1264
0.120	8.29329		13	0.1315
0.125	7.95829		14	0.1232
0.130	7.64893		15	0.1334
0.135	7.36235		16	0.1285
0.140	7.09613		17	0.1361
0.145	6.46318		18	0.1419

1. feladat				
x	*y*		változat	x_0
0,121	0,08609774		19.	0,148811
0,135	0,11411574		20.	0,130428
0,138	0,13141104		21.	0,185204
0,141	0,15210514		22.	0,125057
0,154	0,26918298			
0,189	0,48478207			

2. feladat				
x	*y*		változat	x_0
0,272	0,0053446		19.	0,137914
0,426	-0,4705278		20.	0,174106
0,58	-0,74930029		21.	0,162272
0,734	-0,64718098		22.	0,135798
0,888	-0,20407969			
1,042	0,34342824			

8. Laboratóriumi munka. Newton interpolációs polinom

8.1. Newton interpolációs polinom megszerkesztése

Feladat

Hozzon létre egy Newton interpolációs polinomot. Végezzen hibabecslést! Ábrázolja grafikusan az eredményt!

Adva van egy táblázattal megadott függvény (x, y) számpárokkal. Határozza meg a függvény értékét az x_0, x_1, x_2, x_4 pontokban! Használja a Newton approximációs polinomot!

Változatok

$f(x) = \mathrm{tg}\, x + x^3 - 2\cos(15{,}6x)$

x	y			Az argumentum értéke			
0,57	2,548960334		változat	x_1	x_2	x_3	x_4
0,59	2,826389406		1.	0,779117	0,626504	0,720976	0,591213
0,61	2,917584171		2.	0,671055	0,74124	0,660871	0,605281
0,63	2,818764717		3.	0,736634	0,588552	0,602484	0,710981
0,65	2,544724699		4.	0,718707	0,760405	0,645271	0,645832
0,67	2,127413972						
0,69	1,612865248						
0,71	1,05676159						
0,73	0,519072814						
0,75	0,058278783						
0,77	–0,27426252						
0,79	–0,4392582						

x	y			Az argumentum értéke			
0,101	1,26183		változat	x_1	x_2	x_3	x_4
0,106	1,27644		5.	0,1026	0,1440	0,105	0,1501
0,111	1,29122		6.	0,1035	0,1492	0,109	0,1503
0,116	1,30617		7.	0,1074	0,1485	0,103	0,1506
0,121	1,32130		8.	0,1046	0,1459	0,112	0,1507
0,126	1,33660		9.	0,1032	0,1462	0,104	0,1402
0,131	1,35207						
0,136	1,36773						
0,141	1,38357						
0,145	1,39959						
0,151	1,41579						
x	y			Az argumentum értéke			

1.415	0.888551
1.420	0.889599
1.425	0.890637
1.430	0.891667
1.435	0.892687
1.440	0.893698
1.445	0.894700
1.450	0.895693
1.455	0.896677
1.460	0.897653
1.465	0.898619

változat	x_1	x_2	x_3	x_4
10.	1.4161	1.4625	1.4135	1.4700
11.	1.4179	1.4633	1.4124	1.4655
12.	1.4263	1.4575	1.4100	1.4662
13.	1.4273	1.4416	1.4144	1.4401
14.	1.4379	1.4023	1.4113	1.4215
15.	1.4563	1.4381	1.4204	1.4642
16.	1.4261	1.4175	1.4302	1.4163

9. Laboratóriumi munka. Legkisebb négyzetek módszere

9.1. Lineáris regresszió

Feladat

Határozza meg a legkisebb négyzetek módszerével az egy lineáris regresszióval megközelített függvény:

1) grafikonját,

2) egyenletét,

3) regressziós együtthatóját R^2,

4) az X^* illetve Y^* becsült értékeket!

Esetleg más regressziós modell jobban megközelítené az adatsorokat?

Változatok

a)

Változat	Koordináták	Pontok				X^*
1.	X	3	4	6	10	8
	Y	7.5	7	6.5	3.5	?
2.	X	3	4	5	6	7.8
	Y	9	7	5	3	?
3.	X	7	5.6	13	14.7	15
	Y	7.5	7	5	3.5	?
4.	X	9	5	2	3	5.7
	Y	13	9	8	7	?

b)

№												Y^*
1.	y	22,81	28,42	24,95	26,96	8,78	36,55	15,77	22,89	27,99	14,45	27,07
	x_1	0,06	2,36	-3,14	2,10	-4,89	0,74	-0,22	1,63	-0,13	-4,97	?
2.	y	18,31	21,92	16,93	-8,23	10,90	24,18	38,45	24,11	36,62	30,42	-4,13
	x_2	-1,96	-0,76	-1,06	-2,95	-4,36	0,16	-2,66	-3,14	-2,12	-0,96	?
3.	y	63,96	44,39	51,20	58,44	50,15	44,51	47,25	35,24	43,28	32,03	53,24
	x_3	3,05	2,20	0,65	1,65	1,92	1,92	0,89	0,75	2,79	0,44	?
4.	y	11,13	3,49	8,91	14,83	1,80	13,50	3,70	-2,40	10,00	16,04	12,35
	x_4	-0,05	-0,04	-0,88	0,32	-0,24	-1,05	0,57	0,01	0,40	0,79	?

a)

Változat	Koordináták	Pontok				X*
5.	X	1	2	3	4	1,6
	Y	30	7	8	1	?
6.	X	1	2	3	4	2,3
	Y	25	7	7	2	?
7.	X	9	5	2	3	2,9
	Y	25	7	7	2	?
8.	X	1	2	3	4	2,6
	Y	15	10	7	0,5	?
9.	X	10	3	6	4	8
	Y	25	7	7	2	?

b)

№												X*
5.	y	79,31	57,43	60,66	92,55	90,12	71,30	70,50	91,52	68,31	58,56	54,01
	x_1	5,84	3,82	6,19	9,22	7,87	6,29	4,43	8,91	5,34	2,21	?
6.	y	75,46	57,42	60,65	92,53	90,11	71,31	70,51	91,53	68,33	58,59	75,09
	x_2	6,04	6,33	4,86	5,91	4,96	5,58	6,15	6,13	4,65	5,49	?
7.	y	78,31	57,41	61,64	92,54	90,10	71,32	70,52	91,50	68,34	58,57	64,07
	x_3	4,22	2,90	1,68	3,34	4,21	2,89	4,15	3,41	3,37	4,41	?
8.	y	81,26	61,02	44,56	82,52	99,17	70,24	63,23	66,48	48,35	40,24	48,72
	x_4	0,12	-3,48	-4,45	-6,19	1,81	-3,81	0,84	-2,08	-1,28	5,44	?
9.	y	82,18	61,01	44,55	82,51	99,16	70,23	63,22	66,47	48,34	40,23	87,63
	x_5	2,91	2,94	6,35	6,58	3,80	6,43	0,57	5,96	3,40	4,55	?

10. Laboratóriumi munka. Numerikus optimalizálás

10.1. Numerikus minimum keresése aranymetszés módszerrel

Feladat

Határozza meg a megadott függvények minimumát a megadott szakaszon, készítsen rajzot a megadott függvényről! Alkalmazza az aranymetszéses minimumkeresés módszereket!

Változatok

1. $y(x) = 1 - x^3 + \cos\left(\dfrac{x}{1-x}\right) \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right), \quad x \in [0{,}6;\ 0{,}82];$

2. $h(x) = \sin\left(x^3 + \cos\left(\dfrac{2+x^2}{1-x^2}\right)\right), \quad x \in [0{,}41;\ 0{,}59];$

3. $u(x) = \cos\left(\left|x^3 - x + \mathrm{tg}\left(x^2\right)\right|\right) \cdot \sin\left(\dfrac{x^2 + x^3}{1-x}\right), \quad x \in [-0{,}38;\ 0{,}43];$

4. $v(x) = -2x + \dfrac{\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{4}{x}\right)}{\dfrac{1}{x\sin(6x) - 1}}, \quad x \in [2{,}7;\ 3{,}16];$

5. $f(x) = 3{,}1 + \dfrac{\sqrt{2+6x}}{x^4 - 3}\dfrac{\cos\left(6 + 2\sin^4(x)\right)}{x+5}, \ x \in [4{,}3;\ 5{,}2];$

6. $g(x) = 7 - \dfrac{3\cos(1-x)}{\sqrt{-4 + 2x + x^2}} + 2\sin\left(\dfrac{4}{3}x\right), x \in [2{,}1;\ 5{,}4];$

7. $w(x) = \dfrac{-\sqrt{x^3 - 2x^2 + 3x - 1}}{\cos(1-x)}, \ x \in [2{,}9;\ 5{,}3];$

8. $z(x) = \dfrac{\cos\left(6x^2 + 2x - 8\right)}{\left(2 - \sqrt{x+3}\right)^2}, x \in [-7{,}59;\ 7{,}64];$

9. $y(x) = \dfrac{5\sin(1+x)}{\sqrt{-4 + 2x + x^2}} + 2\sin\left(\dfrac{4}{3}x\right), \quad x \in [1{,}5;\ 5{,}5];$

10. $y(x) = \cos\left(\dfrac{3x^2}{x+1}\right), \quad x \in [8;\ 9];$

10.2. Numerikus minimum keresése Fibonacci módszerrel

Feladat

Határozza meg a megadott függvények minimumát a megadott szakaszon, készítsen rajzot a megadott függvényről! Alkalmazza a feladatra a Fibonacci minimumkeresés módszert!

Változatok

1. $y(x)=e^{x}\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right),\quad x\in[0{,}15;\,2];$

2. $y(x)=\left(x^{3}+x^{2}+x+1\right)\cdot\tanh(1+x),\quad x\in[-5;\,5];$

3. $y(x)=e^{\left(x\sin\left(\frac{1-x}{x^{2}}\right)\right)},\quad x\in[0{,}32;\,54];$

4. $y(x)=3-\cos^{2}\left(\frac{x}{1+x^{3}}\right)\cdot\sin^{2}\left(\frac{1-x^{2}}{x}\right),\quad x\in[1{,}8;\,2{,}5];$

5. $y(x)=\frac{x^{3}}{1+x-x^{2}}\cos\left(\frac{x^{2}-x}{x+2}\right),\quad x\in[6;\,11];$

6. $y(x)=3*x^{2}-\left(\frac{4}{\mathrm{ch}(x-1)}\right)^{6},\ x\in[0{,}5;\,2{,}1];$

7. $y(x)=\frac{3x^{4}}{4}\cdot\left(-\cos(2x)+\frac{1}{x}\sin(5x)+\frac{1}{5+x^{2}}\right),\ x\in[2{,}7;\,4{,}3];$

8. $y(x)=5+\left(\frac{4}{3-x^{2}}\right)^{4},\ x\in[-1;1];$

9. $y(x)=\frac{1}{x^{3}}\frac{\sqrt{6-5\cdot\sin^{2}(x)}}{x+2},\quad x\in[4{,}1;\,5{,}3];$

10. $y(x)=\left(x^{4}-9x^{3}-30x^{2}-4x-\frac{7}{x}\right)^{3},\ x\in[5;\,10];$

II. Fejezet. Feladatok megoldásai

1. Laboratóriumi munka. Gépi számábrázolás. Hibabecslés

Gépi számábrázolás

A számítógépekben elfogadott a lebegőpontos számábrázolás a valós számok ábrázolására. A lebegőpontos ábrázolás következőképen néz ki:

$$a = (-1)^s \cdot 0.f \cdot r^e,$$

ahol s – előjel (sign), f – a szám tört része (mantissza) normalizált alakban, r – a számrendszer alapja, e – a szám kitevője (exponent).

Például a $-1234.5 = (-1)^1 \cdot 0.12345 \cdot 10^4$ szám egy 8 bites regiszteren a következőképpen ábrázolható:

1	0	4	1	2	3	4	5

Tehát a 8 bitből egy bit a szám előjele (az első 1 vagyis negatív), két bit a kitevő (04), öt bit pedig, a mantissza (12345). Mivel a kitevőt két biten ábrázoljuk, az általa leírt tartomány 0 : 99. További bire volna szükség a kitevő előjelére. Ez egyszerű eltolással megoldható, vagyis a kitevőhöz (04-hez) hozzáadunk 50-et, a kitevő tartomány felét. Így az előbbi szám a következőképpen ábrázolható:

1	5	4	1	2	3	4	5

A számítógépeken a valós számok ábrázolása hasonlóan történik a leírtakkal, csak nem tizes-, hanem 2-es, 8-as vagy 16-os számrendszerben és nem 8 biten, hanem (általában) 32-őn vagy 64-en. Kettes számrendszerben a szám lebegőpontos ábrázolása a következő:

$$a = (-1)^s \cdot 1.f \cdot 2^e,$$

ahol az s – az előjel, f – a mantissza, e – kitevő.

Például a $3.55_{10} = 11.10001100110011... = (-1)^0 \cdot 1.110001100110011... \cdot 2^1$

Ahhoz, hogy különböző processzorokban végzett eredmények ne térjenek el egymástól számottevően, a lebegőpontos ábrázolást 1985-ben szabványosították (IEEE Standards 754).

A 64 bites regiszter esetében (double precision) egy bit a szám előjelét tárolja, 11 a kitevőt és 53 a mantisszát:

s	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	…

Mivel a kitevő tartománya 0 és $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{10} = 2^{11} - 1$ között van, a kitevő előjele szabályozható, ha eltoljuk a tartomány felével, vagyis +1023-al. A binárisan ábrázolt mantisszát mindig 1-re normalizáljuk. Innen következik, hogy még egy bitet spórolhatunk meg, ha ezt a 1-t nem ábrázoljuk (implicitbites ábrázolás).

1.1. 8-bites szám ábrázolása 10-es számrendszerben

Feladat

Ábrázolja 8-bites számként 10-es számrendszerben a megadott számokat! Az ábrázolandó szám az a 374,16347.

Megoldás

1. példa

A 374,16347 szám 8-bites lebegőpontos ábrázolásához először normálakra hozzuk az értéket

$$0.37416347 \cdot 10^{3},$$

majd a mantissza öt jegyére vágjuk a kapott számot

$$0.37416 \cdot 10^{3},$$

végül 8 bitben ábrázoljuk

0	5	3	3	7	4	1	6

2. példa

A -0.00035702468 szám 8-bites lebegőpontos ábrázolásához először normálakra hozzuk az értéket

$$-0.35702468 \cdot 10^{-3},$$

majd a mantissza öt jegyére vágjuk a kapott számot

$$-0.35702 \cdot 10^{-3},$$

végül 8 bitben ábrázoljuk

1	4	7	3	5	7	0	2

1.2. 64-bites szám ábrázolása 2-es számrendszerben (IEEE-754)

Feladat

Ábrázolja az 1.1. feladatban szereplő értékeket 64-bites számként 2-es számrendszerben (IEEE-754)! Az ábrázolandó szám az a 374,16347.

Megoldás

1. példa

Az ábrázolandó szám ismét az a 374,16347, ezúttal már egy másik, IEEE-754 számformátumban.

A $374.16347_{10} = 101110110.00101001110110..._2 = (-1)^0 \cdot 1.0111011000101001110110... \cdot 2^8$ szám előjele + (s = 0), a kitevője $8 + 1023 = 1031_{10} = 10000000111_2$, és a mantisszája 011101100010…, tehát a szám ábrázolása:

0	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	…

Egész pontosan a 374,16347 szám IEEE-754 szabványú alakjának összes 64 bitje bináris alakban ábrázolva a következő:

0100000001110111011000101001110110010010101101111111111000001001

Továbbá hexadecimális alakban:

4077629D92B7FE09

2. példa

A $11.34_{10} = 1011.010101110..._2 = (-1)^0 \cdot 1.011010101110... \cdot 2^3$ szám előjele + (s = 0), a kitevője $3 + 1023 = 1026_{10} = 10000000010_2$, és a mantisszája 011010101110…, tehát a szám ábrázolása:

0	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	…

Egész pontosan a 11,34 szám IEEE-754 szabványú alakjának összes 64 bitje bináris alakban ábrázolva a következő:

0100000000100110101011100001010001111010111000010100011110101110

Továbbá hexadecimális alakban:

4026AE147AE147AE

3. példa

Az 1100000001011110110111001100110011001100110011001100110011001101 (hexadecimális alakban C05EDCCCCCCCCCCD)

1	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	…

Ábrázolás esetén az előjel negatív – (s = 1), a kitevője $e = 10000000101_2 = 2^{10} + 2^2 + 2^0 = 1029_{10}$, a mantissza $1.f = 1.111011011100...$, tehát a szám $= -1.111011011100... \cdot 2^{1029\text{-}1023} = -123.45$.

1.3. 8-bites szám ábrázolása valós számként

Feladat

Ábrázolja valós számként az alább megadott értékeket!

1)

1	2	3	4	5	6	7	8
0	8	4	1	6	3	3	1

2)

1	2	3	4	5	6	7	8
0	5	5	5	4	3	2	1

3)

1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	8	2	4	6	8	0

Megoldás

1. példa

0	8	4	1	6	3	3	1

az $+0.16331 \cdot 10^{84-50} = 0.16331 \cdot 10^{34}$

2. példa

0	5	5	5	4	3	2	1

az $+0.54321 \cdot 10^{55-50} = 54321$

3. példa

1	4	8	2	4	6	8	0

az $-0.24680 \cdot 10^{48-50} = -0{,}0024680$

1.4. Hibabecslés

A megoldáshoz ismétlés képen frissítsük fel a hibabecséről tanul ismereteinket. Legyen a_0 – az adat pontos értéke, és a – a a_0 közelítő értéke, akkor $a - a_b$ lesz az adat *közelítő érétkének a hibája*. A *közelítő érték hiba-becslését* (hibakorlátját) Δ_a -val jelöljük:

$$|a - a_0| \leq \Delta_a$$

Az a_0 adat az a közelítő értékének a *relatív hibája:*

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a_0|},$$

Az ö*sszeg abszolút hibája*

Az adatok pontos értékei legyen a_0, b_0, a, b – pedig az adatok közelítő értékei, és

$$|a - a_0| \leq \Delta_a \qquad |b - b_0| \leq \Delta_b$$

Akkor az $a + b$ összeg *hiba-becslése*:

$$\Delta_{a+b} = \Delta_a + \Delta_b$$

A többi aritmetikai művelet esetén hasonló képleteket kaphatunk.

A *kivonás* $a - b$ abszolút hibája:

$$\Delta_{a-b} = \Delta_a - \Delta_b$$

A szorzat ab abszolút hibája:

$$\Delta_{ab} \approx |a|\Delta_b + |b|\Delta_a$$

Az osztás $\frac{a}{b}$ abszolút hibája:

$$\Delta_{\frac{a}{b}} \approx \frac{|a|\Delta_b + |b|\Delta_a}{|b|^2}$$

Megjegyzés. Ha a b értéke közzel van a nullához, akkor az osztás abszolút hibája nagyon nagy lehet.

Több adat összeadása esetén

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

az összeg hiba-becslése:

$$\Delta_S = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k$$

A fenti Δ_S hibabecslés túlzott, mivel értéke sokkal nagyabb lehet a reális eltéréstől. Ha $n > 10$, akkor célszerű alkalmazni a *statisztikai hiba-becslést (Csebotárjov-féle szabály):*

$$\Delta_S = \sqrt{3n} \cdot \Delta_k ,$$

amely sokkal pontosabb eredményt ad a $\Delta_S = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k$ képletnél.

Az $a+b$ összeg relatív hibája:

$$\delta_{a+b} = \max\{\delta_a, \delta_b\}$$

Több adat esetén:

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\delta_S \le \max_k \{\delta_k\}$$

Kivonás $a-b$ *relatív hibája:*

$$\delta_{a-b} = \frac{\Delta_a + \Delta_b}{|a-b|}, a > 0, b > 0.$$

Megjegyzés. Ha az a a b számok értékei közel vannak egymáshoz, akkor a kivonás relatív hibája nagyon nagy lehet! Ezért, ha van lehetőség, a kivonás műveletet ki kell küszöbölni az algoritmusból (a kifejezések átalakításával)!

Szorzás ab relatív *hibája:*

$$\delta_{ab} = \delta_a + \delta_b$$

Osztás $\frac{a}{b}$ *relatív hibája:*

$$\delta_{\frac{a}{b}} = \delta_a + \delta_b$$

Több adat esetén a szorzások és osztások

$$r = \frac{\prod_{k=1}^{m} a_k}{\prod_{j=1}^{n} b_j}$$

relatív hibája:

$$\delta_r = \sum_{k=1}^{m} \delta_{a_k} + \sum_{j=1}^{n} \delta_{b_j}$$

Ha $n+m > 10$, akkor lehet a statisztikai hibabecslést alkalmazni. Feltételezve, hogy a δ_a, δ_b relatív hibák értékei azonos nagyságrendűek, akkor a következő hiba-becslést kapunk:

$$\delta_r \approx \sqrt{3(n+m)} \cdot \delta$$

Feladat

Végezzen hibabecslést! Az alábbi táblázatban csak a feladat megoldásához szükséges értékek lettek meghagyva. E táblázatból többek között kiderül, hogy n = 12, m = 6, Δ_k = 0,04, δ = 0,011.

	a	±	Δ_k	***n***	***m***	δ	***b***	±
1.	**1,553071**	**0,041422**	**0,04**	**12**	**6**	**0,011**	**3,041339**	**0,037714**
2.	1,814977	0,024793					3,529256	0,042899
3.	1,334035	0,037453					2,598385	0,014296
4.	3,121853	0,029003					2,868443	0,004762
5.	2,548067	0,040415					2,976536	0,049563
6.	4,714331	0,043488					1,219006	0,038431
7.	1,534734	0,024491						
8.	2,295359	0,017831						
9.	2,511150	0,027372						
10.	2,772458	0,027166						
11.	2,817209	0,017683						
12.	3,041141	0,033180						

Megoldás

1) Az ***a*** abszolút hibája:

$$|a - a_0| \le \Delta_a$$

$a_0 = 1{,}553071,\ \Delta_a = 0{,}041422.$

2) A ***b*** abszolút hibája

$$|b - b_0| \le \Delta_b$$

$b_0 = 3{,}041339,\ \Delta_b = 0{,}037714.$

3) Az ***a*** relatív hibája:

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a_0|}$$

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a_0|} = \frac{0{,}041422}{1{,}553071} = 0{,}026671.$$

4) A ***b*** relatív hibája:

$$\delta_b = \frac{\Delta_b}{|b_0|}$$

$$\delta_b = \frac{\Delta_b}{|b_0|} = \frac{0{,}037714}{3{,}041339} = 0{,}012400.$$

5) Az ***a* + *b*** összeg abszolút hibája:

$$\Delta_{a+b} = \Delta_a + \Delta_b\,.$$

$$\Delta_{a+b} = \Delta_a + \Delta_b = 0{,}041422 + 0{,}037714 = 0{,}079136.$$

6) Az ***a + b*** összeg relatív hibája:

$$\delta_{a+b} = \max\{\delta_a, \delta_b\}.$$

$$\delta_{a+b} = \max\{\delta_a, \delta_b\} = \max\{0{,}026671;\ 0{,}012400\} = 0{,}026671.$$

7) Az ***a – b*** különbség abszolút hibája:

$$\Delta_{a-b} = \Delta_a - \Delta_b$$

$$\Delta_{a-b} = \Delta_a - \Delta_b = 0{,}041422 - 0{,}037714 = 0{,}003708.$$

8) Az ***a – b*** különbség relatív hibája:

$$\delta_{a-b} = \frac{\Delta_a + \Delta_b}{|a-b|}, a > 0, b > 0.$$

$$\delta_{a-b} = \frac{\Delta_a + \Delta_b}{|a-b|} = \frac{0{,}041422 + 0{,}037714}{|1{,}553071 - 3{,}041339|} = 0{,}053173.$$

9) Az ***a · b*** szorzat abszolút hibája:

$$\Delta_{ab} \approx |a|\Delta_b + |b|\Delta_a$$

$$\Delta_{ab} \approx |a|\Delta_b + |b|\Delta_a = 1{,}553071 \cdot 0{,}037714 + 3{,}041339 \cdot 0{,}041422 = 0{,}184551.$$

10) Az ***a · b*** szorzat relatív hibája:

$$\delta_{ab} = \delta_a + \delta_b$$

$$\delta_{ab} = \delta_a + \delta_b = 0{,}026671 + 0{,}012400 = 0{,}039071.$$

11) Az ***a / b*** hányados abszolút hibája:

$$\Delta_{\frac{a}{b}} \approx \frac{|a|\Delta_b + |b|\Delta_a}{|b|^2}$$

$$\Delta_{\frac{a}{b}} \approx \frac{|a|\Delta_b + |b|\Delta_a}{|b|^2} = \frac{1{,}553071 \cdot 0{,}037714 + 3{,}014339 \cdot 0{,}041422}{3{,}041339^2} = 0{,}019952.$$

12) Az ***a / b*** hányados relatív hibája:

$$\delta_{\frac{a}{b}} = \delta_a + \delta_b$$

$$\delta_{\frac{a}{b}} = \delta_a + \delta_b = 0{,}026671 + 0{,}012400 = 0{,}039071.$$

13) Az ***a*** összegének abszolút hibája (statisztikai hibabecsléssel):

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k,\ n > 10,$$

$$\Delta_S = \sqrt{3n} \cdot \Delta_k\ .$$

$n = 12;\quad \Delta_k = 0{,}04;$

$S = \sum_{k=1}^{n} a_k = 1{,}553071 + 1{,}814977 + 1{,}334035 + 3{,}121853 + 2{,}548067 + 4{,}714331 + 1{,}534734 +$
$+ 2{,}295359 + 2{,}51115 + 2{,}772458 + 2{,}817209 + 3{,}041141 = 30{,}058385;$

$\Delta_S = \sqrt{3n} \cdot \Delta_k = \sqrt{3 \cdot 12} \cdot 0{,}04 = 0{,}24.$

14) Az ***a*** összegének relatív hibája:

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\delta_S \le \max_{1 \le k \le n} \{\delta_k\}$$

$\delta_S \le \max_{1 \le k \le n} \{\delta_k\} = \max\{0{,}041422; 0{,}024793; 0{,}037453; 0{,}029003; 0{,}040415; 0{,}043488; 0{,}024491;$
$0{,}017831; 0{,}027372; 0{,}027166; 0{,}017683; 0{,}033180\} = 0{,}043488.$

15) Az ***b*** összegének abszolút hibája:

$$S = \sum_{j=1}^{m} b_j, m < 10.$$

$$\Delta_S = \sum_{j=1}^{m} \Delta_j .$$

$m = 6;$

$S = \sum_{j=1}^{m} b_j = 3{,}041339 + 3{,}529256 + 2{,}598385 + 2{,}868443 + 2{,}976536 + 1{,}219006 = 16{,}232965.$

$\Delta_S = \sum_{j=1}^{m} \Delta_j = 0{,}037714 + 0{,}042899 + 0{,}014296 + 0{,}004762 + 0{,}049563 + 0{,}038431 = 0{,}187665.$

16) Az ***b*** összegének relatív hibája:

$$S = \sum_{j=1}^{m} b_j$$

$$\delta_S \le \max_{1 \le j \le n} \{\delta_j\}$$

$\delta_S \le \max_{1 \le j \le n} \{\delta_j\} = \max\{0{,}037714, 0{,}042899; 0{,}014296; 0{,}004762; 0{,}049563; 0{,}038431\} = 0{,}049563.$

17) Az **a** és a ***b*** szorzatai hányadosának ***r*** értéke:

$$r = \frac{\prod_{k=1}^{n} a_k}{\prod_{j=1}^{m} b_j}$$

$$r = \frac{\prod_{k=1}^{n} a_k}{\prod_{j=1}^{m} b_j} = \frac{0{,}041422 \cdot 0{,}024793 \cdot 0{,}037453 \cdot 0{,}029003 \cdot 0{,}040415 \cdot 0{,}043488 \cdot 0{,}024491}{0{,}037714 \cdot 0{,}042899 \cdot 0{,}014296} \times$$

$$\times \frac{0{,}017831 \cdot 0{,}027372 \cdot 0{,}027166 \cdot 0{,}017683 \cdot 0{,}033180}{0{,}004762 \cdot 0{,}049563 \cdot 0{,}038431} = 11{,}914606.$$

18) Az ***r*** relatív hibája:

$$\delta_r \approx \sqrt{3(n+m)} \cdot \delta$$

$n = 12, m = 6, \delta = 0{,}011;$

$\delta_r \approx \sqrt{3(n+m)} \cdot \delta = \sqrt{3(12+6)} \cdot 0{,}011 = 0{,}080833.$

Íme, az alábbi táblában az összesített felet:

1)	Az ***a*** abszolút hibája	$\mathbf{\Delta_a}$= 0,041422
2)	A ***b*** abszolút hibája	$\mathbf{\Delta_b}$= 0,037714
3)	Az ***a*** relatív hibája	$\mathbf{\delta_a}$= 0,026671
4)	A ***b*** relatív hibája	$\mathbf{\delta_b}$= 0,012400
5)	Az ***a + b*** összeg abszolút hibája	Δ_{a+b}= 0,079136
6)	Az ***a + b*** összeg relatív hibája	δ_{a+b}= 0,026671
7)	Az ***a – b*** különbség abszolút hibája	Δ_{a-b}= 0,003708
8)	Az ***a – b*** különbség relatív hibája	δ_{a-b}= 0,053173
9)	Az ***a · b*** szorzat abszolút hibája	$\Delta_{a \cdot b}$= 0,184551
10)	Az ***a · b*** szorzat relatív hibája	$\delta_{a \cdot b}$= 0,039071
11)	Az ***a / b*** hányados abszolút hibája	$\Delta_{a/b}$= 0,019952
12)	Az ***a / b*** hányados relatív hibája	$\delta_{a/b}$= 0,039071
13)	Az ***a*** összegének abszolút hibája (statisztikai hibabecsléssel)	$\Delta_{\Sigma a}$= 0,24
14)	Az ***a*** összegének relatív hibája	$\delta_{\Sigma a}$= 0,043488
15)	Az ***b*** összegének abszolút hibája	$\Delta_{\Sigma b}$= 0,187665
16)	Az ***b*** összegének relatív hibája	$\delta_{\Sigma b}$= 0,049563
17)	Az **a** és a ***b*** szorzatai hányadosának ***r*** értéke	***r*** = 11,914606
18)	Az ***r*** relatív hibája (statisztikai hibabecsléssel)	δ_r= 0,080833

2. Laboratóriumi munka. Nemlineáris egyenletek megoldása

2.1. Nemlineáris egyenletek megoldása

Feladat

Oldja meg numerikusan felező módszerrel az alábbi nemlineáris egyenletet!

$$\frac{5-2x}{9\sqrt{-(x-1)(x-5)}}=0$$

Megoldás

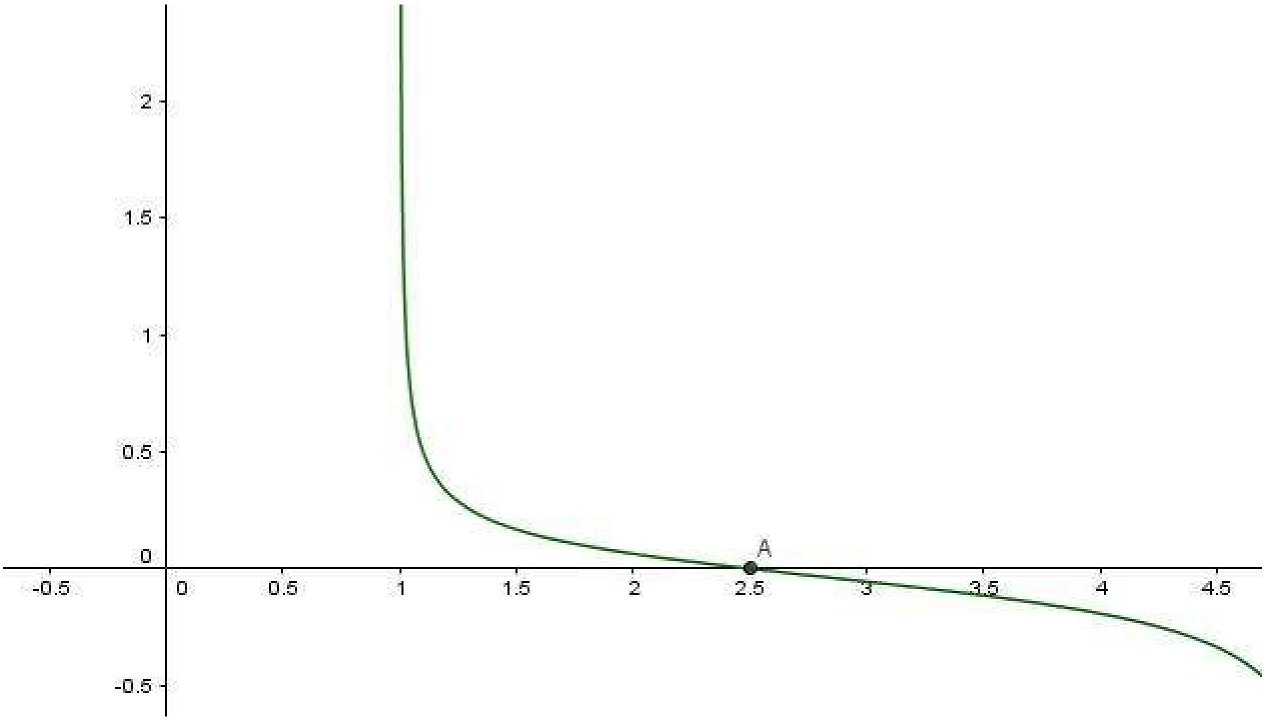
Megoldás felező módszerrel.

Megoldás Java-val

```
package labor_2_felezo;

/**
 *
 * @author Beregszászi István
 * @since 2016.04.05.
 */
public class Labor_2_felezo {


    static double f(double x){
        return (5-2*x)/(9*Math.sqrt(-(x-1)*(x-5)));
    }

    public static void main(String[] args) {
        double a=2.0,b=3.0, c=0.0;
        int k=0,n=10;

        for (k = 0; k < n; k++) {
            c=(b+a)/2.0;
            System.out.println("a= "+a+" c= "+c+" b= "+b
                                      +" f(c)= "+f(c));
            if(f(c)*f(a)>0){
                a=c;
            }else{
                b=c;
            }
        }
        System.out.println("f(x0)="+f(c)+" x0="+c);
    }

}
```

```
a= 2.0 c= 2.5 b= 3.0 f(c)= 0.0
a= 2.0 c= 2.25 b= 2.5 f(c)= 0.029964438331699646
a= 2.25 c= 2.375 b= 2.5 f(c)= 0.014621148776883754
a= 2.375 c= 2.4375 b= 2.5 f(c)= 0.007236551211398178
a= 2.4375 c= 2.46875 b= 2.5 f(c)= 0.003601604728343075
a= 2.46875 c= 2.484375 b= 2.5 f(c)= 0.0017968538130096752
a= 2.484375 c= 2.4921875 b= 2.5 f(c)= 8.974665824225775E-4
a= 2.4921875 c= 2.49609375 b= 2.5 f(c)= 4.4849652711580917E-4
a= 2.49609375 c= 2.498046875 b= 2.5 f(c)= 2.2418948502398714E-4
a= 2.498046875 c= 2.4990234375 b= 2.5 f(c)= 1.1208009930839766E-4
f(x0)=1.1208009930839766E-4 x0=2.4990234375
```

Megoldás és a grafikus ábrázolás Geogebra-val

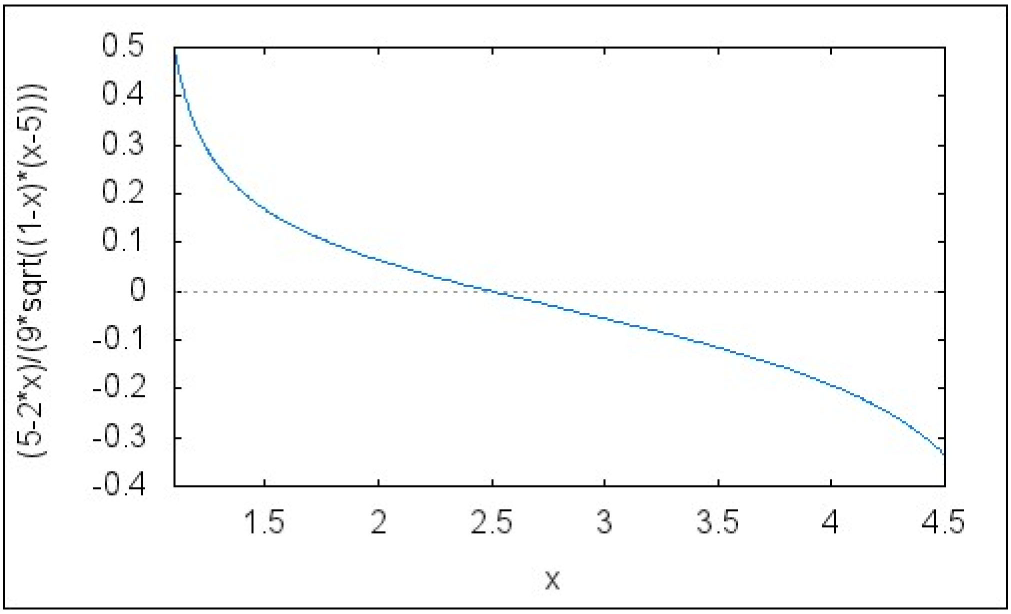


Megoldás wxMaxima-val

```
(%i1) f(x):=(5-2*x)/(9*sqrt(-(x-1)*(x-5)));
```

(%o1) $f(x) := \frac{5-2x}{9\sqrt{(-(x-1))(x-5)}}$

```
(%i2) wxplot2d([f(x)], [x,1.1,4.5])$
```

(%t2) 


```
(%i3) p:find_root(f(x)=0, x, 1.1, 4.5);
```

(%o3) 2.5

```
(%i4) a:2$ b:3$ n:10$ Hiba:abs(b-a)/2^n,numer;
```

(%o7) $9.765625\ 10^{-4}$

```
(%i8) eps0:b-a$ eps:0.001$ n0:(log(eps0)-log(eps))/log(2),numer;
      ceiling(n0);
```

(%o10) 9.965784284662087

(%o11) 10

3. Laboratóriumi munka. Numerikus integrálás

3.1. Numerikus integrálás

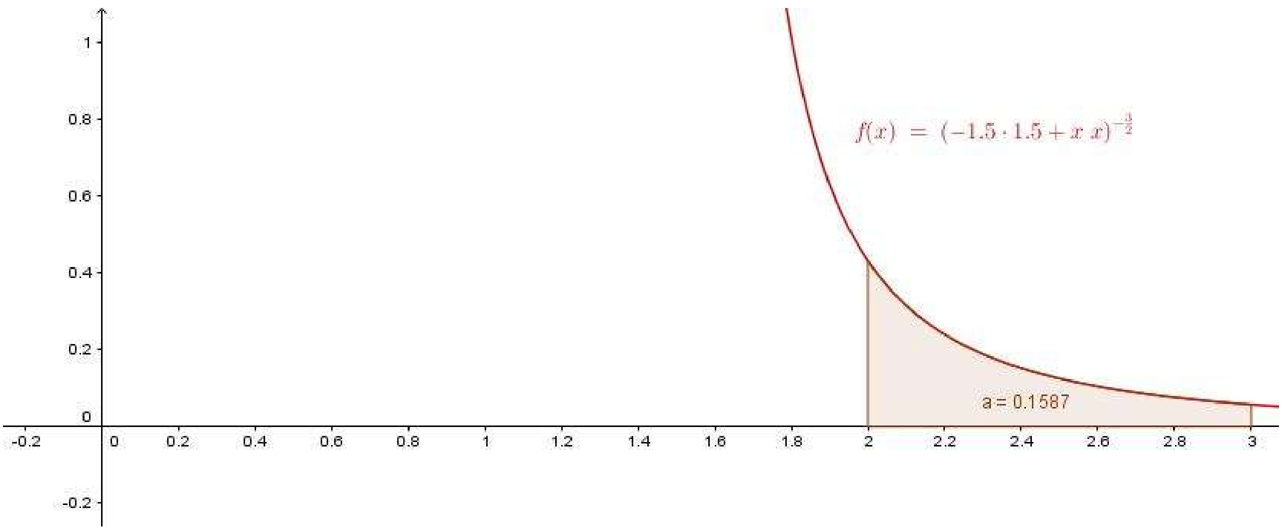
Feladat

Trapéz módszerrel határozza meg az alábbi integrál numerikus értékét! Végezzen hibabecslést!

$$\int_2^3 \left(-p^2+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx;\ p=1{,}5.$$

Megoldás

Megoldás Geogebra-val



A Geogebrá-ban készített grafikon tanulsága szerint az integrál értéke az 0,1587.

Megoldás Java-val

```
package labor_3trapez;

/**
 *
 * @author Beregszászi István
 * @since 2016.04.15.
 */
public class Labor_3trapez {
```

```
    static double f(double x, double p) {
        return Math.pow((x * x - p * p), -3.0 / 2.0);
    }

    public static void main(String[] args) {
        double a = 2.0, b = 3.0, n = 20.0, p = 1.5;
        double dx = 0.0, xi = 0, xip1 = 0, int_trapez = 0.0;

        dx = (b - a) / n;

        for (int i = 0; i <= n - 1; i++) {
            xi = a + i * dx;
            xip1 = a + (i + 1) * dx;
            int_trapez = int_trapez + (f(xi, p) + f(xip1, p)) * dx / 2;
        }

        System.out.println("A trapéz módszerrel számított integrál"
                           + " értéke: " + int_trapez);
    }

}
```

A Java nyelven írt program kimenete:

```
A trapéz módszerrel számított integrál értéke: 0.15902883294811218
```

Megoldás és hibabecslés wxMaxima-val

```
(%i1) p:1.5$ f(x,a)::=(-a^2+x^2)^(-3/2); I:integrate(f(x,p),x, 2, 3);
      I,numer;
```

(%o2) $f(x,a)::=(-a^2+x^2)^{\frac{-3}{2}}$

rat: replaced -2.25 by -9/4 = -2.25
rat: replaced -2.25 by -9/4 = -2.25
rat: replaced -2.25 by -9/4 = -2.25
rat: replaced -2.25 by -9/4 = -2.25
rat: replaced -0.444444444444 by -4/9 = -0.444444444444
rat: replaced -2.25 by -9/4 = -2.25
rat: replaced -0.444444444444 by -4/9 = -0.444444444444

(%o3) $\frac{16}{9\sqrt{7}}-\frac{8}{3^{5/2}}$

(%o4) 0.15873660162563

```
(%i5) d2(x)::=diff(f(x,p), x, 2)$d2(x);
```

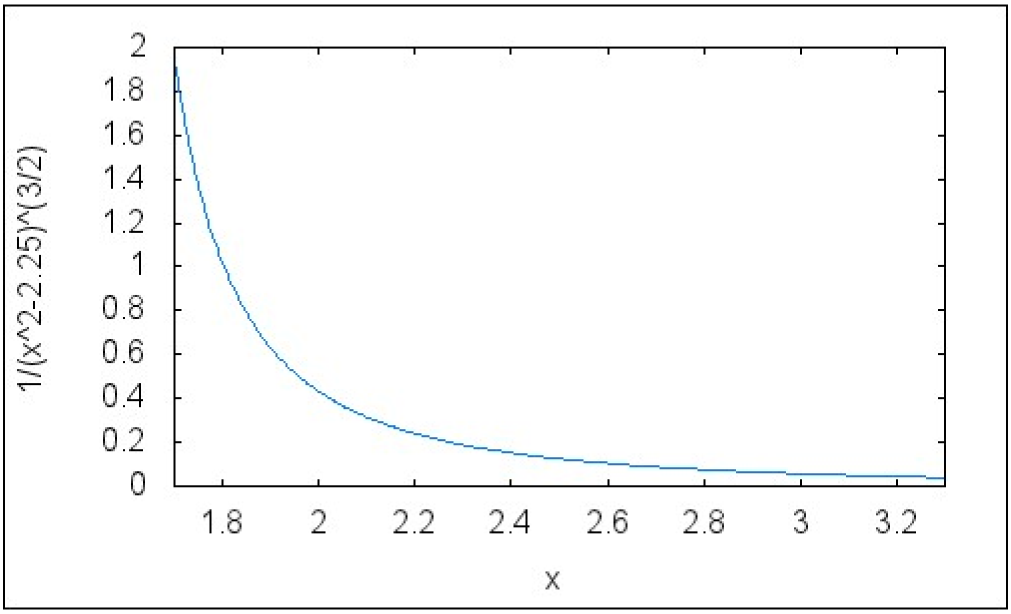
(%o6) $$\frac{15\,x^2}{(x^2-2.25)^{7/2}}-\frac{3}{(x^2-2.25)^{5/2}}$$

```
(%i7) c:2.5$ b:3$ a:2$ n:20$ h:(b-a)/n$
(%i12) Ef:-((b-a)*d2(c))/12*h*h;
```

(%o12) $-1.3305664062500001\ 10^{-4}$

```
(%i13) wxplot2d([f(x, p)], [x,1.7,3.3])$
```

(%t13)



Mint látjuk, a pontos megoldás az $x=\frac{16}{9\sqrt{7}}-\frac{8}{3^{\frac{5}{2}}}=0{,}15873660162563$. A trapéz módszerrel kapott megoldás, pedig 0.15902883294811218 húsz iteráció után. A hiba nagyságrendje 10^{-4}.

4. Laboratóriumi munka. Lineáris egyenletrendszerek megoldása

4.1. Direkt módszer alkalmazása

Feladat

Határozza meg részleges főelem-kiválasztásos Gauss módszerrel az alábbi egyenletrendszert! Végezzen hibabecslést (határozza meg a kondíciószámot)!

$$\begin{cases} 5{,}39882x_1 + 0{,}200845x_2 + 0{,}511270x_3 = 0{,}344772, \\ 0{,}660606x_1 + 22{,}96664x_2 + 0{,}840209x_3 = 0{,}444710, \\ 0{,}024527x_1 + 0{,}989853x_2 + 32{,}62751x_3 = 0{,}974125. \end{cases}$$

Megoldás

Gauss elimináció

$$a_{i,j}^{(k)} = a_{i,j}^{(k-1)} - \frac{a_{i,k}^{(k-1)}}{a_{k,k}^{(k-1)}} a_{k,j}^{(k-1)} \quad (k = \overline{1, n-1}; i = \overline{k+1, n}; j = \overline{k, n+1})$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j}{a_{i,i}} \quad (i = \overline{n,1})$$

Kondíciószám

$$cond(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

Mátrixnormák

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

Megoldás Java-val

```
public class Labor_4 {

    public static void main(String[] args) {
        double[][] a = {{5.39882, 0.200845, 0.51127, 0.344772},
                        {0.660606, 22.96664, 0.840209, 0.44471},
                        {0.024527, 0.989853, 32.62751, 0.974125}
                       };
```

```
    }
}
```

```
        double[] x = {0.0, 0.0, 0.0, 0.0};
        int n = 3, mf;
        double s, max, temp;

        //Háromszög-alakú mátrix kialakítása
        for (int k = 0; k < n; k++) {
            mf = k;
            max = a[mf][mf];
            for (int f = k + 1; f < n; f++) {
                if (a[f][k] > max) {
                    max = a[f][k];
                    mf = f;
                }
            }
            System.out.println("A max. sorszám = " + (mf + 1));
            for (int f = 0; f <= n; f++) {
                temp = a[k][f];
                a[k][f] = a[mf][f];
                a[mf][f] = temp;
            }
            for (int i = k + 1; i < n; i++) {
                //Részleges főelem kiválasztás
                s = a[i][k];
                for (int j = k; j < n + 1; j++) {
                    a[i][j] = a[i][j] - s / a[k][k] * a[k][j];
                }
                // Átalakított mátrix kiírása
                for (int i0 = 0; i0 < n; i0++) {
                    for (int j0 = 0; j0 <= n; j0++) {
                        System.out.format("%10.6f", a[i0][j0]);
                    }
                    System.out.println();
                }
                System.out.println();
            }
        }
        //A megoldás meghatározása a háromszög mátrixból
        for (int i = n - 1; i >= 0; i--) {
            s = 0.0;
            for (int j = i + 1; j < n; j++) {
                s += a[i][j] * x[j];
            }
            x[i] = (a[i][n] - s) / a[i][i];
        }
        //Eredmény kiírása
        System.out.println("Megoldás:");
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            System.out.format("x(%d) = %10.8f%n", (i + 1), x[i]);
        }
    }
}
```

A Java nyelven írt program kimenete

```
A megoldási módszer: Gauss módszer részleges főelem kiválasztással.

A max. sorszám = 1
  5,398820  0,200845  0,511270  0,344772
  0,000000 22,942064  0,777649  0,402523
  0,024527  0,989853 32,627510  0,974125

  5,398820  0,200845  0,511270  0,344772
  0,000000 22,942064  0,777649  0,402523
  0,000000  0,988941 32,625187  0,972559

A max. sorszám = 2
  5,398820  0,200845  0,511270  0,344772
  0,000000 22,942064  0,777649  0,402523
  0,000000  0,000000 32,591666  0,955208

A max. sorszám = 3

Megoldás:
x(1) = 0,06046936
x(2) = 0,01655177
x(3) = 0,02930834
```

Megoldás és hibabecslés Excel-lel

5,398820	0,200845	0,511270	0,344772
0,660606	22,966640	0,840209	0,444710
0,024527	0,989853	32,627510	0,974125

	0,185421978	-0,001497964	-0,00286697
A^{-1}=	-0,005334247	0,043632888	-0,001040027
	2,24435E-05	-0,001322608	0,030682691

x1=	**0,06046936**
x2=	**0,01655177**
x3=	**0,02930834**

x_n=	0,060469359	0,016551766	0,029308337
x_{n-1}=	0,060469401	0,016551793	0,029308352
x_n-x_{n-1}=	-0,0000000420	-0,0000000270	-0,0000000150
$\|\|X_n$-$X_{n-1}\|\|$=	0,0000000150		
sor:	0,131901971	0,065347609	0,031089715
sor max:	0,131901971		
hiba:	2,27915E-09		
oszlop:	0,126904212	0,051844676	0,810452457
oszlop max:	0,810452457		
hiba:	6,41358E-08		

Megoldás, hibabecslés és grafikus ábrázolás wxMaxima-val

```
(%i1) A: matrix(
          [5.39882, 0.200845, 0.51127],
          [0.660606, 22.96664, 0.840209],
          [0.024527, 0.989853, 32.62751]
      )$ B: transpose(matrix(
      [0.344772,
       0.44471,
       0.974125]
      ))$
      print(A,B)$
```

$$\begin{bmatrix} 5.39882 & 0.200845 & 0.51127 \\ 0.660606 & 22.96664 & 0.840209 \\ 0.024527 & 0.989853 & 32.62751 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.344772 \\ 0.44471 \\ 0.974125 \end{bmatrix}$$

```
(%i4) x: invert(A).B;
```

$$(\%o4) \quad \begin{bmatrix} 0.060469359452462 \\ 0.016551765950709 \\ 0.02930833682494 \end{bmatrix}$$

```
(%i5) mat_cond(A,1);
```

$$(\%o5) \quad 6.482466267885138$$

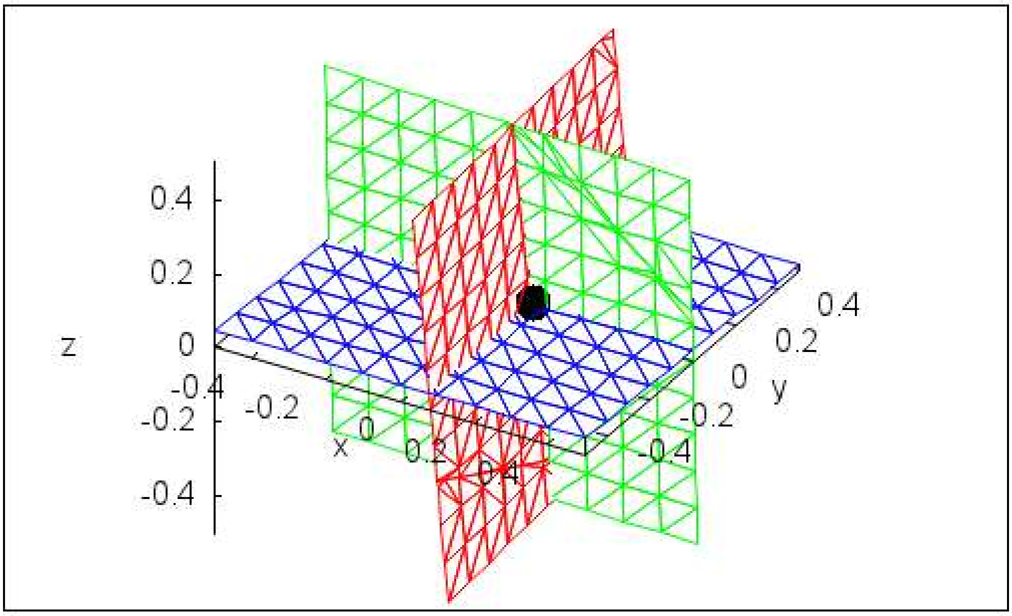
```
(%i6) xx:[x1,x2,x3]$
(%i7) eqs:
      args(map(lambda([v],lhs(v)[1]=rhs(v)[1]),map("=",A.matrix(xx),B)))
      $
      transpose(eqs);
```

$$(\%o8) \quad \begin{bmatrix} 0.51127\, x3+0.200845\, x2+5.39882\, x1=0.344772 \\ 0.840209\, x3+22.96664\, x2+0.660606\, x1=0.44471 \\ 32.62751\, x3+0.989853\, x2+0.024527\, x1=0.974125 \end{bmatrix}$$

```
(%i9) p: linsolve(eqs, xx),numer;
```

```
rat: replaced -0.344772 by -86193/250000 = -0.344772
rat: replaced 5.39882 by 269941/50000 = 5.39882
rat: replaced 0.200845 by 40169/200000 = 0.200845
rat: replaced 0.51127 by 51127/100000 = 0.51127
rat: replaced -0.44471 by -44471/100000 = -0.44471
rat: replaced 0.660606 by 330303/500000 = 0.660606
rat: replaced 22.96664 by 287083/12500 = 22.96664
rat: replaced 0.840209 by 840209/1000000 = 0.840209
rat: replaced -0.974125 by -7793/8000 = -0.974125
rat: replaced 0.024527 by 24527/1000000 = 0.024527
rat: replaced 0.989853 by 989853/1000000 = 0.989853
rat: replaced 32.62751 by 3262751/100000 = 32.62751
(%o9) [x1=0.060469359452462,x2=0.016551765950709,x3=0.02930833682494]
      load(draw)$ wxdraw3d(
       color=red, implicit(eqs[1], x1,-0.5,0.5, x2,-0.5,0.5, x3,-0.5,0.5),
       color=green, implicit(eqs[2], x1,-0.5,0.5, x2,-0.5,0.5, x3,-0.5,0.5),
       color=blue, implicit(eqs[3], x1,-0.5,0.5, x2,-0.5,0.5, x3,-0.5,0.5),
(%i10) color=black, point_size = 3, point_type =
      filled_circle,points([map(rhs,p)]),
       surface_hide=true,proportional_axes=xyz,enhanced3d = false,
       xlabel = "x", ylabel = "y", zlabel = "z",
       user_preamble="set view ,,1.85,1.1 ", xyplane=0);
```

(%t11)



(%o11)

A kondíciószám egyes normával a következő:

$$cond(A) = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1 = 6{,}482466267885138$$

4.2. Iterációs módszer

Feladat

Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert iteratív módszerekkel!

$$\begin{cases} 89{,}08649x_1 + 0{,}736242x_2 + 0{,}459545x_3 + 0{,}890248x_4 = 0{,}123714, \\ 0{,}199084x_1 + 4{,}421526x_2 + 0{,}509364x_3 + 0{,}796204x_4 = 0{,}303670, \\ 0{,}029976x_1 + 0{,}483555x_2 + 79{,}81701x_3 + 0{,}968835x_4 = 0{,}094960, \\ 0{,}959853x_1 + 0{,}953567x_2 + 0{,}893752x_3 + 67{,}76337x_4 = 0{,}000228. \end{cases}$$

Megoldás

Megoldás Java-val Jacobi és Gauss-Seidel módszerekkel

```
package labor_4_b_seidel_jacobi;

/**
 * @author Beregszászi István
 * @since 2016.04.19.
 */
public class Labor_4_b_seidel_jacobi {

    static int n = 4;
    static double eps = 0.00001;
    static double a[][] = {{89.08649, 0.736242, 0.459545, 0.890248, 0.123714},
                          {0.199084, 4.421526, 0.509364,  0.796204, 0.30367},
                          {0.029976, 0.483555, 79.81701,   0.968835, 0.09496},
                          {0.959853, 0.953567, 0.893752, 67.76337, 0.000228}};
    static double x[] = new double[n], x0[] = new double[n];
    static double inva[][] = new double[n][n];
    static double m[][] = new double[n][2*n];



    public static double xnorm(double x[]) {
        double max = x[0];
        for (int i = 1; i < x.length; i++) {
            if (Math.abs(x[i]) > max) {
                max = x[i];
            }
        }
        return max;
    }

    public static double anorm(double a[][]) {
```

```
        double s = 0.0;
        for (int j = 0; j < a.length; j++) {
            s += Math.abs(a[0][j]);
        }
        double max = s;
        for (int i = 1; i < a.length; i++) {
            s = 0.0;
            for (int j = 0; j < a.length; j++) {
                s += Math.abs(a[i][j]);
            }
            if (s > max) {
                max = s;
            }
        }
        return max;
    }

    static boolean dnorm(double[] xk, double[] xkp){
        double norm = 0;
        for (int i = 0; i < n; i++){
            norm += (xk[i] - xkp[i])*(xk[i] - xkp[i]);
        }
        //System.out.println("norm="+norm);
        return Math.sqrt(norm) < eps;
    }

    public static void kiir() {
        System.out.println("");
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            for (int j = 0; j < n + 1; j++) {
                System.out.format("%10.6f", a[i][j]);
            }
            System.out.println("");
        }
    }

    public static void kiir_x() {
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            System.out.format(" x%d =%10.7f ", i + 1, x[i]);
        }
        //System.out.println();
    }

    public static void main(String[] args) {
        double dxnorm = 0.0;
        kiir();
        for (int i = 0; i < x.length; i++) {
            x[i] = 0.0;
        }
        int m = 2; //m=1 - Seidel, m=2 - Jacobi
        int k=0;
        do {
            k++;
            //x0 = x ;
            for (int i = 0; i < n; i++) {
                x0[i] = x[i];
            }
            dxnorm = 0.0;
            for (int i = 0; i < n; i++) {
                double sum = 0.0;
                switch (m) {
```

```
                case 1:
                    for (int j = 0; j < i; j++) {
                        sum += a[i][j] * x[j];
                    }
                case 2:
                    for (int j = 0; j < i; j++) {
                        sum += a[i][j] * x0[j];
                    }
            }
            for (int j = i + 1; j < n; j++) {
                sum += a[i][j] * x0[j];
            }
            x[i] = (a[i][n] - sum) / a[i][i];
            dxnorm += Math.abs(x[i] - x0[i]);
        }
        //System.out.println(java.util.Arrays.toString(x));
        //System.out.println(java.util.Arrays.toString(x0));
        System.out.print("\nk="+k);
        kiir_x();
    } while (dxnorm > eps);

    System.out.println("\n\nA megoldás "
             +(m == 1?"Gauss-Seidel":"Jacobi") +" módszerrel:");
    kiir_x();

    //double xx[] = {5.14, 4.05, 3.67, 1.17, 1.46};
    //System.out.println("xnorm(xx)="+xnorm(xx));
    //System.out.println("anorm(a)="+anorm(a));

    //Seidel M=-(E+L)^(-1).U           g=(D.E)^(-1)b  x=Mx+g,
    //itt A^(-1) az invezmatrix
    //Jacobi M=-D^(-1)(A-D.E) v. -(L+U) g=D^(-1)b      x=Mx+g

    // ||x(k+1)-x_pontos||<=||M||/( ||1-||M||)*||x(k+1)-x(k)||
    // ||x(k+1)-x_pontos||<=||M||^(k+1)/( ||1-||M||)*||x(1)-x(0)||
    //itt ||... || a norma
  }
}
```

A Java program kimenete Gauss-Seidel módszerrel

```
 89,086490  0,736242  0,459545  0,890248  0,123714
  0,199084  4,421526  0,509364  0,796204  0,303670
  0,029976  0,483555 79,817010  0,968835  0,094960
  0,959853  0,953567  0,893752 67,763370  0,000228

k=1 x1 = 0,0013887  x2 = 0,0686174  x3 = 0,0007735  x4 =-0,0009921
k=2 x1 = 0,0008275  x2 = 0,0686697  x3 = 0,0003692  x4 =-0,0019750
k=3 x1 = 0,0008390  x2 = 0,0689180  x3 = 0,0003795  x4 =-0,0019663
k=4 x1 = 0,0008368  x2 = 0,0689148  x3 = 0,0003779  x4 =-0,0019699
k=5 x1 = 0,0008369  x2 = 0,0689157  x3 = 0,0003780  x4 =-0,0019699

A megoldás Gauss-Seidel módszerrel:
 x1 = 0,0008369  x2 = 0,0689157  x3 = 0,0003780  x4 =-0,0019699
```

A Java program kimenete Jacobi módszerrel:

```
 89,086490  0,736242  0,459545  0,890248  0,123714
  0,199084  4,421526  0,509364  0,796204  0,303670
  0,029976  0,483555 79,817010  0,968835  0,094960
  0,959853  0,953567  0,893752 67,763370  0,000228

k=1 x1 = 0,0013887  x2 = 0,0686799  x3 = 0,0011897  x4 = 0,0000034
k=2 x1 = 0,0008149  x2 = 0,0684797  x3 = 0,0007731  x4 =-0,0009985
k=3 x1 = 0,0008287  x2 = 0,0687340  x3 = 0,0007867  x4 =-0,0009820
k=4 x1 = 0,0008264  x2 = 0,0687288  x3 = 0,0007849  x4 =-0,0009860
k=5 x1 = 0,0008265  x2 = 0,0687298  x3 = 0,0007850  x4 =-0,0009858

A megoldás Jacobi módszerrel:
 x1 = 0,0008265  x2 = 0,0687298  x3 = 0,0007850  x4 =-0,0009858
```

Megoldás Excel-lben Cramer módszerrel

$$A=\left|\begin{array}{cccc|c} 89{,}08649 & 0{,}736242 & 0{,}459545 & 0{,}890248 & 0{,}123714 \\ 0{,}199084 & 4{,}421526 & 0{,}509364 & 0{,}796204 & 0{,}303670 \\ 0{,}029976 & 0{,}483555 & 79{,}81701 & 0{,}968835 & 0{,}094960 \\ 0{,}959853 & 0{,}953567 & 0{,}893752 & 67{,}76337 & 0{,}000228 \end{array}\right|$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 89{,}08649 & 0{,}736242 & 0{,}459545 & 0{,}890248 \\ 0{,}199084 & 4{,}421526 & 0{,}509364 & 0{,}796204 \\ 0{,}029976 & 0{,}483555 & 79{,}81701 & 0{,}968835 \\ 0{,}959853 & 0{,}953567 & 0{,}893752 & 67{,}76337 \end{vmatrix} 2122276{,}7$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0{,}123714 & 0{,}736242 & 0{,}459545 & 0{,}890248 \\ 0{,}30367 & 4{,}421526 & 0{,}509364 & 0{,}796204 \\ 0{,}09496 & 0{,}483555 & 79{,}81701 & 0{,}968835 \\ 0{,}000228 & 0{,}953567 & 0{,}893752 & 67{,}76337 \end{vmatrix} 1754{,}04215$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 89{,}08649 & 0{,}123714 & 0{,}459545 & 0{,}890248 \\ 0{,}199084 & 0{,}30367 & 0{,}509364 & 0{,}796204 \\ 0{,}029976 & 0{,}09496 & 79{,}81701 & 0{,}968835 \\ 0{,}959853 & 0{,}000228 & 0{,}893752 & 67{,}76337 \end{vmatrix} 145863{,}635$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 89{,}08649 & 0{,}736242 & 0{,}123714 & 0{,}890248 \\ 0{,}199084 & 4{,}421526 & 0{,}30367 & 0{,}796204 \\ 0{,}029976 & 0{,}483555 & 0{,}09496 & 0{,}968835 \\ 0{,}959853 & 0{,}953567 & 0{,}000228 & 67{,}76337 \end{vmatrix} 1665{,}97061$$

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} 89{,}08649 & 0{,}736242 & 0{,}459545 & 0{,}123714 \\ 0{,}199084 & 4{,}421526 & 0{,}509364 & 0{,}30367 \\ 0{,}029976 & 0{,}483555 & 79{,}81701 & 0{,}09496 \\ 0{,}959853 & 0{,}953567 & 0{,}893752 & 0{,}000228 \end{vmatrix} -2092{,}2728$$

x_1=	0,00082649
x_2=	0,06872979
x_3=	0,00078499
x_4=	-0,00098586

Ellenőrzés:
0,1237140
0,3036700
0,0949600
0,0002280

Hibabecslés Excel-lel

		89,08649	0,736242	0,459545	0,890248		0,123714
Ax = b	A=	0,199084	4,421526	0,509364	0,796204	b=	0,303670
		0,029976	0,483555	79,81701	0,968835		0,094960
		0,959853	0,953567	0,893752	67,76337		0,000228

	x
x_1=	0,000826491
x_2=	0,068729791
x_3=	0,000784992
x_4=	-0,000985862

	89,08649	0	0	0
D=	0	4,421526	0	0
	0	0	79,81701	0
	0	0	0	67,76337

	0	0	0	0
L=	0,045026084	0	0	0
	0,000375559	0,006058295	0	0
	0,014164777	0,014072013	0,013189309	0

	0	0,008264351	0,005158414	0,009993075
U=	0	0	0,115200951	0,180074481
	0	0	0	0,012138202
	0	0	0	0

89,08649	89,08649	89,08649	89,08649
4,421526	4,421526	4,421526	4,421526
79,81701	79,81701	79,81701	79,81701
67,76337	67,76337	67,76337	67,76337

	0,011230519	-0,001837388	-5,15318E-05	-0,000125216
A^{-1}=	-0,000478292	0,226970198	-0,001416125	-0,002640317
	5,29219E-07	-0,001336124	0,012539013	-0,000163582
	-0,000152354	-0,003150279	-0,000144723	0,014798321

$D^{-1}=$

0,011225	0	0	0
0	0,226166	0	0
0	0	0,012529	0
0	0	0	0,014757

E=

1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

Jacobi módszer

$$x = Mx + g$$

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |x_i|$$

M=–(L+U)=

0	-0,00826	-0,00516	-0,00999
-0,04503	0	-0,1152	-0,18007
-0,00038	-0,00606	0	-0,01214
-0,01416	-0,01407	-0,01319	0

$g=D^{-1}b$

0,0014
0,0687
0,0012
3E-06

0	0,008264	0,005158	0,009993	0,023416
0,045	0	0,115201	0,180074	0,340302
0,0004	0,006058	0	0,012138	0,018572
0,0142	0,014072	0,013189	0	0,041426

||M|| = 0,340302

Jacobi

x0	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9
0	0,001389	0,000815	0,000829	0,000826	0,000827	0,000826	0,000826	0,000826	0,000826
0	0,06868	0,06848	0,068734	0,068729	0,06873	0,06873	0,06873	0,06873	0,06873
0	0,00119	0,000773	0,000787	0,000785	0,000785	0,000785	0,000785	0,000785	0,000785
0	3,36E-06	-0,001	-0,00098	-0,00099	-0,00099	-0,00099	-0,00099	-0,00099	-0,00099
$x_{k+1}-x_k$									
	0,001389	-0,00057	1,38E-05	-2,3E-06	9,1E-08	-1E-08	0,0000	-4,6E-11	2,65E-12
	0,06868	-0,0002	0,000254	-5,1E-06	1,02E-06	-3,6E-08	0,0000	-2,1E-10	1,95E-11
	0,00119	-0,00042	1,36E-05	-1,7E-06	8E-08	-7,8E-09	0,0000	-3,6E-11	2,18E-12
	3,36E-06	-0,001	1,64E-05	-4E-06	1,29E-07	-1,7E-08	0,0000	-7,4E-11	4,06E-12
abs									
	0,001389	0,000574	1,38E-05	2,34E-06	9,1E-08	1,01E-08	0,0000	4,57E-11	2,65E-12
	0,06868	0,0002	0,000254	5,15E-06	1,02E-06	3,65E-08	0,0000	2,09E-10	1,95E-11
	0,00119	0,000417	1,36E-05	1,74E-06	8E-08	7,76E-09	0,0000	3,58E-11	2,18E-12
	3,36E-06	0,001002	1,64E-05	3,95E-06	1,29E-07	1,67E-08	0,0000	7,41E-11	4,06E-12
||x||	0,06868	0,001002	0,000254	5,15E-06	1,02E-06	3,65E-08	4,35E-09	2,09E-10	1,95E-11
eps_k									
	0,035428	0,000517	0,000131	2,66E-06	5,25E-07	$\boxed{1,88E-08}$	2,24E-09	1,08E-10	1,01E-11

Gauss-Seidel módszer

	1	1E-17	8,13E-20	1,73E-18
(E+L)=	0	1	4,88E-19	0
	0	0,0061	1	0
	0	0,0141	0,013189	1

-1	1E-17	5,84E-20	1,73E-18
0	-1	4,85E-19	-7,8E-20
0	0,0061	-1	-1,8E-22
0	0,014	0,013189	-1

	-		
0	0,0083	-0,00516	-0,00999
0	0,0004	-0,11497	-0,17962
0	8E-07	0,000698	-0,01105
0	0,0001	0,001682	0,002815

	0	-0,00826	-0,00516	-0,00999		0,0014
$M=-(E+L)^{-1}U$	0	0,000372	-0,11497	-0,17962	$g=D^{-1}b$	0,0687
	0	8,49E-07	0,000698	-0,01105		0,0012
	0	0,000112	0,001682	0,002815		3E-06

0	0,008264	0,005158	0,009993	0,023416
0	0,000372	0,114969	0,179625	0,294965
0	8,49E-07	0,000698	0,011046	0,011746
0	0,000112	0,001682	0,002815	0,004608

||M|| = 0,294965

	x0	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9
	1	-0,02513	0,00232	0,000811	0,000816	0,000816	0,000816	0,000816	0,000816	0,000816
	2	-0,1102	0,069225	0,068577	0,068566	0,068566	0,068566	0,068566	0,068566	0,068566
	0	-0,00985	0,001149	0,001191	0,00119	0,00119	0,00119	0,00119	0,00119	0,00119
	1	0,003042	-1,7E-05	1,3E-05	1,31E-05	1,31E-05	1,31E-05	1,31E-05	1,31E-05	1,31E-05
		-1,02513	-0,02745	-0,00151	-4,8E-06	-8,7E-08	-1,1E-10	-3,3E-12	-6,2E-15	-1,4E-16
		-2,1102	-0,17943	-0,00065	-1E-05	-1,6E-08	-3,9E-10	-8,5E-13	-1,7E-14	-2,8E-17
		-0,00985	-0,011	-4,2E-05	-3E-07	-1,1E-09	-1,5E-11	-5,7E-14	-6E-16	-2,2E-18
		-0,99696	-0,00306	-3E-05	-8,2E-08	-1,4E-09	-4,1E-12	-5,8E-14	-1,6E-16	-2,5E-18
||x||		-0,00985	-0,00306	-3E-05	-8,2E-08	-1,1E-09	-4,1E-12	-5,7E-14	-1,6E-16	-2,2E-18
eps_k										
		-0,00412	-0,00128	-1,3E-05	-3,4E-08	-4,7E-10	-1,7E-12	-2,4E-14	-6,8E-17	-9,1E-19

Megoldás és wxMaxima-val

```
      A: matrix(
       [89.08649,0.736242,0.459545,0.890248],
       [0.199084,4.421526,0.509364,0.796204],
       [0.029976,0.483555,79.81701,0.968835],
       [0.959853,0.953567,0.893752,67.76337]
      )$
(%i1) B: transpose(matrix(
      [0.123714,
      0.30367,
      0.09496,
      0.000228]
      ))$
      print(A,B)$
```

$$\begin{bmatrix} 89.08649 & 0.736242 & 0.459545 & 0.890248 \\ 0.199084 & 4.421526 & 0.509364 & 0.796204 \\ 0.029976 & 0.483555 & 79.81701 & 0.968835 \\ 0.959853 & 0.953567 & 0.893752 & 67.76337 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.123714 \\ 0.30367 \\ 0.09496 \\ 2.2800000000000001\ 10^{-4} \end{bmatrix}$$

```
(%i4) x: invert(A).B;
```

(%o4) $$\begin{bmatrix} 8.2649079235572523\ 10^{-4} \\ 0.068729791420615 \\ 7.8499218181846174\ 10^{-4} \\ -9.8586240640897104\ 10^{-4} \end{bmatrix}$$

```
(%i5) xx:[x1,x2,x3,x4]$
      eqs: args(
               map(
                   lambda([v],lhs(v)[1]=rhs(v)[1]),
(%i6)              map("=",A.matrix(xx),B)
                  )
              )$
      transpose(eqs);
```

(%o7) $$\begin{bmatrix} 0.890248\ x4 + 0.459545\ x3 + 0.736242\ x2 + 89.08649\ x1 = 0.123714 \\ 0.796204\ x4 + 0.509364\ x3 + 4.421526\ x2 + 0.199084\ x1 = 0.30367 \\ 0.968835\ x4 + 79.81701\ x3 + 0.483555\ x2 + 0.029976\ x1 = 0.09496 \\ 67.76337\ x4 + 0.893752\ x3 + 0.953567\ x2 + 0.959853\ x1 = 2.2800000000000001\ 10^{-4} \end{bmatrix}$$

```
(%i8) p: linsolve(eqs, xx),numer$ transpose(p);
```

```
rat: replaced -0.123714 by -61857/500000 = -0.123714
rat: replaced 89.08649 by 8908649/100000 = 89.08649
rat: replaced 0.736242 by 368121/500000 = 0.736242
rat: replaced 0.459545 by 91909/200000 = 0.459545
rat: replaced 0.890248 by 111281/125000 = 0.890248
rat: replaced -0.30367 by -30367/100000 = -0.30367
rat: replaced 0.199084 by 49771/250000 = 0.199084
rat: replaced 4.421526 by 2210763/500000 = 4.421526
rat: replaced 0.509364 by 127341/250000 = 0.509364
rat: replaced 0.796204 by 199051/250000 = 0.796204
rat: replaced -0.09496 by -1187/12500 = -0.09496
rat: replaced 0.029976 by 3747/125000 = 0.029976
rat: replaced 0.483555 by 96711/200000 = 0.483555
rat: replaced 79.81701 by 7981701/100000 = 79.81701
rat: replaced 0.968835 by 193767/200000 = 0.968835
rat: replaced -2.28E-4 by -57/250000 = -2.28E-4
rat: replaced 0.959853 by 959853/1000000 = 0.959853
rat: replaced 0.953567 by 953567/1000000 = 0.953567
rat: replaced 0.893752 by 111719/125000 = 0.893752
rat: replaced 67.76337 by 6776337/100000 = 67.76337
```

$$(\%o9) \quad \begin{bmatrix} x1 = 8.2649079235572512\ 10^{-4} \\ x2 = 0.068729791420615 \\ x3 = 7.8499218181846164\ 10^{-4} \\ x4 = -9.8586240640897082\ 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Összevetve a megoldásokat látható, hogy a Jacobi módszer pontosabb a Gauss-Seidel módszernél, mivel a maga a módszer természeténél fogva a Jacobi módszer már az aktuális iterációnál felhasználja az adott iterációban kiszámolt előző *x* értékeket.

5. Laboratóriumi munka. Differenciálegyenletek numerikus megoldása

5.1. Közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldása

Feladat

Oldja meg az alábbi Cauchy feladatot Runge-Kutta4 módszerrel!

$$x^2 y' = 5xy + 6, y(1) = 1.$$

Megoldás

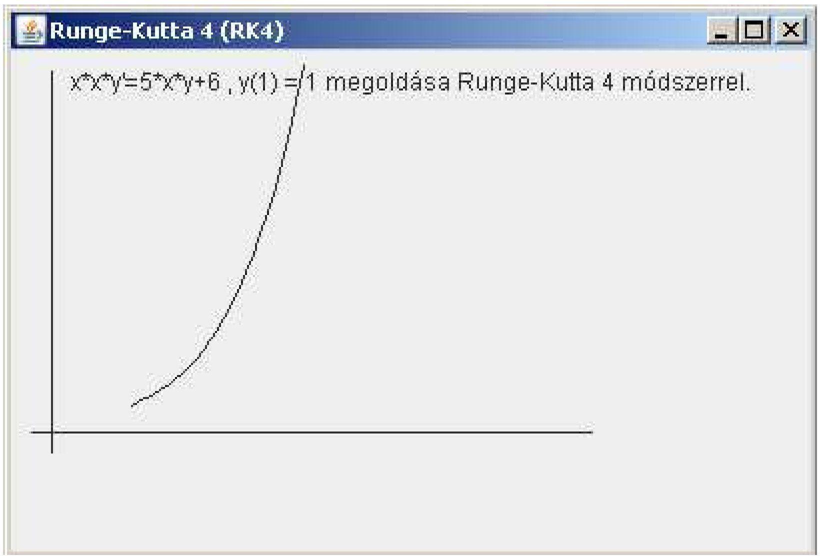
Megoldás Java-val

```
package labor_5_rk4;

/**
 *
 * @author Beregszászi István
 * @since 2016.04.24.
 */
import java.awt.Dimension;
import java.awt.Graphics;
import javax.swing.JFrame;
import javax.swing.JPanel;
import javax.swing.SwingUtilities;

public class Labor_5_rk4 {

private static final int n = 25;
    private static double t[] = new double[n + 1], y[] = new double[n +
1];

    public static double f(double t, double y) {
        return (5*t*y+6)/(t*t);
    }

    public static void main(String[] args) {
        double a = 1.0, b = 2.0, h = (b - a) / n, t0 = 1.0, y0 = 1.0;
        t[0] = t0;
        y[0] = y0;
        System.out.println("t[0]=" + t[0] + ", y[0]=" + y[0]);
        for (int i = 0; i < n; i++) {
```

```
            double k1 = h * f(t[i], y[i]);
            double k2 = h * f(t[i] + h / 2.0, y[i] + k1 / 2.0);
            double k3 = h * f(t[i] + h / 2.0, y[i] + k2 / 2.0);
            double k4 = h * f(t[i] + h, y[i] + k3);
            y[i + 1] = y[i] + 1 / 6.0 * (k1 + 2.0 * k2 + 2.0 * k3 + k4);
            t[i + 1] = t[i] + h;
            System.out.println("t[" + (i + 1) + "]="
                + t[i + 1] + ", y[" + (i + 1) + "]=" + y[i + 1]);
        }

        SwingUtilities.invokeLater(new Runnable() {
            public void run() {
                createAndShowGUI();
            }
        });
    }

    private static void createAndShowGUI() {
        System.out.println("Runge-Kutta4 GUI létrejött? "
                + (SwingUtilities.isEventDispatchThread() ?
                     "igen" : "nem"));
        JFrame f = new JFrame("Runge-Kutta 4 (RK4)");
        f.setDefaultCloseOperation(JFrame.EXIT_ON_CLOSE);
        f.add(new MyPanel());
        f.pack();
        f.setVisible(true);
    }

    static class MyPanel extends JPanel {

        public Dimension getPreferredSize() {
            return new Dimension(400, 250);
        }

        public void paintComponent(Graphics g) {
            super.paintComponent(g);
            g.drawString("x*x*y'=5*x*y+6 , y(1) = 1 "
                     + "megoldása Runge-Kutta 4 módszerrel.",
                    30, 20);
            int[] tt = new int[n + 1], yy = new int[n + 1];
            for (int i = 0; i < t.length; i++) {
                tt[i] = (int) (-30 + 90 * t[i]);
                yy[i] = (int) (180 - 3 * y[i]);
            }
            g.drawPolyline(tt, yy, n);
            g.drawLine(10, 190, 290, 190);  //X
            g.drawLine(20, 10, 20, 200);    //Y
        }
    }
}
```

A Java program kimenete

```
t[0]=1.0, y[0]=1.0
t[1]=1.04, y[1]=1.4717627106123872
t[2]=1.08, y[2]=2.012719911877686
t[3]=1.12, y[3]=2.631809059828897
t[4]=1.1600000000000001, y[4]=3.3385890476906637
t[5]=1.2000000000000002, y[5]=4.143271799319225
t[6]=1.2400000000000002, y[6]=5.056752504304806
t[7]=1.2800000000000002, y[7]=6.090638791888685
t[8]=1.3200000000000003, y[8]=7.257279068805477
t[9]=1.3600000000000003, y[9]=8.569790193190848
t[10]=1.4000000000000004, y[10]=10.042084617346472
t[11]=1.4400000000000004, y[11]=11.688897102643406
t[12]=1.4800000000000004, y[12]=13.525811087513034
t[13]=1.5200000000000005, y[13]=15.56928477243219
t[14]=1.5600000000000005, y[14]=17.836676972699582
t[15]=1.6000000000000005, y[15]=20.346272779640884
t[16]=1.6400000000000006, y[16]=23.117309062950472
t[17]=1.6800000000000006, y[17]=26.169999840647435
t[18]=1.7200000000000006, y[18]=29.525561538197415
t[19]=1.7600000000000007, y[19]=33.20623815443321
t[20]=1.8000000000000007, y[20]=37.2353263487723
t[21]=1.8400000000000007, y[21]=41.63720046170803
t[22]=1.8800000000000008, y[22]=46.437337478512475
t[23]=1.9200000000000008, y[23]=51.66234194443275
t[24]=1.9600000000000009, y[24]=57.339970838310265
t[25]=2.000000000000001, y[25]=63.49915841044389
Runge-Kutta4 GUI létrejött? igen
```



Megoldás és wxMaxima-val

```
(%i1) f(x):=(5*x*y+6)/(x*x);
```

(%o1) $f(x):=\frac{5\,x\,y+6}{x\,x}$

```
        d:ode2('diff(y,x)=f(x), y, x);
(%i2) k:ic1(%, x=1, y=1.0);
        y(x):=rhs(k)$ y(x)$
```

(%o2) $y=\left(\%c-\frac{1}{x^6}\right)x^5$

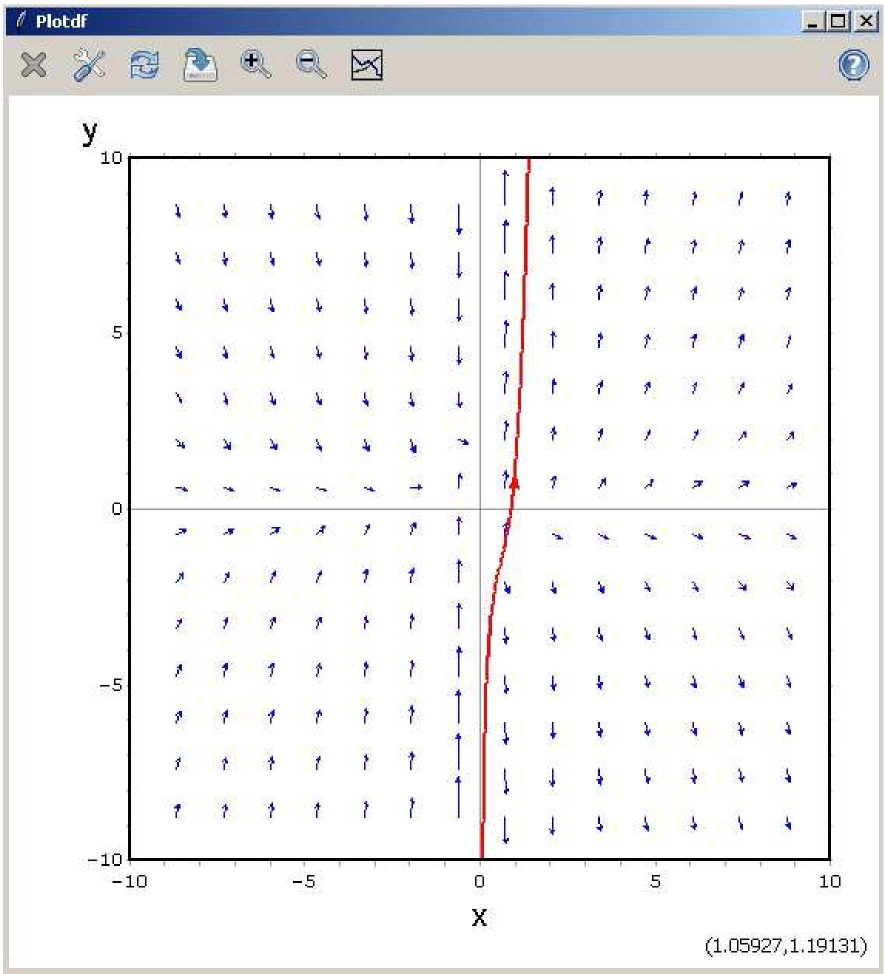
rat: replaced 2.0 by 2/1 = 2.0

(%o3) $y=\frac{2\,x^6-1}{x}$

```
(%i6) subst(2,x,y(x)),numer;
```

(%o6) 63.5

```
(%i7) plotdf(f(x),[trajectory_at,1,1.0])$
(%i8) a:1;b:2;n:25;h:(b-a)/n;results: rk(f(x),y,1,[x,a,b,h])$
        wxplot2d ([discrete, results])$
```



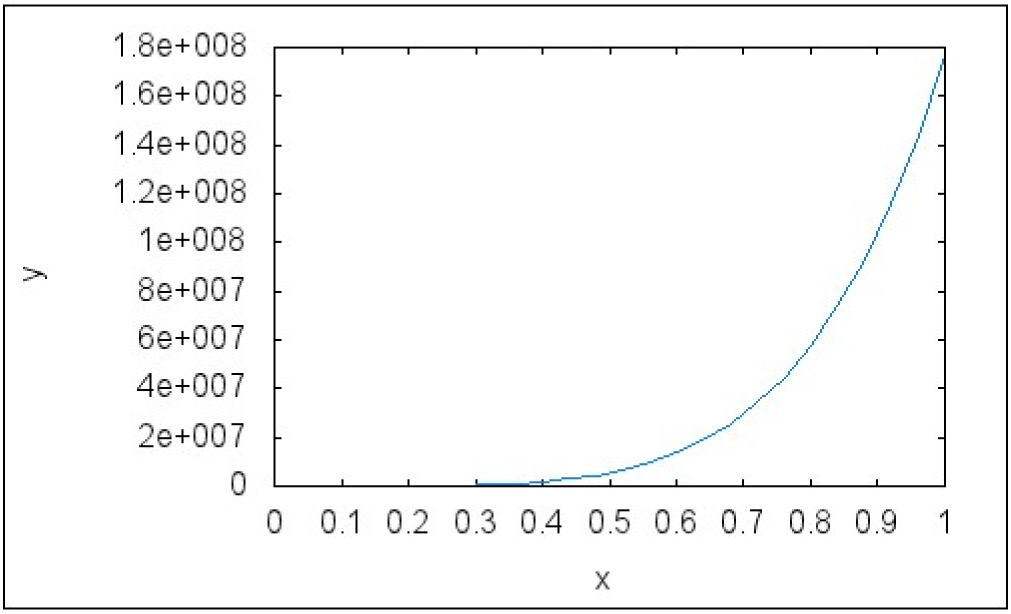
(%o8) 1

(%o9) 2

(%o10) 25

(%o11) $\frac{1}{25}$

(%t13)

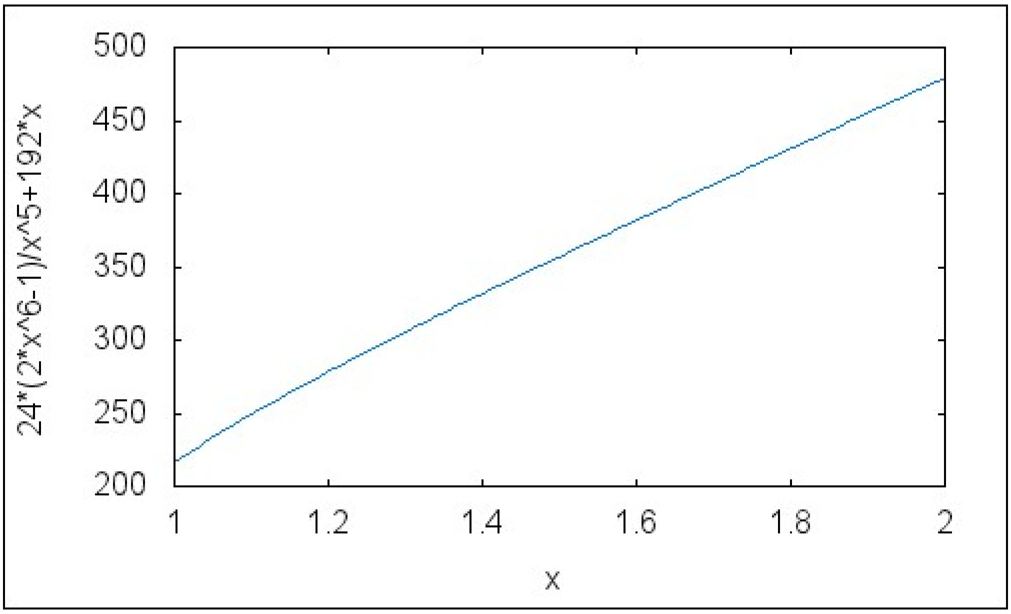



```
(%i14) diff4:diff(y(x),x,4);
```

(%o14) $\frac{24\,(2\,x^6-1)}{x^5}+192\,x$

```
(%i15) wxplot2d([diff(y(x),x,4)], [x,1,2])$
```

(%t15)



```
(%i16) fc:subst(2.0, x, diff4);
```

(%o16) 479.25

```
(%i17) Hiba:((b-a)/5760)*fc*h^4;
```

(%o17) $2.1300000000000001\ 10^{-7}$

6. Laboratóriumi munka. Nemlineáris egyenletrendszerek

6.1. Nemlineáris egyenletrendszerek megoldása iterációs módszerrel

Feladat

Oldja meg az alábbi nemlineáris egyenletrendszert iterációs módszerrel!

$$\begin{cases} \sin(x-1) + y = 1{,}5; \\ x - \sin(y+1) = 1. \end{cases}$$

Megoldás

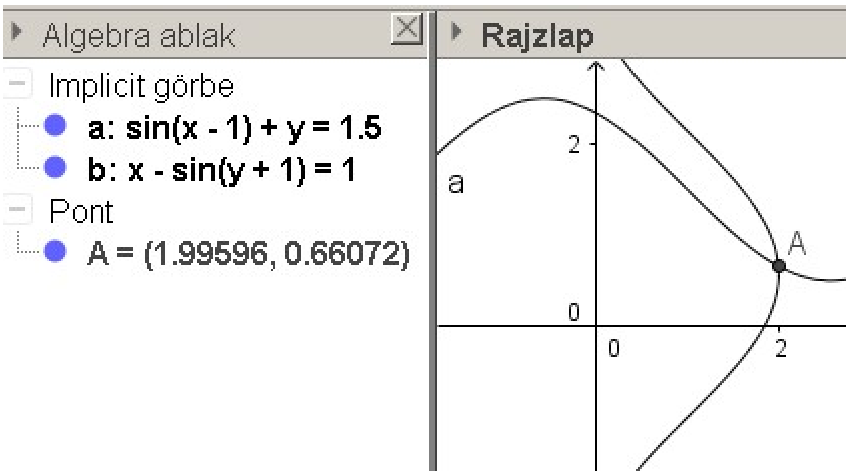
Megoldás Java-val

```
public class Labor_6a_it {

    public static double fx(double y) {
        double xn;
        xn = 1 + (Math.sin(y + 1));
        return xn;
    }

    public static double fy(double x) {
        double yn;
        yn = 1.5 - Math.sin(x - 1);
        return yn;
    }

    public static void main(String[] args) {
        double x0 = 1.0, y0 = 1.0, x = 0.0, y = 0.0;
        int n = 25;

        for (int i = 0; i < n; i++) {

            x = fx(y0);
            y = fy(x0);

            x0 = x;
            y0 = y;
            System.out.println("x=" + x + " y=" + y);
        }

        System.out.println("x=" + x + " y=" + y);
    }

}
```

Java kimenete

```
x=1.9092974268256817 y=1.5
x=1.5984721441039564 y=0.7109276564271116
x=1.990197661527404 y=0.9366191790344752
x=1.933829728430489 y=0.6638655828560727
x=1.9956721820638132 y=0.6960964015147028
x=1.9921602108230645 y=0.6608752182697956
x=1.9959456392613562 y=0.6627906872073739
x=1.9957715022232476 y=0.6607265056202699
x=1.995959006010235 y=0.660821198303651
x=1.9959504972888271 y=0.6607192380671276
x=1.9959596586756887 y=0.6607238642745701
x=1.9959592432234041 y=0.660718883214232
x=1.995959690542045 y=0.660719109094763
x=1.9959596702576272 y=0.6607188658885673
x=1.995959692097914 y=0.6607188769171586
x=1.9959596911075308 y=0.660718865042645
x=1.995959692173879 y=0.6607188655811139
x=1.9959596921255236 y=0.6607188650013429
x=1.995959692177588 y=0.6607188650276337
x=1.995959692175227 y=0.6607188649993264
x=1.995959692177769 y=0.6607188650006101
x=1.995959692177654 y=0.6607188649992279
x=1.9959596921777778 y=0.6607188649992906
x=1.9959596921777722 y=0.6607188649992232
x=1.9959596921777782 y=0.6607188649992262
x=1.9959596921777782 y=0.6607188649992262
```

Megoldás Geogebra-val



Ellenőrzés és hibabecslés Excel-lel

x=	1,995959692177770	1,5
y=	0,660718864999226	1,0

$$q_1 = \left|\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\right|$$

$$q_2 = \left|\frac{\partial G(x,y)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial G(x,y)}{\partial y}\right|$$

q1	1,0898014006413400
q2	1,0898014006413400

$$E = \frac{M \cdot (|x_n - x_{n-1}| + |y_n - y_{n-1}|)}{|1-M|}$$

n=	25
M=	1,0898014006413400
X_n=	1,995959692177770
Y_n=	0,660718864999226
X_{n-1}=	1,995959692177770
Y_{n-1}=	0,660718864999223

hiba	0,0000000000000364

6.2. Nemlineáris egyenletrendszerek megoldása Newton módszerrel

Feladat

Oldja meg az alábbi nemlineáris egyenletrendszert Newton módszerrel!

$$\begin{cases} \sin(x+y) - 1{,}2x = 0; \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Megoldás

Megoldás Java-val

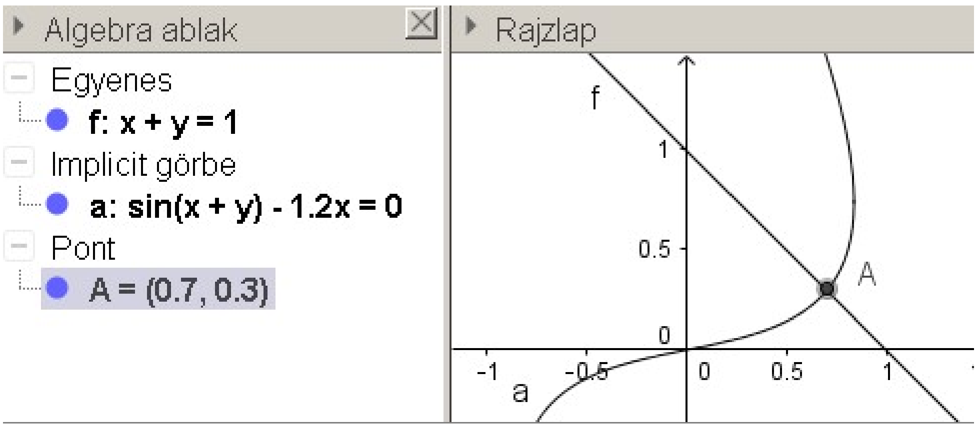
```
package labor_6b_nw;

/**
 *
 * @author Beregszászi István
 * @since 2016.04.27.
 */
public class Labor_6b_nw {

    public static double Jx(double x, double y) {
        double nx;
        nx = (Math.cos(x + y) - 1.2) * 1 - (Math.cos(x + y) * 1);
        return nx;
    }

    public static double J1x(double x, double y) {
        double nx;
        nx = (Math.sin(x + y) - 1.2 * x) * 1 - (Math.cos(y + x)
                * (x + y - 1));
        return nx;
    }

    public static double J2x(double x, double y) {
        double nx;
        nx = (Math.cos(x + y) - 1.2) * (x + y - 1) - ((x + y - 1) * 1);
        return nx;
    }

    public static void main(String[] args) {
        double x0 = 0.0, y0 = 0.0, x = 0.0, y = 0.0;
        int n = 10;

        System.out.println("x=" + x + " y=" + y);

        for (int i = 0; i < n; i++) {

            x = x0 - J1x(x0, y0) / Jx(x0, y0);
            y = y0 - J2x(x0, y0) / Jx(x0, y0);

            x0 = x;
```

```
                y0 = y;

                System.out.println("x0="+x0+" y0="+y0);
            }

            System.out.println("x=" + x + " y=" + y);
        }

}
```

Java kimenete

```
x=0.0 y=0.0
x0=0.8333333333333334 y0=1.0
x0=0.9850090584221063 y0=-0.7080079580686345
x0=0.8074253291853304 y0=0.037958279916730286
x0=0.7090041954308528 y0=0.23593885987863547
x0=0.7022627765316483 y0=0.31000012988522896
x0=0.7012788202286842 y0=0.2929336699138412
x0=0.7012375353548139 y0=0.3009148232423619
x0=0.7012274464339037 y0=0.2979346853008152
x0=0.7012260667233319 y0=0.29909303317970487
x0=0.7012258563791941 y0=0.2986516206258589
x=0.7012258563791941 y=0.2986516206258589
```

Megoldás Geogebra-val



Ellenőrzés és hibabecslés Excel-lel

$$J(x_n, y_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial G(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial G(x,y)}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$E_{newton} = \frac{M(|x_n - x_{n-1}| + |y_n - y_{n-1}|)}{1-M}$$

$J(x_n,y_n)$	0,6595945986423760	0,540405
	1	1
det(J)	0,119189197	
n=	10	
M=	0,119189197	
X_{n-1}=	0,7012260667233310	
Y_{n-1}=	0,2990930331797040	
X_n=	0,7012258563791940	
Y_n=	0,2986516206258580	
hiba:	5,97593E-05	

7. Laboratóriumi munka. Lagrange interpolációs polinom

7.1. Lagrange interpolációs polinom megszerkesztése

Feladat

Szerkessze meg az alábbi *f(x)* függvény számára a Lagrange interpolációs polinomot! Határozza meg a kapott interpolációs polinommal a függvény értékét a 0,185204 pontban! Ábrázolja grafikusan az eredményt! Végezzen hibabecslést!

$$f(x) = 0{,}3\sin(10x) - 0{,}2\cos(50x)$$

x	y
0,121	0,08609774
0,135	0,11411574
0,138	0,13141104
0,141	0,15210514
0,154	0,26918298
0,189	0,48478207

Megoldás

Megoldás Java-val

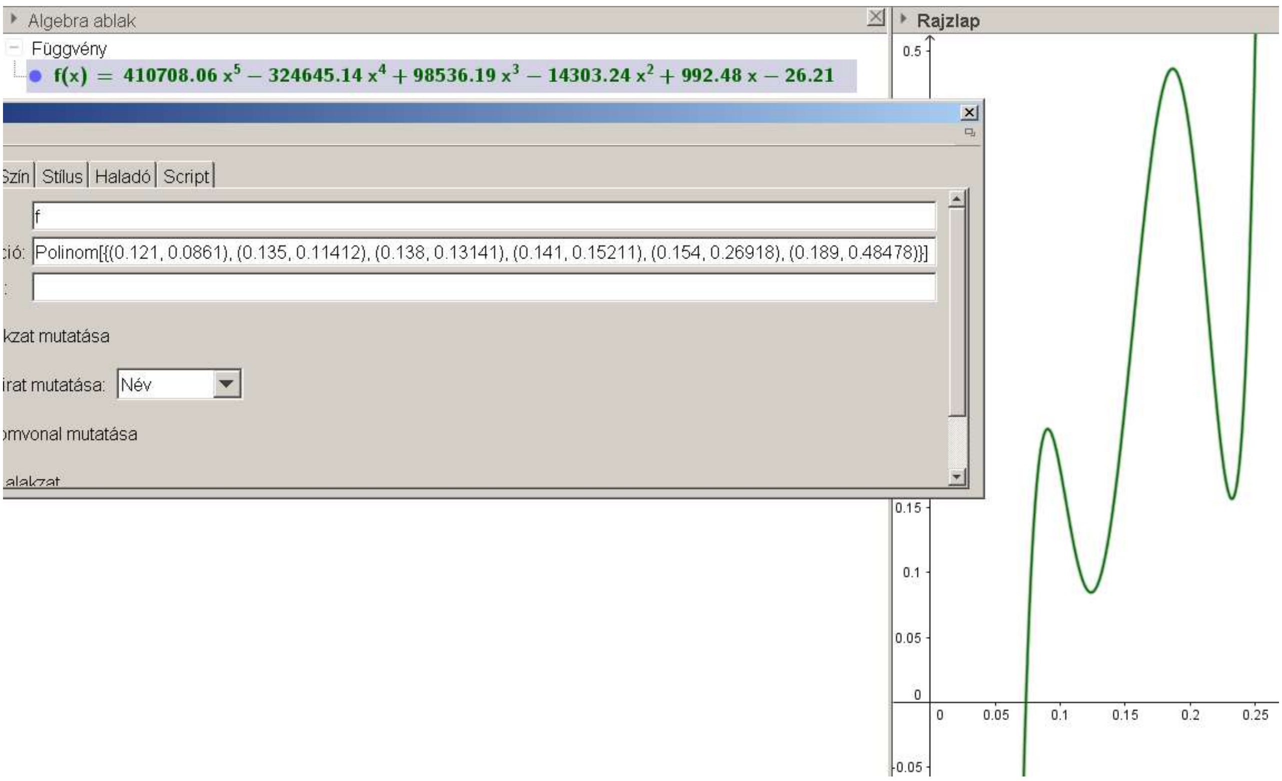
```
/*
 * Függvények közelítése Lagrange n-fokú polinommal
 */
package Labor_7_Lagrange;

/**
 * @author Beregszászi István
 * @since 2016.04.27.
 */
public class Labor_7_Lagrange {

    static int n = 6;
    static double[] x = {0.121, 0.135, 0.138, 0.141, 0.154, 0.189};
    static double[] y = {0.08609774, 0.1141154, 0.13141104,
                         0.15210514, 0.26918298, 0.48478207};

    static double f(double t) {
        double L = 0.0;
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            double P = 1.0;
            for (int j = 0; j < n; j++) {
                if (i != j) {
                    P *= (t - x[j]) / (x[i] - x[j]);
                }
            }
```

```
            L += y[i] * P;
        }
        return L;
    }

    public static void main(String[] args) {
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            System.out.println("f(" + x[i] + ")=" + f(x[i]));
        }
        double x0 = 0.185204;
        System.out.println("f(" + x0 + ")=" + f(x0));
    }
}
```

A Java program kimenete

```
f(0.121)=0.08609774
f(0.135)=0.1141154
f(0.138)=0.13141104
f(0.141)=0.15210514
f(0.154)=0.26918298
f(0.189)=0.48478207
f(0.185204)=0.48635563812446975
```

Megoldás Geogebra-val




```
Polinom[{
            (0.121, 0.0861), (0.135, 0.11412), (0.138, 0.13141),
            (0.141, 0.15211), (0.154, 0.26918), (0.189, 0.48478)
        }]
```

Megoldás és hibabecslés wxMaximával

```
f(x):=410708.0585964418*x^5-324645.1371865619*x^4+98536.18933587038*x^3-
14303.24038787235*x^2+992.4760245826774*x-26.2147698051579
```

```
(%i1) p:matrix([0.121,0.08609774],[0.135,0.11411574],
      [0.138,0.13141104],[0.141,0.15210514],
      [0.154,0.26918298],[0.189,0.48478207]);
```

(%o1) $\begin{bmatrix} 0.121 & 0.08609774 \\ 0.135 & 0.11411574 \\ 0.138 & 0.13141104 \\ 0.141 & 0.15210514 \\ 0.154 & 0.26918298 \\ 0.189 & 0.48478207 \end{bmatrix}$

```
(%i2) n:5;
```

(%o2) 5

```
(%i3) load(interpol)$
(%i4) P(x):=lagrange(p);P(x);
```

(%o4) P(x):=lagrange(p)

(%o5) $1540864.389510343(x-0.154)(x-0.141)(x-0.138)(x-0.135)(x-0.121)-5.8972382880277634\,10^7(x-0.189)(x-0.141)(x-0.138)(x-0.135)(x-0.121)+6.7710621438747215\,10^8(x-0.189)(x-0.154)(x-0.138)(x-0.135)(x-0.121)-1.0525682429834759\,10^9(x-0.189)(x-0.154)(x-0.141)(x-0.135)(x-0.121)+4.413647544787907\,10^8(x-0.189)(x-0.154)(x-0.141)(x-0.138)(x-0.121)-8060499.333423198(x-0.189)(x-0.154)(x-0.141)(x-0.138)(x-0.135)$

```
(%i6) m:col(p,1);
```

(%o6) $\begin{bmatrix} 0.121 \\ 0.135 \\ 0.138 \\ 0.141 \\ 0.154 \\ 0.189 \end{bmatrix}$

```
(%i7) f(x):=0.3*sin(10*x)-0.2*cos(50*x);
```

(%o7) f(x):=0.3 sin(10 x)−0.2 cos(50 x)

(%i8) fakt:(n+1)!;

(%o8) 720

(%i9) dnf(x):=diff(f(x),x,n+1);dnf(x);

(%o9) dnf(x):=diff(f(x),x,n+1)

(%o10) $3.125\ 10^9 \cos(50\ x)-300000.0 \sin(10\ x)$

(%i11) k(x):=product(x-m[i],i,1,n+1)[1];k(x);

(%o11) $k(x) := \left(\prod_{i=1}^{n+1} x - m_i\right)_1$

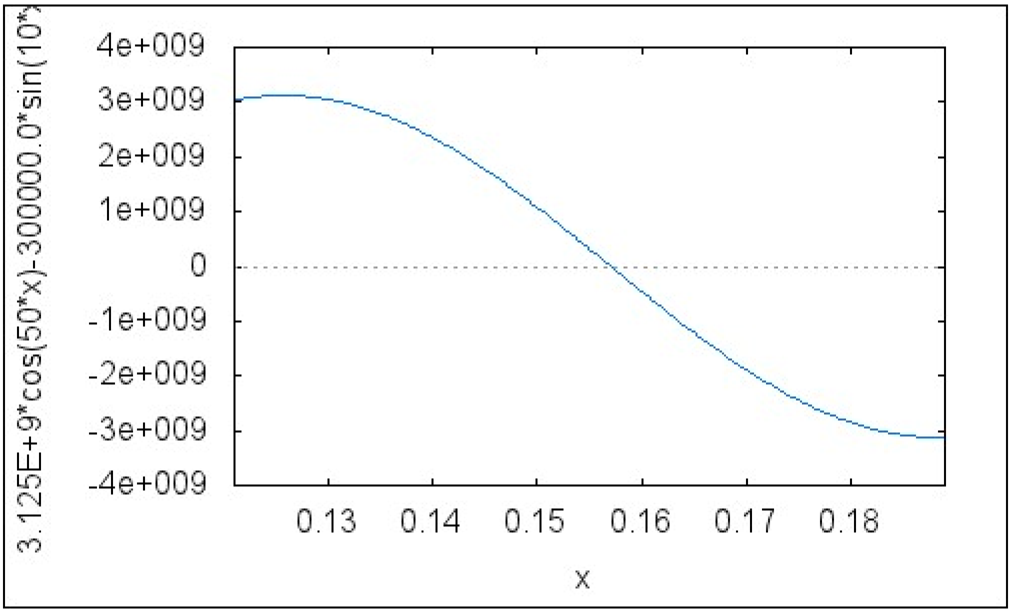
(%o12) (x−0.189)(x−0.154)(x−0.141)(x−0.138)(x−0.135)(x−0.121)

(%i13) c:0.2;

(%o13) 0.2

(%i14) wxplot2d([dnf(x)], [x,0.121,0.189])$

(%t14)




```
      xdmax1:find_root(diff(dnf(x),x)=0, x, 0.121, 0.18);
(%i15) xdmax2:find_root(diff(dnf(x),x)=0, x, 0.18, 0.189);
      xdmax:max(abs(xdmax1),abs(xdmax2));
```

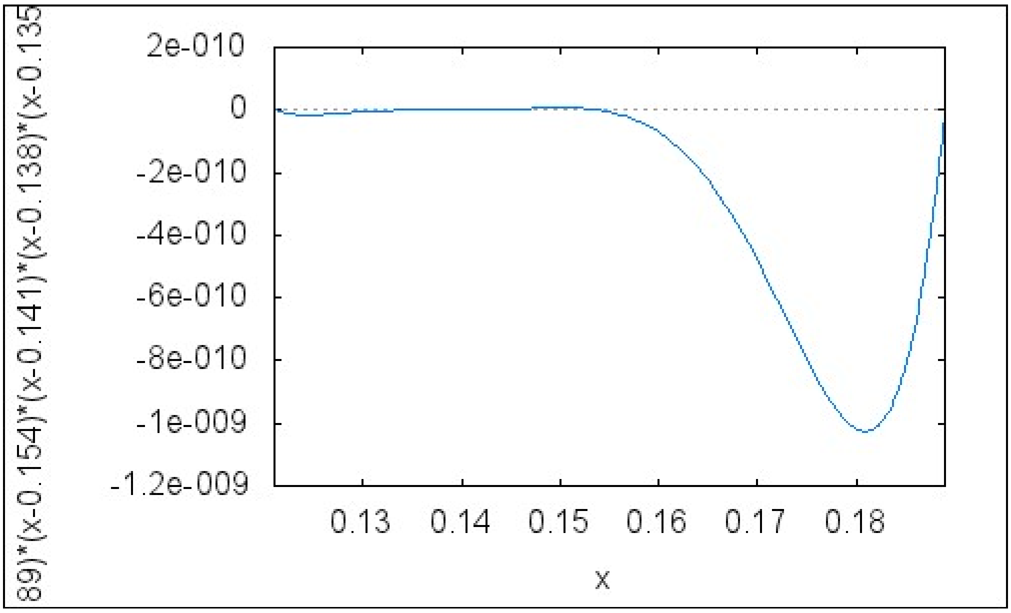
(%o15) 0.12566358748063

(%o16) 0.1884954405533

(%o17) 0.1884954405533

(%i18) maxf:abs(subst(xdmax, x, dnf(x)));

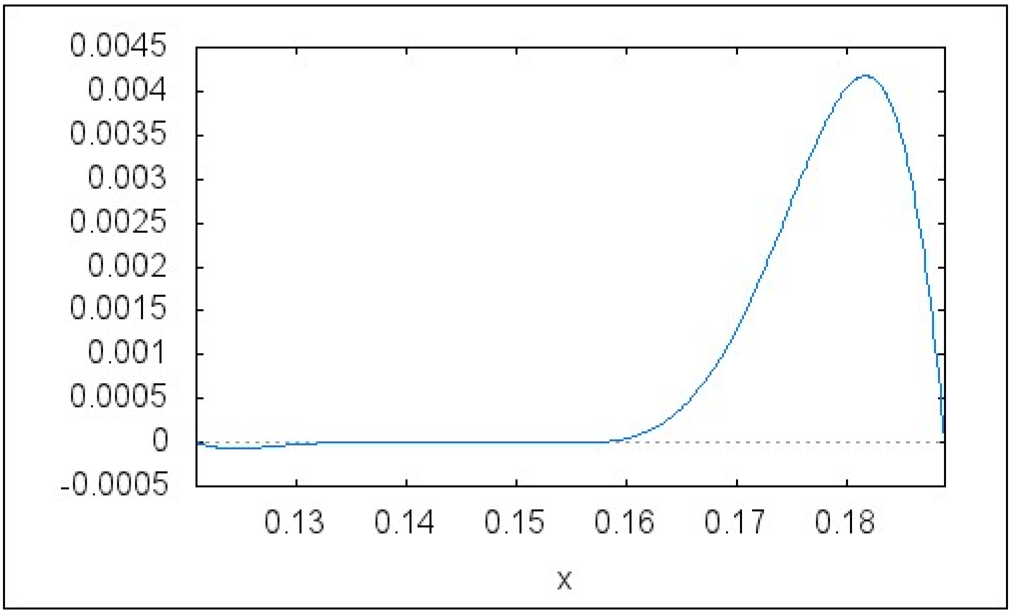
```
(%o18) 3.1252853170098915 10^9
(%i19) wxplot2d([k(x)], [x,0.121,0.189])$
```

(%t19) 

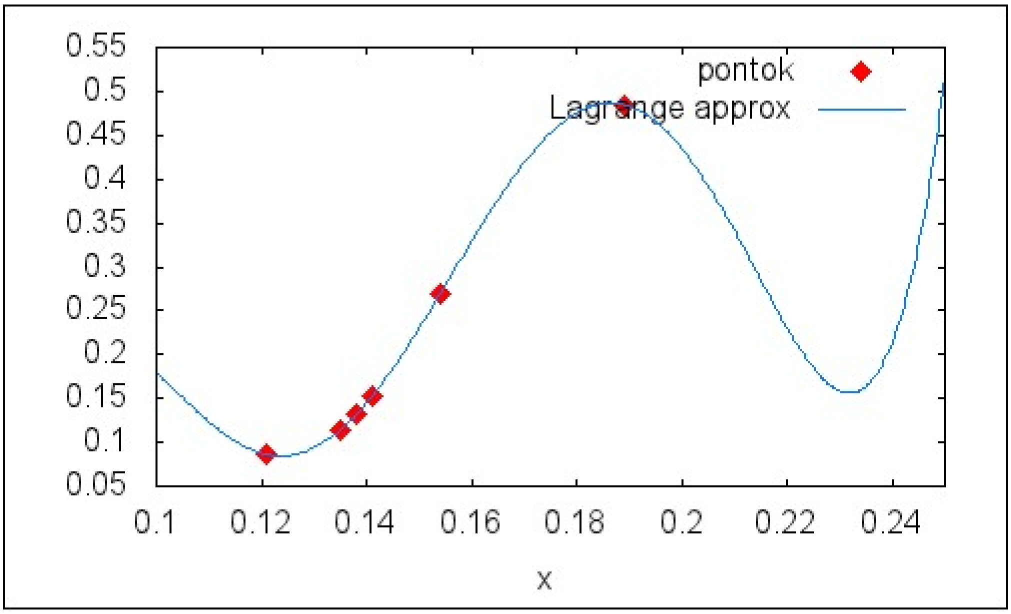

```
(%i20) xkmax:find_root(diff(k(x),x)=0, x, 0.121, 0.189);

(%o20) 0.1809307250641
(%i21) maxk:abs(subst(xkmax,x,k(x)));

(%o21) 1.0254413170852002 10^-9
(%i22) Enxmax:maxk/fakt*maxf;

(%o22) 0.0044511065163079
(%i23) hp:0.12;

(%o23) 0.12
(%i24) approxhiba:abs(subst(hp,x,f(x))-subst(hp,x,P(x)));

(%o24) 3.5820029229985395 10^-5
(%i25) Enxmax-approxhiba;

(%o25) 0.0044152864870779
(%i26) Enx(x):=dnf(x)/(n+1)!*k(x);
```

(%o26) $\mathrm{Enx}(x):=\dfrac{\mathrm{dnf}(x)}{(n+1)!}\,\mathrm{k}(x)$

```
(%i27) wxplot2d([Enx(x)], [x,0.121,0.189])$
```

(%t27) 


```
(%i28) wxplot2d ([[discrete, args(p)],P(x)],[x,0.1,0.25],
       [style,points,lines], [point_type,diamond],
       [legend, "pontok", "Lagrange approx"], [color,red,blue]);
```

(%t28) 

(%o28)

```
(%i29) subst(0.185204,x,P(x));
```

(%o29) 0.48633477064733

8. Laboratóriumi munka. Newton interpolációs polinom

8.1. Newton interpolációs polinom megszerkesztése

Feladat

Szerkessze meg az alábbi *f(x)* függvény számára a Newton interpolációs polinomot! Határozza meg a kapott interpolációs polinommal a függvény értékét a 0,736634, 0,588552, 0,602484, 0,710981 pontokban! Ábrázolja grafikusan az eredményt! Végezzen hibabecslést!

$$f(x) = \operatorname{tg} x + x^3 - 2\cos(15{,}6x)$$

x	y
0,57	2,548960334
0,59	2,826389406
0,61	2,917584171
0,63	2,818764717
0,65	2,544724699
0,67	2,127413972
0,69	1,612865248
0,71	1,05676159
0,73	0,519072814
0,75	0,058278783
0,77	–0,27426252
0,79	–0,4392582

Megoldás

Megoldás Java programmal

```
package labor_8_newton_polinom;

/**
 * @author Beregszászi István
 * @since 2016.04.27.
 */
public class Labor_8_newton_polinom {

    static int n = 12;
    static double x[] = {0.57, 0.59, 0.61, 0.63, 0.65, 0.67,
                         0.69, 0.71, 0.73, 0.75, 0.77, 0.79};
    static double y[] = {2.548960334, 2.826389406, 2.917584171,
                         2.818764717, 2.544724699, 2.127413972,
                         1.612865248, 1.05676159, 0.519072814,
                         0.058278783, -0.27426252, -0.4392582};

    public static double Newton_Polinom_4(double t) {
```

```
        double N = y[0];
        double v[][] = new double[100][100];

        for (int i = 0; i < n; i++) {

            for (int j = 0; j < n - 1; j++) {
                if (i == 0) {
                    v[i][j] = (-y[j] + y[j + 1]) / (-x[j] + x[j + 1]);
                } else {
                    if ((i + j + 1) >= n) {
                        break;
                    }
                    v[i][j] = (-v[i - 1][j] + v[i - 1][j + 1])
                            / (-x[j] + x[i + j + 1]);
                }
            }
        }

        for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
            double a = 1;

            for (int j = 0; j <= i; j++) {
                a = a * (t - x[j]);
            }

            N = N + a * v[i][0];
        }
        return N;
    }

    public static void main(String[] args) {

        double x0[] = {0.736634, 0.588552, 0.602484, 0.710981};
        for (int i = 0; i < 4; i++) {
            System.out.println("x" + (i + 1) + "= "
                    + Newton_Polinom_4(x0[i]));
        }
    }
}
```

A Java program kimenete

```
x1= 0.3549803248395021
x2= 2.8123954595016953
x3= 2.905806088776457
x4= 1.0294661403771663
```

Megoldás wxMaximával

```
(%i1) p:matrix([0.57,2.548960334],[0.59,2.826389406],[0.61, 2.917584171],
      [0.63,2.818764717],[0.65, 2.544724699],[0.67,2.127413972],
      [0.69,1.612865248],[0.71,1.05676159],[0.73, 0.519072814],
      [0.75, 0.058278783],[0.77, -0.27426252],[0.79, -0.4392582]);
```

(%o1)
$$\begin{bmatrix} 0.57 & 2.548960334 \\ 0.59 & 2.826389406 \\ 0.61 & 2.917584171 \\ 0.63 & 2.818764717 \\ 0.65 & 2.544724699 \\ 0.67 & 2.127413972 \\ 0.69 & 1.612865248 \\ 0.71 & 1.05676159 \\ 0.73 & 0.519072814 \\ 0.75 & 0.058278783 \\ 0.77 & -0.27426252 \\ 0.79 & -0.4392582 \end{bmatrix}$$

```
(%i2) n:11;
```

(%o2) 11

```
(%i3) load(interpol)$
(%i4) P(x):=lagrange(p);P(x);
```

(%o4) $P(x):=\mathrm{lagrange}(p)$

(%o5) $-5.3732148611298714\,10^{10}(x-0.77)(x-0.75)(x-0.73)(x-0.71)(x-0.69)(x-0.67)$
$(x-0.65)(x-0.63)(x-0.61)(x-0.59)(x-0.57)+3.6904003002025275\,10^{11}(x-0.79)$
$(x-0.75)(x-0.73)(x-0.71)(x-0.69)(x-0.67)(x-0.65)(x-0.63)(x-0.61)(x-0.59)$
$(x-0.57)+3.9209155935458887\,10^{11}(x-0.79)(x-0.77)(x-0.73)(x-0.71)(x-0.69)$
$(x-0.67)(x-0.65)(x-0.63)(x-0.61)(x-0.59)(x-0.57)-1.047674944034957\,10^{13}(x-0.79)$
$(x-0.77)(x-0.75)(x-0.71)(x-0.69)(x-0.67)(x-0.65)(x-0.63)(x-0.61)(x-0.59)$
$(x-0.57)+4.2658471405190727\,10^{13}(x-0.79)(x-0.77)(x-0.75)(x-0.73)(x-0.69)$
$(x-0.67)(x-0.65)(x-0.63)(x-0.61)(x-0.59)(x-0.57)-9.1149520760995734\,10^{13}$
$(x-0.79)(x-0.77)(x-0.75)(x-0.73)(x-0.71)(x-0.67)(x-0.65)(x-0.63)(x-0.61)$
$(x-0.59)(x-0.57)+1.2022874461986445\,10^{14}(x-0.79)(x-0.77)(x-0.75)(x-0.73)$
$(x-0.71)(x-0.69)(x-0.65)(x-0.63)(x-0.61)(x-0.59)(x-0.57)-1.0272332646607083$
$10^{14}(x-0.79)(x-0.77)(x-0.75)(x-0.73)(x-0.71)(x-0.69)(x-0.67)(x-0.63)(x-0.61)$
$(x-0.59)(x-0.57)+5.6892772795661898\,10^{13}(x-0.79)(x-0.77)(x-0.75)(x-0.73)$
$(x-0.71)(x-0.69)(x-0.67)(x-0.65)(x-0.61)(x-0.59)(x-0.57)-1.962910162864969$
$10^{13}(x-0.79)(x-0.77)(x-0.75)(x-0.73)(x-0.71)(x-0.69)(x-0.67)(x-0.65)(x-0.63)$
$(x-0.59)(x-0.57)+3.803111089474292\,10^{12}(x-0.79)(x-0.77)(x-0.75)(x-0.73)(x-0.71)$
$(x-0.69)(x-0.67)(x-0.65)(x-0.63)(x-0.61)(x-0.57)-3.1180093045683289\,10^{11}$
$(x-0.79)(x-0.77)(x-0.75)(x-0.73)(x-0.71)(x-0.69)(x-0.67)(x-0.65)(x-0.63)$
$(x-0.61)(x-0.59)$

```
(%i6) m:col(p,1);
```

$$(\%o6)\quad \begin{bmatrix} 0.57 \\ 0.59 \\ 0.61 \\ 0.63 \\ 0.65 \\ 0.67 \\ 0.69 \\ 0.71 \\ 0.73 \\ 0.75 \\ 0.77 \\ 0.79 \end{bmatrix}$$

```
(%i7) f(x):=tan(x)+x^3-2*cos(15.6*x);
```

$$(\%o7)\quad f(x):=\tan(x)+x^3+(-2)\cos(15.6\,x)$$

```
(%i8) fakt:(n+1)!;
```

$$(\%o8)\quad 479001600$$

```
(%i9) dnf(x):=diff(f(x),x,n+1);dnf(x);
```

$$(\%o9)\quad dnf(x):=diff(f(x),x,n+1)$$

$$(\%o10)\quad -4.15456134408118 44\; 10^{14}\cos(15.6\,x)+2048\sec(x)^2\tan(x)^{11}+2084864\sec(x)^4\tan(x)^9+56520704\sec(x)^6\tan(x)^7+222398464\sec(x)^8\tan(x)^5+175627264\sec(x)^{10}\tan(x)^3+22368256\sec(x)^{12}\tan(x)$$

```
(%i11) k(x):=product(x-m[i],i,1,n+1)[1];k(x);
```

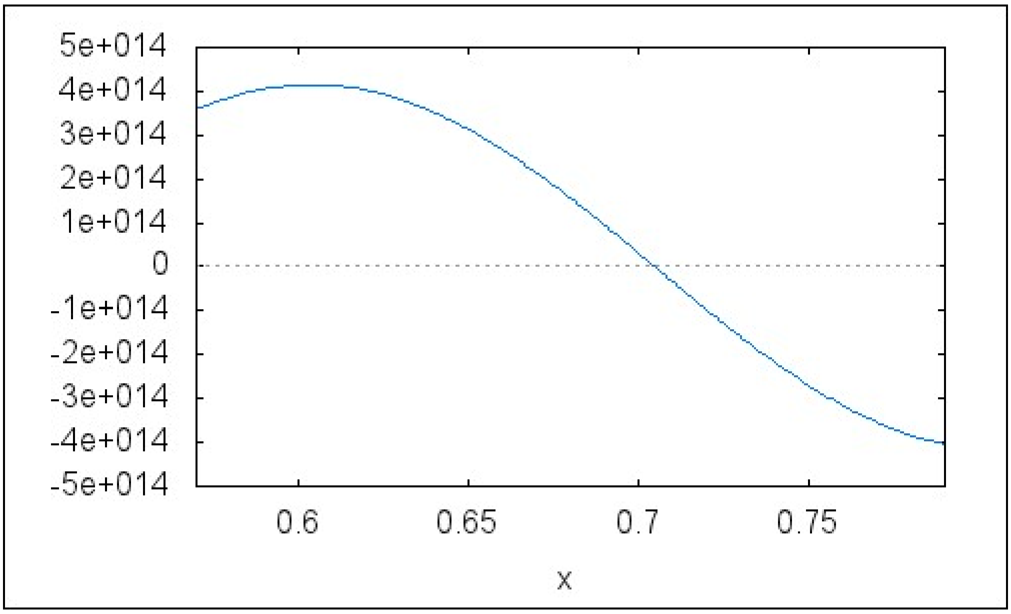
$$(\%o11)\quad k(x):=\left(\prod_{i=1}^{n+1} x-m_i\right)_1$$

$$(\%o12)\quad (x-0.79)(x-0.77)(x-0.75)(x-0.73)(x-0.71)(x-0.69)(x-0.67)(x-0.65)(x-0.63)(x-0.61)(x-0.59)(x-0.57)$$

```
(%i13) c:0.6;
```

$$(\%o13)\quad 0.6$$

```
(%i14) wxplot2d([dnf(x)], [x,0.57,0.79])$
```

(%t14) 

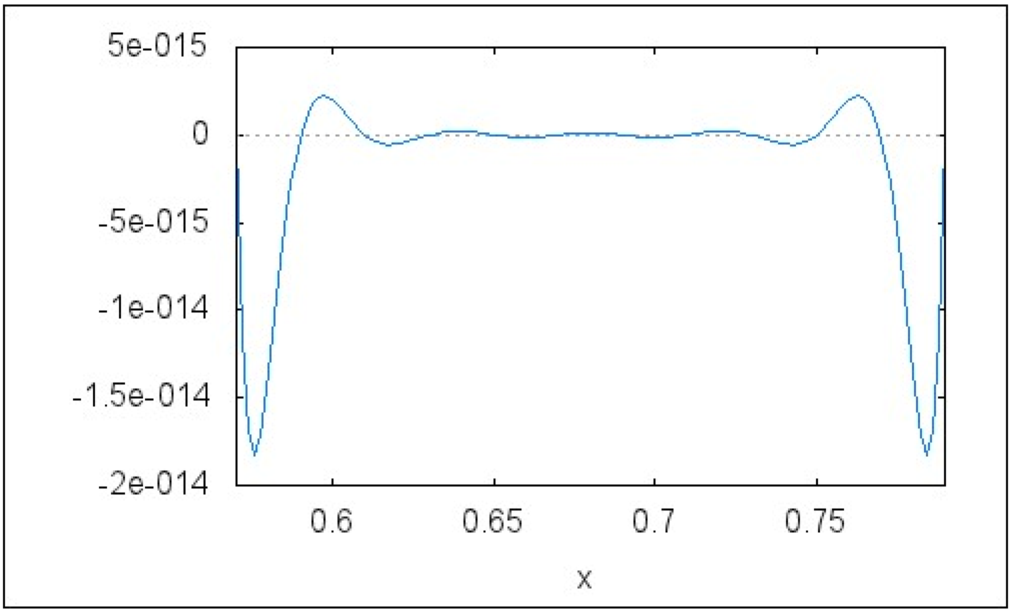

```
(%i15) xdmax:find_root(diff(dnf(x),x)=0, x, 0.57, 0.79);
```

(%o15) 0.60415253241578

```
(%i16) maxf:abs(subst(xdmax, x, dnf(x)));
```

(%o16) $4.1545687890200812\ 10^{14}$

```
(%i17) wxplot2d([k(x)], [x,0.57,0.79])$
```

(%t17) 


```
(%i18) xkmax:find_root(diff(k(x),x)=0, x, 0.57, 0.59);
```

(%o18) 0.57558546692011

```
(%i19) maxk:abs(subst(xkmax,x,k(x)));
```

(%o19) $1.8289198368532603\ 10^{-14}$

```
(%i20) Enxmax:maxk/fakt*maxf;
```

(%o20) $1.5862939229869494\ 10^{-8}$

```
(%i21) hp:0.5755854669201051;
```

(%o21) 0.57558546692011

```
(%i22) approxhiba:abs(subst(hp,x,f(x))-subst(hp,x,P(x)));
```

(%o22) $6.431782217930504\ 10^{-9}$

```
(%i23) Enxmax-approxhiba;
```

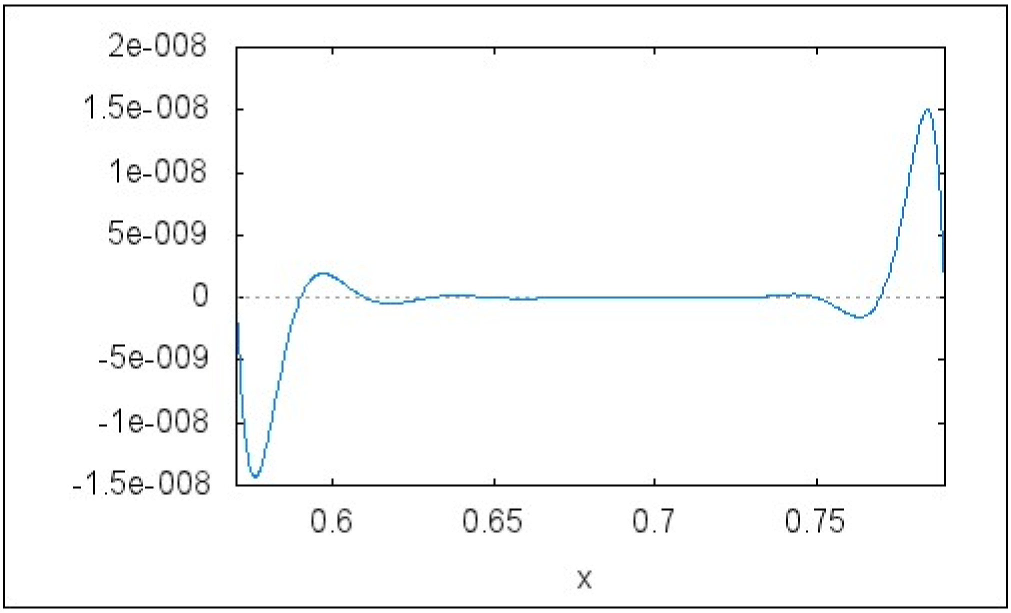
(%o23) $9.4311570119389896\ 10^{-9}$

```
(%i24) Enx(x):=dnf(x)/(n+1)!*k(x);
```

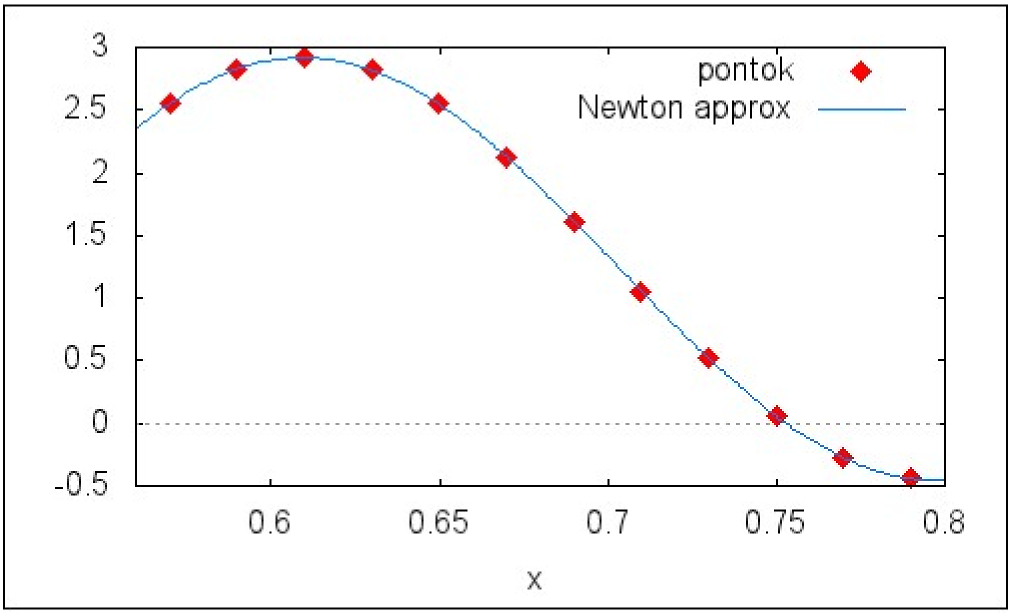
(%o24) $\mathrm{Enx}(x) := \dfrac{\mathrm{dnf}(x)}{(n+1)!}\,\mathrm{k}(x)$

```
(%i25) wxplot2d([Enx(x)], [x,0.57,0.79])$
```

(%t25)




```
(%i26) wxplot2d ([[discrete, args(p)],P(x)],[x,0.56,0.8],
         [style,points,lines], [point_type,diamond],
       [legend, "pontok", "Newton approx"], [color,red,blue]);
```

(%t26) 

(%o26)

```
(%i27) subst(0.736634,x,P(x));
```

(%o27) 0.3549803248395

```
(%i28) subst(0.588552,x,P(x));
```

(%o28) 2.812395459501698

```
(%i29) subst(0.602484,x,P(x));
```

(%o29) 2.905806088776457

```
(%i30) subst(0.710981,x,P(x));
```

(%o30) 1.029466140377167

9. Laboratóriumi munka. Legkisebb négyzetek módszere

9.1. Lineáris regresszió

Feladat

Készítsen lineáris regressziós egyenletet a megadott pontok alapján!

X	7	5,6	13	14,7	15
Y	7,5	7	5	3,5	?

Megoldás

Megoldás Java programmal

```
package labor_9a_lin_regr;

/**
 * @author Beregszászi István
 * @since 2016.04.29.
 */
public class Labor_9a_lin_regr {

    public static double f(double x, double b, double a) {
        return a * x + b;
    }

    public static void main(String[] args) {
        double x[] = {7, 5.6, 13, 14.7};
        double y[] = {7.5, 7, 5, 3.5};
        double a1 = 0.0, a2 = 0.0, a3 = 0.0, a4 = 0.0, a, b,
                R = 0.0, R1 = 0.0, R2 = 0.0;
        for (int i = 0; i < y.length; i++) {
            a1 = a1 + x[i] * y[i];
            a2 = a2 + x[i];
            a3 = a3 + y[i];
            a4 = a4 + x[i] * x[i];
        }
        a = (4 * a1 - a2 * a3) / (4 * a4 - (a2 * a2));

        b = (a3 - a * a2) / 4;

        for (int i = 0; i < y.length; i++) {
            R1 = R1 + (5.75 - f(x[i], b, a)) * (5.75 - f(x[i], b, a));
            R2 = R2 + (y[i] - f(x[i], b, a)) * (y[i] - f(x[i], b, a));
            R = R1 / (R1 + R2);
        }
        for (int i = 0; i < x.length; i++) {
```

```
            System.out.println("f(" + x[i] + ")=" + f(x[i], b, a));
        }
        System.out.println("R=" + R + " a=" + a + " b=" + b);
        double x0 = 15.0, f0 = a * x0 + b;
        System.out.println("f(" + x0 + ")=" + f0);
    }
}
```

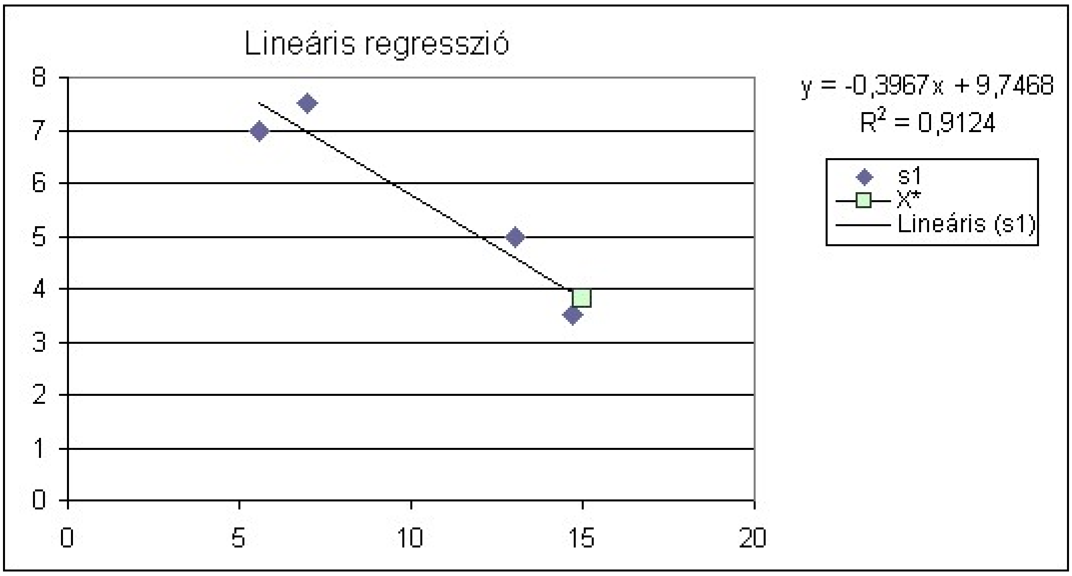
Java program által készített kimenet

```
f(7.0)=6.969858230617139
f(5.6)=7.525240839678601
f(13.0)=4.589647048925162
f(14.7)=3.915253880779102
f(15.0)=3.7962433216945035
R=0.912414286315258 a=-0.39670186361532944 b=9.746771275924445
f(15.0)=3.7962433216945035
```

Megoldás Excel-lel

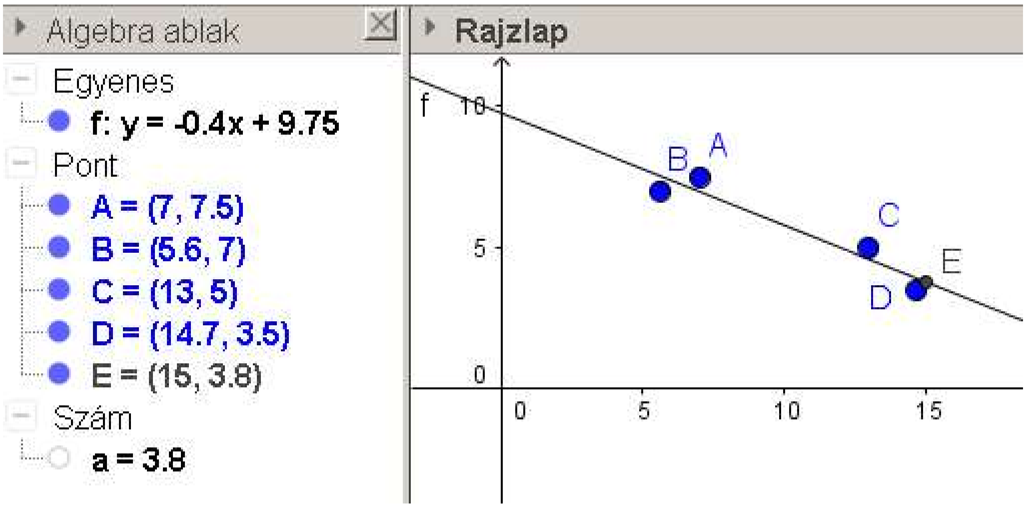
x=	7	5,6	13	14,7
y=	7,5	7	5	3,5

5,6	7	13	14,7	**15**
7	7,5	5	3,5	**3,7963**



Megoldás Geogebra segítségével

GörbeillesztésEgyenes[{(7, 7.5), (5.6, 7), (13, 5), (14.7, 3.5)}]



Megoldás wxMaxima segítségével

```
        load("stats")$
        s:[[7,7.5], [5.6,7], [13,5], [14.7,3.5]]$
        z:simple_linear_regression(s,conflevel=0.99);
        wxplot2d([[discrete, s],
                  [discrete, [[15,subst(15,x,take_inference(model,z))]]],
(%i1)             take_inference(model,z)],
                  [x,-1, 20], [style,points,points,lines],
                  [legend,
                     "Pontok", "Keresett pont", "Lineáris regresszió"],
                  [xlabel, "x"], [ylabel, "y"])$
```

```
Loading C:/Documents and Settings/bb/maxima/binary/binary-gcl
Finished loading C:/Documents and Settings/bb/maxima/binary/b
Loading C:/Documents and Settings/bb/maxima/binary/binary-gcl
Finished loading C:/Documents and Settings/bb/maxima/binary/b
Loading C:/Documents and Settings/bb/maxima/binary/binary-gcl
Finished loading C:/Documents and Settings/bb/maxima/binary/b
Loading C:/Documents and Settings/bb/maxima/binary/binary-gcl
Finished loading C:/Documents and Settings/bb/maxima/binary/b
```

(%o3)

SIMPLE LINEAR REGRESSION

model=9.746771275924445-0.39670186361533 x

correlation=-0.95520379308044

v_estimation=0.4488767826343

b_conf_int=[-1.259270167243985,0.46586644001333]

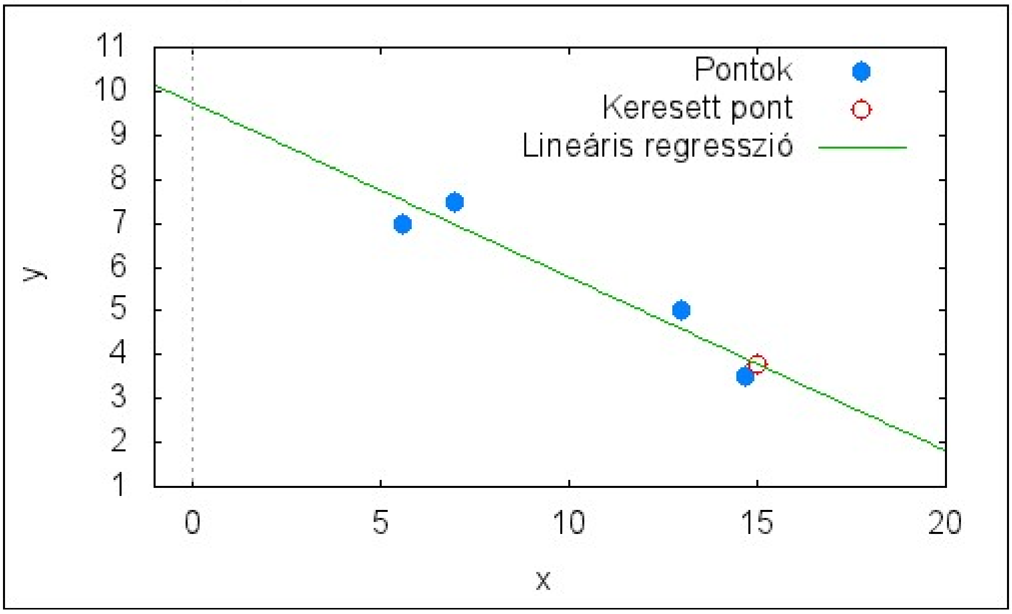
hypotheses=H0: b = 0 ,H1: b # 0

statistic=4.564512488264604

distribution=[student_t,2]

p_value=0.044796206919561

(%t4)



(%i5)
```
R2=take_inference(correlation,z)^2;
x0=take_inference(model,z),x=15;
```

(%o5) R2=0.91241428631526

(%o6) x0=3.796243321694504

10. Laboratóriumi munka. Numerikus optimalizálás

10.1. Numerikus minimum keresése aranymetszés módszerrel

Feladat

Határozza meg a függvény minimumát az adott szakaszon aranymetszés módszerrel!

$$f(x) = 3{,}1 + \frac{\sqrt{2+6x}}{x^4 - 3}\frac{\cos\left(6 + 2\sin^4(x)\right)}{x+5},\ x \in [4{,}3;\ 5{,}2];$$

Megoldás

Java megoldás

```
package labor_10a_ar;

/**
 * @author Beregszászi István
 * @since 2016.04.30.
 */
public class Labor_10a_ar {

    public static double f(double x) {
        return 3.1 + (Math.sqrt(2 + 6 * x) / (x * x * x * x - 3)) *
                Math.cos(6 + 2 * Math.pow(Math.sin(x), 4)) / (x + 5);
    }

    public static void main(String[] args) {
        double a = 4.3, b = 5.2, h = (b - a),
                r1 = (Math.sqrt(5.0) - 1.0) / 2.0, r2 = r1 * r1,
                ya = f(a), yb = f(b), c = a + r2 * h, d = a + r1 * h,
                yc = f(c), yd = f(d);
        System.out.printf("f(%8.6f, %8.6f, %8.6f, %8.6f) = ",
                                                            a, c, d, b);
        System.out.printf("%9.6f, %9.6f, %9.6f, %9.6f %n",
                                                            ya, yc, yd, yb);
        int m = 1, maxIteracio = 25;
        while (m <= maxIteracio) {
            if (yc < yd) {
                b = d;
                yb = yd;
                d = c;
                yd = yc;
                h = b - a;
                c = a + r2 * h;
                yc = f(c);
            } else {
```

```
                a = c;
                ya = yc;
                c = d;
                yc = yd;
                h = b - a;
                d = a + r1 * h;
                yd = f(d);
            }
            System.out.printf("f(%8.6f, %8.6f, %8.6f, %8.6f) = ",
                                                            a, c, d, b);
            System.out.printf("%9.6f, %9.6f, %9.6f, %9.6f %n",
                                                        ya, yc, yd, yb);
            m++;
        }
        double p = a, yp = ya;
        if (yb < ya) {
            p = b;
            yp = yb;

        }

        System.out.println("Minimum aranymetszéssel: yp = "
                                                 + yp + " p = " + p);
    }
}
```

A Java program által készített kimenet

```
f(4,300000, 4,643769, 4,856231, 5,200000) =  3,100720,  3,099844,  3,099934,  3,100461
f(4,300000, 4,512461, 4,643769, 4,856231) =  3,100720,  3,100012,  3,099844,  3,099934
f(4,512461, 4,643769, 4,724922, 4,856231) =  3,100012,  3,099844,  3,099834,  3,099934
f(4,643769, 4,724922, 4,775078, 4,856231) =  3,099844,  3,099834,  3,099858,  3,099934
f(4,643769, 4,693925, 4,724922, 4,775078) =  3,099844,  3,099831,  3,099834,  3,099858
f(4,643769, 4,674767, 4,693925, 4,724922) =  3,099844,  3,099833,  3,099831,  3,099834
f(4,674767, 4,693925, 4,705765, 4,724922) =  3,099833,  3,099831,  3,099831,  3,099834
f(4,674767, 4,686607, 4,693925, 4,705765) =  3,099833,  3,099831,  3,099831,  3,099831
f(4,686607, 4,693925, 4,698447, 4,705765) =  3,099831,  3,099831,  3,099831,  3,099831
f(4,693925, 4,698447, 4,701242, 4,705765) =  3,099831,  3,099831,  3,099831,  3,099831
f(4,693925, 4,696720, 4,698447, 4,701242) =  3,099831,  3,099831,  3,099831,  3,099831
f(4,693925, 4,695652, 4,696720, 4,698447) =  3,099831,  3,099831,  3,099831,  3,099831
f(4,695652, 4,696720, 4,697380, 4,698447) =  3,099831,  3,099831,  3,099831,  3,099831
f(4,695652, 4,696312, 4,696720, 4,697380) =  3,099831,  3,099831,  3,099831,  3,099831
f(4,696312, 4,696720, 4,696972, 4,697380) =  3,099831,  3,099831,  3,099831,  3,099831
f(4,696312, 4,696564, 4,696720, 4,696972) =  3,099831,  3,099831,  3,099831,  3,099831
f(4,696564, 4,696720, 4,696816, 4,696972) =  3,099831,  3,099831,  3,099831,  3,099831
f(4,696564, 4,696660, 4,696720, 4,696816) =  3,099831,  3,099831,  3,099831,  3,099831
f(4,696564, 4,696623, 4,696660, 4,696720) =  3,099831,  3,099831,  3,099831,  3,099831
f(4,696623, 4,696660, 4,696683, 4,696720) =  3,099831,  3,099831,  3,099831,  3,099831
f(4,696623, 4,696646, 4,696660, 4,696683) =  3,099831,  3,099831,  3,099831,  3,099831
f(4,696646, 4,696660, 4,696669, 4,696683) =  3,099831,  3,099831,  3,099831,  3,099831
f(4,696660, 4,696669, 4,696674, 4,696683) =  3,099831,  3,099831,  3,099831,  3,099831
f(4,696660, 4,696666, 4,696669, 4,696674) =  3,099831,  3,099831,  3,099831,  3,099831
f(4,696666, 4,696669, 4,696671, 4,696674) =  3,099831,  3,099831,  3,099831,  3,099831
f(4,696666, 4,696668, 4,696669, 4,696671) =  3,099831,  3,099831,  3,099831,  3,099831
Minimum aranymetszéssel: yp = 3.099830684070096 p = 4.696670982424038
```

A feladat megoldása wxMaxima segítségével

```
(%i1) g(x):=3.1+sqrt(2+6*x)/(x^4-3)*cos(6+2*sin(x)^4)/(x+5);
```

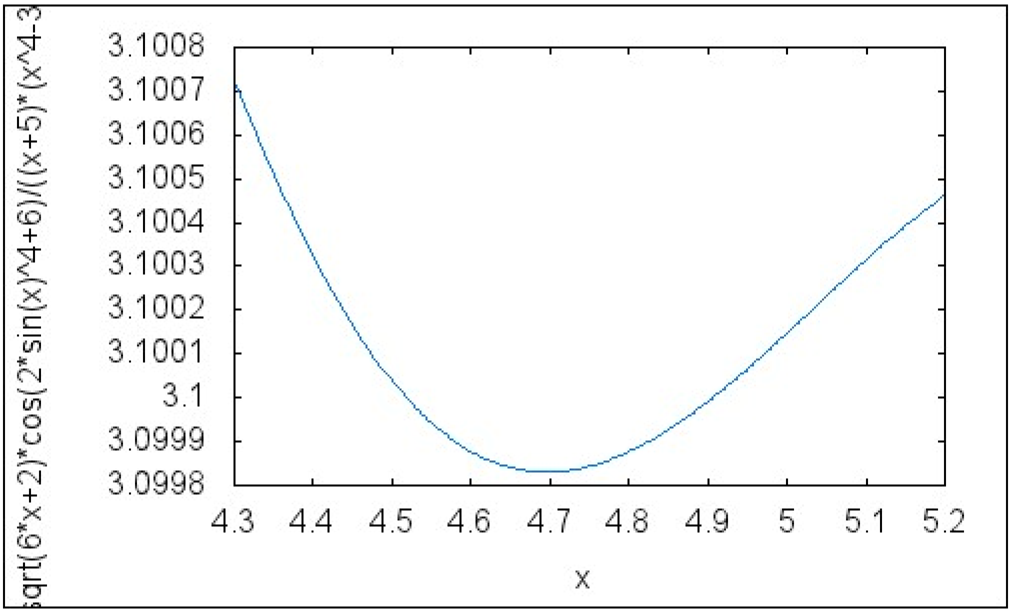
(%o1) $$g(x):=3.1+\frac{\frac{\sqrt{2+6\,x}}{x^4-3}\cos(6+2\,\sin(x)^4)}{x+5}$$

```
(%i2) dg(x):=diff(g(x),x)$ dg(x);
```

(%o3) $$-\frac{8\sqrt{6\,x+2}\cos(x)\sin(x)^3\sin(2\,\sin(x)^4+6)}{(x+5)(x^4-3)}-\frac{\sqrt{6\,x+2}\cos(2\,\sin(x)^4+6)}{(x+5)^2(x^4-3)}+\frac{3\cos(2\,\sin(x)^4+6)}{(x+5)\sqrt{6\,x+2}(x^4-3)}-\frac{4\,x^3\sqrt{6\,x+2}\cos(2\,\sin(x)^4+6)}{(x+5)(x^4-3)^2}$$

```
(%i4) wxplot2d([g(x)], [x,4.3,5.2])$
```

(%t4)




```
(%i5) p: find_root(dg(x)=0, x, 4.3, 5.2);
```

(%o5) 4.696669198266207

```
(%i6) minimum: g(p);
```

(%o6) 3.099830684070081

10.2. Numerikus minimum keresése Fibonacci módszerrel

Feladat

Határozza meg a függvény minimumát az adott szakaszon Fibonacci módszerrel!

$$g(x) = 7 - \frac{3\cos(1-x)}{\sqrt{-4+2x+x^2}} + 2\sin\left(\frac{4}{3}x\right), x \in [2{,}1;\, 5{,}4];$$

Megoldás

Java programmal készített megoldás

```
package labor_10b_fib;

/**
 * @author Beregszászi István
 * @since 2016.04.30.
 */
public class Labor_10b_fib {

    public static double f(double x) {
        return  7 - (3 * Math.cos(1 - x))
                / (Math.sqrt(-4 + 2 * x + x * x))
                + 2 * Math.sin(4 * x / 3);
    }

    public static double F(int n) {
        int fim1 = 0, fim2 = 1, fi = 0;
        for (int i = 2; i <= n + 1; i++) {
            fi = fim1 + fim2;
            fim2 = fim1;
            fim1 = fi;
        }
        return fi;
    }

    public static void main(String[] args) {
        double a = 2.1, b = 5.4, eps = 0.0001;
        int n = 4;
        while (F(n) <= (b - a) / eps) {
            n++;
        }
        //System.out.println("n = " + n);
        int k = 1, maxIteracio = n - 3;
        double ya = f(a), yb = f(b),
                c = a + (1 - F(n - 1) / F(n)) * (b - a),
                d = a + F(n - 1) / F(n) * (b - a),
                yc = f(c), yd = f(d);
```

```java
        System.out.printf("f(%8.7f, %8.7f, %8.7f, %8.7f) = ",
                                                a, c, d, b);
        System.out.printf("%10.7f, %01.7f, %10.7f, %10.7f %n",
                                            ya, yc, yd, yb);
        while (k <= maxIteracio) {
            if (yc < yd) {
                b = d;
                yb = yd;
                d = c;
                yd = yc;
                c = a + (1 - F(n - 1 - k) / F(n - k)) * (b - a);
                yc = f(c);
            } else {
                a = c;
                ya = yc;
                c = d;
                yc = yd;
                d = a + F(n - 1 - k) / F(n - k) * (b - a);
                yd = f(d);
            }
            System.out.printf("f(%8.7f, %8.7f, %8.7f, %8.7f) = ",
                                                    a, c, d, b);
            System.out.printf("%10.7f, %01.7f, %10.7f, %10.7f %n",
                                                ya, yc, yd, yb);
            k++;
        }
        double p = c, yp = yc;
        if (yb < ya) {
            p = b;
            yp = yb;
        }
        System.out.println("k = " + k + " iteracio utan");
        System.out.println("Minimum Fibonacci módszerrel: yp = "
                                + yp + " p = " + p);
    }
}
```

A Java program kimenete

```
f(2,1000000, 3,3604878, 4,1395122, 5,4000000) =  7,0361940, 5,6225569,  6,2648909,  8,7410876
f(2,1000000, 2,8790243, 3,3604878, 4,1395122) =  7,0361940, 6,0031273,  5,6225569,  6,2648909
f(2,8790243, 3,3604878, 3,6580487, 4,1395122) =  6,0031273, 5,6225569,  5,6771657,  6,2648909
f(2,8790243, 3,1765851, 3,3604878, 3,6580487) =  6,0031273, 5,7074439,  5,6225569,  5,6771657
f(3,1765851, 3,3604878, 3,4741460, 3,6580487) =  5,7074439, 5,6225569,  5,6144352,  5,6771657
f(3,3604878, 3,4741460, 3,5443905, 3,6580487) =  5,6225569, 5,6144352,  5,6272323,  5,6771657
f(3,3604878, 3,4307324, 3,4741460, 3,5443905) =  5,6225569, 5,6133736,  5,6144352,  5,6272323
f(3,3604878, 3,4039014, 3,4307324, 3,4741460) =  5,6225569, 5,6153038,  5,6133736,  5,6144352
f(3,4039014, 3,4307324, 3,4473150, 3,4741460) =  5,6153038, 5,6133736,  5,6131660,  5,6144352
f(3,4307324, 3,4473150, 3,4575634, 3,4741460) =  5,6133736, 5,6131660,  5,6134160,  5,6144352
f(3,4307324, 3,4409808, 3,4473150, 3,4575634) =  5,6133736, 5,6131561,  5,6131660,  5,6134160
f(3,4307324, 3,4370665, 3,4409808, 3,4473150) =  5,6133736, 5,6132052,  5,6131561,  5,6131660
f(3,4370665, 3,4409808, 3,4434006, 3,4473150) =  5,6132052, 5,6131561,  5,6131469,  5,6131660
f(3,4409808, 3,4434006, 3,4448952, 3,4473150) =  5,6131561, 5,6131469,  5,6131492,  5,6131660
f(3,4409808, 3,4424754, 3,4434006, 3,4448952) =  5,6131561, 5,6131485,  5,6131469,  5,6131492
f(3,4424754, 3,4434006, 3,4439700, 3,4448952) =  5,6131485, 5,6131469,  5,6131470,  5,6131492
f(3,4424754, 3,4430448, 3,4434006, 3,4439700) =  5,6131485, 5,6131472,  5,6131469,  5,6131470
f(3,4430448, 3,4434006, 3,4436141, 3,4439700) =  5,6131472, 5,6131469,  5,6131468,  5,6131470
f(3,4434006, 3,4436141, 3,4437565, 3,4439700) =  5,6131469, 5,6131468,  5,6131469,  5,6131470
f(3,4434006, 3,4435430, 3,4436141, 3,4437565) =  5,6131469, 5,6131468,  5,6131468,  5,6131469
f(3,4435430, 3,4436141, 3,4436853, 3,4437565) =  5,6131468, 5,6131468,  5,6131468,  5,6131469
f(3,4435430, 3,4436141, 3,4436141, 3,4436853) =  5,6131468, 5,6131468,  5,6131468,  5,6131468
```

```
k = 22 iteracio utan
Minimum Fibonacci módszerrel: yp = 5.613146826450896 p = 3.4436141304347823
```

Megoldás wxMaxima-val

(%i1) f(x):=7-(3*cos(1-x))/(sqrt(-4+2*x+x*x))+2*(sin(4/3*x));

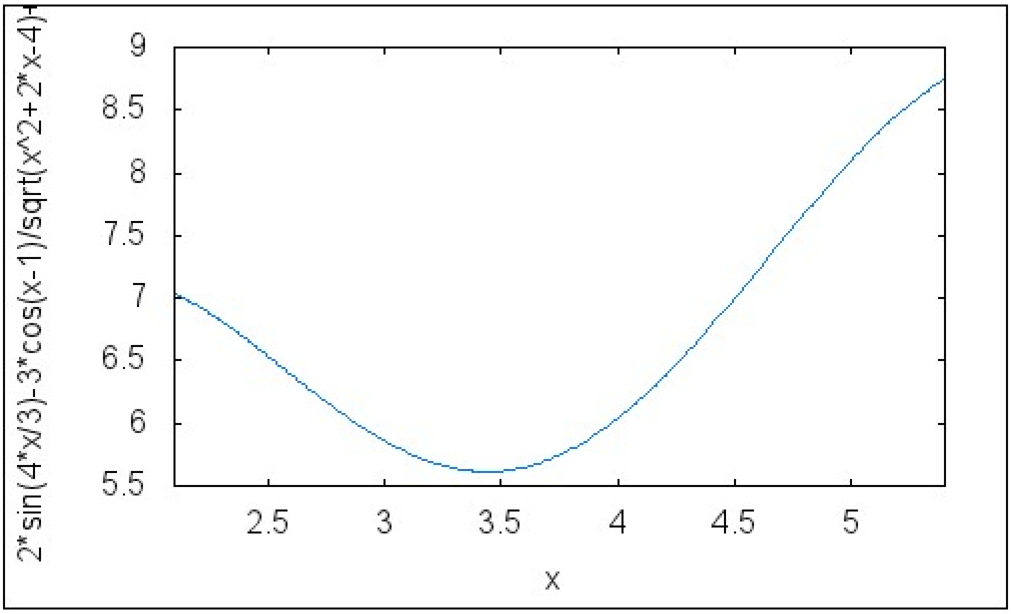
(%o1) $f(x):=7-\frac{3\cos(1-x)}{\sqrt{-4+2\,x+x\,x}}+2\sin\left(\frac{4}{3}\,x\right)$

(%i2) df(x):=diff(f(x),x);df(x);

(%o2) df(x):=diff(f(x),x)

(%o3) $\frac{8\cos\left(\frac{4\,x}{3}\right)}{3}+\frac{3\sin(x-1)}{\sqrt{x^2+2\,x-4}}+\frac{3\,(2\,x+2)\cos(x-1)}{2\,(x^2+2\,x-4)^{3/2}}$

(%i4) wxplot2d([f(x)], [x,2.1,5.4]);

(%t4) 

(%o4)

(%i5) p: find_root(df(x)=0, x, 2.1, 5.4);

(%o5) 3.443582132569239

(%i6) f(p);

(%o6) 5.61314682504262

Irodalomjegyzék

1. Kupán Pál. Numerikus módszerek. – Jegyzet. – Sapientia EMTE – 105 old.
2. Л. П. Фельдман, А. І. Петренко, О. А. Дмитрієва. Чисельні методи в інформатиці. – Київ. – Видавнича група BHV. – 2006. – 480 с.
3. John H. Matthews, Kurtis D. Fink. Numerical Methods Using Mathlab. – Prentic-Hall Inc. – Upper Sadle River, New Jersey, USA. – 4-th Edition, – 2004.
4. John H. Matthews. Modules for Numerical methods and Numerical Analysis. – Online. // http://mathfaculty.fullerton.edu/mathews/n2003/NumericalUndergradMod.html – 2003. – Hozzáférés dátuma: 2016.09.01.
5. Holovács J. I. Numerikus matematika. Online jegyzet. – Jegyzet ST, PM és PTI szakos hallgatók számára. – 2006. // http://aries.ektf.hu/~holovacs/numerikus/ – Hozzáférés dátuma: 2016.09.01.