

MINISZTERSTVO OSVITI I NAUKY UKRAINI
UKRAJNA OKTATÁSI ÉS TUDOMÁNYOS MINISZTERIUMA

Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II
II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Кафедра Математики та інформатики
Matematika és Informatika Tanszék

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
До практичних занять та самостійної роботи студентів

Диференціальні рівняння

Кучінка Каталін

Методичні вказівки розроблені на основі Освітньої програми підготовки бакалаврів з галузі знань 04 Середня освіта математик з метою систематизації і закріплення знань студентів та їх забезпечення методичними вказівками до виконання практичних та контрольних робіт в рамках курсу Диференціальних рівнянь, методичні вказівки рекомендуються передусім для студентів денної форми навчання, але також може бути корисним для заочників.

Підготовлено до видання в електронній формі (PDF) кафедрою
математики та інформатики Закарпатського угорського інституту імені
Ференца Ракоці II

Укладник методичних вказівок:

Каталін Кучінка – завідувач кафедри математики та інформатики Закарпатського
угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Зміст

Зміст	3
Анотація	4
1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ВІДОКРЕМЛЮВАНИМИ ЗМІННИМИ	5
Вправи для самостійного розв'язання:	7
Теоретичні питання.....	9
2. ОДНОРОДНІ РІВНЯННЯ	10
Вправи для самостійного розв'язання:	13
Теоретичні питання.....	13
3. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ І-ГО ПОРЯДКУ РІВНЯННЯ, ЩО ЗВОДЯТЬСЯ ДО ЛІНІЙНИХ	15
Вправи для самостійного розв'язання:	19
Теоретичні питання.....	22
4. РІВНЯННЯ ІЗ ПОВНИМ ДИФЕРЕНЦІАЛОМ. ІНТЕГРУВАЛЬНИЙ МНОЖНИК	23
Вправи для самостійного розв'язання:	24
Теоретичні питання.....	26
5. РІВНЯННЯ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНІ ВІДНОСНО ПОХІДНОЇ	27
Вправи для самостійного розв'язання:	29
Теоретичні питання.....	31
6. РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ, ЩО НЕ МІСТЯТЬ ЯВНО ОДНУ ІЗ ЗМІННИХ.	32
Вправи для самостійного розв'язання:	36
Теоретичні питання.....	39
7. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ N-ГО СТЕПЕНЯ	40
Вправи для самостійного розв'язання:	41
Теоретичні питання.....	42
8. ЛІНІЙНІ НЕОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ N-ГО СТЕПЕНЯ.....	43
Вправи для самостійного розв'язання:	43
Теоретичні питання.....	45

Анотація

У методичних вказівках наведені необхідні теоретичні відомості з теми «Диференціальні рівняння», розглянуті *прикладні розв'язання задач* з кожної теми, наведені *завдання для самостійного виконання* студентами, запропоновані *теоретичні питання* до самоконтролю по кожній з розглянутих тем.

Мета та завдання навчальної дисципліни

A tárgy célja és feladatai

Мета / Cél: ознайомити студентів з основними типами диференціальних рівнянь, які інтегруються у квадратурах, а також фундаментальна підготовка фахівців спеціалістів, спроможних розв'язувати комплекс задач за допомогою математичного моделювання, дослідження та прогнозування реальних процесів.

Завдання / Feladatok: незалежно від природи фізичних чи геометричних процесів навчити складати математичні моделі через диференціальні рівняння, класифікація, розв'язування та аналіз розв'язків рівнянь, формування логічного та алгоритмічного мислення, сукупності знань з основ математичного апарату та вмінь і навичок з застосувань їх в професійній діяльності.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен / A tárgy teljesítése révén a hallgatónak

знати / tudnia kell:

фундаментальні положення теорії диференціальних рівнянь, а саме:

- Звичайні диференціальні рівняння
- Розв'язок диференціальних рівнянь
- Задача Коші
- Загальні методи інтегрування

вміти / képesnek kell lennie:

- Розв'язувати задачі теоретичного характеру із застосуванням диференціальних рівнянь
- Класифікувати отримані рівняння
- Розв'язувати відповідні типи
- Аналізувати отриманий результат

1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ВІДОКРЕМЛЮВАНИМИ ЗМІННИМИ

Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

Для початку зрозуміємо, що називається таким рівняння і які його властивості.

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0 \quad (2)$$

Скорочений запис такого рівняння може бути: $y' = f(x)g(y)$. З повного до скороченого можна перейти:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx = - \frac{g_2(y)}{g_1(y)} dy$$

Але і тут виникає питання: «А чи не ділимо ми на нуль?» Дійсно. Нехай існують x^* та y^* - корені відповідних рівнянь. Для

$$x(y) \equiv x^* \quad dx = 0$$

$$y(x) \equiv y^* \quad dy = 0$$

За цих умов ми маємо, що рівняння (2) тотожно рівне нулю - виконується необхідна умова розв'язку. Але для випадка співпадання коренів одночасно і x і y є коренями рівняння (2) поле нахилів не визначено - диференціальне рівняння не має сенсу.

Тепер, коли вже розглянули нульові випадки, можемо розв'язувати саме рівняння. Але потрібно помітити, що корені $f_2(x)$ та $g_1(y)$ будуть бити усю площину на прямокутники - тобто ми будемо мусити розглядати диференціальне рівняння на кожному прямокутнику окремо. А вирішується воно просто - інтегруються обидві частини:

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx = - \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)} dy + const$$

$$1. \quad y' = \frac{y}{x}.$$

┌ Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними: $y' = \frac{y}{x} = \frac{1}{x} \cdot y$.

Оскільки $y' = \frac{dy}{dx}$, то запишемо його у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Для відокремлення змінних помножимо дану рівність на dx і поділимо на y .
Отримаємо

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруємо дане рівняння:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln|y| = \ln|x| + \ln C, \quad \ln|y| = \ln|Cx|, \quad \text{звідки знаходимо загальний розв'язок}$$

заданого диференціального рівняння — $y = Cx$. ┘

$$2. \quad \frac{dy}{dx} = 3\sqrt{\frac{x}{y}}, \quad \text{якщо } y(1) = 9.$$

Г Так як $\frac{dy}{dx} = 3\sqrt{\frac{x}{y}} = 3\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}$, то це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Помноживши рівняння на $\sqrt{y} dx$, дістанемо

$$\sqrt{y} dy = 3\sqrt{x} dx.$$

Інтегруємо дане рівняння:

$$\int \sqrt{y} dy = 3 \int \sqrt{x} dx, \quad \int y^{\frac{1}{2}} dy = 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx, \quad \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} = 3 \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C, \quad \text{звідки знаходимо загальний інтеграл}$$

$$y^{\frac{3}{2}} = 3x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}C, \quad \text{або}$$

$$y^{\frac{3}{2}} = 3x^{\frac{3}{2}} + C. \quad (8)$$

Знайдемо частинний інтеграл. За умовою задачі $y=9$ при $x=1$. Підставляючи вказані значення y та x у формулу (8), знаходимо сталу C :

$$9^{\frac{3}{2}} = 3 \cdot 1^{\frac{3}{2}} + C, \quad 27 = 3 + C, \quad C = 24.$$

Підставивши знайдене значення $C = 24$ у формулу (8), дістаємо частинний інтеграл заданого диференціального рівняння — $y^{\frac{3}{2}} = 3x^{\frac{3}{2}} + 24$. ┘

$$3. \quad (1+e^{2x})y^2 y' = e^x.$$

Г Розв'яжемо задане рівняння відносно y :

$$y' = \frac{e^x}{(1+e^{2x})y^2}.$$

Отже, це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Підставимо $y' = \frac{dy}{dx}$ і відокремимо змінні, помноживши рівняння на $y^2 dx$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{(1+e^{2x})y^2}, \quad y^2 dy = \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx.$$

Звідси маємо

$$\int y^2 dy = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx, \quad \int y^2 dy = \int \frac{e^x dx}{1+(e^x)^2}, \quad \frac{y^3}{3} = \arctg e^x + C, \quad y^3 = 3 \arctg e^x + C, \quad \text{звідки маємо загальний}$$

розв'язок $y = \sqrt[3]{3 \arctg e^x + C}$. ┘

$$4. \quad y\sqrt{1+x^2} y' + x\sqrt{1+y^2} = 0, \quad \text{якщо } y(\sqrt{3}) = 0.$$

Г Розв'яжемо задане рівняння відносно y :

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+y^2}}{y}.$$

Отже, це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Підставимо $y' = \frac{dy}{dx}$ і відокремимо змінні, помноживши рівняння на $\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} dx$:

$$\frac{y dy}{\sqrt{1+y^2}} = -\frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Звідси маємо

$$\int \frac{y dy}{\sqrt{1+y^2}} = -\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + C, \quad \text{або}$$

$$\sqrt{1+y^2} = C - \sqrt{1+x^2}. \quad (*)$$

Знайдемо частинний інтеграл. За умовою задачі $y=0$ при $x=\sqrt{3}$. Тому, підставляючи вказані значення y та x у формулу (*), знаходимо сталу C :

$$\sqrt{1+0^2} = C - \sqrt{1+3}, \quad 1+2=C, \quad C=3.$$

Отже, частинний інтеграл заданого рівняння має вигляд $\sqrt{1+y^2} = 3 - \sqrt{1+x^2}$. ┘

5. $x^2(y^3+5)dx + (x^3+5)y^2dy = 0$, якщо $y(0)=1$.

┐ Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними виду (7).

$$\frac{y^2}{y^3+5} dy = -\frac{x^2}{x^3+5} dx, \quad \int \frac{y^2}{y^3+5} dy = -\int \frac{x^2}{x^3+5} dx,$$

$$\frac{1}{3} \ln|y^3+5| = -\frac{1}{3} \ln|x^3+5| + \frac{1}{3} \ln C, \quad \ln|y^3+5| = -\ln|x^3+5| + \ln C,$$

$$\ln|y^3+5| + \ln|x^3+5| = \ln C, \quad \ln|(y^3+5)(x^3+5)| = \ln C,$$

$$(y^3+5)(x^3+5) = C.$$

За умовою задачі $y=1$ при $x=0$. Тому маємо $C=(1^3+5)(0^3+5)=30$. Отже, частинний інтеграл рівняння $-(y^3+5)(x^3+5)=30$. ┘

6. $(x^2+1)y' + 2xy^2 = 0$, якщо $y(0)=1$.

┐ $y' = -\frac{2xy^2}{x^2+1}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^2}{x^2+1}, \quad \frac{dy}{y^2} = -\frac{2x}{x^2+1} dx,$

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\int \frac{2x}{x^2+1} dx, \quad \frac{-1}{y} = -\ln|x^2+1| + C,$$

$$\frac{1}{y} = \ln(x^2+1) + C, \quad \text{звідки } y = \frac{1}{\ln(x^2+1) + C}.$$

За умовою задачі $y=1$ при $x=0$. Тому

$$1 = \frac{1}{\ln(0^2+1) + C}, \quad 1 = \frac{1}{C}, \quad C=1.$$

Частинний розв'язок рівняння $y = \frac{1}{\ln(x^2+1)+1}$. ┘

Вправи для самостійного розв'язання:

Feladatok:

Розв'язати диференціальні рівняння

Oldja meg a szétválasztható változójú differenciálegyenletet:

1. $y(x+1)dy - x(y+1)dx = 0$

2. $\sqrt{1-y^2} = \sqrt{1+x^2}y' \quad \sqrt{1-y^2} = \sqrt{1+x^2}y'$

3. $-\sqrt{1-x^2}y' = \sqrt{1-y^2}$

$(x+1)y' = y-2$, 1. ált. mo=?, 2. $y(-3) = 1$ kezdeti

4. érték feladat megoldása ?

$$(x^2-1)yy' = \frac{1}{(y^2+1)^2}$$

5. $x^2y' + y = 0$

6. $y' = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$

7. $yy' = \frac{1-2x}{y}$

8. $y'(x^2+1) = 2xy$

9. $y = 2y'\sqrt{x}$, ЯКЩО $y(4)=1$.

10. $y' = (2y+1)\operatorname{ctg} x$, ЯКЩО $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

11. $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$; $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$.

12. $(y^2 + xy^2) y' + x^2 - yx^2 = 0$.

13. $e^y (1 + x^2) dy - 2x (1 + e^y) dx = 0$.

14. $(xy^2 + x) dx + (y - x^2y) dy = 0$.

15. $(x+2)e^y dx + y\sqrt{x+1} dy = 0$.

16. $(1+y^2) dx - \left(y\sqrt{1+y^2}\right) (1+x^2)^{\frac{3}{2}} dy = 0$.

17. $(1+y^4) (\cos x + \sin x) dx + y\sqrt{\sin 2x} dy = 0$; $M\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

18. $y - xy' = a(1+x^2y')$, a – параметр.

19.

20. $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$.

21. $y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$.

22. $(1+y^2) (e^{2x} dx - e^y dy) - (1-y) dy = 0$.

Szöveges feladatok

1.

A szobába berepült két hógolyó, az egyik sugara éppen kétszer akkora mint a másiké. Tudjuk, hogy az olvadás sebessége egyenesen arányos a felülettel. Mekkora lesz a nagyobbik hógolyó abban a pillanatban, amikor a kisebbik teljesen elolvad?

2. Feladat A 10 liter vizet tartalmazó edénybe literenként 0.3 kg sót tartalmazó oldat folyik be folyamatosan 2 liter/min sebességgel. Az edénybe belépő folyadék összekeveredik a vízzel, és a keverék ugyanilyen sebességgel kifolyik az edényből. Mennyi só lesz az edényben 5 perc múlva?

3. Feladat Egy kőzet megvizsgált darabja 100 mg uránt és 14 mg ólmot tartalmaz. Ismert, hogy az urán felezési ideje $4.5 \cdot 10^9$ év, és hogy 238 g urán teljes elbomlásakor 206 g ólom keletkezik. Állapítsuk meg a kőzet korát.

4. Feladat A 200 m^3 térfogatú szobában 0.15 % szén-dioxid gáz van. A ventillátor percenként 20 m^3 0.04 % széndioxidot tartalmazó levegőt fúj be. Mennyi idő múlva csökken a szoba levegőjében lévő széndioxid mennyisége a harmadára?

5. Feladat Írjuk le az ejtőernyős mozgását, feltéve, hogy a légellenállás egyenesen arányos a sebesség négyzetével.

Feladat. Egy baktériumtenyészetben a baktériumok számának növekedési sebessége egyenesen arányos a baktériumok számával. Ha a baktériumok száma 48 óra alatt 100-ról 1000-re nő, akkor hány baktérium volt a 24. óra végén?

Feladat. Állapítsuk meg, hogy a rádium hány százaléka bomlik el 100 év alatt, ha tudjuk, hogy a rádium felezési ideje 1590 év, azaz ennyi idő alatt bomlik el a jelen lévő atommagok számának a fele.

8. Feladat. Egy bányakőzet megvizsgált darabja 100 mg uránt és 14 mg ólmot tartalmaz. Ismert az urán felezési ideje $4,5 \cdot 10^9$ év és, hogy 238 g urán teljes elbomlásakor 206 g ólom keletkezik. Állapítsuk meg a bányakőzet korát! (Tegyük fel, hogy a keletkezése pillanatában a kőzet nem tartalmazott ólmot.)

Теоретичні питання

Ellenőrző kérdések

2. ОДНОРОДНІ РІВНЯННЯ

Változójában homogén fokszámú differenciálegyenletek

Диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ називають *однорідним*, якщо функція $f(x, y)$ є *однорідною функцією нульового виміру*, тобто для будь-якого $t > 0$

$$f(tx, ty) = f(x, y). \quad (9)$$

Покладемо $t = \frac{1}{x}$: $f(tx, ty) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right)$. Тоді, з урахуванням (9), рівняння (2) запишеться у вигляді

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right). \quad (10)$$

Для розв'язання рівняння (10) введемо допоміжну невідому функцію $u = u(x)$, поклавши

$$\frac{y}{x} = u \quad \text{або}$$

$$y = ux, \quad (11)$$

і перетворимо однорідне рівняння у рівняння з відокремлюваними змінними. З (11) знаходимо $y' = u'x + u$. Тому рівняння (10) запишеться у вигляді

$$u + xu' = g(u), \quad \text{або} \quad x \frac{du}{dx} = g(u) - u.$$

Відокремимо змінні:

$$\frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x}. \quad (12)$$

Проінтегрувавши рівняння (12), одержимо $\int \frac{du}{g(u) - u} = \ln|x| + C$. Обчисливши інтеграл у лівій частині і підставивши замість u вираз $\frac{y}{x}$, отримаємо загальний інтеграл диференціального рівняння.

Розв'язати диференціальні рівняння:

$$1. \quad y' = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}.$$

Права частина даного рівняння – функція $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}$ є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f(tx, ty) = \frac{(tx)^2 + (ty)^2}{2(tx)^2} = \frac{t^2(x^2 + y^2)}{2t^2x^2} = \frac{x^2 + y^2}{2x^2} = f(x, y),$$

тобто має місце рівність (9).

Застосуємо підстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$:

$$u'x + u = \frac{x^2 + x^2u^2}{2x^2}, \quad u'x + u = \frac{x^2(1 + u^2)}{2x^2}, \quad u'x + u = \frac{1 + u^2}{2}, \quad u'x = \frac{1 + u^2}{2} - u, \quad u'x = \frac{u^2 - 2u + 1}{2},$$

$$u'x = \frac{(u-1)^2}{2},$$

$$u' = \frac{(u-1)^2}{2} \cdot \frac{1}{x}. \quad (*)$$

Диференціальне рівняння (*) – рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$\frac{du}{dx} = \frac{(u-1)^2}{2} \cdot \frac{1}{x}, \quad \frac{2du}{(u-1)^2} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{2du}{(u-1)^2} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{-2}{u-1} = \ln|x| + \ln C, \quad \frac{-2}{u-1} = \ln C|x|.$$

Підставимо в отримане рівняння $u = \frac{y}{x}$:

$$\frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}-1} = \ln C|x|, \quad \frac{-2x}{y-x} = \ln C|x|, \quad \text{звідки знаходимо загальний}$$

розв'язок заданого диференціального рівняння – $y = x - \frac{2x}{\ln C|x|}$. $\perp$

$$2. \quad y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

Права частина рівняння – функція $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$ є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f(tx, ty) = \frac{tx+ty}{tx-ty} = \frac{t(x+y)}{t(x-y)} = \frac{x+y}{x-y} = f(x, y),$$

тобто має місце рівність (9).

Застосуємо підстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$.

$$u'x + u = \frac{x+ux}{x-ux}, \quad u'x + u = \frac{x(1+u)}{x(1-u)}, \quad u'x + u = \frac{1+u}{1-u},$$

$$u'x = \frac{1+u}{1-u} - u, \quad u'x = \frac{1+u-u+u^2}{1-u}, \quad u'x = \frac{u^2+1}{1-u},$$

$$u' = \frac{u^2+1}{1-u} \cdot \frac{1}{x}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{u^2+1}{1-u} \cdot \frac{1}{x}, \quad \frac{1-u}{u^2+1} du = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{1-u}{u^2+1} du = \int \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{du}{u^2+1} - \int \frac{udu}{u^2+1} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\arctg u - \frac{1}{2} \ln|u^2+1| = \ln|x| + \ln C, \quad \arctg u = \ln C|x| + \ln \sqrt{u^2+1},$$

$$\arctg u = \ln \left(C|x| \sqrt{u^2+1} \right), \quad \arctg \frac{y}{x} = \ln \left(C|x| \sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1} \right),$$

$$\arctg \frac{y}{x} = \ln \left(C|x| \cdot \sqrt{\frac{y^2+x^2}{x^2}} \right), \text{ або } \arctg \frac{y}{x} = \ln C \sqrt{y^2+x^2}. \quad \perp$$

$$3. \quad (x+y)dx - xdy = 0.$$

$$\Gamma \quad xdy = (x+y)dx, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}, \quad y' = \frac{x+y}{x}.$$

Права частина рівняння – функція $f(x, y) = \frac{x+y}{x}$ є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f(tx, ty) = \frac{tx+ty}{tx} = \frac{t(x+y)}{tx} = \frac{x+y}{x} = f(x, y).$$

Застосуємо підстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$.

$$u'x + u = \frac{x+ux}{x}, \quad u'x + u = \frac{x(1+u)}{x}, \quad u'x + u = 1+u, \quad u'x = 1, \quad u' = \frac{1}{x}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}, \quad du = \frac{dx}{x}, \quad \int du = \int \frac{dx}{x},$$

$$u = \ln|x| + \ln C, \quad u = \ln C|x|, \quad \frac{y}{x} = \ln C|x|, \quad \text{звідки маємо загальний розв'язок } y = x \ln C|x|. \quad \perp$$

$$4. \quad (x^2 - xy)dy + y^2 dx = 0.$$

$$\Gamma \quad (x^2 - xy)dy = -y^2 dx, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-y^2}{x^2 - xy}, \quad y' = \frac{-y^2}{x^2 - xy}.$$

Права частина рівняння – функція $f(x, y) = \frac{-y^2}{x^2 - xy}$ є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f(tx, ty) = \frac{-(ty)^2}{(tx)^2 - ttxy} = \frac{-t^2 y^2}{t^2 (x^2 - y^2)} = \frac{-y^2}{x^2 - y^2} = f(x, y).$$

Застосуємо підстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$.

$$\begin{aligned} u'x + u &= \frac{-u^2 x^2}{x^2 - x \cdot ux}, & u'x + u &= \frac{-u^2 x^2}{x^2 (1-u)}, & u'x + u &= \frac{-u^2}{1-u}, \\ u'x &= \frac{-u^2}{1-u} - u, & u'x &= \frac{-u^2 - u + u^2}{1-u}, & u'x &= \frac{-u}{1-u}, & u'x &= \frac{u}{u-1}, \\ u' &= \frac{u}{u-1} \cdot \frac{1}{x}, & \frac{du}{dx} &= \frac{u}{u-1} \cdot \frac{1}{x}, & \frac{u-1}{u} \cdot du &= \frac{dx}{x}, & \int \frac{u-1}{u} du &= \int \frac{dx}{x}, \\ \int du - \int \frac{du}{u} &= \int \frac{dx}{x}, & u - \ln|u| &= \ln|x| + \ln C, & u &= \ln C |x| + \ln|u|, \\ u &= \ln(C|x|u), & \frac{y}{x} &= \ln\left(C \left|x \cdot \frac{y}{x}\right|\right), & \text{звідки } y &= x \ln C |y|. \quad \square \end{aligned}$$

5. $(2\sqrt{xy} - x)dy + ydx = 0.$

$$\square \quad (2\sqrt{xy} - x)dy = -ydx, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{2\sqrt{xy} - x}, \quad y' = \frac{-y}{2\sqrt{xy} - x}.$$

Права частина рівняння – функція $f(x, y) = \frac{-y}{2\sqrt{xy} - x}$ є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= \frac{-ty}{2\sqrt{txty} - tx} = \frac{-ty}{2t\sqrt{xy} - tx} = \frac{-ty}{t(2\sqrt{xy} - x)} = \frac{-y}{2\sqrt{xy} - x} = \\ &= f(x, y). \end{aligned}$$

Застосуємо підстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$.

$$\begin{aligned} u'x + u &= \frac{-ux}{2\sqrt{x \cdot ux} - x}, & u'x + u &= \frac{-ux}{2x\sqrt{u} - x}, & u'x + u &= \frac{-ux}{x(2\sqrt{u} - 1)}, \\ u'x + u &= \frac{-u}{2\sqrt{u} - 1}, & u'x &= \frac{-u}{2\sqrt{u} - 1} - u, & u'x &= \frac{-u - 2u\sqrt{u} + u}{2\sqrt{u} - 1}, \\ u'x &= \frac{-2u\sqrt{u}}{2\sqrt{u} - 1}, & u' &= \frac{-2u\sqrt{u}}{2\sqrt{u} - 1} \cdot \frac{1}{x}, & \frac{du}{dx} &= \frac{-2u\sqrt{u}}{2\sqrt{u} - 1} \cdot \frac{1}{x}, \\ \frac{2\sqrt{u} - 1}{-2u\sqrt{u}} du &= \frac{dx}{x}, & \int \frac{2\sqrt{u} - 1}{-2u\sqrt{u}} du &= \int \frac{dx}{x}, \\ \int \frac{2\sqrt{u}}{-2u\sqrt{u}} du + \int \frac{du}{2u\sqrt{u}} &= \int \frac{dx}{x}, & -\frac{1}{\sqrt{u}} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^{3/2}} du &= \frac{dx}{x}, \\ -\ln|u| - \frac{1}{\sqrt{u}} &= \ln C |x|, & \frac{-1}{\sqrt{u}} &= \ln C |x \cdot u|, & -\sqrt{\frac{x}{y}} &= \ln C \left|x \cdot \frac{y}{x}\right|, \\ \sqrt{\frac{x}{y}} + \ln C |y| &= 0. \quad \square \end{aligned}$$

6. $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}.$

Права частина рівняння – функція $f(x, y) = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$ є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f(tx, ty) = \frac{ty}{tx} + \sin \frac{ty}{tx} = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x} = f(x, y).$$

Застосуємо підстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$.

$$u'x + u = \frac{ux}{x} + \sin \frac{ux}{x}, \quad u'x + u = u + \sin u, \quad u'x + u - u = \sin u,$$

$$u'x = \sin u, \quad u' = \sin u \cdot \frac{1}{x}, \quad \frac{du}{dx} = \sin u \cdot \frac{1}{x}, \quad \frac{du}{\sin u} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| = \ln C|x|, \quad \operatorname{tg} \frac{u}{2} = Cx,$$

$$\operatorname{tg} \frac{y}{2x} = Cx. \quad \square$$

Вправи для самостійного розв'язання:

Feladatok:

Розв'язати диференціальні рівняння

Oldj meg a változóban homogén differenciálegyenletet

1. $x \sin \frac{y}{x} - y \cos \frac{y}{x} + xy' \cos \frac{y}{x} = 0$
2. $(2x + y)dx + (y + x)dy = 0$
3. $y' = \frac{x + 7y + 2}{3x + 5y + 6}$
4. $y' = \frac{3x + 2y + 1}{3x + 2y - 1}$
5. Határozzuk meg az $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy = 0$ egzakt differenciálegyenletnek azt a partikuláris megoldását, amely az $x = 0, y = -2$ kezdeti feltételt kielégíti!
6. $y' = \frac{y}{x} + 5 \cos^2 \frac{y}{x}.$
7. $y' + \sqrt{4 - \frac{y^2}{x^2}} = \frac{y}{x}.$
8. $xy' - y = \sqrt{y^2 + 2x^2}.$
9. $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$
10. $(x^2 + 3xy + y^2)dx - x^2dy = 0$
11. $xy' = y \ln \frac{y}{x},$ якщо $y(1) = 1.$

Теоретичні питання

Ellenőrző kérdések

1. Коли функція $f(x, y)$ буде однорідною виміру m ?
2. Наведіть приклади однорідних функцій виміру 0, 1, 2, 3, а також приклади неоднорідних функцій.
3. Яке диференціальне рівняння першого порядку називають однорідним?

4. Якою підстановкою однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними?
5. Якою має бути права частина рівняння $y' = f(x, y)$, щоб воно було однорідним?
6. Якщо функції $M(x, y)$, $N(x, y)$ однорідні, то чи досить цього для того, щоб рівняння $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ було однорідним?

3. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ І-ГО ПОРЯДКУ РІВНЯННЯ, ЩО ЗВОДЯТЬСЯ ДО ЛІНІЙНИХ

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek Lineárisra visszavezethető differenciálegyenletek

Диференціальне рівняння виду

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad \text{або} \quad y' = -P(x)y + Q(x), \quad (13)$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ – неперервні функції на деякому інтервалі (a, b) , називається *лінійним диференціальним рівнянням першого порядку*.

У випадку, коли $P(x) = \pm Q(x)$ або $Q(x) = 0$, рівняння (13) є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.

Є кілька методів розв'язання рівняння (13). Розглянемо один із них – *метод Бернуллі*. Розв'язок рівняння шукаємо у вигляді добутку

$$y = u \cdot v, \quad (14)$$

де $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – невідомі функції. Одну з цих функцій можна вибрати довільним чином, а інша визначається згідно з рівнянням (13).

Знаходимо похідну функції y : $y' = u'v + uv'$. Підставляючи y та y' в рівняння (13), отримаємо

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x),$$

$$u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x). \quad (15)$$

Виберемо функцію v так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тобто

$$v' + P(x)v = 0. \quad (16)$$

Знаходимо v з рівняння (16), яке є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dv}{dx} = -P(x)v, \quad \frac{dv}{v} = -P(x)dx, \quad \text{звідки} \quad \ln|v| = -\int P(x)dx, \quad \text{або} \quad v = e^{-\int P(x)dx}. \quad \text{Під невизначеним}$$

інтегралом тут розуміємо одну з первісних функції $P(x)$.

Знаючи v , знаходимо u з рівняння $u'v = Q(x)$, яке випливає з (15) та (16):

$$v \frac{du}{dx} = Q(x), \quad \frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v} = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx},$$

$$du = Q(x)e^{\int P(x)dx} dx, \quad u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C.$$

Підставляємо знайдені функції u та v у формулу (14) і отримуємо загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння:

$$y = u \cdot v = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right). \quad (17)$$

При розв'язуванні конкретних задач простіше виконувати вказаний вище алгоритм, аніж застосовувати готову формулу (17).

Розв'язати диференціальні рівняння:

$$1. \quad y' - \frac{2}{x}y = 2x^3.$$

┌ Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$ (див. формулу (14)). Тоді $y' = u'v + uv'$. Підставляємо y та y' у задане рівняння:

$$u'v + uv' - \frac{2uv}{x} = 2x^3,$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x}\right) = 2x^3. \quad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб

$$v' - \frac{2v}{x} = 0. \quad (**)$$

Знаходимо v :

$$v' = \frac{2v}{x}, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x}, \quad \frac{dv}{v} = 2 \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dv}{v} = 2 \int \frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = 2 \ln|x|, \quad \ln|v| = \ln x^2, \quad \text{звідки } v = x^2.$$

Зауважимо, що оскільки в якості функції v ми вибираємо один з розв'язків рівняння (**), то тут і надалі у методі Бернуллі, після інтегрування диференціального рівняння для знаходження v , покладаємо $C = 0$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння (*), отримуємо рівняння для знаходження u :

$$u' \cdot x^2 = 2x^3, \quad u' = \frac{2x^3}{x^2},$$

$$\frac{du}{dx} = 2x, \quad du = 2x dx, \quad \int du = \int 2x dx, \quad u = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + C, \quad u = x^2 + C.$$

За формулою (14) знаходимо загальний розв'язок заданого диференціального рівняння – $y = uv = (x^2 + C)x^2$. $\square$

$$2. \quad y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x.$$

Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$. Тоді $y' = u'v + uv'$.

$$\begin{aligned} u'v + uv' + uv \operatorname{tg} x &= \cos^2 x, \\ u'v + u(v' + v \operatorname{tg} x) &= \cos^2 x. \end{aligned} \quad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' + v \operatorname{tg} x = 0$. Знаходимо v :

$$v' + v \operatorname{tg} x = 0, \quad \frac{dv}{dx} = -v \operatorname{tg} x, \quad \frac{dv}{v} = -\operatorname{tg} x dx, \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \operatorname{tg} x dx, \quad \ln|v| = \ln|\cos x|, \quad \text{звідки } v = \cos x.$$

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння (*), отримуємо рівняння для знаходження u :

$$u' \cdot \cos x = \cos^2 x, \quad u' = \frac{\cos^2 x}{\cos x}, \quad \frac{du}{dx} = \cos x, \quad du = \cos x dx, \quad \int du = \int \cos x dx, \quad \text{звідки } u = \sin x + C.$$

За формулою (14) маємо $y = uv = (\sin x + C)\cos x$. $\square$

$$3. \quad y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin 2x}{x}.$$

Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$. Тоді $y' = u'v + uv'$.

$$\begin{aligned} u'v + uv' + \frac{uv}{x} &= \frac{\sin 2x}{x}, \\ u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) &= \frac{\sin 2x}{x}. \end{aligned} \quad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' + \frac{v}{x} = 0$. Знаходимо v :

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = -\ln|x|, \quad \ln|v| = \ln \frac{1}{|x|}, \quad \text{звідки } v = \frac{1}{x}.$$

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння (*), отримуємо рівняння для знаходження u :

$$u' \cdot \frac{1}{x} = \frac{\sin 2x}{x}, \quad u' = \frac{\sin 2x}{x} \cdot x, \quad \frac{du}{dx} = \sin 2x, \quad du = \sin 2x dx, \quad \int du = \int \sin 2x dx, \quad \text{звідки } u = -\frac{1}{2} \cos 2x + C.$$

За формулою (14) маємо $y = uv = \left(C - \frac{1}{2} \cos 2x\right) \frac{1}{x}$. $\square$

$$4. \quad xy' - y = x^2 \cos x.$$

Задане рівняння запишемо як $y' - \frac{y}{x} = x \cos x$. Отже, це лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$.

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = x \cos x,$$

$$u'v + u \left(v' - \frac{v}{x} \right) = x \cos x. \quad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' - \frac{v}{x} = 0$. Знаходимо v :

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}, \quad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = \ln|x|, \quad \text{звідки } v = x.$$

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння (*), отримуємо рівняння для знаходження u :

$$u'x = x \cos x, \quad u' = x \cos x \cdot \frac{1}{x},$$

$$\frac{du}{dx} = \cos x, \quad du = \cos x dx, \quad \int du = \int \cos x dx, \quad u = \sin x + C.$$

За формулою (14) маємо $y = uv = (\sin x + C)x$. $\square$

$$5. \quad x^2 y' + 5xy + 4 = 0.$$

$\square$ $y' + \frac{5xy}{x^2} = -\frac{4}{x^2}$, $y' + \frac{5y}{x} = -\frac{4}{x^2}$, і, отже, маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$.

$$u'v + uv' + \frac{5uv}{x} = -\frac{4}{x^2},$$

$$u'v + u \left(v' + \frac{5v}{x} \right) = -\frac{4}{x^2}. \quad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' + \frac{5v}{x} = 0$. Знаходимо v :

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{5v}{x}, \quad \frac{dv}{v} = -5 \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dv}{v} = -5 \int \frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = -5 \ln|x|, \quad \ln|v| = \ln \frac{1}{x^5}, \quad \text{звідки } v = \frac{1}{x^5}.$$

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння (*), отримуємо рівняння для знаходження u :

$$u' \cdot \frac{1}{x^5} = -\frac{4}{x^2}, \quad u' = -\frac{4}{x^2} \cdot x^5, \quad \frac{du}{dx} = -4x^3,$$

$$du = -4x^3 dx, \quad \int du = -4 \int x^3 dx, \quad u = -4 \cdot \frac{x^4}{4} + C, \quad u = -x^4 + C.$$

Отже, $y = uv = \frac{C - x^4}{x^5}$. $\square$

$$6. \quad y' - \frac{2x}{x^2 + 1} y = x\sqrt{x^2 + 1}, \quad \text{якщо } y(0) = 2.$$

$\square$ Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$.

$$u'v + uv' - \frac{2x}{x^2 + 1} uv = x\sqrt{x^2 + 1},$$

$$u'v + u \left(v' - \frac{2x}{x^2 + 1} v \right) = x\sqrt{x^2 + 1}. \quad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' - \frac{2xv}{x^2 + 1} = 0$. Знаходимо v :

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2xv}{x^2 + 1}, \quad \frac{dv}{v} = \frac{2x}{x^2 + 1} dx, \quad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx, \quad \ln|v| = \ln|x^2 + 1|, \quad v = x^2 + 1.$$

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння (*), отримуємо рівняння для знаходження u :

$$u'(x^2 + 1) = x\sqrt{x^2 + 1},$$

$$u' = x\sqrt{x^2 + 1} \cdot \frac{1}{x^2 + 1}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad du = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx,$$

$$\int du = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx, \quad u = \sqrt{x^2+1} + C.$$

$$\text{Отже, } y = uv = (\sqrt{x^2+1} + C) \cdot (x^2+1).$$

Знайдемо частинний розв'язок. За умовою задачі $y = 2$ при $x = 0$. Тоді отримаємо $2 = (1+C) \cdot 1$, $C = 1$. Отже, частинний розв'язок

$$y = (\sqrt{x^2+1} + 1)(x^2+1), \quad y = (x^2+1)\sqrt{x^2+1} + x^2+1,$$

$$\text{або } y = \sqrt{(x^2+1)^3} + x^2+1. \quad \square$$

Рівняння Бернуллі.

Рівняння виду

$$y' + P(x)y = Q(x) \cdot y^\alpha \quad \text{або} \quad y' = -P(x)y + Q(x) \cdot y^\alpha, \quad (18)$$

де функції $P(x)$ та $Q(x)$ неперервні на деякому інтервалі (a, b) , $\alpha \in \mathbb{R}$, причому $\alpha \neq 0$ і $\alpha \neq 1$, називається *рівнянням Бернуллі*.

При $\alpha = 0$ рівняння (18) перетворюється в лінійне диференціальне рівняння $y' + P(x)y = Q(x)$, розглянуте раніше, а при $\alpha = 1$ – в рівняння з відокремлюваними змінними $y' = (Q(x) - P(x))y$.

Розв'язок рівняння Бернуллі зручно шукати у вигляді $y = u \cdot v$.

Розв'язати диференціальні рівняння:

$$7. \quad x^2 y^2 \frac{dy}{dx} + xy^3 = a^2 \quad (a - \text{стала}).$$

□ $x^2 y^2 y' + xy^3 = a^2$, $y^2 y' + \frac{xy^3}{x^2} = \frac{a^2}{x^2}$, $y' + \frac{y}{x} = \frac{a^2}{x^2 y^2}$. Отже, це рівняння Бернуллі. Зробимо заміну $y = uv$.

$$\begin{aligned} u'v + uv' + \frac{uv}{x} &= \frac{a^2}{x^2 u^2 v^2}, \\ u'v + u \left(v' + \frac{v}{x} \right) &= \frac{a^2}{x^2 u^2 v^2}. \end{aligned} \quad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' + \frac{v}{x} = 0$. Знаходимо v :

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = -\ln|x|, \quad v = \frac{1}{x}.$$

Підставляючи v в рівняння (*), отримуємо рівняння для знаходження u : $\frac{du}{dx} \cdot \frac{1}{x} = \frac{a^2}{x^2 \cdot u^2 \cdot \frac{1}{x^2}}$,

$$\frac{du}{dx} \cdot \frac{1}{x} = \frac{a^2}{u^2}, \quad u^2 du = a^2 x dx,$$

$$\int u^2 du = a^2 \int x dx, \quad \frac{u^3}{3} = a^2 \left(\frac{x^2}{2} + C \right), \quad u = \sqrt[3]{3a^2 \left(\frac{x^2}{2} + C \right)}.$$

$$y = uv = \frac{1}{x} \sqrt[3]{3a^2 \left(\frac{x^2}{2} + C \right)}, \quad \text{або} \quad y^3 = \frac{3a^2}{2x} + \frac{C}{x^3}. \quad \square$$

$$8. \quad y' + xy = 3xy^3.$$

□ Це рівняння Бернуллі. Зробимо заміну $y = uv$, $y\ddot{y} = u\ddot{v} + uv\dot{y}$.

$$\begin{aligned} u\ddot{v} + uv\dot{y} + xuv &= 3x(uv)^3, \\ u\ddot{v} + u(v\dot{y} + xv) &= 3x(vu)^3. \end{aligned} \quad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v\dot{y} + xv = 0$. Знаходимо v :

$$\frac{dv}{dx} = -xv, \quad \frac{dv}{v} = -x dx, \quad \ln|v| = -\frac{x^2}{2}, \quad v = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Підставляючи v в рівняння (*), отримуємо рівняння для знаходження u :

$$u \dot{y} e^{-\frac{x^2}{2}} = 3xu^3 e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \frac{du}{dx} = 3xe^{-x^2} u^3;$$

$$\frac{du}{u^3} = 3xe^{-x^2} dx, \quad \frac{du}{u^3} = 3\pi x e^{-x^2} dx.$$

$$1) \frac{du}{u^3} = \pi u^{-3} du = -\frac{u^{-2}}{2} + C = -\frac{1}{2u^2} + C;$$

$$2) \pi x e^{-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = -x^2 \\ dt = -2x dx \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \pi e^t dt = -\frac{1}{2} e^t + C = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$$

$$\text{Отже, } \frac{1}{u^2} = \frac{3}{e^{x^2}} + C, \quad \frac{1}{u^2} = 3e^{-x^2} + C, \quad u^2 = \frac{e^{x^2}}{3 + Ce^{x^2}}, \quad u = \pm \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{3 + Ce^{x^2}}}.$$

$$y = uv = \pm \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{3 + Ce^{x^2}}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \text{або} \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{3 + Ce^{x^2}}}. \quad \square$$

Рівняння Ріккаті.

Рівняння Ріккаті має загальний вигляд:

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x); \quad P, Q, R \in C(a; b)$$

У загальному випадку не є інтегрованим у квадратурах, але якщо знайдено деякий частковий розв'язок $r(x)$, то, приймаючи $y(x) = r(x) + z(x)$ можна звести рівняння до типу рівняння Бернуллі:

$r' + z' - P(r^2 + 2rz + z^2) - Q(r + z) - R = z' - (2Pr + Q)z - pz^2 = 0$ - рівняння Бернуллі, якщо $\alpha = 2$.

Вправи для самостійного розв'язання:

Feladatok:

Oldd meg a lineáris és lineárisra visszavezethető differenciálegyenletet

$$1. \quad y' + xy - x = 0$$

$$2. \quad y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x.$$

$$3. \quad (x^2 + 1)y' + 4xy = 3.$$

$$4. \quad y' - y = e^x.$$

$$5. \quad y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x$$

$$6. \quad y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, \quad \text{якщо } y(0) = 0.$$

$$7. \quad (1 - x^2)y' + xy = 1, \quad \text{якщо } y(0) = 1.$$

$$8. \quad y' - x^3 y^3 = xy$$

$$9. \quad (x+1)^2 \varphi' + 3(x+1)\varphi = 2; \quad (46)$$

$$10. \varphi' + \varphi \cos x = \sin x \cos x;$$

$$11. \varphi' \cos x + \varphi \sin x = -\varphi^3;$$

$$12. x\varphi' - 4\varphi = -\sqrt{\varphi}.$$

$$13. 2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}$$

$$14. y' + x\sqrt[3]{y} = 3y$$

$$15. 2x \ln x dy - \operatorname{tg} 2y dx = 0, \quad y(e) = 1$$

$$16. yy' = y^2 + xe^{2x}$$

$$17. 3y^2 y' = y^3 + x^2$$

$$18. 3x^2 \operatorname{ctg} 2y dx + 2(x^3 - 1) dy = 0, \quad y(2) = 0$$

$$19. A) y \sin x + y' \cos x = 1$$

$$20. \frac{y}{x + y^2} dx = dy$$

$$21. \sqrt{x^2 - 1} \cos yy' = 2x \sin y, \quad y(10) = 3\pi$$

$$22. xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$$

$$23. \cos x \cdot y' - y \sin x = \sin 2x$$

$$24. yy' - x = xy^2, \quad y(0) = 3$$

$$25. y^2 y' + x^2 \sin^3 x = y^3 \operatorname{ctg} x$$

$$26. y' - \frac{y}{x} = \ln x$$

$$27. (1 + x^2)y' = x(y \ln y), \quad y(1) = e^2$$

$$28. xy' - 2x^2 \sqrt{y} = 4y$$

$$29. 2xyy' - x^4 = y^2$$

$$30. (1 + x^2)y' = \operatorname{ctg} 2y, \quad y(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$31. y' + y = xy^3$$

$$32. \frac{x}{\sqrt{y}} y' - 2x = 2\sqrt{y}$$

$$33. e^x y' = (1 - y^2)x, \quad y(1) = 1$$

$$34. xy dy = (y^2 + x) dx$$

$$35. (y \operatorname{tg} y + x)y' = 1$$

$$36. \sqrt{(1 + x^2)} y' - x \cos 2y = x, \quad y(1) = 3\pi$$

$$37. y' + 2y = y^2 e^x$$

$$38. \ln xy' = \frac{y}{x} + \frac{\ln^2 x}{x^2}$$

$$39. y' - 7xy^{\frac{6}{7}} = 0, \quad y(2) = 0$$

$$40. xy^2 y' = x^2 + y^3$$

41. $y' = y + xe^x$
42. $\cos yy' = \arcsin x, y(1) = 1$
43. $(x+1)(y' + y^2) = -y$
44. $4x^2y^3y' + xy^4 = 1$
45. $2x \ln x dy - \operatorname{tg} 2y dx = 0, y(e) = 1$
46. $y = x(y' - x \cos x)$
47. $3yy' = \frac{2x}{x^2 + 1}y^2 + \frac{1}{y}$
48. $3x^2 \operatorname{ctg} 2y dx + 2(x^3 - 1)dy = 0, y(2) = 0$
49. $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}$
50. $y' + x^3\sqrt{y} = 3y$
51. $2x \ln x dy - \operatorname{tg} 2y dx = 0, y(e) = 1$
52. $yy' = y^2 + xe^{2x}$
53. $3y^2y' = y^3 + x^2$
54. $3x^2 \operatorname{ctg} 2y dx + 2(x^3 - 1)dy = 0, y(2) = 0$
55. $y \sin x + y' \cos x = 1$
56. $\frac{y}{x + y^2} dx = dy$
57. $\sqrt{x^2 - 1} \cos yy' = 2x \sin y, y(10) = 3\pi$
58. $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0$
59. $\cos x \cdot y' - y \sin x = \sin 2x$
60. $yy' - x = xy^2, y(0) = 3$
61. $y^2y' + x^2 \sin^3 x = y^3 \operatorname{ctg} x$
62. $y' - \frac{y}{x} = \ln x$
63. $(1 + x^2)y' = x(y \ln y), y(1) = e^2$
64. A) $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$
65. $2xyy' - x^4 = y^2$
66. $(1 + x^2)y' = \operatorname{ctg} 2y, y(1) = \frac{\pi}{4}$
67. $y' + y = xy^3$
68. $\frac{x}{\sqrt{y}}y' - 2x = 2\sqrt{y}$
69. $e^x y' = (1 - y^2)x, y(1) = 1$
70. $xydy = (y^2 + x)dx$
71. $(y \operatorname{tg} y + x)y' = 1$
72. $\sqrt{(1 + x^2)}y' - x \cos 2y = x, y(1) = 3\pi$

Теоретичні питання**Ellenőrző kérdések**

1. Який загальний вигляд лінійного рівняння?
2. У чому полягає метод варіації довільної сталої?
3. Яка технологія застосування методу Бернуллі для розв'язування лінійних диференціальних рівнянь першого порядку?
4. Який загальний вигляд рівняння Бернуллі?
5. Який метод застосовується для розв'язування рівнянь Бернуллі?
6. Який загальний вигляд рівняння Рікатті?
7. Який метод застосовується для розв'язування рівнянь Рікатті?

4. РІВНЯННЯ ІЗ ПОВНИМ ДИФЕРЕНЦІАЛОМ. ІНТЕГРУВАЛЬНИЙ МНОЖНИК

Egzakt és egzaktira visszavezethető differenciálegyenlet

Це рівняння вигляду $P(x;y)dx+Q(x;y)dy=0$.

Ліва сторона представляє собою диференціальною формою.

Нехай виконується: а) P, Q є неперервно диференційованими в деякій області D ;

б) диференціальна форма є диференціалом функції двох змінних:

$$P(x;y) = \frac{\partial U}{\partial x}; Q(x;y) = \frac{\partial U}{\partial y}; \text{ де } dU(x;y)=0, \text{ тобто } U(x;y)=C.$$

Наведемо також ознаки того, що диференціальна форма є повним диференціалом:

Необхідна ознака випливає з теореми Ейлера: якщо $dU=Pdx+Qdy$, то

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ (для гладких функцій } P \text{ та } Q).$$

Достатня ознака. Якщо гладка форма задана в однозв'язній області D та виконується необхідна умова, то диференціальна форма є повним диференціалом функції U , що $dU=Pdx+Qdy$.

Наведемо **приклад**: $(x^3 + y)dx + (x - y)dy = 0$.

Виконується необхідна умова (достатня також): $\frac{\partial}{\partial y}(x^3 + y) = 1 = \frac{\partial}{\partial x}(x - y)$ на всьому R^2 .

$$\text{Тоді } \exists U: dU = Pdx + Qdy: \frac{\partial U}{\partial x} = x^3 + y \quad (1); \quad \frac{\partial U}{\partial y} = x - y \quad (2).$$

$$\text{З (1) знаходимо: } U(x;y) = \frac{1}{4}x^4 + xy + C(y)$$

$$\text{З (2): } \frac{\partial}{\partial y}U = x - y = x + \frac{\partial}{\partial y}C(y), \text{ тобто } dC(y) = -ydy, \text{ звідки: } C(y) = -\frac{1}{2}y^2 + C.$$

Таким чином маємо: $U(x;y) = \frac{1}{4}x^4 + xy - \frac{1}{2}y^2 + C$. Або розв'язок:

$$\frac{1}{4}x^4 + xy - \frac{1}{2}y^2 = \tilde{C}.$$

Розглядаємо $Pdx + Qdy = 0$, $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ в D . Наша мета знайти функцію μ , що $\mu Pdx + \mu Qdy = 0$ та це рівняння вже буде повним диференціалом якоїсь іншої функції, тобто $\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$.

$$\text{Таким чином: } P \frac{\partial \mu}{\partial y} - Q \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad (*).$$

В загальному випадку звідси знайти μ дуже важко, а тому слід розглянути наступні випадки:

Нехай $\mu = \mu(x)$. Тоді $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$. З виразку (*) маємо: $\frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx$. Якщо справа є функція лише від x , то можна знайти $\mu(x)$ інтегруванням.

Аналогічно перевіряється варіант $\mu = \mu(y)$.

Нехай $\mu = \mu(f(x;y))$, де f -задана функція з підозри на конкретний приклад.

$$\text{Тоді маємо: } P \frac{\partial \mu}{\partial f} \cdot \frac{df}{dy} - Q \frac{\partial \mu}{\partial f} \cdot \frac{df}{dx} = \mu \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right). \text{ Тобто: } \frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{df} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P \frac{df}{dy} - Q \frac{df}{dx}}.$$

Якщо права частина є функцією лише від $f(x;y)$, то можна знайти $\mu(x;y)$.

Вправи для самостійного розв'язання:

Feladatok:

Oldja meg az egzakt és egzaktira visszavezethető differenciálegyenletet

$$1. (4x^3y^3 - 2xy)dx + (3x^4y^2 - x^2)dy = 0$$

$$2. e^y dx + (x \cdot e^y - 2y)dy = 0; \quad (63 \text{ i})$$

$$3. (x^2 + y) dx - xdy = 0; \quad (63 \text{ iii})$$

$$4. e^y(ydx - dy) = e^x(xdy - dx); \quad (63 \text{ iv})$$

$$5. (3xy + 2y^2)dx + (3xy + 2x^2)dy = 0.$$

$$6. (x + \sin y)dx + (x \cos y + \sin y)dy = 0;$$

$$7. (x + e^x \sin y)dx + (y + e^x \cos y)dy = 0;$$

$$8. (xy + \sin y)dx + (x \cos y + 0.5x^2)dy = 0;$$

$$9. (x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x + e^y)dy = 0; y(0) = 0;$$

$$10. (\arcsin x + 2xy)dx + (x^2 + 1 + \arctg y)dy = 0;$$

$$11. (tgy - y \cos ec^2 x)dx + (ctgx + x \sec^2 y)dy = 0;$$

$$12. (2xye^{x^2} + \ln y)dx + (e^{x^2} + \frac{x}{y})dy = 0; y(0) = 1$$

Теоретичні питання**Ellenőrző kérdések**

1. Якими повинні бути функції $M(x, y)$ і $N(x, y)$, щоб рівняння $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ було рівнянням у повних диференціалах?
2. Як формулюється необхідна і достатня ознака того, щоб це рівняння було у повних диференціалах?
3. Як зінтегрувати рівняння у повних диференціалах?
4. Який вигляд має загальний інтеграл такого рівняння?
5. Що називають інтегрувальним множником?
6. Наведіть формули для знаходження інтегрувальних множників вигляду $\mu(x)$, $\mu(y)$.

5. РІВНЯННЯ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНІ ВІДНОСНО ПОХІДНОЇ.

Implicit alakú differenciálegyenletek

Рівняння Рівняння, що тут будуть розглядатися мають такий загальний вид:

$$F(x, y, y') = 0$$

Представимо це рівняння поліноміальному виді.

$$a_n(x, y) y'^n + a_{n-1}(x, y) y'^{n-1} + \dots + a_0(x, y) = 0,$$

$$\text{де } a_i(x, y) \in C(D); D \subset \mathbb{R}^2.$$

За основною теоремою алгебри таке рівняння має n комплексних коренів.

Але для $\mathbb{R}$ ми можемо знайти декілька: $y' = f_k(x, y)$, $k=1, 2, \dots, n$, де, якщо $f_k(x, y)$ задовольняють теоремі Пікара на $\Delta \subset \mathbb{R}^2$, то через кожну точку проходить k розв'язків, і всі вони задовольняють умові $f_m(x_0, y_0) = y'$ і $y(x_0) = y_0$. Задаємо ще й: $y'(x_0) = y'_0; y(x_0) = y_0$. Уся трійка чисел повинна задовольняти вихідній умові: $F(x, y, y') = 0$.

РІВНЯННЯ, ЩО НЕ МІСТЯТЬ ЯВНО ОДНУ ЇЗ ЗМІННИХ.

1⁰. Рівняння вигляду $F(x, y') = 0$, що не містить явно y .

Розглянемо декілька випадків:

(а) $y' = f_k(x)$, $x \in \Delta \in \mathbb{R}$. Просте інтегрування дає нам відповідь у потрібній формі.

(б) Нехай $F(x, y') \Leftrightarrow x = \psi(y')$. У такому випадку нам доречно провести заміну $p := y'$. $p \in \mathbb{R}$ (треба визначитись із множиною визначення). Тоді користуємось тим, що:

$$dy = y' dx = p \psi'(p) dp$$

$$\text{Записуємо наступне рівняння: } y = \int p \psi'(p) dp + C$$

Таким чином ми отримали параметричний розв'язок.

$$\begin{cases} x = \psi(p) \\ y = \int p \psi'(p) dp + C \end{cases}$$

Приклад. $e^{y'} + y' - x = 0 \Leftrightarrow e^{y'} + y' = x$

Проведемо заміну згідно з теорією: $y' = p$. Тоді $e^{y'} + y' = x$ перепишеться у вигляді:

$$e^p + p = x.$$

Параметризацію ми отримуємо таку:

$$\begin{cases} x = p + \exp(p) \\ y = e^p(p-1) + \frac{1}{2}p^2 + C \end{cases}$$

(с) Метод допоміжного параметру: x, y' виражається через допоміжний параметр. Розглянемо цей метод на конкретному прикладі.

Приклад. $x^3 + y'^3 - 3xy' = 0$.

Якщо покласти $y' = p$, де $p = tx$, то для $t \neq -1$, ми маємо

$$x = \frac{3t}{1+t^3}; \quad p = \frac{3t^2}{1+t^3}$$

$$dy = p dx = \frac{3t^2}{1+t^3} \left(\frac{3t}{1+t^3} \right)'_t dt = \frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} dt$$

Отримаємо систему.

$$\begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = -\frac{9}{2(1+t^3)^2} + \frac{6}{1+t^3} + C \end{cases}$$

2⁰. $F(y, y') = 0$, що не містить явно x .

За теоремою про обернену функцію перепишемо рівняння $F(y, y') = 0$, як $F(y, \frac{1}{x'}) = G(y, x')$. Розв'язанням таких рівнянь ми займались у 1⁰.

Приклад 4. $y = y' + \ln y'$

Провівши заміну $y' = p$, ми переписуємо рівняння до вигляду $y = p + \ln p$. Тепер легко знайти $x(p)$.

Зауваження. Для підготовки до здачі варто замітити, що практично в усіх доведеннях ми використовуємо інваріантність першого диференціалу. Тому вона може бути запропонована до доведення при здачі екзамену.

3⁰. Загальний випадок $F(x, y, y') = 0$.

Покладаючи $p = y'$, маємо рівняння виду $F(x, y, p) = 0$. Введемо тепер декілька функцій:

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v), \text{ де } (u, v) \in \Delta \subset \mathbb{R}^2. \\ z = \chi(u, v) \end{cases}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{\chi \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u}}{\frac{\partial \psi}{\partial v} - \chi \frac{\partial \varphi}{\partial v}}$$

Якщо його розв'язали, то $v = w(u, C)$, де $u \in U$ (невідомо множина визначення). Дістаємо:

$$\begin{cases} x = \varphi(u, w(u, C)) \\ y = \psi(u, w(u, C)) \\ z = \chi(u, w(u, C)) \end{cases}$$

(a) $F(x, y, p) = 0 \Leftrightarrow y = f(x, p)$.

Неважко отримати: $dy = p dx$, тобто: $dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial p} dp$

Тоді: $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx} = p$ - рівняння відносно похідної. Якщо його розв'язок: $p = w(x, C)$, то розв'язок нашого рівняння: $y = f(x, w(x, C))$. Якщо: $F(x, p, C) = 0$, то отримаємо систему рівнянь $F = 0$ та $y = f(x, p)$.

(b) $F(x, y, p) = 0 \Leftrightarrow x = f(y, p)$. Поступаючи аналогічно, отримаємо: $\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dy} =$

$$\frac{1}{p}.$$

Звідки легко маємо: $x = f(y, w(x, C))$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$. $y' = p$; $y=0$ є розв'язком. Тоді виключимо такий випадок і отримаємо:

$$x = \frac{p^2}{4y} + \frac{2y}{p} \quad (p=0 \text{ лише при } y=0)$$

4⁰. Рівняння Лагранжа: $y = \varphi(p)x + \mu(p)$

Частковим випадком рівняння Лагранжа є рівняння Клеро $y = px + \mu(p)$.
Методи їхнього розв'язку були вивчені раніше.

Вправи для самостійного розв'язання:

Feladatok:

Oldja meg az y' -ban magasabb rendű differenciálegyenletet

$$y = xy' - x^2y'^3$$

1.

$$y'^2 - 2xy' = 8x^2$$

2.

$$x = y' \sqrt{y'^2 + 1}$$

3.

$$y = y'x + 2(y')^2 \text{ (Clairaut)}$$

4.

$$y = \frac{xy'^2}{2} + \frac{y'^2}{x^2}$$

5.

$$6x^2y - 6y'^2 + (12x^2 - 3x^2)y' - 6x^4 + x^3 = 0.$$

6.

$$y'(x - \ln y') = 1. \quad y'^4 - y'^2 = y^2.$$

7.

8.

$$y' = \exp\left(\frac{xy'}{y}\right).$$

9.

$$y(y - 2xy')^3 = y'^2.$$

10.

$$y = -\frac{y'^3}{12} + \frac{xy'}{2} + \frac{y'^2}{4} + \frac{x^2}{y'^2} + x.$$

11.

$$x = \frac{y}{y'} \ln y - \frac{y'^2}{y^2}.$$

12.

$$y'^3 + y^2 = xyy'.$$

13.

$$x = y' \sqrt{1 + y'^2}.$$

14.

$$x(y'^2 - 1) = 2y'.$$

15.

$$2xy' - y = y' \ln yy'.$$

16.

17. $y'^4 = 2yy' + y^2.$

18. $2yy' = x(y'^2 + 4).$

19. $y = xy' - y'^2.$

20. $y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}.$

21. $y = x(1 + y') + y'^2.$

22. $2y(y' + 2) = xy'^2.$

$$23. y + xy' = 4\sqrt{y}.$$

$$24. y'^3 = 3(xy' - y).$$

$$25. x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y'^2}.$$

$$26. y'^4 - 1 = 0.$$

$$27. y'^2 - 3y' + 1 = 0.$$

$$28. x^4 + 7y'^4 - 24x^2y' = 0.$$

Теоретичні питання

Elméleti kérdések

1. Який загальний вигляд має неявне диференціальне рівняння першого порядку? Яку функцію називають розв'язком такого рівняння?
2. Як формулюється задача Коші для неявного диференціального рівняння першого порядку?
3. Як формулюється теорема про існування єдиного розв'язку задачі Коші для неявного диференціального рівняння першого порядку?
4. Яке неявне диференціальне рівняння називають рівнянням першого порядку степеня n ?
5. Який вигляд має рівняння Лагранжа?
6. Яку заміну використовують для інтегрування рівняння Лагранжа? Які криві можуть бути його особливими розв'язками?

6. РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ, ЩО НЕ МІСТЯТЬ ЯВНО ОДНУ ЇЗ ЗМІННИХ.

Híányos magasabb rendű differenciálegyenletek

Тип $y^{(n)} = f(x)$.

Рівняння такого типу розв'язуються інтегруванням n раз. Якщо це задача Коші, то можемо, наприклад, скористатися формулою:

$$y(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f(t) dt + S_{n-1}(x), \text{ де}$$

$$S_{n-1}(x) = y_0 + y_0' (x-x_0) + \frac{y_0''}{2} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!} (x-x_0)^{n-1}$$

2⁰. Тип $F(y^{(n)}, x) = 0$.

Метод розв'язання полягає у параметризації. Запропонуємо таку:

$$\begin{cases} x = \gamma(t) \\ y^{(n)} = \psi(t) \end{cases}, \text{ де } t \in \Gamma.$$

Тоді легко бачити, що:

$$d y^{(n-1)} = y^{(n)} dx = \psi(t) \gamma'(t) dt.$$

Інтегруванням знаходимо $y^{(n-1)}$:

$$y^{(n-1)} = \int \gamma'(t) \psi(t) dt + C_1$$

$$y^{(n-2)} = \int \gamma'(t) \left(\int \gamma'(t) \psi(t) dt + C_1 \right) dt + C_2 \dots$$

Нарешті отримаємо параметризовану систему:

$$\begin{cases} x = \gamma(t) \\ y = P(t, C_1, \dots, C_n) \end{cases}, \text{ де } t \in \Gamma.$$

Як і стверджує теорема Пікара, кінцевий розв'язок залежить від n початкових умов.

Приклад. $\begin{cases} x = e^t + t \\ y'' = t \end{cases}, \text{ де } t \in \mathbb{R}.$

Як наведено вище:

$$dy' = y'' dx = t (e^t + t) dt$$

$$y' = (t+1) e^t + \frac{t^2}{2} + C_1.$$

$$dy = y' dx = ((t+1) e^t + \frac{t^2}{2} + C_1) (e^t + 1) dt$$

$$y = \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4} \right) e^{2t} + \left(\frac{t^2}{2} - 1 + C_1 \right) e^t + \frac{t^2}{6} + C_1 t + C_2.$$

3⁰. Тип $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}) = 0$.

Розглянемо декілька можливих випадків.

(а) $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}) = 0 \Rightarrow y^{(n)} = f(y^{(n-1)})$

Тоді заміною $z = y^{(n-1)}$; $z' = y^{(n)}$ ми зводимо його до $z' = f(z)$. Перевіряючи $f(z)=0$ на розв'язок, запишемо:

$$dx = \int \frac{dz}{f(z)}.$$

Інтегруючи ми отримуємо $z = \gamma(x, C_1)$. Тобто, переходячи до x та y : $y^{(n-1)} = \gamma(x, C_1)$. А це рівняння вище розглянутого типу.

$$(б) \quad F(y^{(n)}, y^{(n-1)}) = 0. \Rightarrow \begin{cases} y^{(n)} = \gamma(t) \\ y^{(n-1)} = \psi(t) \end{cases} \text{ - маємо параметризацію за } t.$$

Тоді почнемо переписувати відомі рівняння:

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx \Rightarrow \gamma(t)dx = \psi'(t) dt$$

$$dx = \frac{\psi'(t)}{\gamma(t)} dt, \text{ тобто, } x = \int \frac{\psi'(t)}{\gamma(t)} dt + C_1$$

$$dy^{(n-2)} = \psi(t)dx = \frac{\psi(t)\psi'(t)}{\gamma(t)} dt$$

Продовжуючи це, ми отримуємо розв'язок:

$$\begin{cases} x = \int \frac{\psi(t)}{\gamma(t)} dt + C_1 \\ y = P(t, C_2, \dots, C_n) \end{cases}, \text{ де } t \in \Gamma.$$

4⁰. Тип $F(y^{(n)}, y^{(n-2)}) = 0$.

Використовуючи заміну $z = y^{(n-2)}$, ми маємо рівняння другого порядку: $F(z'', z) = 0$. Знов виникає два випадки:

(а) Нехай воно розв'язане: $z'' = f(z)$. (Такі випадки часто зустрічаються у фізиці). Домножимо на $2z'$: $2z' z'' = 2z' f(z) \Leftrightarrow d(z'^2) = 2f(z)dz$:

$$(z')^2 - 2 \int f(z)dz = C_1.$$

Це так званий перший інтеграл. Отож ми маємо вже вивчений випадок-рівняння зі змінними, що відокремлюються:

$$\frac{dz}{\pm \sqrt{2 \int f(z)dz + C_1}} = dx$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{2 \int f(z)dz + C_1}} = \pm x + C_2.$$

Отож ми отримуємо: $\Phi(y^{(n-2)}, x, C_1, C_2) = 0$ - другий тип рівнянь у цьому параграфі.

РІВНЯННЯ, ЩО ПРИПУСКАЮТЬ ЗНИЖЕННЯ ПОРЯДКУ.

1⁰. Тип $F(x, y', y'') = 0$.

Проводимо заміну $z = y'$; $z = z(x)$. Одержимо такий тип: $F(x, z, z') = 0$. Таке рівняння в загальному випадку не розв'язане відносно похідної. Краще ми проілюструємо цей випадок на прикладі:

Приклад. Знайти закон руху частинки у речовині у гравітаційному полі, у якій сила опору пропорційна квадрату швидкості: $F \sim v^2$.

Запишемо другий закон Ньютона:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - k \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \quad x'' = g - (k/m) * (x')^2$$

Як і у теорії проводимо заміну $z = x'$:

$$\frac{dz}{dt} = g - \frac{k}{m} z^2 \quad t = \int \frac{dz}{g - \frac{k}{m} z^2}$$

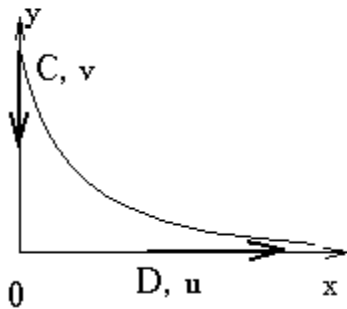
Інтегруючи дістаємо залежність $z(t)$ - тобто залежність швидкості від часу. Повторне інтегрування дасть нам залежність координат від часу.

Приклад 2 (Вовк та заєць).

Знайти траєкторію руха вовка, якщо заєць рухається вздовж осі OX із швидкістю u , а вовк весь час рухається на зайця із швидкістю v .

Розв'язання:

Спочатку заєць знаходиться у початку координат - O, вовк - у точці C. Напрямок руху зайця співпадає з напрямком вісі OX. Початкові умови: $x(d)=0$, $x'_y(d)=0$.



Знайдемо диференціальне рівняння, що описує дану криву.

Скористаємось тим, що:

$$\frac{ut - x}{y} = -\frac{dx}{dy} \Rightarrow y \frac{dx}{dy} = x - ut. \text{ Диференціюємо цей вираз (y - незалежна змінна):}$$

$$\frac{dx}{dy} + y \frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{dx}{dy} - u \frac{dt}{dy}.$$

Швидкість вовка: $v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2} \cdot \frac{dy}{dt}$, де s -довжина дуги шуканої кривої. Тоді з цих рівнянь знаходимо, що:

$$y \frac{d^2 x}{dy^2} = -\frac{u}{v} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2}.$$

Початкові умови ставлять перед нами задачу Коші:

$$x(d) = 0; \quad x'(d) = 0.$$

Зрозуміло з гомотетії, що у даній задачі важливі не абсолютні швидкості, а їх відношення. Тому замінимо: $\lambda = \frac{u}{v}$. Для розв'язку замінимо $z = \frac{dx}{dy}$. Тоді наше рівняння прийме вигляд:

$$y \frac{dz}{dy} = -\lambda \sqrt{1 + z^2}, \text{ або } \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = -\lambda \frac{dy}{y}$$

Інтегруючи отримаємо, що

$$z + \sqrt{1 + z^2} = \left(\frac{d}{y} \right)^\lambda, \text{ де } d - \text{константа.}$$

$$z - \sqrt{1+z^2} = -\left(\frac{y}{d}\right)^\lambda.$$

Друге рівняння ми отримали множенням на спряжене. Тепер віднімемо їх:

$$2z = \left(\frac{d}{y}\right)^\lambda - \left(\frac{y}{d}\right)^\lambda.$$

Залишилось розв'язати рівняння із змінними, що відокремлюються.

2⁰. Тип $F(y, y', y'') = 0$.

Заміною $y' = p$ ми можемо виключити неявне x і звести дане рівняння до попереднього типу:

$$y'(x) = p(y(x)), \quad \text{тобто} \quad p = p(y).$$

$$y''(x) = \frac{dp(y(x))}{dx} = \frac{dp(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = pp'_y$$

$$F(y, y', y'') = 0 \Rightarrow F(y, p, p') = 0.$$

Приклад. $\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin y = 0$

Проведемо заміну: $w^2 = g/l$. Також $p = \frac{dy}{dt}$; $\frac{d^2 y}{dt^2} = p \frac{dp}{dy}$. Такі заміни

приводять до співвідношення: $p dp = -w^2 \sin y dy \Rightarrow p^2/2 = w^2 \cos y + C$.

Можна взяти константу інтегрування, як $C = -w^2 \cos y_0$. Тоді ми і отримуємо:

$$\frac{dy}{dt} = \pm \sqrt{2} w \sqrt{\cos y - \cos y_0}$$

$$\pm t = \frac{1}{\sqrt{2} w} \int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{\cos y - \cos y_0}}$$

Це еліптичний інтеграл, який не береться у елементарних функціях. Тому цей вираз залишимо, як відповідь.

3⁰. Тип $F(x, y, y', y'') = 0$, де для функції F справедливо $F(x, ky, ky', ky'') = k^\varepsilon F(x, y, y', y'')$, де $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Запровадимо підстановку: $y = \pm e^{\int z dx}$, тобто $y(x) \rightarrow z(x)$. Похідні будуть дорівнювати: $y' = \pm e^{\int z dx} z$; $y'' = \pm(z^2 + 1)e^{\int z dx}$. Отже отримане рівняння буде вже рівнянням відносно x та z .

4⁰. Тип $F(x, y, y', y'') = 0$ з можливістю переписати рівняння у вигляді $(x, y, dx, dy, d^2 y) = 0$ і має місце рівність: $\Phi(kx, ky, kdx, kdy, kd^2 y) = k^\varepsilon \Phi(x, y, dx, dy, d^2 y)$.

Тоді перейдемо від (x, y) до $(\varepsilon, u(\varepsilon))$. Отримаємо:

$$\begin{cases} x = e^\varepsilon \\ y = u(\varepsilon)e^\varepsilon \end{cases}$$

Можемо знайти:

$$\text{Тоді:} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{d\varepsilon} + u; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{d^2 u}{d\varepsilon^2} + \frac{du}{d\varepsilon}\right)e^\varepsilon.$$

Підставляючи у вихідне, отримуємо лінійне рівняння.

Вправи для самостійного розв'язання:**Feladatok:**

Oldja meg hiányos másodrendű differenciálegyenletet

$$13. \quad \varphi'' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \in (-1,1));$$

$$14. \quad 2\varphi\varphi'' + (\varphi')^2 + (\varphi')^4 = 0;$$

$$15. \quad \varphi + \varphi'' = 0;$$

$$(x \cdot \ln x) \cdot \varphi'' - \varphi' = 0.$$

$$16.$$

$$17. \quad y'' = 6x,$$

$$18. \quad xy'' - y'^2 + y'^3 = 0$$

$$19. \quad xy'' - y' = 0.$$

$$20. \quad (1 + \sin x)^2 y'' + \cos x = 0$$

$$y'' = 93y^3, \text{ ha } y(1) = 1 \quad y'(1) = 7$$

$$1. \quad y''' = e^{-x}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0.$$

$$2. \quad y''' = \frac{e^x}{x}; \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0, \quad y''(1) = 0.$$

$$3. \quad y'' = 1; \quad y(1) = 0, \quad y(2) = 1.$$

$$4. \quad y'' = 2; \quad y(-1) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Знизити порядок рівнянь до першого:

$$5. \quad yy'' = y'^2 + 2xy^2.$$

$$6. \quad y'^2 - yy''' = \left(\frac{y'}{x}\right)^2.$$

$$7. \quad y'' + \frac{2}{x}y' + y^2 = 0.$$

$$8. \quad y'^2 + 2xyy'' = 0.$$

$$9. \quad y''' + (y - 2)y' = 0.$$

$$10. \quad y'''y'^2 = 1.$$

$$11. \quad x^2(y^2y''' - y'^3) - 2y^2y' - 3xyy'^2 = 0.$$

$$12. \quad y^2(y'y''' - 2y''^2) - yy'^2y'' = 2y'^4.$$

13. $yy'y''' + 2y'^2y'' = 3yy''^2.$
14. $x^2yy'' + 1 = (1 - y)xy'.$
15. $y'' + 2yy'^2 = \left(2x + \frac{1}{x}\right)y'.$
16. $y(2xy'' + y') = xy'^2 + 1.$

Розв'язати рівняння, виділивши повні похідні:

17. $y'' = 2yy'.$
18. $yy''' - y'y'' = 0.$
19. $yy'' = y'.$
20. $y'' = y'^2y.$
21. $yy'' = y'(y' + 1).$
22. $y''y + y'^2 = 1.$
23. $xy'' = 2yy' - y'.$
24. $y'' = xy' + y + 1.$
25. $xy'' - y' = x^2yy'.$
26. $5y'''^2 - 3y''y'''' = 0.$

Розв'язати рівняння:

27. $xy^{(4)} = 1.$
28. $xy' = \sin x.$
29. $y''' = 2xy''.$
30. $y'' = \sin(x^2).$
31. $y''' = \frac{\sin x}{x}.$
32. $y'' = e^x + \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}.$
33. $x = e^{-y''} + y''$
34. $y'^2 = 1.$
35. $x = \frac{y}{\sqrt{1 + y''^2}}.$
36. $y'' = \frac{1}{(x - 1)^3} - \frac{1}{(x + 1)^3}.$

$$37. \quad x^2 y'' = y'^2.$$

$$38. \quad y'(1 + y'^2) = ay''.$$

$$39. \quad y''x \ln x = y'.$$

Теоретичні питання**Ellenőrző kérdések**

1. Які види диференціальних рівнянь другого порядку можна звести до диференціальних рівнянь першого порядку?
2. Які підстановки використовуються для зведення даних рівнянь до диференціальних рівнянь першого порядку?
3. У чому полягає задача Коші для диференціальних рівнянь другого порядку?

7. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ N-ГО СТЕПЕНЯ

Magasabb rendű lineáris differenciálegyenletek

Розглянемо рівняння наступного вигляду:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n = 0. \quad a_i \in \mathbb{R} \ (i = \overline{1, n}) \quad (1)$$

Сталі у цьому рівнянні можуть бути записаними, як функції, що неперервні на всій числовій осі. Таким чином очевидно, що вся теорія для лінійних рівнянь, наведена вище, може бути використана і для рівнянь типу (1).

Задавши початкові умови в купі із рівнянням (1), отримаємо задачу Коші, яка буде мати єдиний розв'язок на всій осі:

$$y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)}.$$

Введемо спеціальний лінійний оператор:

$$L := \frac{d^n}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_n \quad (2)$$

Def. Характеристичним многочленом оператора L (2) назовемо многочлен:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n \quad (3)$$

Таким чином символічно оператор $L \in : L := P\left(\frac{d}{dx}\right)$.

Алгоритм знаходження загального розв'язку $Ly = 0$.

1. Будуємо характеристичне рівняння.
2. Знаходимо його корені.
3. Для кожного кореня записуємо систему функцій, що він породжує у комплексному або дійсному вигляді.
4. Записуємо загальний розв'язок.

Приклад. $y'' - y = 0$. Рівняння: $\lambda^2 - 1 = 0$. Тоді: $\lambda = 1$ та $\lambda = -1$. Фундаментальна система: $y_1(x) = e^x$; $y_2(x) = e^{-x}$. Загальний розв'язок: $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Чи є ця фундаментальна

система нормальною? Вронскіан: $W(x|y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix}$. Очевидно, що у нулі ця

матриця не є одиничною, тобто в нулі не є нормальною фундаментальною

системою. Обернена: $\hat{W}_0^{-1} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$. Тоді неважко отримати:

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e^x \\ e^{-x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ch}x \\ \text{sh}x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{vmatrix}. \text{ З тим же успіхом можна записати, що розв'язком буде:}$$

$$y(x) = C_1 \text{ch}x + C_2 \text{sh}x.$$

Приклад 2. $y'' + y = 0$. Корені характеристичного рівняння: $\lambda = +i$ та $\lambda = -i$.

Розв'язком буде: $y(x) = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix}$. Дійсний розв'язок у такому випадку:

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Приклад 3. Характеристичне рівняння: $P(\lambda) = \lambda^3 [\lambda - (2+3i)]^2 [\lambda - (2-3i)]^2$. Корені:

$\lambda_1 = 0$ (кратності 3); $\lambda_{2,3} = 2 \pm 3i$. Фундаментальна система, що породжена: λ_1 дає $1, x, x^2$; $\lambda_{2,3}$ дає $\exp[2 \pm 3i]$ та $x \cdot \exp[2 \pm 3i]$. Таким чином дійсний розв'язок:

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{2x} \cos 3x + C_5 e^{2x} \sin 3x + x e^{2x} (C_6 \sin 3x + C_7 \cos 3x).$$

Вправи для самостійного розв'язання:**Feladatok:**

1. Дослідити на лінійну залежність функції в області їх визначення:
 $y_1 = x, y_2 = 2x, y_3 = x^2$.
2. $y_1 = x^2, y_2 = x \cdot |x|$.
3. $y_1 = \sin x, y_2 = \cos x, y_3 = \cos 2x$.
4. $y_1 = 5, y_2 = \cos^2 x, y_3 = \sin^2 x$.
5. $y_1 = \cos x, y_2 = \cos(x + 1), y_3 = \cos(x - 2)$.
6. $y_1 = x, y_2 = a^{\log_a x}$.
7. $y_1 = 1, y_2 = \arcsin x, y_3 = \arccos x$.

Oldd meg

8. $y'' - 6y' + 9y = 0$
9. $y'' + 2y' + 5y = 0$
10. $y'' - 6y' + 25y = 0$
11. $y'' - 2y = 0$.
12. $y'' - 6y' + 8y = 0$.
13. $y'' - y' - 2y = 0$.
14. $y^{(n)} - y = 0$.
15. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$.
16. $y'' + 4y = 0$.
17. $y^{(4)} - y = 0$.
18. $y''' - y = 0$.
19. $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0$.
20. $y'' = 0$.
21. $y''' + 8y = 0$.
22. $y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y''' = 0$.
23. $y^{(4)} - y = 0$.
24. $4y'' + 4y' + y = 0$.

25. $y^{(5)} - 10y''' + 9y' = 0.$

26. $y^{(4)} - 2y'' + y = 0.$

Теоретичні питання

Ellenőrző kérdések

1. Який вигляд має лінійне диференціальне рівняння n-го порядку?
2. Чим лінійне однорідне рівняння відрізняється від лінійного неоднорідного?
3. Що називають лінійним диференціальним оператором n-го порядку і які його основні властивості?
4. Як можна записати лінійні однорідне і неоднорідне рівняння з використанням лінійного диференціального оператора?
5. Чи є лінійна комбінація зі сталими коефіцієнтами частинних розв'язків лінійного однорідного рівняння розв'язком цього ж рівняння?
6. Які функції називають лінійно незалежними та лінійно залежними на інтервалі? Наведіть приклади таких функцій.
7. Що називають вронскіаном функцій $y_1, y_2, \dots, y_n$?

8. ЛІНІЙНІ НЕОДНОРІДНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ N-ГО СТЕПЕНЯ.

СПЕЦІАЛЬНІ ВИПАДКИ.

Принцип суперпозиції.

Щоб знайти загальний розв'язок рівняння, нам потрібно знайти розв'язок однорідного, що ми вже можемо, а потім підібрати частковий розв'язок. Тоді загальний буде їх сумою:

$$y = y_0 + \bar{y}.$$

Розглянемо декілька випадків:

(а) Нехай a не є коренем характеристичного рівняння (так званий нерезонансний випадок). Тоді розв'язок шукаємо у виді:

$\bar{y} = e^{ax} R_m(x)$, де $R_m(x)$ - многочлен степеня m із невідомими коефіцієнтами. Для знаходження цих коефіцієнтів, ми маємо підставити даний розв'язок до рівняння і прирівняти коефіцієнти при різних функціях. Щоб довести це у загальному випадку, потрібно, підставивши у вихідне рівняння, отримати тотожність.

(б) a - корінь кратності r . Тоді частковий розв'язок має вид $\bar{y} = x^r e^{ax} R_m(x)$. (Фізики називають такий випадок резонансним).

3⁰. Частковий розв'язок неоднорідного рівняння у випадку

$f(x) = e^{ax} [Q_k(x) \cos ax + T_m(x) \sin bx]$, де $k, m > 0$.

(а) $a \pm bi$ - не є коренем характеристичного рівняння. (нерезонансний випадок). Тоді $\bar{y} = e^{ax} [R_p(x) \cos ax + S_p(x) \sin bx]$, де $p = \max \{k, m\}$. Сумарна кількість невідомих констант: $2p+2$.

(б) Для резонансного випадку міркуємо аналогічно попередньому пункту. $a \pm bi$ - корінь кратності r . Тоді частковий розв'язок має вид $\bar{y} = e^{ax} x^r [R_p(x) \cos ax + S_p(x) \sin bx]$.

Приклад. Нехай характеристичне рівняння має корінь $2i$ кратності 1 (за наслідком основної теореми алгебри $-2i$ - теж корінь). Розглянемо рівняння $Ly = f = \cos 2x + x \sin 2x + e^{-x^2} \sin 3x$.

1) Оскільки $\pm 2i$ - корінь, то $\bar{y}_1(x) = x ((a_1 x + a_2) \cos 2x + (b_1 x + b_2) \sin 2x)$.

2) Якщо $-1 \pm 3i$ - не є коренем, то

$$\bar{y}_2(x) = e^{-x} ((a_1 x^2 + a_2 x + a_3) \sin 3x + e^{-x} (b_1 x^2 + b_2 x + b_3) \cos 3x).$$

Вправи для самостійного розв'язання:

Feladatok:

Oldjuk meg az állandó a próbafüggvény módszerével:

1. $y'' + 5y' + 4y = 3 - 2x - x^2$
2. $y'' - 6y' + 13y = x + 3 \sin x$
3. $y'' + 6y' + 9y = 2e^{-3x}$

4. $y'' - 6y' + 25y = 6e^{2x}$
5. $y'' + 2y' + 5y = -4x^2 \cos(2x)$
6. $y'' - 6y' + 13y = (8x + 4)e^{3x}$
7. $y'' + 3y' = 6 + 9 \sin 3x + 4e^{-3x}$
8. $y'' - 2y' - 3y = 2 \cos 3x$
9. $y'' + 6y' + 34y = 17x^2 - 62x + 23$
10. $y'' - y = (2x + 3)e^x + xe^{2x}$
11. $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 2)$
12. $y'' - y = xe^x \sin x.$
13. $y'' + y = x \cos x.$
14. $y'' + y' = e^{-x} + 2x - 1.$
15. $y'' + 7y' + 10y = xe^{-2x} \cos 5x.$
16. $y''' + y' = \sin x + x \cos x.$
17. $y'' - 2y' + 5y = 2xe^x + e^x \sin 2x.$
18. $y'' - 6y' + 8y = 5xe^x + 2e^{4x} \sin x.$
19. $y''' - y' = e^x \sin x + 2x^2.$
20. $y'' + 4y = \cos x \cdot \cos 3x.$
21. $y'' - 6y' + 13y = x^2 e^{3x} - 3 \cos 2x.$
22. $y'' - 2y' + 2y = (x + e^x) \sin x.$
23. $y^{(4)} + 5y'' + 4y = \sin x \cdot \cos 2x.$
24. $y'' + 4y = x^2 \sin^2 x.$
25. $y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = e^x(\sin x + x \cos x).$
26. $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = e^{2x} \sin 2x + 2x^2.$
27. $y'' - 8y' + 20y = 5xe^{4x} \sin 2x.$
28. $y'' - 2y' + y = 2xe^x + e^x \sin 2x.$
29. $y'' + y' + ky = x.$
30. $y'' + ky = e^{ax}.$

Oldja meg az állandó együtthatósra visszavezethető egyenletet:

1. $x^2 y'' - xy' + 4y = \cos(\ln x) + x \sin(\ln x)$
2. $x^2 \varphi'' - 3x\varphi' + 3\varphi = x;$
3. $(2x+1)^2 \varphi'' - 4(2x+1)\varphi' + 8\varphi = 0.$

4. $x^2 y'' - 3xy' + 4y = x + x^2 \ln x$

Oldd meg függvény együtthatós differenciálegyenletet:

5. $xy'' - y' = x^3$

Теоретичні питання

Ellenőrző kérdések

1. Яку структуру має загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння n -го порядку?
2. Який вигляд має частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння, якщо його права частина є сумою декількох доданків?
3. У чому полягає метод варіації довільних сталих інтегрування лінійного неоднорідного рівняння n -го порядку?
4. У чому полягає метод невизначених коефіцієнтів знаходження частинних розв'язків лінійного неоднорідного рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами?
5. Якого вигляду має бути права частина рівняння, щоб можна було використати цей метод?