ЗАКАРПАТСЬКИЙ УГОРСЬКИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ФЕРЕНЦА РАКОЦІ ІІ
II. RÁKÓCZI FERENC KÁRPÁTALJAI MAGYAR FŐISKOLA

Кафедра математики та інформатики
Matematika és Informatika Tanszék

«ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ»
(МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДЛЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ)

(для студентів 3-го курсу спеціальності 014 Середня освіта (Математика)

KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN

(Módszertani utmutató gyakorlati foglalkozásokhoz)

Перший (бакалаврський) / Alapképzés (BA)
(ступінь вищої освіти /a felsőoktatás szintje)

01 Освіта/Педагогіка */ 01 Oktatás/Pedagógia*
(галузь знань / képzési ág)

"Середня освіта (*Математика*)*"*
"Középfokú oktatás (*Matematika*)*"*
(освітня програма / képzési program)

Берегове / Beregszász
2023 р. / 2023

Посібник з теорії функцій комплексної змінної призначений для студентів III курсу Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці спеціальності 014 Середня освіта (математика) денної та заочної форми навчання з метою організації практичної роботи з курсу "Комплексний аналіз".

Посібник поділений на розділи, кожен з яких складається з двох частин. У першій частині коротко описані поняття та твердження. Друга частина складається з практичних завдань, розв'язання яких допомагає зрозуміти та засвоїти ltasysws], а також розвинути навички, необхідні для застосування комплексного аналізу.

Матеріал призначений для використання як навчально-методичний посібник з дисципліни "Комплексний аналіз".

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики
(протокол № 12 від 13 червня 2023 року)

Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості освіти
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол № 11 від «29» серпня 2023 року)

Рекомендовано до видання у електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол № 8 від «31» серпня 2023 року)

Підготовлено до видання у електронній формі (PDF) кафедрою математики та інформатики з Видавничим відділом Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Укладач:

СТОЙКА МИРОСЛАВ ВІКТОРОВИЧ – доцент кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Рецензенти:

ПЕТЕЧУК ЮЛІЯ ВАСИЛІВНА – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики та інформатики ЗУІ;

БОРТОШ МАРІЯ ЮЛІЇВНА – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри та диференціальних рівнянь ДВНЗ «УжНУ»

Відповідальний за випуск:

Олександр ДОБОШ – начальник Видавничого відділу ЗУІ ім. Ф.Ракоці II

За зміст посібника відповідальність несуть розробники.

Видавництво: Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II (адреса: пл. Кошута 6, м. Берегове, 90202. Електронна пошта: foiskola@kmf.uz.ua)

© Мирослав Стойка, 2023
© Кафедра математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II, 2023

A komplex függvénytan a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola, III. éves, matematika szakos, nappali és levelezős hallgatóinak készült, a Komplex analízis c. tantárgy alaposabb tanulmányozásának és elsajátításának megkönnyítése céljából.

Ez a jegyzet elsősorban matematika szakos hallgatók számára készült, de hasznos lehet mindazok számára, akik bármely más szakon tanulnak matematikát.

A jegyzet fejezetekre van osztva, és minden fejezet általában két részből áll. Az első részben röviden a fogalmak és alapelvek vannak bemutatva. A második rész pedig gyakorlati feladatokból áll, amelyek megoldása segít a fogalmak megértésében és elsajátításában, valamint fejleszti a komplex analízis alkalmazásához szükséges készségeket. Tehát ez a jegyzet egyúttal bevezető és önfejlesztő jellegű segédanyag

Az oktatási folyamatban történő felhasználását jóváhagyta
a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Matematika és Informatika Tanszéke
(2023. június 13, 12. számú jegyzőkönyv).

Megjelentetésre javasolta a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Minőségbiztosítási Tanácsa
(2023. augusztus 29, 11. számú jegyzőkönyv).

Elektronikus formában (PDF fájlformátumban) történő kiadásra javasolta
a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Tudományos Tanácsa
(2023. augusztus 31, 8. számú jegyzőkönyv).

Kiadásra előkészítette a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Matematika és Informatika Tanszéke és Kiadói Részlege.

Szerkesztő:

SZTOJKA MIROSZLÁV – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének docense

Szakmai lektorok:

PETECSUK JÚLIA – fizika és matematika tudományok kandidátusa, docens, a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének docense

BARTOS MÁRIA – fizika és matematika tudományok kandidátusa, docens, az Ungvári Nemzeti Egyetem Algebra és Diferenciál Egyenletek Tanszékének docense

A kiadásért felel:

DOBOS Sándor – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Kiadói Részlegének vezetője

A tartalomért kizárólag a jegyzet szerkesztője felel.

Kiadó: a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola (cím: 90 202, Beregszász, Kossuth tér 6. E-mail: foiskola@kmf.uz.ua)

© Sztojka Miroszláv, 2023
© A II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszéke, 2023

Tartalom

Előszó 5
1. A komplex szám fogalma 6
2. Komplex számokkal végzett műveletek 8
3. Komplex szám trigonometrikus alakja 9
4. Euler-formula. A komplex szám exponenciális alakja 10
5. Komplex számok műveletei trigonometrikus és exponenciális alakban 11
6. A komplex szám geometriai értelmezése 12
7. Komplex változós függvény 13
8. Komplex számok sorozatának határértéke. Komplex változós függvény határértéke 14
9. Komplex változós függvényének deriváltja. Cauchy-Riemann feltételek 15
10. Az analitikus függvény helyreállítása annak valós (képzetes) része alapján 16
11. Egylapú függvények 17
12. Komplex változós függvény integrálása 18
13. Cauchy-féle integrálképletek 19
14. Komplex tagú számsorok 20
15. Komplex változós függvények szinguláris pontjai 23
16. Reziduumok kiszámítása 24
17. Reziduumok alaptétele 25
18. Az integrálok kiszámítása zárt görbéken a reziduumok segítségével a $z = \infty$ pontban 27
19. Többértékű függvények integrálása 28
20. Improprius integrálok kiszámítása reziduumok segítségével 29
21. Improprius integrálok kiszámítása a Jordán lemma segítségével 30
22. Trigonometriai racionális függvényektől való határozott integrálok kiszámítása 31
23. Laplace transzformáció 32
24. Tétel az eredeti és transfotmált függvény deriváltjáról 35
25. Tételek az eredeti és transzformált függvények integráljairól 36
26. Az eredeti késleltetésének tétele 37
27. A transzformált függvény eltolásának tétele 38
28. A konvolúció tétel 39
29. A gamma-függvények és tulajdonságaik 40
30. Lineáris differenciálegyenletek és lineáris differenciálegyenletrendszerek 41
Irodalom 44

Előszó

A komplex analízis, más néven komplex függvénytan, a matematika olyan ága, amely a komplex változókkal és komplex értékű függvényekkel foglalkozik. A komplex függvények olyan leképezéseket jelentenek a matematikában, amelyek értelmezési tartománya és értékkészlete is a komplex sík részhalmaza. A komplex analízist alkalmazzák kétdimenziós fizikai problémák modellezésében és a számelméletben is.

Ez a jegyzet elsősorban matematika szakos hallgatók számára készült, de hasznos lehet mindazok számára, akik bármely más szakon tanulnak matematikát.

A jegyzet fejezetekre van osztva, és minden fejezet általában két részből áll. Az első részben röviden a fogalmak és alapelvek vannak bemutatva. A második rész pedig gyakorlati feladatokból áll, amelyek megoldása segít a fogalmak megértésében és elsajátításában, valamint fejleszti a komplex analízis alkalmazásához szükséges készségeket. Tehát ez a jegyzet egyúttal bevezető és önfejlesztő jellegű segédanyag.

1. A komplex szám fogalma

$Re(z)$ a z komplex szám valós része, míg $Im(z)$ az komplex szám képzetes része.

1.1. Addja meg z komplex szám $Re(z)$ (valós rész) és $Im(z)$ (képzetes rész) értékét:

a) $6i^2+3i$; b) $(1+i)^3$; c) $i+\frac{1}{i}$; d) $i-\frac{1}{i}$; e) $\frac{1+i}{1-i}$; f) $(1-i)^5$;

g) $1+i+i^2+i^3$; h) $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}$; i) $i-i^2$; j) $\sum_{k=1}^{n} i^k$!

1.2. Addja meg z komplex szám $Re(z)$ (valós rész) és $Im(z)$ (képzetes rész) értékét:

a) $\frac{1-i}{i}$; b) $i+(8i+1)^2$; c) i^{17};

d) $16i^{32}$; e) $(1+i)^4$; f) $i-\frac{1}{i}+\frac{1/i}{i}$!

1.3. Határozza meg a z komplex konjugáltját:

a) $-3i^3-5i^2$; b) $(5+6i)^5$; c) 7;

d) i^{53}; e) $i(6i+7i^2)$; f) $-i(-i(1-i^2))$;

g) $i(-i)(i+2)$; h) $\frac{1+i}{1-i}$; i) $\frac{1}{i-7}$; j) $\frac{1}{i}$!

1.4. Határozd meg a z komplex konjugáltját:

a) $\frac{i}{6+i}$; b) $i+i^2+i^3+i^4+i^5$; c) $i+(i+2)+(i+4)$;

d) $-i(-i(1-i))$; e) i^3; f) $16+i^4$!

1.5. Bizonyítsa be az alábbi egyenlőségeket:

a) $(1+i)^{8n}=2^{4n}$ $(n\in\mathbb{Z})$; b) $(1+i)^{4n}=(-1)^n 2^{2n}$ $(n\in\mathbb{Z})$!

1.6. Keresse meg az x és y valós számokat, amelyek kielégítik a következő egyenleteket:

a) $(2+i)x+(1+2i)y=1-4i$;

b) $(3+2i)x+(1+3i)y=4-9i$!

1.7. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket:

a) $\begin{cases} (3-i)x+(4+2i)y=2+6i, \\ (4+2i)x-(2+3i)y=5+4i; \end{cases}$

b) $\begin{cases} (2+i)x+(2-i)y=6, \\ (3+2i)x+(3-2i)y=8; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+iy-2z=10, \\ x-y+2iz=20, \\ ix+3iy-(1+i)z=30! \end{cases}$

1.8. Legyen $\alpha \in \mathbb{C}$ és $\sqrt{\alpha}$ — olyan komplex szám, hogy $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha$. Számítsa ki:

a) $\sqrt{2i}$; b) $\sqrt{-15+8i}$; c) $\sqrt{-3-4i}$; d) $\sqrt{-11+60i}$;

e) $\sqrt[4]{-1}$; f) $\sqrt{8+6i}$; g) $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$; h) $\sqrt[4]{2-i\sqrt{12}}$!

1.9. Oldja meg az alábbi egyenleteket:

a) $x^2-(2+i)x-1+7i=0$;

b) $x^2-(3-2i)x+5-5i=0$;

c) $(2+i)x^2-(5-i)x+2-2i=0$;

d) $(1-i)x^2-(2-16i)x-23-39i=0$!

1.10. Bizonyítsa be, hogy:

a) a z komplex szám akkor és csakis akkor lesz valós, ha $\bar{z}=z$;

b) a z komplex szám akkor és csakis akkor lesz tiszta képzetes, ha $\bar{z}=-z$!

2. Komplex számokkal végzett műveletek

2.1. Végezze el az alábbi műveleteket:

a) $(1-6i)(1+6i)$; b) $\frac{1}{1-2i}\cdot(1+2i)$; c) $(1+i)(1+2i)$;

d) $(1+i)(i^5-i)$; e) $(5+i)(15-3i)$; f) $(4-5i)(-2+3i)+(1+2i)(-3+4i)$.

g) $(1-i)(1+i)(1-2i)(1+2i)$; h) $(1-i)^3(1+i)^3$;

i) $(1-i)(1-2i)(1-3i)$; j) $(1+i)^8$!

2.2. Végezze el az alábbi műveleteket:

a) $(1+i)(1+2i)(1+3i)$; b) $\frac{1}{1+3i}\cdot(1-3i)$; c) $(1+i)^2(i-1)^2$;

d) $(1-i)(1-2i)(1-3i)$; e) $i(1+i)(1-i)$; f) $z\cdot\frac{1}{\bar{z}}$!

2.3. Végezze el az alábbi műveleteket:

a) $\frac{1+i}{1-i}$; b) $\frac{1-2i-6}{1+i}$; c) $\frac{(i+3)^2}{i-3}$;

d) $\frac{|z+i|}{z}$; e) $\frac{4-i}{5+i}$; f) $\frac{i^7}{1+i}$!

2.4. Végezze el az alábbi műveleteket:

a) $\frac{5-6i}{5-i}$; b) $\frac{i-i^2+i^3-i^4}{1-i}$; c) $\frac{i+5}{i+i^3}$;

d) $\frac{i+i^4}{i+i^8}$; e) $\frac{i^9}{1+i}$!

3. Komplex szám trigonometrikus alakja

A komplex szám trigonometrikus alakja a következő $z = r(cos\,\varphi + isin\,\varphi)$, ahol r a komplex szám abszolútértéke, φ pedig a komplex szám argumentuma. Ha z-t egy komplex változó síkján ábrázoljuk egy ponttal, akkor az OZ vektor elhajlásának szöge az OX tengelyhez képest (óramutató járásával ellentétes irányban) megegyezik a komplex szám argumentumával radianban mérve.

Ha $x > 0$, akkor $\varphi = arctg(y/x)$; ha $x = 0$ és $y > 0$, akkor $\varphi = \pi/2$; ha $x = 0$ és $y < 0$, akkor $\varphi = -\pi/2$; ha $x < 0$ és $y > 0$, akkor $\varphi = \pi + arctg(y/x)$; ha $x < 0$ és $y < 0$, akkor $\varphi = -\pi + arctg(y/x)$. Az $x = 0, y = 0$ esetében az argumentum nem létezik. Ha a φ értéke $(-\pi, \pi]$ szakaszba esik, akkor azt fő argumentumnak nevezik.

3.1. Határozza meg a z komplex szám abszolútértékét:

a) $i^n, n \in \mathrm{N}$; b) $(1+i)^n, n \in \mathrm{N}$; c) $\frac{1-i}{i}$;

d) $i + i^3 + i^5 + i^7 + \ldots + i^{2k+1}$; e) $4 + 3i$; f) $i^{52} + i^{100}$!

g) $2i^3 - 1$; h) i^{5+i}; i) $\frac{1}{3+i}$; j) $\frac{1}{(1-i)(1+i)}$!

3.2. Határozza meg a z komplex szám abszolútértékét:

a) $-i - i^3$; b) $\sum_{k=1}^{10}(i+k)$; c) $\frac{1}{2i}$; d) $i - \sqrt{5}$!

3.3. Határozza meg a z komplex szám argumentumának értékét:

a) i; b) $-i^2$; c) $1 + i^3$;

d) $i^2 + i^4 + i^6$; e) $1 + i\sqrt{3}$; f) $-1 - i\sqrt{3}$!

3.4. Határozd meg a z komplex szám argumentumának értékét:

a) $1 + \frac{1}{i}$; b) $1 - \frac{1}{i\sqrt{3}}$; c) $z \cdot \bar{z}$; d) $i - i^3 + i^5 - i^7$; e) $i + i^3 + i^5 + i^7$; f) $iz \cdot \bar{z}$!

4. Euler-formula $e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$.

A komplex szám exponenciális alakja

4.1. Végezze el a műveleteket:

a) $(1+i)^3(1-i)^5$; b) $(1+i)^{-1}(1-i)^3$; c) $\sin iz$; d) $\cos iz$;

e) $\sin iz + \cos iz$; f) $tg\, iz$; g) $ctg\, iz$; h) $e + \frac{1}{e}$!

4.2. Végezze el a műveleteket:

a) $(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^5$; b) $(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})\cdot(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})$;

c) $\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)$; d) $e^{iz+\bar{z}}$; e) $e^{i\pi/3}$; f) $e^{i\ln 2}$!

4.3. Írja fel a komplex számot általános alakban (a $\sqrt{...}$ jel alatt annak számtani értékét értjük):

a) $z = (17+34i)^2$; b) $z = \frac{(-\sqrt{2}+i\sqrt{23})^2}{(1-3i)^4}$;

c) $z = (6+i)^{-3}$; d) $z = \frac{(11i-3)^8}{(\sqrt{15}-i\sqrt{10})^{12}}$;

e) $z = (i\sqrt{5}+4)^{-7}$; f) $z = \frac{i+\sqrt{15}}{(-\sqrt{14}+i\sqrt{2})^{11}}$;

g) $z = (i\sqrt{7}+\sqrt{14})^3$; h) $z = i\,\frac{(5+i\sqrt{11})^9}{-3-4i}$;

i) $z = (-\sqrt{3}+i)^{-5}$; j) $z = \frac{(7i^7+\sqrt{15})^8}{(1+i\sqrt{3})^8(-\sqrt{7}-3i)^8}$;

k) $z = \frac{(3-4i)^4}{(2+5i)^3}$; l) $z = \frac{(12+5i^3)^4}{(3-4i)^7(-2-i\sqrt{21})^3}$!

5. Komplex számok műveletei trigonometrikus és exponenciális alakban

A $z = re^{i\varphi}$ komplex szám n-edik gyöke meghatározható a következő képlettel:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}, \text{ ahol } n \in N, k = \overline{0, n-1}.$$

A Moivre-formula a következő alakban írható fel:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi .$$

5.1. Emelje hatványra az alábbi kifejezéseket:

a) $(1+i)^5$; b) $(1-i)^5$; c) $(1+i)^7$;

d) $(\cos i)^6$; e) $(\sin i)^5$; f) $i + i^2 + i^3 + i^4$;

g) $(\cos\frac{\varphi}{10} + i\sin\frac{\varphi}{10})^{10}$; h) $(\sin\varphi - i\cos\varphi)^5$!

5.2. Vonjon gyököt az alábbi komplex számokból:

a) $\sqrt[3]{1}$; b) $\sqrt[3]{-1}$; c) $\sqrt[4]{-i}$; d) $\sqrt[3]{i+1}$; e) $\sqrt{|3+4i|}$!

5.3. Moivre-formula segítségével határozzk meg az alábbi kifejezések értékét:

a) $\cos 3x$; b) $\sin 3x$; c) $\cos 2x$; d) $\sin x + \sin(x+\alpha)$!

Bizonyítsa az alábbi azonosságokat:

a) $cos(2n\varphi) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_{2n}^{2k}(cos\varphi)^{2k}\,(sin\varphi)^{2(n-k)}$;

b) $sin(2n\varphi) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}C_{2n}^{2k-1}(cos\varphi)^{2k-1}\,(sin\varphi)^{2(n-k)+1}$

Használja a Newton-binomot!

5.4. Moivre-formula segítségével határozzk meg az alábbi kifejezések értékét:

a) $\cos 4x$; b) $\sin 4x$; c) $\cos x + \cos(x+\alpha)$; d) $\sin 2x$!

6. A komplex szám geometriai értelmezése

6.1. Határozza meg a komplex változó síkjának vonalait:

a) $z = 1 + ti$; b) $z = t + it^2$; c) $|z| = 2$;

d) $|z + i| = 1$; e) $|z + 1| = 1,\ x > 0$; f) $|z| = 3,\ x > 0,\ y > 0$!

6.2. Határozza meg a komplex változó síkjának vonalait:

a) $z = a\cos\varphi + ib\sin\varphi,\ \varphi \in [0; 2\pi]$; b) $z = t + 3it$; c) $z = t + \frac{i}{t},\ t > 0$;

d) $\arg z = \frac{\pi}{4}$; e) $\arg z = |z|$; f) $|z| = 1,\ x < 0,\ y > 0$!

6.3. Határozza meg a komplex változó síkjának tartományait:

a) $|z| \le 3$; b) $1 \le |z| \le 2$; c) $\operatorname{Im} z > 0$;

d) $\operatorname{Re} z < 0$; e) $-1 \le \operatorname{Im} z \le 1$; f) $\begin{matrix} -1 \le \operatorname{Im} z \le 1 \\ -1 \le \operatorname{Re} z \le 1 \end{matrix}$!

6.4. Határozza meg a komplex változó síkjának tartományait:

a) $|z| \ge 3$; b) $|z| > R,\ R \to \infty$; c) $\operatorname{Im} z = 0$;

d) $\operatorname{Re} z = 0$; e) $z = t^2 + it$; f) $|z| < 1$!

7. Komplex változós függvény

7.1. Fejezze ki a komlex változós függvény valós $u(x,y) = Re\,(z)$ és képzetes $v(x,y) = Im\,(z)$ részét:

a) $w(z) = z^3$; b) $w = \left|z^2\right|$; c) $w(z) = \dfrac{1}{z+i}$;

d) $w(z) = i^{ix}$; e) $w(z) = \ln z$; f) $w(z) = e^{iz}$!

7.2. Fejezze ki a komlex változós függvény valós $u(x,y) = Re\,(z)$ és képzetes $v(x,y) = Im\,(z)$ részét:

a) $w(z) = \cos z$; b) $w = \sqrt{z}$; c) $w(z) = \dfrac{1}{z}$;

d) $w(z) = z^2$; e) $w(z) = \sin z$!

7.3. Határozza meg $f(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx$!

7.4. Határozza meg $f(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx$!

7.5 Számítsa ki az alábbi függvények értékét a megadott pontokban:

a) $\cos(1+i)$; b) chi; c) $sh(-2+i)$; d) $Ln(-1)$; e) lni;

f) $Ln\frac{1+i}{\sqrt{2}}$; g) $Arcsini$; h) $Arcshi$!

7.6 Határozza meg a hatványozás értékét:

a) 2^i; b) $(-1)^i$; c) $(1+i)^i$; d) $(-1)^{\sqrt{2}}$; e) $(3-4i)^{1+i}$!

8. Komplex számok sorozatának határértéke.

Komplex változós függvény határértéke

8.1. Határozza meg az alábbi komplex számsorozatok és függvények határértékét:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{in}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{i}{n}\right)^{n}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\pi}{2n}\right)^{in}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ix}{x}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos ix}{x^2}$; f) $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin^3 z}{z^3}$!

8.2. Határozza meg az alábbi komplex számsorozatok és függvények határértékét:

a) $\lim\limits_{x\to i}\frac{x^2+1}{x+i}$; b) $\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\frac{i}{z}\right)^{z\pi}$; c) $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin iz}{z}$;

d) $\lim\limits_{z\to i}\frac{z^2-1}{z-i}$; e) $\lim\limits_{z\to\infty}\sin iz$!

8.3. Határozza meg az alábbi komplex függvények határértékét:

a) $\lim\limits_{z\to 0}\frac{|z|}{z}$;

b) $\lim\limits_{z\to 0}\frac{|z^2|}{z}$;

c) $\lim\limits_{z\to i}\frac{z^2+1}{z^6+1}$;

d) $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{z^3+z+1}{z^2-1}$!

9. Komplex változós függvényének deriváltja. Cauchy-Riemann feltételek

Cauchy-Riemann feltételek: $\partial u / \partial x = \partial v / \partial y, \quad \partial u / \partial y = -\partial v / \partial x.$

9.1. Ellenőrizze a Cauchy-Riemann feltételeket a alábbi függvényekre:

a) $w(z) = z^3$; b) $w(z) = \cos z$; c) $w(z) = \frac{1}{z}$;

d) $w(z) = \bar{z}$; e) $w(z) = z|z|$; f) $w(z) = z + \bar{z}$!

9.2. Ellenőrizze a Cauchy-Riemann feltételeket a alábbi függvényekre:

a) $w(z) = e^z$; b) $w(z) = a^z$; c) $w(z) = e^{iz}$;

d) $w = x^2 + y^2 + ixy$; e) $w(z) = \sin z$; f) $w = x^2 + iy^2$!

9.3. Az alábbi függvények elemi függvényekhez való összehasonlításával ellenőrizze a Cauchy-Riemann feltételek teljesülését:

a) $w(z) = \sin\cos z$; b) $w = \sin e^z$; c) $w = \cos e^{\bar{z}}$;

d) $w = arctg\ z$; e) $w = \sin\frac{1}{z}$; f) $w(z) = z^z$!

9.4. Az alábbi függvények elemi függvényekhez való összehasonlításával ellenőrizze a Cauchy-Riemann feltételek teljesülését:

a) $w(z) = \sin z^5$; b) $w = \frac{1}{\sin z}$; c) $w = \frac{1}{\cos \bar{z}}$;

d) $w = |z|\,\bar{z}$; e) $w = \sin(z + \cos z)$!

9.5. Deriválhatóak e az alábbi függvények:

a) $w(z) = x + y + iy$; b) $w(z) = i\bar{z}$; c) $w(z) = x^2 + y^2 + iy^2$;

d) $w(z) = z\,\mathrm{Im}\,z$; e) $w(z) = z\,\mathrm{Re}\,\bar{z}$; f) $w(z) = \mathrm{Re}\,z + i\,\mathrm{Im}\,z$?

9.6. Deriválhatóak e az alábbi függvények:

a) $w(z) = \frac{1}{x} + \frac{i}{y}$; b) $w(z) = \frac{1}{\cos z}$; c) $w(z) = e^{\bar{z}}$;

d) $w(z) = z^5 + e^{\sin z}$; e) $w = \sqrt{x} + i\sqrt{y}$; f) $w(z) = x\,\mathrm{Re}\,z + iy\,\mathrm{Im}\,z$?

10. Az analitikus függvény helyreállítása annak valós (képzetes) része alapján

10.1. Ha ismert az $u(x;\, y) = \operatorname{Re} w(z)$ $\left[v(x;\, y) = \operatorname{Im} w(z)\right]$, határozza meg az $\operatorname{Im} w(z)$ $[\operatorname{Re} w(z)]$:

a) $u = x^2 - y^2$; b) $u = \cos x \cdot chy$;

c) $u = x^3 - 3xy^2$; d) $u = x^2 + y^2$;

e) $v = e^x \sin y$; f) $v = -y$!

10.2. Ha ismert az $u(x;\, y) = \operatorname{Re} w(z)$ $\left[v(x;\, y) = \operatorname{Im} w(z)\right]$, határozza meg az $\operatorname{Im} w(z)$ $[\operatorname{Re} w(z)]$:

a) $u = xy$; b) $u = y$;

c) $u = x^2$; d) $u = e^x \cos y$;

e) $u = \dfrac{1}{x}$; f) $u = -y$!

10.3. A alábbi feladatokban számitsák ki az $f(z)$ függvény $u(x, y) = Re\, f(z)$ valós és a $v(x, y) = Im\, f(z)$ képzetes részét és ellenőrizze a Chouchy - Riemman feltételeket.

a) $f(z) = \sin z$; g) $f(z) = \operatorname{tg} z$;

b) $f(z) = \operatorname{sh} z$; h) $f(z) = \operatorname{th} z$;

c) $f(z) = \cos z$; i) $f(z) = z^n$, ahol $n \in \mathbb{N}$;

d) $f(z) = \operatorname{ch} z$; j) $f(z) = \ln z$;

e) $f(z) = z \ln z$; k) $f(z) = z/(1 - 2z)^2$;

f) $f(z) = z \cdot e^z$; l) $f(z) = z^2/(2i - z)$!

11. Egylapú függvények

Ha $z_1 \neq z_2$ viszont $w(z_1) \neq w(z_2)$ akkor a komplex változós függvényt egylapúnak nevezzük.

11.1. Egylapúak e az alábbi függvények:

a) $w(z) = 3z + 1$;

b) $w(z) = \sqrt{z}$;

c) $w(z) = z^2$?

11.2. Egylapúak e az alábbi függvények:

a) $w(z) = \dfrac{1}{z}$;

b) $w(z) = \sin z$;

c) $w(z) = e^z$?

11.3. Egylapúak e az alábbi függvények, valamint számitsa ki a $|f'(z)|$ és az $\arg f'(z)$ függvényt az a pontban

a) $f(z) = 1/(1+z)$, $a = i$;

b) $f(z) = (z-2)/(z+i)$, $a = 1-i$;

c) $f(z) = (z-i)/(2z+1)$, $a = 2i$;

d) $f(z) = z + i/(z+i)$, $a = 1+i$;

e) $f(z) = z + e^{iz}$, $a = -i$;

f) $f(z) = \sin(1+z)$, $a = 1-i$;

g) $f(z) = \mathrm{ch}\ 3z$, $a = 1+7i$;

h) $f(z) = \mathrm{tg}\ (z/(1+iz))$, $a = i$!

12. Komplex változós függvény integrálása

12.1. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{AB} zdz$, ahol AB - vonal $y = x^2, z_A = 0, z_B = 1 + i$;

b) $\int_{AB} \bar{z}dz$, ahol AB - vonal $y = x^2, z_A = 0, z_B = 1 + i$;

c) $\int_{AB} \bar{z}dz$, ahol AB - vonal $y = x, z_A = 0, z_B = 1 + i$;

d) $\int_{AB} \bar{z}dz$, ahol AB - vonal $y = \sqrt{x}, z_A = 0, z_B = 1 + i$;

e) $\int_{AB} zdz$, ahol AB - vonal $y = x,\ z_A = 0, z_B = 1 + i$;

f) $\int_{AB} zdz$, ahol AB - vonal $y^2 = x, z_A = 0, z_B = 1 + i$!

12.2. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{AB} xdz$, ahol AB - vonal $y = x^2, z_A = 0, z_B = 1 + i$;

b) $\int_{AB} xdz$, ahol AB - vonal $y = x,\ z_A = 0, z_B = 1 + i$;

c) $\int_{AB} xdz$, ahol AB - vonal $y^2 = x, z_A = 0, z_B = 1 + i$;

d) $\int_{AB} e^z dz$, ahol AB - vonal $y = x,\ z_A = 0, z_B = 1 + i$;

e) $\int_{AB} e^z dz$, ahol AB - vonal $y = x^2,\ z_A = 0, z_B = 1 + i$!

12.3. Az első Cauchy-tétel érvényes-e: Ha $f(z)$ szabályos a D tartományban, akkor bármely zárt görbére, amely ebben a tartományban helyezkedik el $\oint_\gamma f(z)dz = 0$:

a) $\int_{|z|=1} z^2 dz = 0$; b) $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 0$; c) $\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z} dz = 0$;

d) $\int_{|z|=R} \sin z dz = 0$; e) $\int_{|z-2|=1} \frac{dz}{z} = 0$; f) $\oint_{\forall\gamma\in C} e^z dz = 0$?

12.4. Az első Cauchy-tétel érvényes-e: Ha f(z) szabályos a D tartományban, akkor bármely zárt görbére, amely ebben a tartományban helyezkedik el $\oint_\gamma f(z)dz = 0$:

a) $\int_{|z|=1} \frac{1-\cos z}{z^2} dz = 0$; b) $\int_{|z|=1} \frac{1-\cos z}{z-2} dz = 0$; c) $\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2} \sin z dz = 0$;

d) $\oint_{|z|=0} \frac{1}{z^2} \sin^2 z dz = 0$; e) $\oint_{|z|=1} arctgz\, dz = 0$; f) $\oint_{\forall\gamma\in C} \left(z^3 + z^5\right) dz = 0$?

13. Cauchy-féle integrálképletek

Ha $f(z)$ szabályos a D tartományban, akkor minden γ zárt görbére, ami ebben a tartományban helyezkedik el, és minden olyan z-re, ami γ belső részén található, érvényes a Cauchy-féle integrálképlet: $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$. A Cauchy-féle integrálképlet általánosítható a komplex változós függvényének deriváltjára is: $f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi$.

13.1. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\oint\limits_{|z|=1}\frac{\sin(z+1)}{z}dz$; b) $\oint\limits_{|z|=1}\frac{\cos z}{z}dz$; c) $\oint\limits_{|z|=1}\frac{i\cdot e^{z}}{z}dz$;

d) $\oint\limits_{|z|=1}\frac{\cos z}{i(z-\pi/4)}dz$; e) $\oint\limits_{|z|=1}\frac{tgz}{i(z-\pi/6)}dz$; f) $\oint\limits_{|z|=1}\frac{tgz}{z}dz$!

13.2. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\oint\limits_{|z|=3}\frac{i\cdot\ln z}{|z-e|}dz$; b) $\oint\limits_{|z|=1}\frac{\cos z\cdot\sin z}{\left(z-\pi/4\right)}dz$; c) $\oint\limits_{|z|=2}\frac{\cos z}{(z-i)}dz$;

d) $\oint\limits_{|z|=1/2}\frac{\cos z}{(z-i)}dz$; e) $\oint\limits_{|z|=3}\frac{\sin z}{2\pi(z-i)}dz$; f) $\oint\limits_{|z|=2}\frac{e^{z}}{i\pi(z+i)}dz$!

13.3. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\oint\limits_{|z|=2}\frac{z^{3}}{i(z-i)^{4}}dz$; b) $\oint\limits_{|z|=2}\frac{\sin z}{i\cdot z^{4}}dz$; c) $\int_{|z|=2}\frac{e^{z}}{(z-i)^{5}}dz$;
;

d) $\oint\limits_{|z|=4}\frac{\cos z}{i(z-\pi)^{5}}dz$; e) $\oint\limits_{|z|=2}\frac{z^{3}}{(z-i)^{5}}dz$; f) $\oint\limits_{|z|=1}\frac{tgz}{z^{2}}dz$!

13.4. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\oint\limits_{|z|=3}\frac{\ln z}{(z-e)^{2}}dz$; b) $\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^{z}}{(z-2i)^{5}}dz$; c) $\oint\limits_{|z|=2}\frac{z^{3}}{(z-i)^{2}}dz$;

d) $\oint\limits_{|z|=1}\frac{\sin z-\cos z}{(zi)^{4}}dz$; e) $\oint\limits_{|z-i|=1/2}\frac{1}{z(z-i)^{3}}dz$; f) $\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^{2\pi iz}}{z^{2}}dz$!

14. Komplex tagú számsorok

14.1. Kovergensek e az alábbi sorok:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{4n+1}+i\frac{n}{2n+1}\right)$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+i\frac{1}{n^2}\right)$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}+i\frac{1}{n^3}\right)$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+i\frac{1}{2^n}\right)$; e) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+4}+i\frac{1}{n}\right)$; f) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n}+i\frac{1}{n}\right)$?

14.2. Kovergensek e az alábbi sorok:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+i\frac{1}{n}\right)$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1+in}{3n+1}\right)$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\ln n}+i\frac{1}{n\ln n\ln n\ln n}\right)$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+i}{n\sqrt{n}}\right)$; e) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n+i\cdot 3^n}{4^n}\right)$; f) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1-i}{2n+1}\right)$?

14.3. Fejtse Taylor-sorba az alábbi függvényeket a z_0 pont környezetében:

a) $w=\sin z,\quad z_0=i$; b) $w=\cos z,\quad z_0=-i$; c) $w=z^3,\quad z_0=i$;

d) $w=e^z,\quad z_0=1$; e) $w=e^{z^2},\quad z_0=1$; e) $w=(z-2)^2,\quad z_0=1$!

14.4. Fejtse Taylor-sorba az alábbi függvényeket a z_0 pont környezetében:

a) $w=\sin z,\quad z_0=-i$; b) $w=\cos z,\quad z_0=i$; c) $w=z^2,\quad z_0=i$;

d) $w=\sin z,\quad z_0=1+i$; e) $w=e^{z^2},\quad z_0=i$; f) $w=z\cdot\bar{z},\quad z_0=i$!

14.5. Fejtse MacLaurin-sorba az alábbi függvényeket a $z_0=0$ pont környezetében:

a) $w=\sin(iz)$; b) $w=\cos z$; c) $w=(z+3)^3$;

d) $w=e^{iz}$; e) $w=shz$; f) $w=chz$!

14.6. Fejtse MacLaurin-sorba az alábbi függvényeket a $z_0=0$ pont környezetében:

a) $w=z\sin z$; b) $w=z\sin\frac{1}{z}$; c) $w=\frac{1}{z}\cos z$;

d) $w = z \cdot shz$; e) $w = e^{1/z}$; f) $w = e^{-1/z}$!

14.7. Fejtse MacLaurin-sorba az alábbi függvényeket a szinguláris pont környezetében:

a) $\frac{1}{1-z}$, $|z| < 1$; b) $\frac{1}{(1-z)^2}$, $|z| < 1$; c) $\frac{1}{(1-z)^3}$, $|z| < 1$!

14.8. Fejtse MacLaurin-sorba az alábbi függvényeket a szinguláris pont környezetében:

a) $\frac{1}{1-z^2}$, $|z| < 1$; b) $\frac{2z}{(1-z^2)^2}$, $|z| < 1$; c) $\frac{1}{(1+z^2)^2}$, $|z| < 1$!

14.9. Határozza meg az alábbi függvények zéró pontjának rendjét:

a) $w = \frac{\sin z^2}{z}$; b) $w = \frac{1-\cos^2 z}{z}$; c) $w = e^{z^2} - 1$;

d) $w = \frac{tg^3 z}{z}$; e) $w = z^k(e^z - 1)$; f) $w = \frac{e^z - 1 - z}{z}$;

g) $w = z^5(e^{z^2} - 1)$; h) $w = e^{-z^2} \cdot e^{z^5} - 1$; i) $w = \sum_{n=4}^{\infty} z^n$!

14.10. Határozza meg az alábbi függvények zéró pontjának rendjét:

a) $w = e^{\sin z} - \sin z - 1$; b) $w = \frac{1 - \frac{z^2}{2!} - \cos z}{z}$; c) $w = e^z$;

d) $w = z^2 + 16$; e) $w = z^{16} + 2i$; f) $w = \left(z^3 - 1\right)^2$;

g) $w = e^{z^5} - 1$; h) $w = e^{z^5} - 1 - z^5$; i) $w = \frac{1}{z^2}$!

14.11. Fejtse Laurent-sorba az alábbi függvényeket a $z_0 = 0$ pont környezetében:

a) $w = \frac{1}{z+1}$; b) $w = \frac{1}{z-3}$; c) $w = \frac{1}{z(z-2)}$!

14.12. Fejtse Laurent-sorba az alábbi függvényeket a $z_0 = 0$ pont környezetében:

a) $w = z \sin \frac{1}{z}$; b) $w = \frac{1}{z^2} \sin z$; c) $w = e^{-1/z}$;

d) $w = \frac{1}{z^3} e^{1/z}$; e) $w = z \cos \frac{1}{z}$; f) $w = \frac{1}{z^2} \cos z$!

14.13. Fejtse Laurent-sorba az alábbi függvényeket a $0 < z < \infty$ tartományban:

a) $w = e^{2z + \frac{1}{z}}$; b) $w = \sin \frac{1}{z} \sin z$; c) $w = \cos \frac{1}{z} \cos z$;

d) $w = \frac{2z + 4}{z^3}$; e) $w = e^{iz}$; f) $w = \sin iz$!

15. Komplex változós függvények szinguláris pontjai

15.1. Határozza meg a komplex változós függvény szinguláris pontjának típusát:

a) $w=\dfrac{\sin^2 z}{z^2}$; b) $w=\dfrac{1-\cos^2 z}{2z^2}$; c) $w=e^{-\frac{1}{z}}$;

d) $w=\dfrac{1}{(z-1)(z-3)^2}$; e) $w=\dfrac{1}{z^2}\sin z$; f) $w=\dfrac{\sin z^3}{z^5}$!

15.2. Határozza meg a komplex változós függvény izolált szinguláris pontjának típusát:

a) $w=\sin z$; b) $w=\dfrac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}(x-k)^k}$; c) $w=tgz$;

d) $w=\dfrac{2-z^2-2\cos z}{z^5}$; e) $w=ctg^2 z$; f) $w=tg^3 z$!

15.3. Határozza meg a komplex változós függvény végtelenül távoli szinguláris pontjának típusát:

a) $w=\dfrac{1}{\sin 1/z}$; b) $w=\dfrac{\sin z}{z}$; c) $w=e^{\frac{1}{z}}$;

d) $w=\cos z$; e) $w=\sin z$; f) $w=z^3\sin\dfrac{1}{z}$!

15.4. Határozza meg a komplex változós függvény végtelenül távoli szinguláris pontjának típusát:

a) $w=\dfrac{z^7}{1-z}$; b) $w=\dfrac{1}{z^2(z+1)}$; c) $w=\dfrac{1}{e^z-1}$;

d) $w=e^z$; e) $w=\dfrac{1}{\cos z}$; f) $w=\cos z$!

16. Reziduumok kiszámítása

16.1. Számítsa ki a következő függvények szinguláris helyeihez tartozó reziduumokat:

a) $w=\dfrac{1}{1-z}$; b) $w=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)^2}$; c) $w=\dfrac{1}{z+1}$;

d) $w=\dfrac{1}{(z-1)^2}$; e) $w=\dfrac{1}{z(z-1)}$; f) $w=\dfrac{1}{(z-i)(z+i)}$!

16.2. Számítsa ki a következő függvények szinguláris helyeihez tartozó reziduumokat:

a) $w=z\sin\dfrac{1}{z}$; b) $w=\dfrac{1}{z^2}\sin z$; c) $w=z\cos\dfrac{1}{z}$;

d) $w=\dfrac{1}{z^2}\cos z$; e) $w=e^{-1/z}$; f) $w=\dfrac{1}{z^3}e^{1/z}$!

16.3. Számítsa ki a következő függvények szinguláris helyeihez tartozó reziduumokat:

a) $w=\sin z\cdot\sin\dfrac{1}{z^2}$; b) $w=\dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$; c) $w=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}$;

d) $w=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)}$; e) $w=\dfrac{z-4}{(z-5)(z-6)}$; f) $w=\dfrac{z^2+1}{(z-1)(z-2)(z-3)}$!

16.4. Számítsa ki a következő függvények polús helyeihez tartozó reziduumokat: $w=\dfrac{1}{\prod_{k=1}^{n}(x-k)}$!

16.5. Számítsa ki a következő függvények reziduumjait az alábbi képlet szerint, ha

$f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \varphi(z_0)\neq 0, \psi(z_0)=0, \psi'(z_0)\neq 0,$ akkor $\underset{z_0}{res}\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\dfrac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$:

a) $w=\dfrac{1}{z-1}$, $z_0=1$; b) $w=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)^2}$, $z_0=1$; c) $w=\dfrac{1}{z(z-1)}$, $z_0=0$, $z_1=1$;

d) $w=\dfrac{z}{(z-i)(z+i)}, z_0=i, z_1=-i, z_2=\infty$; e) $w=\dfrac{z-4}{(z-5)(z-6)}$, $z_0=5$, $z_1=6$, $z_3=\infty$;

f) $w=\dfrac{\cos z}{z}$, $z_0=0$!

17. Reziduumok alaptétele

Ha $f(z)$ függvény reguláris egy összefüggő D tartományban, kivéve véges számú szinguláris pontot $\{z_i\}$, akkor az integrál egy egyszerű zárt γ görbementén, ami a D határa, a következő képlettel határozódik meg

$$\oint_{\gamma} f)z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} resf(z_k).$$

17.1. A reziduumok alaptételének segítségével számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{1}{(z-1)(z-3)}dz$;

b) $\oint\limits_{|z|=2,5} \frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}dz$;

c) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z-4}{(z-5)(z-10)}dz$;

d) $\oint\limits_{|z|=6} \frac{z-4}{(z-5)(z-10)}dz$;

e) $\oint\limits_{|z-10|=2} \frac{z-4}{(z-5)(z-10)}dz$;

f) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z-4}{(z-5)(z-10)}dz$!

17.2. A reziduumok alaptételének segítségével számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\oint\limits_{|z|=1,5} \frac{z+1}{(z-1)(z-2)}dz$;

b) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z+1}{(z-1)(z-2)}dz$;

c) $\oint\limits_{|z-2|=0,5} \frac{z+1}{(z-1)(z-2)}dz$;

d) $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{z+1}{(z-1)(z-2)}dz$;

e) $\oint\limits_{|z-2|=0,5} \frac{z^2+1}{(z-1)(z-2)(z-3)}dz$;

f) $\oint\limits_{|z|=1,5} \frac{z^2+1}{(z-1)(z-2)(z-3)}dz$!

17.3. A reziduumok alaptételének segítségével számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{z+1}{z(z+i)(z+2i)}dz$;

b) $\oint\limits_{|z+i|=0,5} \frac{z+1}{z(z+i)(z+2i)}dz$;

c) $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z+1}{z(z+i)(z+2i)}dz$;

d) $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{1}{z(z+i)(z+1)}dz$;

e) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{1}{z(z+i)(z+1)}dz$;

f) $\oint\limits_{|z+i|=0,5} \frac{1}{z(z+i)(z+1)}dz$!

17.4. A reziduumok alaptételének segítségével számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\oint\limits_{|z+i|=0,5} \frac{1}{(z+i)^2(z-i)}dz$;

b) $\oint\limits_{|z-i|=0,5} \frac{1}{(z+i)^2(z-i)}dz$;

c) $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{z+1}{z^2(z-i)}dz$;

d) $\oint\limits_{|z-i|=0,5} \frac{z+1}{z^2(z-i)}dz$;

e) $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{1}{(z-1)^2 z^2}dz$;

f) $\oint\limits_{|z-a|=0,5} \frac{1}{z^n(z-a)}dz$!

17.5. A reziduumok alaptételének segítségével számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{1}{z^n(z-a)}dz$;

b) $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{1}{z^3(z-i)}dz$;

c) $\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{1}{z(z+i)}dz$;

d) $\oint\limits_{|z-3|=0,5} \frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)}dz$;

e) $\oint\limits_{|z|=1,5} \frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)}dz$;

f) $\oint\limits_{|z-k|=0,5} \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n}(z-k)}dz$!

18. Az integrálok kiszámítása zárt görbéken a reziduumok segítségével a $z = \infty$ pontban

Ha $f(z)$ reguláris az összefüggő D tartományban, kivéve a véges számú n szinguláris pontban $\{z_i\}$, és nincsenek más szinguláris pontok a komplex változós síkján, kivéve $z = \infty$, akkor az integrál a egyszerű zárt γ görbementén, amely D tartományban található a következő képlettel kiszámítható: $\oint_{\gamma} f(z)dz = -2\pi i \cdot res\, f(\infty)$. Ez a képlet megkönnyíti az integrál kiszámítását a korábbi leírt módszerekhez képest, mert nem szükséges megkeresni a reziduumot az összes véges pontban. Elég megkeresni a reziduumot a végtelen távoli pontban.

18.1. Számitsa ki az alábbi integrált a zárt görbe mentén a reziduumok segítségével a $z = \infty$ pontban*:*

a) $\oint_{|z|=3} \frac{z+1}{z(z+i)(z+2i)}dz$;

b) $\oint_{|z|=3} \frac{2z+1}{(z-1)(z-2)}dz$;

c) $\oint_{|z|=4} \frac{6z^3+5z}{(z-3)^2(z-1)^2}dz$;

d) $\oint_{|z|=8} \frac{-17z^5+6z}{(z-7)^6}dz$;

e) $\oint_{|z|=2} \frac{iz^7}{(z-i)(z+i)^3(z+1)^4}dz$;

f) $\oint_{|z|=200} \frac{z^5-3iz^{100}}{(z+i)^{101}}dz$!

19. Többértékű függvények integrálása

19.1. Számítsa ki a többértékű függvény integrálját:

a) $\oint\limits_{|z-4|=1/2} \frac{\sqrt{8}}{z-4} dz$;

b) $\oint\limits_{|z-9|=1} \frac{\sqrt{z}}{z^2(z-9)} dz$;

c) $\oint\limits_{|z-1|=1/2} \frac{z^2+1}{\ln z - 2\pi i} dz$;

d) $\oint\limits_{|z+1|=1/3} \frac{z^2+1}{\ln z - \pi i} dz$!

19.2. Számitsa ki a megadott logaritmusos I integrál értékét a C görbe mentén!

a) $I = \int_C z^n Ln\, z\, dz$, $ahol\ C = \{z : |z| = 1\}$, $és\quad n \in \mathbb{N}$ $és\ Ln\ 1 = 0$.

b) $I = \int_C |\mathrm{Ln}\, z|^3 dz$, $ahol\ C = \{z : |z| = 1\}$, $és\quad \mathrm{Ln}\ 1 = 0$.

c) $I = \int_C Ln\, z\, dz$, $ahol\ C = \{z : |z| = R\}$, $és\quad \mathrm{Ln}\ R = \ln R + 2\pi i$.

d) $I = \int_C z^n Ln\, z\, dz$, $ahol\ C = \{z : |z| = 1\}$, $n \in N$ $és$ $\mathrm{Ln}(-1) = i\pi$.

e) $I = \int_C |\mathrm{Ln}\, z|^2 dz$, $ahol\ C = \{z : |z| = 1\}$, $és\quad \mathrm{Ln}\ 1 = 2\pi i$.

f) $I = \int_C \frac{\mathrm{Ln}\, z}{z} dz$, $ahol\ C = \{z : |z| = 1\}$, $és\quad \mathrm{Ln}\ 1 = 2\pi i$.

g) $I = \int_C \frac{\ln(z-3)}{z-3} dz$, $ahol\ C = \{z : |z| = 3\}$.

h) $I = \int_C \left|\frac{\mathrm{Ln}\, z}{z}\right| dz$, $ahol\ C = \{z : |z| = 1\}$, $és\quad \mathrm{Ln}\ 1 = 2\pi i$.

i) $I = \int_C z^n Ln\, z\, dz$, $ahol\ C = \{z : |z| = 1\}$, $n \in N$ $és\quad \mathrm{Ln}\ 1 = 0$.

j) $I = \int_C |\mathrm{Ln}\, z| dz$, $ahol\ C = \{z : |z| = 1\}$, $és\quad \mathrm{Ln}(-1) = 7i\pi$.

k) $I = \int_C Ln\, z |dz|$, $ahol\ C = \{z : |z| = 1\}$, $és\quad \mathrm{Ln}\ 1 = 4\pi i$.

l) $I = \int_C |\mathrm{Ln}\, z|^2 dz$, $ahol\ C = \{z : |z| = 1\}$, $és\quad \mathrm{Ln}\ 1 = 2\pi i$.

m) $I = \int_C \frac{\mathrm{Ln}\, z}{z} dz$, $ahol\ C = \{z : |z| = 2\}$, $és\quad \mathrm{Ln}(-2) = \ln 2 + 3\pi i$.

n) $I = \int_C |\mathrm{Ln}\, z| \cdot |dz|$, $ahol\ C = \{z : |z| = 1\}$, $és\quad \mathrm{Ln}(-1) = -\pi i$.

20. Improprius integrálok kiszámítása reziduumok segítségével

Az alábbi képletet fogjuk felhasználni az integrálok kiszámítására:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum res\, f(z_i),$$

ahol a reziduumokat a felső félsíkban vesszük (az OX tengely felett). Az $f(z)$ reguláris függvény az $Im(z) > 0$ tartományban, kivéve véges számú szinguláris pontokban, és nullához konvergál amikor $|z| \to \infty$, ahol a szabály $1/|z|^n, n \geq 2$.

20.1. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$;

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$;

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)(x^2+9)}$;

d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)(x^2+9)(x^2+16)}$;

e) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$;

f) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$!

20.2. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$;

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^4}$;

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^5}$;

d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, \quad b > a$;

e) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)(x^2+c^2)}, \quad 0 < a < b < c \in R$;

f) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4^2)^2}$!

21. Improprius integrálok kiszámítása a Jordán lemma segítségével

A Jordán-lemma a következő formulákat adja az improprius integrálok kiszámításához:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ax = -2\pi \operatorname{Im}\sum res(e^{iaz_k} f(z_k)),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin ax = 2\pi \operatorname{Re}\sum res(e^{iaz_k} f(z_k)),$$

ahol a reziduumokat a felső félsík szinguláris pontjaiban van véve.

21.1. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\, dx}{x^2+1}$; b) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\, dx}{x^2+4}$; c) $I = \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos x\, dx}{x^2+a^2}$;

d) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x\, dx}{x^2+1}$; e) $I = \int_{0}^{+\infty} \frac{x\sin x\, dx}{x^2+9}$; f) $I = \int_{0}^{+\infty} \frac{x\sin 2x\, dx}{x^2+4}$!

21.2. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x\, dx}{x^2+1}$; b) $I = \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos 3x\, dx}{x^2+9}$; c) $I = \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos nx\, dx}{x^2+a^2}$;

d) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x\, dx}{x^2+4}$; e) $I = \int_{0}^{+\infty} \frac{x\sin nx\, dx}{x^2+a^2}$; f) $I = \int_{0}^{+\infty} \frac{x\sin x\cos x\, dx}{x^2+1}$!

21.3. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\, dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$; b) $I = \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos x\, dx}{(x^2+4)(x^2+9)}$;

c) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\cdot\cos x\, dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$; d) $I = \int_{0}^{+\infty} \frac{x\sin x\, dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$;

e) $I = \int_{0}^{+\infty} \frac{x^3\cdot\sin x\, dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$; f) $I = \int_{0}^{+\infty} \frac{x\sin x\cos x\, dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$!

22. Trigonometriai racionális függvényektől való határozott integrálok kiszámítása

Ebben az esetben a $\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi$ integrál levezethető a $|z| = 1$ zárt vonalú integrálhoz a következő helyettesítéssel:

$$\sin\varphi = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}), \quad \cos\varphi = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \quad dz = -i\frac{dz}{z}.$$

22.1. Számítsa ki az alábbi trigonometriai racionális függvényektől való integrálokat:

a) $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos\varphi + 2}$; b) $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos\varphi - 2}$;

c) $I = \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi$; d) $I = \int_0^{2\pi} \cos^4\varphi \, d\varphi$;

e) $I = \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi$, használja a $2\cos^2\varphi = \cos 2\varphi + 1$ helyettesítést; f) $I = \int_0^{\pi} \cos^6\varphi \, d\varphi$!

22.2. Vezesse ki a következő integrál kiszámításának általános képletét: $I = \int_0^{2\pi} \cos^{2m}\varphi \, d\varphi, \quad m \in R$!

22.3. Számítsa ki az alábbi trigonometriai racionális függvényektől való integrálokat:

a) $I = \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi$; b) $I = \int_0^{\pi} \sin^4\varphi \, d\varphi$; c) $I = \int_0^{\pi} \sin^{2m}\varphi \, d\varphi$;

d) $I = \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi \, d\varphi$; e) $I = \int_0^{2\pi} \sin^4\varphi \cdot \cos^4\varphi \, d\varphi$; f) $I = \int_0^{2\pi} \sin^{2m}\varphi \cdot \cos^{2m}\varphi \, d\varphi$!

22.4. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$; b) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin nx}{x} dx, \quad n \in R$; c) $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos x}{x} dx$;

d) $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$; e) $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 2x}{x^2} dx$; f) $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 nx}{x^2} dx, \quad n \in R$!

23. Laplace transzformáció

Az $f(t)$ (eredeti függvény) valós változós függvény Laplace transzformációjának az $F(p)$ (transzformált függvény) komplex változós függvényt nevezzük, ahol $p = s + i\sigma$

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt\,, \qquad f(t) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt}dp\ .$$

Az eredeti és a transzformált függvény közötti összefüggést így jelöljük:

$$f(t) \risingdotseq F(p) \quad vagy \quad F(p) \risingdotseq f(t)\ .$$

A Laplace transzformáció főbb tulajdonságai:

1. Linearitás: $\alpha f(t) + \beta g(t) \risingdotseq \alpha F(p) + \beta G(p)$.
2. Hasonlóság: $f(\alpha t) \risingdotseq \frac{F\left(\frac{p}{\alpha}\right)}{\alpha}$.
3. Késés: $f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau}F(p)$.
4. Eltolás: $e^{p_0 t}f(t) =\risingdotseq F(p-p_0)$.
5. $F(p) * G(p) \risingdotseq \int_0^t f(\tau) * g(t-\tau)d\tau$.
6. Az eredeti deriváltja: $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0)$.
7. A transzformált deriváltja: $F^{(n)}(p) \risingdotseq (-1)^n t^n f(t)$.
8. Az eredeti integrálása: $\int_0^t f(t)dt \risingdotseq \frac{F(p)}{p}$.
9. A transzformált integrálása: $\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^\infty F(p)dp$.

.

23.1. Lehet e az $f(t)$ eredeti függvény, ha az $f(t)$ folytonos, kivéve véges számú szakadási pontban:

a) $f(t) = t|t| + t^2$;

b) $f(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ \dfrac{1}{\sin t}, & t > 0. \end{cases}$;

c) $f(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ \dfrac{\sin t}{t}, & t > 0. \end{cases}$;

d) $f(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ e^{t^2}, & t > 0. \end{cases}$;

e) $f(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ t^2 e^t, & t > 0. \end{cases}$;

f) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ tgt, & t \ge 0. \end{cases}$?

23.2. Lehet e az $f(t)$ eredeti függvény, ha az $f(t)$ folytonos, kivéve véges számú szakadási pontban:

a) $f(t)=\begin{cases}0, & t\le 0\\ \dfrac{t}{|t|}, & t>0.\end{cases}$; b) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \sin e^t, & t\ge 0.\end{cases}$; c) $f(t)=\begin{cases}0, & t\le 0\\ \dfrac{1}{t}, & t>0.\end{cases}$;

d) $f(t)=t+|t|$; e) $f(t)=\begin{cases}0, & t\le 0\\ [t]!, & t>0.\end{cases}$; f) $f(t)=\dfrac{1}{t-3}$?

23.3. Határozza meg a transzformált függvényt, ha az eredeti adott:

a) $f(t)=1+t$; b) $f(t)=\sum_{k=0}^{n} t^k=\dfrac{t^n-1}{t-1}$; c) $f(t)=5-t^3$;

d) $f(t)=e^t-1$; e) $f(t)=\sin t+\cos t$; f) $f(t)=sht+cht$!

23.4. Határozza meg a transzformált függvényt, ha az eredeti adott:

a) $f(t)=e^t+e^{-t}$; b) $f(t)=\sum_{k=0}^{n} e^{kt}=\dfrac{e^{nt}-1}{e^t-1}$;

c) $f(t)=\sin it+\cos it$; d) $f(t)=e^t+e^{2t}$;

e) $f(t)=\sin t+\sin 2t$; f) $f(t)=\sin t+\sin it$!

23.5. A hasonlóság tulajdonság segítségével határozza meg az eredeti függvényt:

a) $f(t)=t,\quad f(3t)$; b) $f(t)=t^2,\quad f(3t)$;

c) $f(t)=e^{3t},\quad \tilde{f}(t)=e^{3^2 t}$; d) $f(t)=e^{-t},\quad \tilde{f}(t)=e^{-2t}$;

e) $f(t)=\sin wt \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} \dfrac{w}{p^2+w^2},\quad \tilde{f}(t)=\sin t$; f) $f(t)=\cos wt \rightarrow \dfrac{p}{p^2+w^2},\quad \tilde{f}(t)=\cos t$!

23.6. Határozza meg az eredti függvényt, ha adott a transzformált:

a) $F(p)=\dfrac{1}{p(p-5)}$; b) $F(p)=\dfrac{1}{p(p-1)(p-3)}$;

c) $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$; d) $F(p)=\dfrac{1}{p(p^2+1)}$;

e) $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p^2-3)(p^2+4)}$; f) $F(p)=\dfrac{1}{(p^2-w^2)(p^2+w^2)}$!

23.7. Határozza meg az eredti függvényt, ha adott a transzformált:

a) $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p+1)}$; b) $F(p)=\dfrac{1}{p^3(p+1)}$;

c) $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)(p-2)(p-3)}$; d) $F(p)=\dfrac{p}{(p-1)(p-2)}$;

e) $F(p)=\dfrac{p^2}{(p-1)(p-2)(p-3)}$; f) $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2-w^2)(p^2+w^2)}$!

24. Tétel az eredeti és transfotmált függvény deriváltjáról

Ha az $f(t)$ az eredeti függvény és deriváltjai $f^{(k)}(t), k = 1,2, \ldots,$ akkor tetszőleges $k = 1,2, \ldots, n$

$$f^{(k)}(t) \risingdotseq p^k F(p) - p^{k-1} f(0) - p^{k-2} f'(0) - \cdots - f^{(k-1)}(0).$$

Tehát, $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0).$

$$t^n f(t) \risingdotseq (-1)^n F^{(n)}(p), n = 1,2, \ldots$$

24.1. Keresse meg a transzformált függvényt az eredeti deriváltjától:

a) $f(t) = \sin^{(4)} t$; b) $f(t) = \sin^{(8)} t$; c) $f(t) = (t^3)'''$;

d) $f(t) = \sin^{(4n)} t, \quad n \in N$; e) $f(t) = \left(e^t\right)^{(n)}$!

24.2. Keresse meg a transzformált függvényt az eredeti deriváltjától:

a) $f(t) = (sht)'$; b) $f(t) = \sin^{(2)} wt$; c) $f(t) = (t\cos t)'$;

d) $f(t) = \cos^{(4n)} t, \quad n \in N$; e) $f(t) = (shwt)^{(2n)}$; f) $f(t) = (chwt)^{(2n)}$!

24.3. Keresse meg az eredeti függvényt:

a) $F^{(2)}(p) = \dfrac{2}{p^3}$; b) $F^{(n)}(p) = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$; c) $F^{(8)}(p) = \dfrac{p}{p^2 + w^2}$;

d) $F^{(10)}(p) = \dfrac{w}{p^2 + w^2}$; e) $F'(p) = (-1)^n \dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$; f) $F'(p) = \dfrac{n!}{(p+a)^{n+1}}$!

24.4. Keresse meg az eredeti függvényt:

a) $F'(p) = \dfrac{p-a}{(p-a)^2 + w^2}$; b) $F^{(n)}(p) = \dfrac{p-a}{(p-a)^2 + w^2}$; c) $F'(p) = \dfrac{w}{(p-a)^2 + w^2}$;

d) $F^{(n)}(p) = \dfrac{w}{(p-a)^2 + w^2}$; e) $F'(p) = \dfrac{2wp}{(p^2 + w^2)^2}$; f) $F^{(n)}(p) = \dfrac{2wp}{(p^2 + w^2)^2}$!

25. Tételek az eredeti és transzformált függvények integráljairól

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p} \qquad \frac{1}{t}f(t) \risingdotseq \int_p^\infty F(q)dq$$

25.1. Az eredeti függvény integráljáról való tétel segítségével határozza meg a transzformált függvényt:

a) $\int_0^t \varphi\, d\varphi$; b) $\int_0^t \varphi^n\, d\varphi$; c) $\int_0^t \sin\varphi d\varphi$;

d) $\int_0^t \cos\varphi d\varphi$; e) $\int_0^t \sin w\varphi d\varphi$; f) $\int_0^t \left(\int_0^t \sin w\varphi' d\varphi'\right) d\varphi$!

25.2. Az eredeti függvény integráljáról való tétel segítségével határozza meg a transzformált függvényt:

a) $\int_0^t e^{a\varphi}\, d\varphi$; b) $\int_0^t \varphi e^{a\varphi}\, d\varphi$; c) $\int_0^t \varphi^2 e^{a\varphi}\, d\varphi$;

d) $\int_0^t \underset{n}{\ldots}\left(\int_0^t \varphi^m e^{a\varphi} d\varphi\right)\ldots d\varphi$; e) $\int_0^t \varphi \sin\varphi d\varphi$; f) $\int_0^t \varphi\cos\varphi d\varphi$!

25.3. Az eredeti függvény integráljáról való tétel segítségével határozza meg a transzformált függvényt:

a) $\int_p^\infty \frac{dp}{p-1}$, $p>1$; b) $\int_p^\infty \frac{dp}{p+\lambda}$, $p>-\lambda$; c) $\int_p^\infty \frac{dp}{p^n}$, $p>0$;

d) $\int_p^\infty \frac{dp}{p^2+1}$; e) $\int_p^\infty \frac{pdp}{p^2+1}$; f) $\int_p^\infty \frac{dp}{p^2-1}$!

25.4. Az eredeti függvény integráljáról való tétel segítségével határozza meg az eredeti integrálját:

a) $\int_p^\infty \frac{p^2-w^2}{(p^2+w^2)^2} dp$; b) $\int_p^\infty \frac{2wp}{(p^2+w^2)^2} dp$; c) $\int_p^\infty \frac{dp}{(p-a)^{n+1}}$;

d) $\int_p^\infty \frac{dp}{p}$, $p>0$; e) $\int_p^\infty \left(\int_p^\infty \frac{dp}{p}\right) dp$; f) $\int_p^\infty \left(\int_p^\infty \frac{pdp}{p^2+1}\right) dp$!

26. Az eredeti késleltetésének tétele

$$f(t-\tau) \risingdotseq e^{-\tau p}F(p), Rep > \sigma_0, t < \tau$$

26.1. Keresse meg a transzformált függvényt a késleltetés tétel segítségével:

a) $f(t) = sh(wt-1)$; b) $f(t) = \cos(wt - \pi/2)$;

c) $f(t) = \sin(wt - \pi/2)$; d) $f(t) = (t-3)^3$;

e) $f(t) = \cos(t+\tau)$; f) $f(t) = \sin(t-\tau)$!

26.2. Keresse meg a transzformált függvényt a késleltetés tétel segítségével:

a) $f(t) = ch(wt+1)$; b) $f(t) = e^{\lambda(t-2)}$;

c) $f(t) = \sin(t - \pi/2)\cos(t - \pi/2)$; d) $f(t) = (1-\tau)$;

e) $f(t) = e^{\lambda(t-1)}\cos(t-1)$; f) $f(t) = ch(wt-w)$!

27. A transzformált függvény eltolásának tétele

$$e^{\lambda t} f(t) \risingdotseq F(p-\lambda)$$

27.1. . Keresse meg a transzformált függvényt az eltolás tétel segítségével:

a) $f(t) = e^{at} \cos wt$; b) $f(t) = e^{it}$;

c) $f(t) = e^{-at} \sin wt$; d) $f(t) = e^{3t} \cdot t^3$;

e) $f(t) = e^{-t} \cdot t$; f) $f(t) = e^{t} t + e^{2t} t^2 + e^{3t} t^3$!

27.2. Keresse meg a transzformált függvényt az eltolás tétel segítségével:

a) $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{nt} = \frac{1}{1-e^{-t}}, \quad t > 0$; b) $f(t) = \frac{t^n - 1}{t-1}$;

c) $f(t) = e^{2t}\left(1 + t^2 + t^3\right)$; d) $f(t) = e^{2t} \cdot sht$;

e) $f(t) = e^{-2t} \cdot cht$; f) $f(t) = e^{2t}\left(sht + cht\right)$!

28. A konvolúció tétel

Az eredeti függvények konvoluciójának

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$$

a transzformált szorzata felel meg

$$f_1(t) * f_2(t) \risingdotseq F_1(p) F_2(p)$$

28.1. Keresse meg a transzformált függvényt a konvolució tétel segítségével:

a) $\int_0^t \tau \cdot e^{t-\tau} d\tau$; b) $\int_0^t \tau^2 \cdot \sin(t-\tau) d\tau$;

c) $\int_0^t (-\tau + t) d\tau$; d) $\int_0^t \sin\tau \cdot (t-\tau) d\tau$;

e) $\int_0^t \cos w\tau \cdot (t-\tau) d\tau$; f) $\int_0^t e^{at} \cdot \cos(t-\tau) d\tau$!

28.2. Keresse meg a transzformált függvényt a konvolució tétel segítségével:

a) $\int_0^t sh\tau \cdot ch(t-\tau) d\tau$; b) $\int_0^t \tau^3 \cdot ch(t-\tau) d\tau$;

c) $\int_0^t \tau^2 \cdot (t-\tau)^3 d\tau$; d) $\int_0^t e^{a\tau} \cdot sh(t-\tau) d\tau$;

e) $\int_0^t \cos w\tau \cdot \sin w(t-\tau) d\tau$; f) $\int_0^t \tau^n \cdot e^{a(t-\tau)} d\tau$!

29. A gamma-függvények és tulajdonságaik

A gamma-függvény alakja, amikor $Re\beta > -1$: $\Gamma(\beta + 1) = \int_0^\infty e^{-\tau}\tau^\beta d\tau$.

Amikor $\beta = \{0,1,2,3,4,\dots\}$, akkor $\Gamma(\beta + 1) = \beta!$.

Tetszőleges β-ra $\Gamma(\beta + 1) = \beta\Gamma(\beta)$. Ezen kívül $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}$. Mivel a gamma-függvény hasonlitt a Laplace-transzformációhoz, ezért tulajdonságait használhatjuk a transzformált függvények meghatározására.

Példa. Tegyük fell, hogy meg kell határozni a transzformált függvényt, amikor $f(t) = \sqrt{t}$. F(p) =

$$\int_0^\infty t^{1/2}e^{-pt}dt = \frac{1}{p^{3/2}}\int_0^\infty (pt)^{1/2}e^{-pt}d(pt) = \frac{1}{p^{3/2}}\Gamma(3/2) = \frac{\Gamma(1/2)}{2p^{3/2}} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2p^{3/2}}.$$

29.1. Keresse meg a transzformált függvényt a gamma-függvények tulajdonságainak segítségével:

a) $f(t) = \sqrt{t}$; b) $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$; c) $f(t) = t^{3/2}$;

d) $f(t) = t^2$; e) $f(t) = t^{7/2}$; f) $f(t) = t^{-3/2}$!

29.2. Keresse meg az eredeti függvényt a gamma-függvények tulajdonságainak segítségével:

a) $F(p) = \frac{\Gamma(5)}{p^5}$; b) $F(p) = \sqrt{p}$; c) $F(p) = \frac{1}{p^{7/2}}$;

d) $F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$; e) $F(p) = \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^5}$; f) $F(p) = \frac{1}{p\sqrt{p}}$!

30. Lineáris differenciálegyenletek és lineáris differenciálegyenletrendszerek

Lineáris differenciálegyenlet $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(n-k)}(t) = f(t)$ konstans a_k együtthatókkal, ahol $a_0 = 1$, és a kezdeti feltételek $y^{(k)}(0) = y_k, k = 0, 1, 2, ..., n-1$, megoldható a következőképpen. A differenciálegyenlet bal oldalának transzformáltját $A(p)Y(p) - B(p)$ az eredeti differenciálás tételével határozzuk meg, ahol $A(p)$ és $B(p)$ n-edrendű polinomok, $Y(p)$ pedig egy ismeretlen függvény. Ezután a differenciálegyenlet $f(t)$ jobb oldalát is lecseréljük az $F(p)$ transzformált függvénnyel. Ennek eredményeként az differenciálegyenletből algebrai egyenletet kapunk $A(p)Y(p) - B(p) = F(p)$, amiből meghatározzuk a $Y(p)$ függvény explicit alakját. Ezután, a Laplace inverz transzformációval vagy a Laplace transzformáció táblázatával meghatározzuk az $y = y(t)$ eredetet, amely a kezdeti feltételeknek megfelelően a kiinduló differenciálegyenlet partikuláris megoldása lesz.

Az eredeti függvények táblázata

Eredeti	Transzformált	Eredeti	Transzformált
1	$1/p$	$e^{\lambda t} \cdot \cos \omega t$	$(p-\lambda)/[(p-\lambda)^2 + \omega^2]$
t^n	$n!/p^{n+1}$	$e^{\lambda t} \sin \omega t$	$\omega/[(p-\lambda)^2 + \omega^2]$
$e^{\lambda t}$	$1/(p-\lambda)$	$t \cdot \cos \omega t$	$(p^2 - \omega^2)/(p^2 + \omega^2)^2$
$\cos \omega t$	$p/(p^2 + \omega^2)$	$t \cdot \sin \omega t$	$2p\omega/(p^2 + \omega^2)^2$
$\sin \omega t$	$\omega/(p^2 + \omega^2)$	$ch\, \omega t$	$p/(p^2 - \omega^2)$
$t^n e^{\lambda t}$	$n!/(p-\lambda)^{n+1}$	$sh\, \omega t$	$\omega/(p^2 - \omega^2)$

Példa. Oldja meg az alábbi egyenletet $y' + y = 0$, $y(0) = 1$.
Végrehajtjuk a Laplace-transzformációt:

$$y'(t) \risingdotseq pY(p) - 1.$$

Az eredetit a transzponáltra helyettesítve kapjuk az algebrai egyenletet:

$$Y(p)(p+1) = 1,$$

Innen

$$Y(p) = 1/(p+1).$$

A táblázat szerint

$$1/(p+1) \risingdotseq e^{-t}.$$

Tehát a megoldás $y = e^{-t}$.

30.1. Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket, ha adottak a kezdeti értékek:

a) $y' + ay = b, y(0) = 0$;
b) $y'' - y' - 6y = 2, y(0) = 1, y'(0) = 0$;
c) $y'' + 3y' = e^{-3t}, y(0) = 0, y'(0) = -1$;
d) $y'' - 2y' + 2y = sint$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$;
e) $y'' + 4y' = sin2t, y(0) = 1, y'(0) = -2$;
f) $y''' - y'' = e^t, y(0) = 1, y'(0) = y''(0)=0$!

30.2. Határozza meg a differenciálegyenlet általános megoldását:

a) $y'' + 9y = cos3t$; b) $y'' + 4y' + 4y = e^{2t}$;

c) $y'' + 2y' = te^{-2t}$; d) $y''+y' - 2y = e^{t}$;

e) $y''+y' = e^{-t}sint$!

30.3. Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet, ha adottak a nullás kezdeti értékek:

a) $y' + y = f(t)$, ahol $f(t) = \begin{cases} 1, 0 \le t < 2 \\ 0, \ \ t \ge 2 \end{cases}$;

b) $y'' + y = f(t)$, ahol $f(t) = \begin{cases} cost, 0 \le t < \pi \\ 0, \ \ t \ge \pi \end{cases}$;

c) $y'' - y' = f(t)$, ahol $f(t) = \begin{cases} e^{-t}, 0 \le t < 1 \\ 0, \ \ t \ge 1 \end{cases}$!

30.4. Ha $y_1(t)$ – konstans együtthatós differenciálegyenlet megoldása

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 1$$

nullás kezdeti értékekekkel, akkor a

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(t)$$

differenciálegyenlet megoldása ugyan azon nullás kezdeti értékekre az alábbi függvény lesz:

$$y(t) = \int_0^t y'(\tau) f(t-\tau) d\tau = \ y_1(t) f(0) + \int_0^t f'(\tau) y_1(t-\tau) d\tau.$$

Az megadott módszert segítségével keresse meg az alábbi differenciálegyenletek megoldását:

a) $y' - y = \frac{1}{e^t+3}$; b) $y'' + y = \frac{1}{1+e^t}$; c) $y'' - y' = \frac{1}{1+e^t}$!

30.5. Keresse meg a differenciálegyenletrendszerek megoldását, ha adottak a kezdeti értékek:

a) $\begin{cases} x' + y = 0 \\ x + y' = 0 \end{cases}$, $x(0) = 1, \ y(0) = -1$;

b) $\begin{cases} y' = 3x - y \\ x' = y + x + e^t \end{cases}$, $x(0) = 0, \ y(0) = 0$;

c) $\begin{cases} y' - 2y - 4x = cost \\ x' + y + 2x = sint \end{cases}$, $x(0) = 0, \ y(0) = 0$;

d) $\begin{cases} y' + 7y - x = 0 \\ x' + 2y + 5x = 0 \end{cases}$, $x(0) = 1, \ y(0) = 1$;

e) $\begin{cases} 2x'' + x - y' = -3sint \\ x + y' = -sint \end{cases}$, $x(0) = 0, x'(0) = 1, y(0) = 0$!

Irodalom

1. *Halász Gábor*. Bevezető a komplex függvénytanba . − Budapest: ELTE Eötvös Kiadó Kft., 2002.
2. *B.A.Fuksz, B.V. Sabat* Komplex változós függvények és néhány alkalmazásuk. −Budapest: Tankönyvkiadó, 1976 .
3. *Дружинин В. В., Лебедева А. В.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного. Методическое пособие. СарФТИ. 2017.
4. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. − М: Наука. 1987.
5. *Свешников А.Г., Тихонов А.Н.* Теория функций комплексной переменной. М: Наука. 1979.
6. *Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. М: Наука. 1982.
7. *Евграфов М.А., Бежанов К.А., Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И.* Сборник задач по теории аналитических функций. М: Наука. 1972.
8. *Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М: Наука. 1970.