ЗАКАРПАТСЬКИЙ УГОРСЬКИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ФЕРЕНЦА РАКОЦІ ІІ
II. RÁKÓCZI FERENC KÁRPÁTALJAI MAGYAR FŐISKOLA

Кафедра математики та інформатики
Matematika és Informatika Tanszék

«ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ»
(МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДЛЯ САМОСТІЙНИХ РОБІТ)

(для студентів 3-го курсу спеціальності 014 Середня освіта (Математика)

KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN

(Módszertani utmutató önálló munkához)

Перший (бакалаврський) / Alapképzés (BA)
(ступінь вищої освіти /a felsőoktatás szintje)

01 Освіта/Педагогіка / *01 Oktatás/Pedagógia*
(галузь знань / képzési ág)

"Середня освіта (*Математика*)*"*
"Középfokú oktatás (*Matematika*)*"*
(освітня програма / képzési program)

Берегове / Beregszász
2023 р. / 2023

Посібник з теорії функцій комплексної змінної призначений для студентів III курсу Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці спеціальності 014 Середня освіта (математика) денної та заочної форми навчання з метою організації самостійної роботи з курсу "Комплексний аналіз".

Посібник складається з 30 варіантів для самостійної роботи, а також містить розв'язок типового варіанту. Кожне завдання детально описується і крок за кроком супроводжує студента до досягнення результату. Методичний посібник особливо корисний для практики та перевірки власних результатів. Розв'язування типового варіанту допомагає ще більше зрозуміти теоретичні основи завдань та їх застосування.

Матеріал призначений для використання як навчально-методичний посібник з дисципліни "Комплексний аналіз".

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики
(протокол № 12 від «13» червня 2023 року)

Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості освіти
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол № 11 від «29» серпня 2023 року)

Рекомендовано до видання у електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол № 8 від «31» серпня 2023 року)

Підготовлено до видання у електронній формі (PDF) кафедрою математики та інформатики з Видавничим відділом Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Укладач:

СТОЙКА МИРОСЛАВ ВІКТОРОВИЧ – доцент кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Рецензенти:

ПЕТЕЧУК ЮЛІЯ ВАСИЛІВНА – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики та інформатики ЗУІ;

БОРТОШ МАРІЯ ЮЛІЇВНА – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри та диференціальних рівнянь ДВНЗ «УжНУ»

Відповідальний за випуск:

Олександр ДОБОШ – начальник Видавничого відділу ЗУІ ім. Ф.Ракоці II

За зміст посібника відповідальність несуть розробники.

Видавництво: Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II (адреса: пл. Кошута 6, м. Берегове, 90202. Електронна пошта: foiskola@kmf.uz.ua)

© Мирослав Стойка, 2023
© Кафедра математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II, 2023

A komplex függvénytan a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola, III. éves, matematika szakos, nappali és levelezős hallgatóinak készült, a Komplex analízis c. tantárgy alaposabb tanulmányozásának és elsajátításának megkönnyítése céljából.

Ez a jegyzet elsősorban matematika szakos hallgatók számára készült, de hasznos lehet mindazok számára, akik bármely más szakon tanulnak matematikát.

A jegyzet önálló munkára szolgáló 30 változatból áll, és egy tipikus változat megoldását is tartalmazza. Minden feladat részletesen leírt, és lépésről lépésre vezeti a tanulót az eredmény eléréséig. A módszertani útmutató különösen hasznos a gyakorlásban és a saját eredmények ellenőrzésében. A típikus példaváltozat megoldása még inkább segít abban, hogy megértsük a feladatokkal kapcsolatos elméleti alapokat és azok alkalmazását.

Az oktatási folyamatban történő felhasználását jóváhagyta
a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Matematika és Informatika Tanszéke
(2023. június 13., 12. számú jegyzőkönyv).

Megjelentetésre javasolta a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Minőségbiztosítási Tanácsa
(2023. augusztus 29, 11. számú jegyzőkönyv).

Elektronikus formában (PDF fájlformátumban) történő kiadásra javasolta
a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Tudományos Tanácsa
(2023. augusztus 31, 8. számú jegyzőkönyv).

Kiadásra előkészítette a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Matematika és Informatika Tanszéke és Kiadói Részlege.

Szerkesztő:

SZTOJKA MIROSZLÁV – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének docense

Szakmai lektorok:

PETECSUK JÚLIA – fizika és matematika tudományok kandidátusa, docens, a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének docense

BARTOS MÁRIA – fizika és matematika tudományok kandidátusa, docens, az Ungvári Nemzeti Egyetem Algebra és Diferenciál Egyenletek Tanszékének docense

A kiadásért felel:

DOBOS Sándor – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Kiadói Részlegének vezetője

A tartalomért kizárólag a jegyzet szerkesztője felel.

Kiadó: a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola (cím: 90 202, Beregszász, Kossuth tér 6. E-mail: foiskola@kmf.uz.ua)

© Sztojka Miroszláv, 2023
© A II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszéke, 2023

Tartalom

Előszó 5
Tipikus változat megoldása 6
1. változat 25
2. változat 27
3. változat 29
4. változat 31
5. változat 33
6. változat 35
7. változat 37
8. változat 39
9. változat 41
10. változat 43
11. változat 45
12. változat 47
13. változat 49
14. változat 51
15. változat 53
16. változat 55
17. változat 57
18. változat 59
19. változat 61
20. változat 63
21. változat 65
22. változat 67
23. változat 69
24. változat 71
25. változat 73
26. változat 75
27. változat 77
28. változat 79
29. változat 81
30. változat 83
Irodalom 85

Előszó

A komplex analízis, amelyet más néven komplex függvénytanként is ismerünk, egy matematika ága, amely a komplex változókkal és komplex értékű függvényekkel foglalkozik. Ez a terület a matematikában a komplex számokon alapul, amelyek valós és képzetes részből állnak.

A komplex függvények a matematikában olyan leképezéseket jelentenek, amelyek értelmezési tartománya és értékkészlete is a komplex sík részhalmaza. A komplex síkot gyakran a valós számok síkjának gondoljuk el, ahol a valós számok a vízszintes tengelyen helyezkednek el, míg a képzeletbeli számok a függőleges tengelyen.

A komplex analízis rendkívül hasznos és fontos a fizikában, különösen a kétdimenziós problémák modellezésében. Segítségével megérthetjük és vizsgálhatjuk a villamos áramlást, hőterjedést vagy elektromágneses jelenségeket.

Ez jegyzet elsősorban matematika szakos hallgatók számára készült, de hasznos lehet mindazok számára, akik bármely más szakon tanulnak matematikát.

A jegyzet önálló munkára szolgáló 30 változatból áll, és egy tipikus változat megoldását is tartalmazza. Minden feladat részletesen leírt, és lépésről lépésre vezeti az tanulót az eredmény eléréséig. A módszertani útmutató különösen hasznos a gyakorlásban és a saját eredmények ellenőrzésében. A típikus példaváltozat megoldása még inkább segít abban, hogy megértsük a feladatokkal kapcsolatos elméleti alapokat és azok alkalmazását.

Tipikus változat megoldása

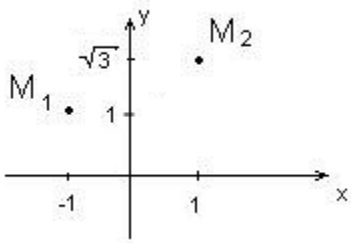
1. feladat.

1) Határozza meg a $z_1 = -1 + i$ és $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

2) Keresse meg: a). $\bar{z}_1 \cdot z_2^2$; b). z_2 / z_1 ; c). $\sqrt[3]{z_1}$!

Megoldás.

1) Ábrázoljuk a komplex síkon a komplex számokat. A $z_1 = -1 + i$ számnak az $M_1(-1;\, 1)$ pont felel meg, míg a $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ -nek az $M_2(1;\, \sqrt{3})$ pont.



Az abszolútérték és argumentum meghatározásához a következő képleteket használjuk:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ és } \varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{ha } x > 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, & \text{ha } x < 0,\ y > 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi, & \text{ha } x < 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Kapjuk:

$$r_1 = |z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}\,,\ \varphi_1 = \arg z_1 = arctg\,\frac{-1}{1} + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4},$$

$$r_2 = |z_2| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2\,,\ \varphi_2 = \arg z_2 = arctg\,\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}.$$

Ahhoz, hogy áttérjünk a komplex szám algebrai alakjától annak trigonometriai és exponenciális alakjához a következő képleteket:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \text{ és } z = re^{i\varphi}.$$

Így kapjuk:

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$

$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$,

$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$,

$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

2) a) $\bar{z}_1 \cdot z_2^2 = (-1-i)\cdot\left(1+\sqrt{3}i\right)^2 = (-1-i)\cdot\left(1^2 + 2\sqrt{3}i + \left(\sqrt{3}i\right)^2\right) = (-1-i)\cdot\left(1+2\sqrt{3}i-3\right) =$

$= (-1-i)\cdot\left(2\sqrt{3}i-2\right) = -2\sqrt{3}i + 2 - 2\sqrt{3}i^2 + 2i = -2\sqrt{3}i + 2 + 2\sqrt{3} + 2i =$
$= \left(2+2\sqrt{3}\right) + \left(2-2\sqrt{3}\right)i;$

b) $\frac{z_2}{z_1} = \frac{1+\sqrt{3}i}{-1+i} = \frac{\left(1+\sqrt{3}i\right)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{-1-i-\sqrt{3}i-\sqrt{3}i^2}{(-1)^2 - i^2} = \frac{-1-i-\sqrt{3}i+\sqrt{3}}{1+1} =$

$= \frac{-1+\sqrt{3}-\left(1+\sqrt{3}\right)i}{2} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}i;$

c) Használjuk a következő képletet

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ k = 0, 1, ..., (n-1).$$

$$\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{-1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3}\right)$$

ha $k = 0$: $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi/4}{3} + i\sin\frac{3\pi/4}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$;

ha $k = 1$: $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi/4 + 2\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi/4 + 2\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$;

ha $k = 2$: $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi/4 + 4\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi/4 + 4\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right) =$

$= \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right)$.

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = \cos z,\ z_0 = \frac{\pi}{3} + 3i$;

b) $f(z) = Arctgz,\ z_0 = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$!

Megoldás.

a) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+3i\right) = \cos\dfrac{\pi}{3}\cos 3i - \sin\dfrac{\pi}{3}\sin 3i = \dfrac{1}{2}\mathrm{ch}3 - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{sh}3;$

b) A meghatározás szerint $\mathrm{Arctg}\,z = -\dfrac{i}{2}\mathrm{Ln}\dfrac{i-z}{i+z}$.

$$\frac{i-z}{i+z} = \frac{i-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{i+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}+i\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{1}{2}+i\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = i\left(2+\sqrt{3}\right),$$

$$\mathrm{Arctg}\frac{1-i\sqrt{3}}{2} = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{i-z}{i+z} = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}i\left(2+\sqrt{3}\right) = -\frac{i}{2}\left(\ln\left|i\left(2+\sqrt{3}\right)\right| + i\arg\left(i\left(2+\sqrt{3}\right)\right) + 2\pi k i\right) =$$

$$= \left|\begin{matrix}\left|i\left(2+\sqrt{3}\right)\right| = 2+\sqrt{3} \\ \arg\left(i\left(2+\sqrt{3}\right)\right) = \frac{\pi}{2}\end{matrix}\right| = -\frac{i}{2}\left(\ln\left(2+\sqrt{3}\right) + i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right) - \frac{i}{2}\ln\left(2+\sqrt{3}\right).$$

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \sin z^2$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

Megoldás.

Meghatározzuk az $f(z)$ függvény valós és képzetes részét:

$$f(z) = \sin z^2 = \sin(x+iy)^2 = \sin(x^2-y^2+i2xy) = \sin(x^2-y^2)\cos(i\cdot 2xy) +$$
$$+\cos(x^2-y^2)\sin(i\cdot 2xy) = \sin(x^2-y^2)ch(2xy) + i\cos(x^2-y^2)sh(2xy).$$

Így kapjuk:

$$u = \sin(x^2-y^2)ch(2xy);$$
$$v = \cos(x^2-y^2)sh(2xy).$$

Megkeressük a $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ parciális deriváltakat, és meghatározzuk azon pontokat, melyek környezetében léteznek és folytonosak lesznek, és azokat melyekben teljesülnek a Cauchy-Riemann feltételek:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (\sin(x^2-y^2)ch(2xy))'_x = 2x\cos(x^2-y^2)ch(2xy) + 2y\sin(x^2-y^2)sh(2xy),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = (\cos(x^2-y^2)sh(2xy))'_y = 2y\sin(x^2-y^2)sh(2xy) + 2x\cos(x^2-y^2)ch(2xy),$$

vagyis $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ minden valós x és y értékére, és folytonosak az R^2 síkon.

$$\frac{\partial u}{\partial y}=(\sin(x^2-y^2)ch(2xy))'_y=-2y\cos(x^2-y^2)ch(2xy)+2x\sin(x^2-y^2)sh(2xy),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=(\cos(x^2-y^2)sh(2xy))'_x=-2x\sin(x^2-y^2)sh(2xy)+2y\cos(x^2-y^2)ch(2xy),$$

vagyis $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ minden valós x és y értékére, és folytonosak az R^2 síkon.

Mivel a Cauchy-Riemann feltételek teljesülnek minden (x,y) -ra és a $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$ parciális deriváltak folytonosak az (x,y) tetszőleges környezetében, ezért az $f'(z)$ derivált létezik a C sík tetszőleges $z=x+iy$ pontjában.

Meghatározzuk a deriváltját:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=2x\cos(x^2-y^2)ch(2xy)+2y\sin(x^2-y^2)sh(2xy)-$$

$$-i\cdot 2x\sin(x^2-y^2)sh(2xy)+i\cdot 2y\cos(x^2-y^2)ch(2xy)=$$

$$=2x(\cos(x^2-y^2)\cos(i\cdot 2xy)-\sin(x^2-y^2)\sin(i\cdot 2xy))+2iy(-\sin(x^2-y^2)\sin(i\cdot 2xy)+$$
$$+\cos(x^2-y^2)\cos(i\cdot 2xy))=2x\cos(x^2-y^2+2ixy)+2yi\cos(x^2-y^2+2ixy)=$$
$$=2x\cos(x+iy)^2+2yi\cos(x+iy)^2=2(x+iy)\cos(x+iy)^2=2z\cos z^2.$$

Kapjuk, $f'(z)=(\sin z^2)'=2z\cos z^2,\ \forall\ z\in C$.

A derivált valós része:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x\cos(x^2-y^2)ch(2xy)+2y\sin(x^2-y^2)sh(2xy),$$

és képzetes része:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-2x\sin(x^2-y^2)sh(2xy)+2y\cos(x^2-y^2)ch(2xy).$$

4. feladat. Határozza meg a $z=5\mathrm{tg}t-3i\sec t$ görbe típusát!

Megoldás.

$$z(t)=x(t)+iy(t)=5tgt-3i\sec t.$$

Innen $\begin{cases} x=5\mathrm{tg}t, \\ y=-3\sec t. \end{cases}$

Kifejezzük a t-ét minden egyenletből: $\begin{cases} t=\mathrm{arctg}\frac{x}{5}, \\ t=\arccos\left(-\frac{3}{y}\right). \end{cases}$

Elhagyjuk a t-ét:

$$\arccos\left(-\frac{3}{y}\right)=\operatorname{arctg}\frac{x}{5}.$$

$$\cos\left(\arccos\left(-\frac{3}{y}\right)\right)=\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{5}\right),$$

$$\cos\left(\pi-\arccos\frac{3}{y}\right)=\frac{5}{\sqrt{x^2+5^2}},\ -\frac{3}{y}=\frac{5}{\sqrt{x^2+5^2}},$$

$$\frac{25y^2}{9}=x^2+25,$$

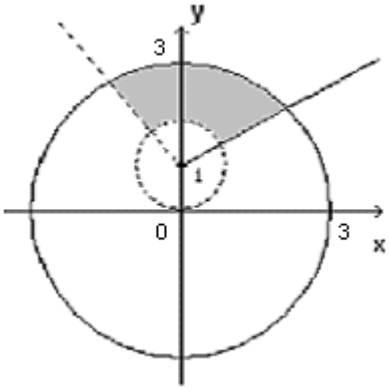
$$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{25}=1 \text{ – hiperbola egyenlete.}$$

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a). $\begin{cases} 1<|z-i|\le 3, \\ \frac{\pi}{6}\le \arg(z-i)<\frac{2\pi}{3}; \end{cases}$

b). $\begin{cases} |z^2-4|\le 4, \\ \operatorname{Re} z>1! \end{cases}$

a). A keresett tartomány a $1<|z-i|\le 3$ gyűrű és a $\frac{\pi}{6}\le \arg(z-i)<\frac{2\pi}{3}$ szög belső részének metszete lesz:



b). A $|z^2-4|=4$ görbét descartes koordinátarendszerben írjuk fel:

$$z^2-4=(x+iy)^2-4=x^2+2ixy-y^2-4=(x^2-y^2-4)+2ixy$$

$$\left|z^2-4\right| = \sqrt{\left(x^2-y^2-4\right)^2+(2xy)^2} = \sqrt{\left(x^2-y^2\right)^2-8\left(x^2-y^2\right)+16+4x^2y^2} =$$

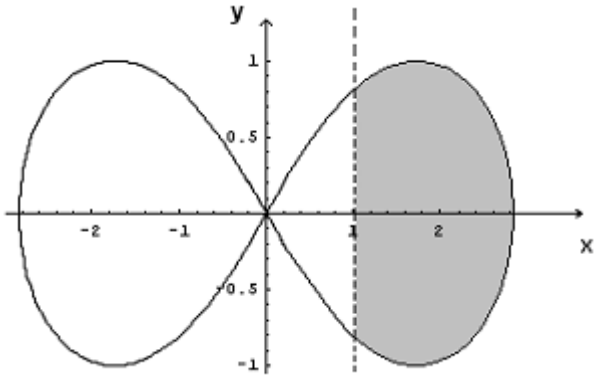
$$= \sqrt{\left(x^2+y^2\right)^2-8\left(x^2-y^2\right)+16};$$

Innen, $\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^2-8\left(x^2-y^2\right)+16} = 4$.

Vagy $\left(x^2+y^2\right)^2-8\left(x^2-y^2\right)=0$,

$\left(x^2+y^2\right)^2 = 8\left(x^2-y^2\right)$ – Bernoulli lemniszkáta.

Nyilvánvaló, hogy a $\left|z^2-4\right| \le 4$ azon pontokat határozz meg, melyek a Bernoulli lemniszkátán és annak belsejében helyezkednek el. A $\operatorname{Re} z > 1$ egyenlőtlenség azon pontokat határozz meg, melyek az $x=1$ egyenes jobb oldalán helyezkednek el. A keresett tartomány ezen tartományok metszete lesz:



6. feladat. Lehet e az $u = e^{2x}\cos 2y$ függvény valós része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0)=1$!

Megoldás.

Meghatározzuk a parciális deriváltakat:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2x}\cos 2y,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -2e^{2x}\sin 2y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4e^{2x}\cos 2y,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4e^{2x}\cos 2y.$$

Kapjuk, hogy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4e^{2x}\cos 2y - 4e^{2x}\cos 2y = 0,\ \forall\,(x,y)\in R^2.$$

Tehát az $u(x,y)$ harmonikus a C síkon, és létezik olyan $f(z)$ analitikus függvény, melyre $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$.

Cauchy-Riemann feltételek szerint:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2x}\cos 2y, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2e^{2x}\sin 2y. \qquad (2)$$

Integráljuk az (1) egyenletet y változó szerint, így a képzetes részt kapjuk a $C(x)$ összeadandó pontosságával:

$$v = e^{2x}\sin 2y + C(x). \qquad (3)$$

Deriváljuk a (3)-st x szerint:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2e^{2x}\sin 2y + C'(x).$$

A (2)-hez való összevetéssel, kapjuk, hogy $C'(x) = 0$, inenn pedig $C(x) = A$.

Tehát, kapjuk

$$v = e^{2x}\sin 2y + A \text{ и}$$

$$f(z) = u + iv = e^{2x}\cos 2y + ie^{2x}\sin 2y + iA = e^{2x}(\cos 2y + i\sin 2y) + iA = e^{2x}e^{2iy} + iA =$$
$$= e^{2(x+iy)} + iA = e^{2z} + iA.$$

mivel $f(0) = 1$, kapjuk $A = 0$.

Végül, $f(z) = e^{2z}$.

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = \frac{1}{z}$ leképezés által, ha $D: \begin{cases} |\operatorname{Re} z| \le 1, \\ \operatorname{Im} z \ge 0 \end{cases}$!

Megoldás.

Először megkeressük a D tartomány L határvonalát, és ezután a D tartomány tetszőleges pontjának képét határozzuk meg.

A görbe kép egyenlet meghatározásának szabálya

Legyen a z tartományban az $F(x, y) = 0$ görbe megadva. Hogy megkeressük a görbe kép egyenletét $\Phi(u, v) = 0$ a w tartományban $w = f(z) = u + iv$ leképezés során, ki kel vonnunk az x és y változókat az egyenletekből:

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \\ F(x, y) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Ha a görbe paraméteres egyenlettel van megadva, vagyis:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{vagy} \quad z = z(t) = x(t) + iy(t),$$

akkor a képének paraméteres egyenlete a $w = f(z) = u + iv$ leképezés során a következő lesz:

$$\begin{cases} u = u(x(t), y(t)) = U(t) \\ v = v(x(t), y(t)) = V(t) \end{cases}$$

A megadott feladatban a D tartomány határvonala három részből tevődik össze: $L_1 : x = -1,\ \ y \geq 0,\ \ L_2 : x = 1,\ \ y \geq 0,\ \ L_3 : y = 0, -1 \leq x \leq 1$. Megkeressük annak képét a megadott leképezés során.

Kiírjuk a függvény valós és képzetes részét.

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2};$$

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2},\ v = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Megkeressük a határvonal első részének képét. Ehhez összeállítjuk az (1) egyenletrendszert:

$$\begin{cases} u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}, \\ v = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}, \Rightarrow \begin{cases} u = -\dfrac{1}{1 + y^2}, \\ v = -\dfrac{y}{1 + y^2} \end{cases} \\ x = -1,\ \ y \geq 0 \end{cases}$$

Négyzetre emeljük az egyenletrendszer első és a második egyenletét:

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{1 + y^2} = -u.$$

$$y \geq 0 \Rightarrow v \leq 0,$$

$$u = -\frac{1}{1 + y^2} \leq 0$$

Végül a határvonal részének képe $(u + \frac{1}{2})^2 + v^2 = \frac{1}{4}$, ha $u \leq 0,\ \ v \leq 0$.

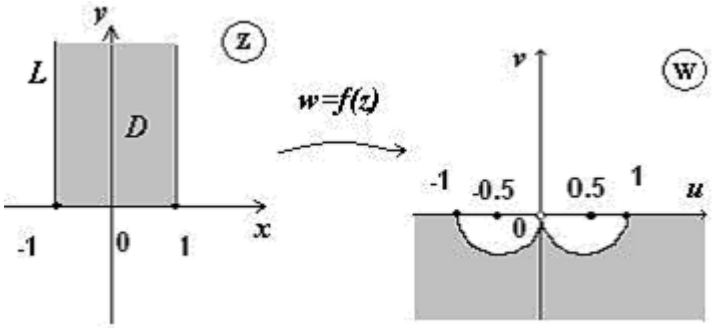
Hasonlóan meghatározzuk a határvonal második részének képét L_2: $(u - \frac{1}{2})^2 + v^2 = \frac{1}{4}$, ha $u \geq 0,\ \ v \leq 0$.

Az L_3 képet az alábbi egyenletrendszerből határozzuk meg:

$$\begin{cases} u = \dfrac{x}{x^2+y^2}, \\ v = -\dfrac{y}{x^2+y^2}, \Rightarrow \begin{cases} u = \dfrac{1}{x}, \\ v = 0 \end{cases} \\ y = 0,\ -1 \le x \le 1 \end{cases}$$

Tehát, az L_3: $v = 0,\ u \ge 1$, ha $0 < x \le 1$ és $u \le -1$ ha $-1 \le x < 0$; $u \ne 0$. Ábrázoljuk az $L_1,\ L_2,\ L_3$ határvonal részeket a W síkon.

A D tartomány képének ábrázolásához a W síkon veszünk egy kontroll pontot. A $z = i$ pont a $w = -i$ pontba képződik.



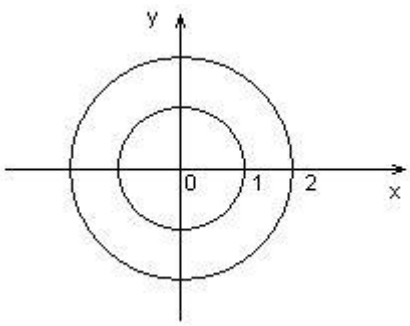
8. feladat. Keresse meg az alábbi függvények Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \dfrac{2z+1}{(z-1)(z+2)}$, $z_0 = 1$.

Megoldás.

a) Az $f(z) = \dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$ függvénynek két szinguláris pontja van: $z_1 = 1$ és $z_2 = -2$. Jelöljük azokat a Z síkon, és két $z_0 = 0$ középpontú körvonalat ábrázolunk, melyek megfelelően $z_1 = 1$ és $z_2 = -2$ ponton haladnak át. Tehát van három olyan tartomány, melyekben az $f(z)$ függvény analitikus lesz:



1) $|z| < 1$;

2) $1 < |z| < 2$ gyűrű;

3) $|z| > 2$ tartomány, mely a $|z| \le 2$ körlap külső része.

Megkeressük az $f(z)$ függvény Laurent sorát ezen tartományok mindegyikében a következő képletet használva:

$$(1-t)^{-1} = \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \ldots + t^n + \ldots \qquad (1)$$

minden $|t| < 1$.

Az $f(z)$ függvényt elemi törtfüggvények összegeként írjuk fel:

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+2}.$$

1) Vizsgáljuk a $|z| < 1$ körlapot. A $\frac{1}{z-1}$ és $\frac{1}{z+2}$ elemi törtfüggvényeket pedig az $\frac{1}{1-t}$ alakban, ahol $|t| < 1$ amikor $|z| < 1$. Az $f(z)$ függvényt a következő alakban írjuk fel: $f(z) = -\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}$. Az ilyen törtfüggvényekhez már használhatjuk az (1) képletet.

A $|z| < 1$ tartományban, az (1) képlet szerint $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n + \ldots$. Mivel $|z| < 1$ és annál inkább $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$ (ha $|z| < 1$, akkor annál inkább $|z| < 2$), tehát, az (1) képlet szerint

$$\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{8} + \ldots + (-1)^n \frac{z^n}{2^n} + \ldots.$$

Tehát,

$$-\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = -1 - z - z^2 - z^3 - \ldots - z^n - \ldots + \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} + \ldots + (-1)^n \frac{z^n}{2^{n+1}} + \ldots =$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{3}{4}z - \frac{7}{8}z^2 - \frac{15}{16}z^3 - \ldots - \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}z^n - \ldots = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}z^n = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^n}{2^{n+1}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - 1\right)z^n$$

A kapott kifejtés csak a Laurent sor szabályos részét tartalmazza.

2) Vizsgáljuk a $1<|z|<2$ gyűrűt. Ebben a tartományban felírjuk az $f(z)$ függvényt az alábbi alakban $f(z)=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}$. A törtek nevezőiben az $1-t$ alakú kifejezéseket írtuk fell, ahol $|t|<1$.

Mivel $|z|>1$, ezért $\left|\frac{1}{z}\right|<1$ és az (1) képlet szerint $\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+...+\frac{1}{z^n}+...$.

Mivel $|z|<2$, ezért az előző esethez hasonlóan $\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+...+(-1)^n\frac{z^n}{2^n}+...$.

Tehát, $\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=$

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+...+\frac{1}{z^n}+...+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}z+\frac{1}{8}z^2-\frac{1}{16}z^3+...+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n+...==\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

A kapott kifejtés a fő- és szabályos részét is tartalmazza a Laurent sornak.

3) Vizsgáljuk a $|z|>2$ tartományt. Ezen tartományban $\left|\frac{1}{z}\right|<1$, ezért az (1) képlet szerint

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+...+\frac{1}{z^n}+....$$

A vizsgált tartományban $\left|\frac{z}{2}\right|>1$, vagyis $\left|\frac{2}{z}\right|<1$ ezért

$$\frac{1}{1+\frac{2}{z}}=1-\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}-\frac{8}{z^3}+...+(-1)^n\frac{2^n}{z^n}+....$$

Az $f(z)$ függvényt a következő alakban írjuk fel $f(z)=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}+\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}}$. A kapott felírás szerint kapjuk

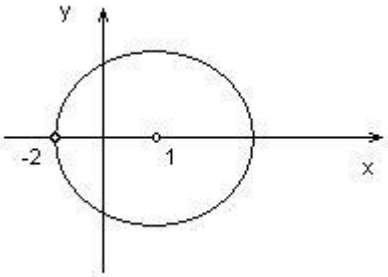
$$f(z)=\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+...+\frac{1}{z^n}+...+1-\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}-\frac{8}{z^3}+..+(-1)^n\frac{2^n}{z^n}+...\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{n-1}}{z^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n-1}\cdot 2^{n-1}}{z^n}.$$

A kapott kifejtés csak a Laurent sor fő részét tartalmazza.

b) Az $f(z)$ függvénynek 2 szinguláris pontja van $z_1 = 1$ és $z_2 = -2$, melyeket a Z síkon jelölünk meg. A $z_1 = 1$ pont egybeesik a $z_0 = 1$. Húzunk egy $z_0 = 1$ középpontú körvonalat, mely a $z_2 = 2$ ponton halad át.

Megfelelően két olyan tartomány létezik, melyekben az $f(z)$ függvény analitikus:



1) $1 < |z-1| < 3$ gyűrű;

2) $|z-1| > 3$

Megkeressük az $f(z)$ függvény Laurent sorát mindegyik tartományban az (1) képlet segítségével. Ehhez felírjuk az $f(z)$ függvényt elemi törtfüggvények összegeként:

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+2}.$$

1) Először kifejtsük az $f(z)$ függvényt a z–1 hatványai szerint a $1 < |z-1| < 3$ tartományban. Az első törtfüggvény már hatványa a $z-1$-nek. A második törtfüggvényben pedig elvégezzük a $z-1 = t$ helyettesítést, akkor $z = t+1$ és $\frac{1}{z+2} = \frac{1}{t+3}$. A $\frac{1}{t+3}$ törtfüggvény a t hatványai szerint, hasonlóan az előző feladathoz. Amikor $0 < |t| < 3$, akkor a következő felírást használjuk:

$$\frac{1}{t+3} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{t}{3}} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{t}{3} + \frac{t^2}{9} - \frac{t^3}{27} + \ldots + (-1)^n \frac{t^n}{3^n} + \ldots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot t^n}{3^{n+1}};$$

Fordítva, visszahelyettesítjük a változót. Ha $0 < |z-1| < 3$, akkor az $f(z)$ függvény a következő alakot ölti:

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}} = \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(z-1)^n}{3^{n+1}}.$$

A kapott kifejtés a Laurent sor fő- és szabályos részét is tartalmazza.

2) Hasonlóan, a $z-1 = t$ helyettesítéskor, az $\frac{1}{t+3}$ törtfüggvény kifejtése $|t| > 3$ tartományban a következő alakú lesz:

$$\frac{1}{t+3} = \frac{1}{t}\frac{1}{1+\frac{3}{t}} = \frac{1}{t}\left(1 - \frac{3}{t} + \frac{9}{t^2} - \frac{27}{t^3} + \ldots + (-1)^n \frac{3^n}{t^n} + \ldots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{3^{n-1}}{t^n}$$

Fordítva, visszahelyettesítjük a változót, amikor $|z-1|>3$, akkor az $f(z)$ függvény kifejtése a következő alakú lesz:

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-1}\frac{1}{1+\frac{3}{z-1}}=\frac{1}{z-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{3^{n-1}}{(z-1)^n}=\frac{2}{z-1}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{3^{n-1}}{(z-1)^n}.$$

Az első esetben a Laurent sor fő része csak egy összeadandót tartalmaz. A másodig esetben pedig, a Laurent sor csak a fő részt tartalmazza.

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z)=e^{\frac{z}{z-1}}$ függvényt a $z=1$ szinguláris pont környezetében!

Megoldás. Használjuk a már ismert kifejtést:

$$f(z)=e^{\frac{z}{z-1}}=e^{1+\frac{1}{z-1}}=e\cdot e^{\frac{1}{z-1}}=e\left(1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!(z-1)^2}+\ldots+\frac{1}{n!(z-1)^n}+\ldots\right)=e\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!(z-1)^n}.$$

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjai, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^3}+\dfrac{2}{z}$;

b) $f(z)=\dfrac{1-\cos 6z}{z^2}$;

c) $f(z)=(z-i)^3\sin\dfrac{1}{2(z-i)}$!

Megoldás.

a) A $z_0=0$ a függvény szinguláris pontja. A típusának meghatározásához kifejtsük Laurent sorba a függvényt a z hatványai szerint:

$$f(z)=\frac{e^z-1}{z^3}+\frac{2}{z}=\left(1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots\right)\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^3}+\frac{2}{z}=$$

$$=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{1!z^2}+\frac{1}{2!z}+\frac{1}{3!}+\frac{z}{4!}+\ldots+\frac{z^{n-3}}{n!}+\ldots-\frac{1}{z^3}+\frac{2}{z}=\frac{1}{1!z^2}+\frac{1}{2!z}+\frac{1}{3!}+\frac{z}{4!}+\ldots+\frac{z^{n-3}}{n!}+\ldots+\frac{2}{z}=$$

$$=\underbrace{\frac{5}{2z}+\frac{1}{1!z^2}}_{\text{fő rész}}+\underbrace{\frac{1}{3!}+\frac{z}{4!}+\ldots+\frac{z^{n-3}}{n!}+\ldots}_{\text{szabályos rész}}$$

A Laurent sor fő része véges számú összeadandót tartalmaz, vagyis a $z_0=0$ – pólus pont lesz. A negatív hatvány magasabb rendje $(n=2)$ a pólus pont rendjét határozza meg. Tehát, a $z_0=0$ 2.

rendű pólus pont. A reziduumot a $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = C_{-1}$ képlettel határozzuk meg, akkor $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \frac{5}{2}$

.

b) A $z_0 = 0$ a függvény szinguláris pontja. A típusának meghatározásához megvizsgáljuk az alábbi határértéket:

$$\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos 6z}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{2\sin^2 3z}{z^2} = 18,$$

vagyis $z_0 = 0$ kiküszöbölhető szinguláris pont, és így $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 0$.

c) A $z_0 = i$ a függvény szinguláris pontja. A szinguláris pont típusának meghatározásához a függvényt Laurent sorba fejtsük a $z-i$ hatványai szerint:

$$f(z) = (z-i)^3 \sin\frac{1}{2(z-i)} = (z-i)^3\left(\frac{1}{2(z-i)} - \frac{1}{3!(2(z-i))^3} + \frac{1}{5!(2(z-i))^5} - \ldots\right.$$
$$\left. + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!(2(z-i))^{2n+1}} + \ldots\right) = \frac{(z-i)^2}{2} - \frac{1}{2^3 3!} + \underbrace{\frac{1}{5!2^5(z-i)^2} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!2^{2n+1}(z-i)^{2n-2}} + \ldots}_{\text{fő rész}}.$$

A Laurent sor fő része végtelenül sok tagot tartalmaz, vagyis a $z_0 = i$ lényeges szinguláris pont.

Akkro $\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = C_{-1} = 0$, mivel a $\frac{1}{z-i}$ mellett lévő együttható nullával egyenlő.

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{AB} z^3 dz$, ahol AB egy egyenes szakasza, $z_A = 0$, $z_B = i$;

b) $\int_{ABC} \bar{z}\, dz$, ahol ABC egy tört egyenes, $z_A = 0$, $z_B = i$, $z_c = 1+i$;

c) $\int_L z^2\, dz$, ahol L egy körív $|z| = 1$, $0 \le \arg z \le \pi$;

d) $\int_L e^{\bar{z}} dz$, ahol L az $y = -x$ egyenes szakasza, mely az A és B pontot köti össze, $z_A = 0$ és $z_B = \pi - i\pi$!

Megoldás.

a) Mivel az $f(z) = z^3$ függvény mindenütt analitikus, ezért Newton-Leibniz képlete használható:

$$\int_{AB} z^3 dz = \int_0^i z^3 dz = \left.\frac{z^4}{4}\right|_0^i = \frac{i^4}{4} - 0 = \frac{1}{4}.$$

b) Az $f(z)=\bar{z}$ függvény mindenütt folytonos, az ABC törtegyenes szakaszonként sima görbe, akkor az adott integrál kiszámítása két görbementi integrál kiszámításához vezethető le az alábbi képlet szerint: :

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} udx - vdy + i\int_{\Gamma} vdx + udy .$$

Innen kapjuk,

$$\int_{ABC} \bar{z}\,dz = \int_{ABC} (x-iy)(dx+idy) = \int_{ABC} xdx + ydy + i\int_{ABC} -ydx + xdy .$$

A görbementi integrál additív tulajdonsága szerint:

$$\int_{ABC} f(z)dz = \int_{AB} f(z)dz + \int_{BC} f(z)dz .$$

Az AB szakaszon $x=0$, vagyis $dx=0$, $y\in[0,1]$. Kapjuk $\int_{AB}\bar{z}\,dz = \int_{AB} y\,dy = \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$.

A BC szakaszon $y=1$, $dy=0$, $0\le x\le 1$. Kapjuk

$$\int_{BC}\bar{z}\,dz = \int_{BC} x\,dx + i\int_{BC}(-1)\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 - i\,x\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - i .$$

A kereset integrál $\int_{ABC}\bar{z}\,dz$ egyenlő $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-i = 1-i$.

c) Legyen $z=e^{i\varphi}$, akkor $dz = ie^{i\varphi}d\varphi$, $0\le\varphi\le\pi$. Kapjuk,

$$\int_L z^2\,dz = \int_0^{\pi} e^{2i\varphi} ie^{i\varphi}d\varphi = \left.\frac{1}{3}e^{3i\varphi}\right|_0^{\pi} = \frac{1}{3}e^{3i\pi} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}e^{i\pi} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(\cos\pi + i\sin\pi) - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} .$$

d) Megadjuk az L-t paraméteres alakban: $x=t$, $y=-t$, $z=t-it$, $0\le t\le\pi$.

Paraméteres alakban megadott $z(t)=x(t)+iy(t)$ $t_1\le t\le t_2$ görbe esetében a következő képlet igaz:

$$\int_L f(z)\,dz = \int_{t_1}^{t_2} f\big(z(t)\big)z'(t)\,dt .$$

Innen kapjuk:

$$\int_L e^{\bar{z}}\,dz = \int_0^{\pi} e^{t+it}(1-i)dt = \left.\frac{1-i}{1+i}e^{(1+i)t}\right|_0^{\pi} = -i\big(e^{\pi}(\cos\pi + i\sin\pi) - 1\big) = (e^{\pi}+1)i .$$

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\displaystyle\oint_{|z+1|=2} \frac{\sin z\,dz}{z(z+1)^3}$;

b) $\oint\limits_{|z|=2\pi} \frac{z\cos z\,dz}{z^2-\pi^2}$!

Megoldás.

a). Az integrálandó függvénynek az integrálási kontúr belsejében két szinguláris pontja van $z=0$ és $z=-1$. Ezért $\oint\limits_L \frac{\sin z\,dz}{z(z+1)^3} = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-1} f(z)\right)$.

Meghatározzuk a szinguláris pontok típusát és azokban lévő reziduumokat.

$\lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin z}{z(z+1)^3} = 1$, innen $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 0$.

$\lim\limits_{z\to -1} \frac{\sin z}{z(z+1)^3} = \infty$, innen $z=-1$ pólus pont.

Mivel $\lim\limits_{z\to -1} \frac{\sin z}{z(z+1)^3}(z+1)^3 = 1$, ezért $z=-1$ pólus, melynek rendje $n=3$.

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to -1}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z+1)^3\frac{\sin z}{z(z+1)^3}\right] = \frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\left[\frac{\sin z}{z}\right]'' = \frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\left[\frac{z\cdot\cos z-\sin z}{z^2}\right]' =$$

$$= \frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\left[\frac{z^2(\cos z - z\sin z - \cos z) - 2z(z\cdot\cos z - \sin z)}{z^4}\right] = -\frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\left[\frac{z^2\cdot\sin z + 2z\cos z - 2\sin z}{z^3}\right] =$$

$$= \frac{\sin 1 - 2\cos 1}{2}.$$

Végül kapjuk, $\oint\limits_L \frac{\sin z\,dz}{z(z+1)^3} = 2\pi i\left(\frac{\sin 1 - 2\cos 1}{2}\right) = \pi i(\sin 1 - 2\cos 1)$.

b). Az integrálandó függvénynek az integrálási kontúr belsejében két szinguláris pontja van $z=\pi$ és $z=-\pi$. Tehát $\oint\limits_L \frac{z\cos z\,dz}{z^2-\pi^2} = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=\pi} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-\pi} f(z)\right)$.

Mivel $z=\pi$ és $z=-\pi$ első rendű pólus pontok, ezért a reziduumok kiszámítására a következő képletet használjuk: $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$, ahol $\varphi(z) = z\cos z$, $\psi(z) = z^2-\pi^2$, $\psi'(z) = 2z$.

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi} f(z) = \left.\frac{z\cos z}{2z}\right|_{z=\pi} = -\frac{1}{2},\quad \operatorname*{Res}_{z=-\pi} f(z) = \left.\frac{z\cos z}{2z}\right|_{z=-\pi} = -\frac{1}{2}$$

Végül kapjuk, hogy

$$\oint_L \frac{z\cos z\,dz}{z^2-\pi^2} = 2\pi i\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) = -2\pi i\,.$$

13. feladat Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

a) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx$;

b) $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin 5x}{x^2+4}dx$;

c) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)^2}$!

Megoldás.

a) A következő szabály van az integrálok kiszámítására:

Legyen $R(x)$ *egy racionális törtfüggvény,* $R(x)=\frac{P_k(x)}{Q_n(x)}$ *, ahol* $P_k(x)$ *és* $Q_n(x)$ *megfelelően* k*-ad és* n*-ed fokú polinomok. Ha az* $R(x)$ *folytonos a valós számok halmazán és* $n \geq k+2$*, akkor*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi i\sigma$$

ahol σ *az* $R(z)=\frac{P_k(z)}{Q_n(z)}$ *függvény reziduumjainak összegét jelöli az összes pólus pontban, melyek a fenti félsíkban fekszenek.*

Mivel az $R(x)=\frac{x^2}{(x^2+1)^2}$ integrálandó függvény páros, ezért

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx\,.$$

Legyen $R(z)=\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$, mely a valós halmazon (amikor $z=x$) egybeesik az $R(x)$ integrálandó függvénnyel. Az $R(z)$ szinguláris pontjai a $z_1=i$ és $z_2=-i$. Közüllük csak a $z_1=i$ fekszik a felső félsíkban és ez egy 2. rendű pólus pont. Az $R(z)$ függvény reziduumja az i pólus pontban egyenlő

$$\operatorname{Re}sR(i) = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(R(z)(z-i)^2\right) = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{(z+i)^2}\right) = \lim_{z\to i}\frac{2iz}{(z+i)^3} = \frac{1}{4i}\,.$$

Mivel a felső félsíkban csak egy szinguláris pont van, ezért $\sigma = \frac{1}{4i}$. Kapjuk, hogy

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{4}.$$

b) A következő szabály van az integrálok kiszámítására:

Legyen $R(x)$ *egy racionális törtfüggvény,* $R(x) = \frac{P_k(x)}{Q_n(x)}$ *, ahol* $P_k(x)$ *ésu* $Q_n(x)$ *megfelelően* k *-ad és* n *-ed fokú polinomok. Ha az* $R(x)$ *függvény folytonos a valós számok halmazán, és* $n \geq k+1$*,* λ *tetszőleges valós szám, akkor*

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos \lambda x \, dx = \mathrm{Re}\{2\pi i \sigma_1\}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin \lambda x \, dx = \mathrm{Im}\{2\pi i \sigma_1\}$$

ahol σ_1 $R(z) \cdot e^{i\lambda z}$ *függvény rezidumjainak összege az összes pólus pontban, melyek a felső félsíkban fekszenek.*

Mivel $f(x) = \frac{x \sin 5x}{x^2+4}$ páros függvény, ezért $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin 5x}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin 5x}{x^2+4} dx$. Legyen $f(z)$ = $R(z) \cdot e^{5iz}$, ahol a $R(z)$ a valós számok halmazán (amikor $z = x$) egybeesik az $R(x)$: $f(z) = \frac{x}{x^2+4} \cdot e^{5iz}$. Leszögezzük, ha $z = x$, akkor $\mathrm{Im} f(z) = f(x)$. Az $f(z)$ függvény a felső félsíkban $z = 2i$ első rendű pólus pontja van. Az $f(z)$ reziduumja ebben a pólusban egyenlő

$$\mathrm{Re}\, s f(2i) = \lim_{z \to 2i} \left(\frac{z\, e^{5iz}}{z^2+4} \cdot (z-2i) \right) = \frac{1}{2} e^{-10}.$$

Innen kapjuk, hogy $\sigma_1 = \frac{1}{2} e^{-10}$ és

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin 5x}{x^2+4} dx = \mathrm{Im} \left\{ 2\pi i \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-10} \right\} = \pi\, e^{-10}.$$

c) A következő szabály van a komplex változós trigonometrikus függvényektől való integrálok kiszámítására:

Legyen R *egy racionális törtfüggvény, melynek argumentuma* $\sin x$ *és* $\cos x$ *,* $x \in [0, 2\pi]$ *és az* R *függvény folytonos az integrálandó szakaszon belül. Legyen* $z = e^{ix}$*, innen* $dx = \frac{dz}{iz}$, $\cos x = \frac{z^2+1}{2z}$, $\sin x = \frac{z^2-1}{2iz}$, $|z| = 1$. *Akkor*

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx = \oint_{|z|=1} F(z) dz = 2\pi\, i\, \sigma$$

ahol σ az $e\,F(z)$ függvény rezidumjainak összege a pólus pontiokban, melyek a $|z|=1$ körvonal belsejében fekszenek.

A vizsgált integrálban elvégezzük a következő helyettesítést: $z=e^{ix}$. Az átalakítás után kapjuk: $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{(2+\cos x)^2}=\frac{4}{i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{z\,dz}{(z^2+4z+1)^2}$. Az origó középpontú és 1 sugarú körvonal belsejében csak a $z_1=-2+\sqrt{3}$ szinguláris pontja fekszik az $F(z)=\frac{z}{(z^2+4z+1)^2}$ függvénynek, mely másodrendű pólus pont. Az $F(z)$ függvény reziduumja a $z_1=-2+\sqrt{3}$ pontban egyenlő $\operatorname{Re}sF(-2+\sqrt{3})=\lim\limits_{z\to-2+\sqrt{3}}\frac{d}{dz}\left(\frac{z\,(z+2-\sqrt{3})^2}{(z+2-\sqrt{3})^2\,(z+2+\sqrt{3})^2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{3^3}}$. Innen kapjuk, hogy

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{(2+\cos x)^2}=2\pi i\cdot\frac{4}{i}\cdot\frac{1}{2\sqrt{27}}=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

1. Változat

1. feladat.

a) Határozza meg a $z_1 = 1-2i$ és $z_2 = 4-2i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $\bar{z}_1^3 \cdot z_2^2$, z_1 / z_2, $\sqrt[3]{z_2 - \bar{z}_1}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = \cos z,\ z_0 = \frac{\pi}{3} i - 1$;

b) $f(z) = e^z,\ z_0 = \frac{3}{2} + \frac{\pi}{2} i$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \cos z^2$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = 3\sec t + i2\mathrm{tg}t$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} |z-1| \le 1, \\ |z+1| > 2. \end{cases}$;

б) $\begin{cases} \mathrm{Im}\left(z - \bar{z}\right) \ge 1, \\ z\bar{z} - \left(z + \bar{z}\right) > 0, \\ z\bar{z} - \left(z + \bar{z}\right) \le 3 \end{cases}$!

6. feladat. Lehet e az $u = x^2 - y^2 + x$ függvény valós része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 0$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = \frac{1}{z}$ leképezés által, ha $D: \begin{cases} |z| = 1; \\ 0 \le \arg z \le \pi \end{cases}$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \dfrac{z-2}{2z^3 + z^2 - z}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z)=\dfrac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0=1+2i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z)=z\cos\dfrac{1}{z-2}$ függvényt a $z_0=2$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z)=\dfrac{(z+1)^2}{\left(z^2-3z+2\right)^2}$;

b) $f(z)=\dfrac{e^{z^2}}{z^5}$!

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$\int\limits_{AB}\bar{z}^2dz$; $AB:\{y=x^2; z_A=0; z_B=1+i\}$!

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int\limits_{|z+i|=3}\dfrac{\sin z\,dz}{(z+1)^3}$;

b) $\oint\limits_{|z|=4}\dfrac{e^z}{z-\pi i}dz$!

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx$;
2. $\int\limits_{0}^{\infty}\dfrac{x\sin 3x}{(x^2+4)^2}dx$;
3. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{2+\sqrt{3}\sin x}$;
4. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{(1+\sqrt{\frac{10}{11}}\cos x)^2}$!

2. **Változat**

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = 4+4i$ és $z_2 = 2-2i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $z_1 \cdot z_2^2$, $z_2 / \bar{z}_1$, $\sqrt[4]{\bar{z}_1 - 1}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = Lnz,\ z_0 = \dfrac{1+i}{1-i}$;

b) $f(z) = chz$, $z_0 = 1 - \dfrac{\pi}{3} i$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \mathrm{sh}\dfrac{z}{3}$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = 2\sec t - i3\mathrm{tg}t$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} |z+i| \geq 1, \\ |z| < 2. \end{cases}$;

b) $\left|z - \dfrac{1}{2}\right| < \left|1 - \dfrac{\bar{z}}{2}\right|$!

6. feladat. Lehet e az $u = x^3 - 3xy + 1$ függvény valós része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 1$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = \dfrac{1}{z}$ leképezés által, ha D: $\begin{cases} 0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 2; \\ \mathrm{Im}\, z \geq 0\,! \end{cases}$

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \dfrac{z-4}{z^4 + z^3 - 2z^2}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \dfrac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0 = 2 - 3i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z)=\sin\frac{z}{z-1}$ függvényt a $z_0=1$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z^6+2z^5+z^4}$;

b) $f(z)=\dfrac{\cos(z-1)}{(z-1)^4}$!

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$\int\limits_L (z+1)e^z\,dz$; $L:\{|z|=1;\operatorname{Re} z\geq 0\}$!

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int\limits_{|z|=1} z\,tg\,\pi z\,dz$;

b) $\int\limits_{|z-1-i|=2} \dfrac{z\,dz}{(z-2)^2\left(z^2+1\right)}$!

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x-1}{(x^2+4)^2}dx$;
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{(x-1)\sin x}{(x^2+9)^2}dx$;
3. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{4+\sqrt{15}\sin x}$;
4. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{(\sqrt{5}+\cos x)^2}$!

3. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = 3 - 4i$ és $z_2 = -4 + 3i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $(z_1 \cdot z_2)^2$, $\bar{z}_2 / z_1$, $\sqrt[4]{\bar{z}_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = shz$, $z_0 = 2 + \frac{\pi}{4} i$;

b) $f(z) = \ln z$, $z_0 = 4\sqrt{3} + 4i$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = e^{i(z+1)}$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = -\sec t + i3\mathrm{tg}t$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} |z-3| - |z+3| \le \sqrt{5}, \\ |\mathrm{Re}\, z| < \sqrt{5}. \end{cases}$;

b) $\mathrm{Re}\left(z^2 - \bar{z}^2\right) \le 0$!

6. feladat. Lehet e az $v = e^x (y \cos y + x \sin y)$ függvény kpézetes része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 0$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = \frac{1}{z}$ leképezés által, ha $D: \begin{cases} |z| \le 1; \\ \frac{\pi}{2} \le \arg z \le 2\pi \end{cases}$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{3z - 18}{2z^3 + 3z^2 - 9z}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \frac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0 = -3 - 2i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z)=ze^{\frac{z}{z-5}}$ függvényt a $z_0=5$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z)=\dfrac{(z+\pi)^3}{\left(z^2-\pi^2\right)^3}$;

b) $f(z)=z^4\sin\dfrac{3}{z}$!

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$\int\limits_{AB}\operatorname{Im} z^3 dz$; AB egy szakasz $z_A=0; z_B=2+2i$!

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int\limits_{|z|=2}\dfrac{z\,dz}{1-2\sin^2 z}$;

b) $\int\limits_{|z-1|=2}\dfrac{e^z}{z^5-4z^3}dz$!

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{(x^4+1)^2}$;
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\cos 2x}{(x^2+1)^2}dx$;
3. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{5+2\sqrt{6}\sin x}$;
4. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{(1+\sqrt{\frac{6}{7}}\cos x)^2}$!

4. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = 7 + i$ és $z_2 = 1 + 7i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $z_1^2 \cdot \bar{z}_2$, $\bar{z}_1 / z_2$, $\sqrt[3]{z_1 + z_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = ctgz$, $z_0 = \frac{\pi}{2} i + 2$;

b) $f(z) = e^z$, $z_0 = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} i$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \ln z$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = 4\mathrm{tg}t - i3\sec t$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} |z - 1 - i| < 1, \\ |\arg z| \le \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{1 + (\mathrm{Re}\, z)^2} \ge \mathrm{Im}\, z, \\ |\mathrm{Re}\, z| < 2 \,! \end{cases}$

6. feladat. Lehet e az $u = x^2 - y^2 - 2y$ függvény valós része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 0$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = \frac{1 - z}{z}$ leképezés által, ha $D: |z| = 1$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{2z - 16}{z^4 + 2z^3 - 8z^2}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \frac{z + 1}{z(z - 1)}$, $z_0 = -2 + i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z)=\sin\frac{2z-7}{z+2}$ függvényt a $z_0=-2$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3-\frac{\pi}{2}z^2}$;

b) $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^3}$!

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$\int\limits_{AB}(z^2+7z+1)dz$; AB egy egyenes szakasza $z_A=1; z_B=1-i$!

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int\limits_{|z-1|=1}\dfrac{dz}{z^4+1}$;

b) $\int\limits_{|z|=2} z^2\cos\dfrac{2-\pi z}{2z}dz$!

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{(x^2+4)^2(x^2+16)}$;
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x^2\cos x}{(x^2+1)^2}dx$;
3. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{6+\sqrt{35}\sin x}$;
4. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{(2\sqrt{3}+\sqrt{11}\cos x)^2}$!

5. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = 3 + i$ és $z_2 = 1 - 3i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $z_1^2 \cdot \bar{z}_2$, $z_1 / \bar{z}_2$, $\sqrt{\overline{z_1 + z_2}}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = tgz$, $z_0 = \frac{\pi}{6} i - 2$;

b) $f(z) = Arc\sin z$, $z_0 = \sqrt{3}$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = 2i \sin z$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = 3\mathrm{tg}t + i4\sec t$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} |z - i| \le 1, \\ -\frac{\pi}{2} \le \arg(z - i) < \frac{\pi}{4}. \end{cases}$;

b) $z^2 + \bar{z}^2 > 3(\mathrm{Re}\, z)^2 - 4$!

6. feladat. Lehet e az $u = \frac{e^{2x} + 1}{e^x} \cos y$ függvény valós része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 0$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = \frac{1}{z}$ leképezés által, ha $D: \begin{cases} |z| \ge 1 \\ \mathrm{Re}\, z \ge 0 \\ \mathrm{Im}\, z \ge 0 \end{cases}$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{5z - 50}{2z^3 + 5z^2 - 25z}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \frac{z + 1}{z(z - 1)}$, $z_0 = 1 + 3i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z)=\cos\frac{3z}{z-i}$ függvényt a $z_0=i$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z)=\frac{z^2+4}{\left(z^2+3z+2\right)^2}$;

b) $f(z)=z^3\operatorname{ch}\frac{2}{z}$!

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$\int\limits_{ABC}|z|dz$; ABC egy törtegyenes $z_A=0; z_B=-1+i; z_C=1+i$!

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int\limits_{|z|=1,5}\frac{z\,dz}{(z-1)^2(z+2)}$;

b) $\int\limits_{|z-1|=5} ctg\, z\,dz$!

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2-x+1)^2}$;
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+1)\cos x}{x^4+5x^2+6}dx$;
3. $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{7+4\sqrt{3}\sin x}$;
4. $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\cos x)^2}$!

6. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = 7+24i$ és $z_2 = 24-7i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $z_1 \cdot \bar{z}_2^2$, $\bar{z}_1 / z_2$, $\sqrt[4]{\bar{z}_1 - z_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = Arctgz$, $z_0 = 1$;

b) $f(z) = e^z$, $z_0 = -1 - \frac{2\pi}{3} i$.

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \cos iz$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = -4\mathrm{tg}t - i2\sec t$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} |z+i| \le 2, \\ |z-i| > 2. \end{cases}$;

b) $\left(z \cdot \bar{z}\right)^3 \le \left(z - \bar{z}\right)^2$!

6. feladat. Lehet e az $u = \frac{x}{x^2+y^2}$ függvény valós része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(1) = 1+i$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = \frac{1}{z}$ leképezés által, ha D: $\begin{cases} 0 \le \mathrm{Re}\, z \le 1; \\ 0 \le \mathrm{Im}\, z \le 2 \end{cases}$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{3z-36}{z^4+3z^3-18z^2}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \frac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0 = 2-i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z) = \sin\frac{5z}{z-2i}$ függvényt a $z_0 = 2i$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z)=\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}z}{z^4-1}$;

b) $f(z)=\left(z^2-2z+1\right)\operatorname{sh}\dfrac{2}{z-1}$!

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$\int\limits_{AB}(12z^5+4z^3+1)dz$; AB egy egyenes szakasza $z_A=1; z_B=1+i$!

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int\limits_{|z+2i|=2}\dfrac{e^z dz}{z^3(z+1)}$;

b) $\int\limits_{|z|=4}\dfrac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos z-1}dz$!

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)^2}$;
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x\sin\frac{x}{2}}{(x^2+1)(x^2+9)}dx$;
3. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{5-4\sin x}$;
4. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{(4+\cos x)^2}$!

7. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = 4 + 3i$ és $z_2 = 3 + 4i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $z_1^2 \cdot z_2$, $\bar{z}_2 / \bar{z}_1$, $\sqrt[5]{z_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = Arcshz$, $z_0 = i$;

b) $f(z) = \cos z$, $z_0 = -\frac{\pi}{2} i - \frac{3}{2}$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \mathrm{ch}\frac{z}{i}$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = 3\mathrm{cosec}t + i3\mathrm{ctg}t$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} |z - 1 - i| \le 1, \\ \mathrm{Im}\, z > 1, \\ \mathrm{Re}\, z \ge 1. \end{cases}$;

b) $\bar{z}^2 + z^2 \le 8 - 4(\mathrm{Im}\, z)^2$!

6. feladat. Lehet e az $v = e^{-y} \sin x + y$ függvény képzetes része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 1$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = z + \frac{2}{z}$ leképezés által, ha $D: |z| = 1$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{7z - 98}{2z^3 + 7z^2 - 49z}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \frac{z + 1}{z(z - 1)}$, $z_0 = -1 + 2i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z) = \sin\frac{3z-i}{3z+i}$ függvényt a $z_0 = -i/3$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z) = \dfrac{\sin z^3}{\left(z^2 - \frac{\pi}{8}z\right)^3}$;

b) $f(z) = z^3 e^{-\frac{1}{z_2}}$!

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$\int\limits_{AB} \bar{z}^2 dz$; AB egy egyenes szakasza $z_A = 0; z_B = 1 + i$!

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int\limits_{|z|=0,5} z^2 \sin\frac{1}{z} dz$;

b) $\int\limits_{|z-i|=1,5} \frac{dz}{(z^3+z)(z^2+4)}$!

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 10x^2 + 9}$;
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+3)\cos 2x}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$;
3. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{5 - 3\sin x}$;
4. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{(4 + 3\cos x)^2}$!

8. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = -4-4i$ és $z_2 = 2+3i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $\bar{z}_1 \cdot z_2^2$, z_2 / z_1, $\sqrt[3]{z_1 + 2z_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = \cos z$, $z_0 = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} i$;

b) $f(z) = Arcthz$, $z_0 = i$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \sin(z+i)$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = 4\text{cosec}t - i2\text{ctg}t$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} \left|z-\sqrt{2}\right| + \left|z+\sqrt{2}\right| > 4, \\ -\frac{\pi}{4} \le \arg(z-1) \le \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

b) $\begin{cases} |z-1| \le 1 + \operatorname{Re} z, \\ \operatorname{Re} z \le 5 ! \end{cases}$

6. feladat. Lehet e az $v = e^x \cos y$ függvény képzetes része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 1+i$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = z - \frac{1}{z}$ leképezés által, ha $D: |z| = 4$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{4z-64}{z^4 + 4z^3 - 32z^2}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \frac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0 = -2-3i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z)=z\cos\frac{1}{z-1}$ függvényt a $z_0=1$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z)=\frac{z^2+1}{(z-i)^2\left(z^2+4\right)}$;

б) $f(z)=\frac{\cos z}{z^3}$!

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$\int\limits_{ABC} z^3 e^{z^4}\,dz$; ABC törtegyenes $z_A=i; z_B=1; z_C=0$!

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int\limits_{|z-i|=3} \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}\,dz$;

b) $\int\limits_{|z|=1} z^3\cos\frac{2i}{z}\,dz$!

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2}$;
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^3-2)\cos\frac{x}{2}}{(x^2+1)(x^2+9)}dx$;
3. $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{8-3\sqrt{7}\sin x}$;
4. $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{(\sqrt{5}+\sqrt{3}\cos x)^2}$!

9. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ és $z_2 = \sqrt{8} - \sqrt{8}i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $z_1^2 \cdot \bar{z}_2$, $\bar{z}_2 / z_1$, $\sqrt{z_1 - z_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = shz$, $z_0 = 2 - \frac{\pi}{2} i$;

b) $f(z) = Lnz$, $z_0 = 2 - 2i$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \ln z^3$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = \mathrm{ctg}t - i2\mathrm{cosec}t$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} |z - 2 - i| \le 2, \\ \mathrm{Re}\, z \ge 3, \\ \mathrm{Im}\, z < 1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} z\bar{z} \ge \mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z, \\ |\mathrm{Im}\, z| < 2 \,! \end{cases}$

6. feladat. Lehet e az $v = -\frac{y}{(x+1)^2 + y^2}$ függvény képzetes része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 1$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = z - \frac{4}{z}$ leképezés által, ha $D: |z| = 4$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{9z - 162}{2z^3 + 9z^2 - 81z}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \frac{z+3}{z^2 - 1}$, $z_0 = 2 + i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z)=z\sin\frac{1}{z-1}$ függvényt a $z_0=1$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z)=\frac{1-\cos 2z}{z^2(z+3)}$;

b) $f(z)=\frac{1}{z}-e^{3/z}$!

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$\int\limits_{ABC} \operatorname{Re}\frac{\bar{z}}{z}dz$; $ABC:\{|z|=1, \operatorname{Im} z\geq 0\}$, BC egy szakasz $z_B=1, z_C=2$!

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int\limits_{|z|=\sqrt{3}} \frac{\sin \pi z}{z^2-z}dz$;

b) $\int\limits_{|z+i\sqrt{2}|=2} \frac{ze^{2z}}{z^4-+8z^2-9}dz$!

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+3)^2}dx$;
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^2-x)\sin x}{x^4+9x^2+20}dx$;
3. $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{9-4\sqrt{5}\sin x}$;
4. $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{(\sqrt{7}+2\cos x)^2}$!

10. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = 3+2i$ és $z_2 = -5+5i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $z_1 \cdot z_2^2$, $\bar{z}_2 / \bar{z}_1$, $\sqrt[4]{\bar{z}_1 - i}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = \sin z$, $z_0 = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} i$;

b) $f(z) = \ln z$, $z_0 = 2\sqrt{3} - 2i$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \operatorname{Arctg} z$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = -\operatorname{ctg} t + i3\operatorname{cosec} t$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} |z-1-i| \geq 1, \\ 0 \leq \operatorname{Re} z < 2, ; \\ 0 < \operatorname{Im} z \leq 2. \end{cases}$

b) $\begin{cases} \operatorname{Im} \frac{1}{z} < \frac{1}{4}, \\ |\arg(z+i)| \geq \frac{\pi}{3} ! \end{cases}$

6. feladat. Lehet e az $v = y - \frac{y}{x^2 + y^2}$ függvény képzetes része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(1) = 2$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = z + \frac{3}{z}$ leképezés által, ha $D: |z| = 3$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{5z - 100}{z^4 + 5z^3 - 50z^2}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z)=\dfrac{z+3}{z^2-1}$, $z_0=3-i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z)=(z-3)\cos\pi\dfrac{z-3}{z}$ függvényt a $z_0=0$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z)=\dfrac{(z+\pi i)^3}{\left(z^2+\pi^2\right)^3}$;

b) $f(z)=\dfrac{1}{z^2}+\sin\dfrac{1}{z^2}$!

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$\int\limits_{ABC}(z^2+\cos z)dz$; ABC törtegyenes $z_A=0; z_B=1; z_C=i$!

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int\limits_{|z+1|=4}\dfrac{zdz}{e^z+3}$;

b) $\int\limits_{|z|=1}\dfrac{z^2+\cos z}{z^3}dz$!

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{(x^2+2)(x^2+3)^2}$;
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x\cos x}{x^2-2x+17}dx$;
3. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{4-\sqrt{7}\sin x}$;
4. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{(4+\sqrt{7}\cos x)^2}$!

11. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = -3-4i$ és $z_2 = -3+4i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $(z_1 \cdot z_2)^2$, $\bar{z}_1 / z_2$, $\sqrt[5]{z_1 + z_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = chz$, $z_0 = -1 + \frac{\pi}{4} i$;

b) $f(z) = \ln z$, $z_0 = \frac{1+2i}{-1+2i}$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = e^{z^2/2}$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = 3\text{ch}2t + i2\text{sh}2t$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} |z+i| < 2, \\ 0 < \text{Re}\, z \le 1. \end{cases}$

b) $\text{Re}^4 z + 8\text{Im}^2 \bar{z} < 4z\bar{z}$!

6. feladat. Lehet e az $u = e^{-y} \cos x$ függvény valós része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 1$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = z + \frac{4}{z}$ leképezés által, ha $D: |z| = 2$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{11z - 242}{2z^3 + 11z^2 - 121z}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \frac{z+3}{z^2 - 1}$, $z_0 = -2 + 3i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z) = z^2 \sin \pi \frac{z+1}{z}$ függvényt a $z_0 = 0$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z) = \frac{\cos \pi z}{z^4 - 1}$;

b) $f(z) = \frac{\operatorname{ch}(z+i)}{(z+i)^3}$!

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$\int_L \frac{\bar{z}}{z} dz$; ahol L a $\{1 < |z| < 2, \operatorname{Re} z > 0\}$ tartomány határvonala!

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{|z-2|=2} \frac{z\, dz}{(z-1)^3 (z+2)}$;

b) $\int_{|z|=0,5} \frac{e^z - \sin z}{z^2} dz$!

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+1)^2}$;
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x - \sin x}{(x^2+4)^2} dx$;
3. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 - \sqrt{5} \sin x}$;
4. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(3 + \sqrt{5} \cos x)^2}$!

12. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$ és $z_2 = 3 - 3\sqrt{3}i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $\overline{z_1 \cdot z_2}$, z_1^2 / z_2, $\sqrt[3]{z_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = Arctgz$, $z_0 = 2i$;

b) $f(z) = e^z$, $z_0 = 2 + \frac{\pi}{3} i$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \operatorname{ch} 2iz$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = 2\operatorname{ch}3t - i3\operatorname{sh}3t$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} |z - i| \le 1, \\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

b) $4 + \operatorname{Re} z > \operatorname{Re}\left(\overline{z^{-2} + z}\right)$!

6. feladat. Lehet e az $u = y - 2xy$ függvény valós része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 0$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = \frac{2}{z}$ leképezés által, ha $D: |z + 1| = 1$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{6z - 144}{z^4 + 6z^3 - 72z^2}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \frac{z + 3}{z^2 - 1}$, $z_0 = -2 - 2i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z) = z\cos\frac{z}{z+2i}$ függvényt a $z_0 = -2i$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z) = \frac{\sin z}{\left(z^2 - \pi z\right)^3}$;

b) $f(z) = \frac{z^2}{e^{1/z}}$!

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$\int\limits_{ABC} (chz + \cos iz)dz$; ABC egy törtegyenes, $z_A = 0$, $z_B = -1$, $z_C = i$!

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int\limits_{|z|=0,5} \frac{dz}{(z-1)^2\left(z^2+1\right)}$;

b) $\int\limits_{|z-i|=2} \frac{1-\sin 1/z}{z}dz$!

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2}dx$;
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 5x}{(x^2+1)^2(x^2+4)}dx$;
3. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{3-2\sqrt{2}\sin x}$;
4. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{(3+2\sqrt{2}\cos x)^2}$!

13. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = 4 - 3i$ és $z_2 = 1 - 7i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $z_1^3 \cdot \bar{z}_2$, $\bar{z}_2 / z_1$, $\sqrt[3]{z_1 - z_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = \cos z$, $z_0 = -\frac{\pi}{2} i - \frac{3}{2}$;

b) $f(z) = \ln z$, $z_0 = -2 - 2i$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \sin z^2$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = 5\mathrm{sh}4t + i4\mathrm{ch}4t$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} |z+2| + |z-2| > 4\sqrt{2}, \\ 0 < \mathrm{Im}\, z < 2. \end{cases}$;

b) $4|z| - \mathrm{Re}\, z = 12$!

6. feladat. Lehet e az $v = x^2 - y^2 + 2x + 1$ függvény képzetes része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = i$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = z - \frac{3}{z}$ leképezés által, ha $D: |z| = 1$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \dfrac{13z - 338}{2z^3 + 13z^2 - 169z}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + 1}$, $z_0 = 2 + i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z) = \cos \dfrac{z^2 - 4z}{(z-2)^2}$ függvényt a $z_0 = 2$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z)=\dfrac{z^2+2iz-1}{z^2\left(z^2+1\right)}$;

b) $f(z)=\dfrac{\cos 2z}{z^4}$!

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$\int\limits_L |z|\bar{z}dz;\ L:\{|z|=4,\ \mathrm{Re}\, z\geq 0\}$!

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int\limits_{|z-i|=3} \dfrac{e^z dz}{z^2(z+9)}$;

b) $\int\limits_{|z+i|=1} \dfrac{\cos iz-1}{z^3}dz$!

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^2+1}{(x^2+4x+13)^2}dx$;
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^3\sin x}{(x^2+9)^2}dx$;
3. $\int\limits_{0}^{2\pi} \dfrac{dx}{4-2\sqrt{3}\sin x}$;
4. $\int\limits_{0}^{2\pi} \dfrac{dx}{(2\sqrt{2}+\sqrt{7}\cos x)^2}$!

14. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = -3+3i$ és $z_2 = 2+i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $z_1 \cdot z_2$, $z_1^2 / \bar{z}_2$, $\sqrt[5]{z_1 - \bar{z}_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = thz$, $z_0 = 1 - \frac{\pi}{2} i$;

b) $f(z) = Lnz$, $z_0 = \frac{2+i}{2-i}$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \mathrm{Arctg}(z+i)$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = -4\mathrm{sh}5t - i5\mathrm{ch}5t$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} |z+i| > 1, \\ -\frac{\pi}{4} \le \arg z < 0. \end{cases}$;

b) $|z-2| = |1-2\bar{z}|$!

6. feladat. Lehet e az $u = x^2 - y^2 - 2x + 1$ függvény valós része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 1$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = z - \frac{2}{z}$ leképezés által, ha $D: |z| = 3$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{7z - 196}{z^4 + 7z^3 - 98z^2}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$, $z_0 = 1 - 2i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z)=\sin\frac{z+i}{z-i}$ függvényt a $z_0=i$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z)=\frac{\operatorname{ctg} z}{16z^2-\pi^2}$;

b) $f(z)=z^5\sin\frac{1}{z^2}$!

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$$\int_L (chz+\bar{z})dz;\ L:\{|z|=1,\ \operatorname{Im} z\le 0\}!$$

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int\limits_{|z-2,5|=1}\frac{dz}{(z-0,5)(z-3)^2}$;

b) $\int\limits_{|z|=2}\frac{z-\sin z}{z^4}dz$!

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+5)^2}dx$;
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}dx$;
3. $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{5-\sqrt{21}\sin x}$;
4. $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{(\sqrt{6}+\cos x)^2}$!

15. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = 3+3i$ és $z_2 = 4-3i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $z_1 \cdot \bar{z}_2$, $\left(z_1 / z_2 \right)^2$, $\sqrt[4]{z_1 + \bar{z}_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = shz$, $z_0 = 1 + \frac{\pi}{2} i$;

b) $f(z) = Arctgz$, $z_0 = \frac{3+4i}{5}$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = 2^z$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = \frac{2}{\mathrm{ch}2t} + i4\mathrm{th}2t$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} |z+1| \geq 1, \\ |z+i| < 1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} |z-1| \leq 1 + \mathrm{Re}\, z, \\ |z+1| + |z-1| > 2\sqrt{2} \end{cases}$!

6. feladat. Lehet e az $v = 3x^2 y - y^3 - y$ függvény képzetes része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 0$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = z + \frac{1}{z}$ leképezés által, ha $D: |z| = 1$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{15z - 450}{2z^3 + 15z^2 - 225z}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$, $z_0 = -3 + i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z)=\sin\frac{z}{z-3}$ függvényt a $z_0=3$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z)=\frac{\sin^3 z}{\left(z^2-z\right)^3}$;

b) $f(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}-e^{1/z}$!

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$$\int_L |z|\operatorname{Re} z^2 dz;\ L:\{|z|=R,\ \operatorname{Im} z\geq 0\}!$$

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int\limits_{|z|=2}\frac{z+1}{e^z+3}dz$;

b) $\int\limits_{|z+1|=1,5}\frac{z^5-3z^3+5z}{z^4}dz$!

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}$;
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{(x^2+1)^2}dx$;
3. $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{6-4\sqrt{2}\sin x}$;
4. $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{(\sqrt{6}+\sqrt{5}\cos x)^2}$!

16. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = 2-2\sqrt{3}i$ és $z_2 = \sqrt{3}+2i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $z_1 \cdot z_2^2$, $z_2 / \bar{z}_1$, $\sqrt[5]{\bar{z}_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = \cos z$, $z_0 = \frac{\pi}{3}i + 3$;

b) $f(z) = Arch z$, $z_0 = -2$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \ln\left(\frac{z}{i}\right)$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = \frac{4}{\mathrm{ch}4t} + i2\mathrm{th}4t$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} |z| < 2, \\ -\frac{\pi}{6} \le \arg(z-1) \le \frac{\pi}{6}. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 0 \le 1 + \mathrm{Im}\, z < |z-i|, \\ -2 < \mathrm{Re}\, z \le 2 \,! \end{cases}$

6. feladat. Lehet e az $v = 2xy + y$ függvény képzetes része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 0$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = \frac{1}{z}$ leképezés által, ha $D: \left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{8z - 256}{z^4 + 8z^3 - 128z^2}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$, $z_0 = -3 - 2i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z)=\operatorname{zsh}\frac{1}{z-2}$ függvényt a $z_0=2$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z)=\frac{\cos z}{\left(4z^2-\pi^2\right)^2}$;

b) $f(z)=\frac{e^{2z+i}}{2z+i}$!

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$$\int_{AB}(3z^2+2z)dz \quad AB:\{y=x^2; z_A=0; z_B=1+i\}!$$

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int\limits_{|z-2|=1,5}\frac{dz}{(z-1)(z-2)^2}$;

b) $\int\limits_{|z|=1}\frac{z^2e^{1/z^2}dz}{z}$!

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+5}{x^4+5x^2+6}dx$;
2. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos 2x}{(x^2+\frac{1}{4})^2}dx$;
3. $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{8-2\sqrt{15}\sin x}$;
4. $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{(\sqrt{7}+\sqrt{5}\cos x)^2}$!

17. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = 1 + i$ és $z_2 = 3 - i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $\overline{(z_1 \cdot z_2)}^2$, $z_1 / \overline{z_2}$, $\sqrt[5]{z_1 - z_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = Lnz,\ z_0 = -1 + i$;

b) $f(z) = Arc\cos z$, $z_0 = -5$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \mathrm{cth}(zi)$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = \mathrm{th}5t + \dfrac{5i}{\mathrm{ch}5t}$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} |z| \le 1, \\ |\arg(z+i)| > \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

b) $\begin{cases} \mathrm{Im}\, z > |z| - 3, \\ \mathrm{Im}\, z \le 3 - |z| \,! \end{cases}$

6. feladat. Lehet e az $v = 3x^2 y - y^3$ függvény képzetes része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 1$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = z + \dfrac{2}{z}$ leképezés által, ha D: $|z| = 3$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \dfrac{z+2}{z + z^2 - 2z^3}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = 4 \cdot \dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)}$, $z_0 = -2 + 2i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z)=e^{\frac{z}{z-3}}$ függvényt a $z_0=3$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z)=\dfrac{(z-3)^2}{\left(z^2-5z+6\right)^2}$;

b) $f(z)=z^3\cos\dfrac{4-2\pi z}{4z}$!

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$$\int_L z\,\mathrm{Re}\,z^2\,dz;\ L:\{|z|=R,\ \mathrm{Im}\,z\geq 0\}\ !$$

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\displaystyle\int_{|z+2|=3}\frac{e^z\,dz}{z^2\left(z^2-9\right)}$;

b) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{e^{2z}-z}{z^2}\,dz$!

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}$;
2. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)^3}dx$;
3. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\frac{dx}{\sqrt{3}\sin x-2}$;
4. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\frac{dx}{(\sqrt{2}+\cos x)^2}$!

18. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = 5-6i$ és $z_2 = -2+2i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $\bar{z}_1 \cdot z_2^2$, $\bar{z}_1 / z_2$, $\sqrt[3]{z_1 + z_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = e^z$, $z_0 = 1 + \frac{\pi}{3} i$;

b) $f(z) = chz$, $z_0 = 2 + \frac{\pi}{2} i$.

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \sin^2 z$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = \frac{1}{\mathrm{sh}t} - i\mathrm{cth}t$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} 1 < |z-1| \le 2, \\ \mathrm{Im}\, z \ge 0, \\ \mathrm{Re}\, z < 1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} |\arg z| < \frac{\pi}{2}, \\ \left|\bar{z}^2 - 3\right| \le 3\,! \end{cases}$

6. feladat. Lehet e az $u = e^x(x\cos y - y\sin y)$ függvény valós része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 0$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = z - \frac{1}{z}$ leképezés által, ha $D: |z| = 2$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{z+4}{2z^2 + z^3 - z^4}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z)=4\cdot\dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)}$, $z_0=1-3i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z)=\sin\dfrac{2z}{z-4}$ függvényt a $z_0=4$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z^3+2z^2}$;

b) $f(z)=\dfrac{3}{z^4e^z}$!

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$\int\limits_{ABC}(z^2+1)dz$; ABC egy törtegyenes $z_A=0; z_B=-1+i; z_C=i$!

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int\limits_{|z|=3}\dfrac{z+1}{z^2+4}dz$;

b) $\int\limits_{|z-0,5|=1} z\,tg\,2z\,dz$.

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x^2+3}{(x^2-10x+29)^2}dx$;
2. $\int\limits_{0}^{\infty}\dfrac{\cos x}{(x^2+9)(x^2+16)}dx$;
3. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{\sqrt{15}\sin x-4}$;
4. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{(\sqrt{5}+2\cos x)^2}$!

19. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = 4-4i$ és $z_2 = 3+2i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $z_1^2 \cdot \bar{z}_2$, z_1 / z_2, $\sqrt[4]{z_1}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = \sin z$, $z_0 = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} i$;

b) $f(z) = \ln z$, $z_0 = 1+i$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \cos^2(zi)$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = 2e^{it} + \frac{1}{2e^{it}}$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} 1 \le |z-i| < 2, \\ \operatorname{Re} z \le 0, \\ \operatorname{Im} z > 1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} |z+\bar{z}| \ge 2 \operatorname{Im} \bar{z}^2, \\ \frac{\pi}{6} \le \arg z < \frac{\pi}{2} ! \end{cases}$

6. feladat. Lehet e az $v = 2xy + 2x$ függvény képzetes része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 0$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = \frac{1}{z}$ leképezés által, ha D: $\begin{cases} |z| \ge 1; \\ \operatorname{Re} z \le 0; \\ \operatorname{Im} z \le 0 ! \end{cases}$

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z)=\dfrac{3z+18}{9z+3z^2-2z^3}$, $z_0=0$;

b) $f(z)=4\cdot\dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)}$, $z_0=-3-i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z)=\cos\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$ függvényt a $z_0=2$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z)=\dfrac{\operatorname{sh}z}{\left(z^2+\pi^2\right)^2}$;

b) $f(z)=\dfrac{e^{2z}-3}{z^3}$!

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$\int\limits_{AB} e^{|z|^2}\operatorname{Im}z\,dz$; AB egy egyenes szakasza $z_A=1+i; z_B=0$!

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\displaystyle\int\limits_{|z-\pi i|=\pi}\frac{\operatorname{ch}z\;dz}{\left(z^2+\pi^2\right)^2}$;

b) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4}\frac{e^{1/z}+1}{z}dz$!

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+5)^2}$;
2. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx$;
3. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{2\sqrt{6}\sin x-5}$;
4. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{(3+\cos x)^2}$!

20. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = \sqrt{3}+3i$ és $z_2 = 1+\sqrt{3}i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $z_1 \cdot \bar{z}_2$, $\left(z_2/z_1\right)^2$, $\sqrt[5]{\bar{z}_1}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = shz$, $z_0 = 2+\frac{\pi}{4}i$;

b) $f(z) = Arc\sin z$, $z_0 = \frac{-3+i}{4}$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = e^{iz/2}$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = 3e^{it} - \frac{1}{2e^{it}}$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} |z| < 2, \\ \operatorname{Re} z \geq 1, \\ |\arg z| < \frac{\pi}{6}. \end{cases}$;

b) $\operatorname{Re}\left(z^2 + \bar{z}^2\right) > 4\operatorname{Re} z - 2\operatorname{Im} z$!

6. feladat. Lehet e az $u = 1 - \sin y \cdot e^x$ függvény valós része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 1+i$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = \frac{1}{z}$ leképezés által, ha D: $\begin{cases} |z| \leq 1; \\ \operatorname{Re} z \geq 0; \\ \operatorname{Im} z \leq 0 \,! \end{cases}$

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z)=\dfrac{2z+16}{8z^2+2z^3-z^4}$, $z_0=0$;

b) $f(z)=4\cdot\dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)}$, $z_0=-2+i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z)=\mathrm{ch}\dfrac{4z-2z^2}{(z-1)^2}$ függvényt a $z_0=1$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z)=\dfrac{\left(z^2+9\right)^2}{(z-3i)^2\left(z^2+4\right)}$;

b) $f(z)=\dfrac{\mathrm{sh}3z\text{-}1}{z^2}$!

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$\int\limits_L (\sin iz+z)dz;\ L:\{|z|=1,\ \mathrm{Re}\,z\geq 0\}$!

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int\limits_{|z-i|=1}\dfrac{e^z dz}{z^4+2z^2+1}$;

b) $\int\limits_{|z|=1} z\sin\dfrac{1}{z^2}dz$!

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{x^4+7x^2+12}$;
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx$;
3. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{\sqrt{35}\sin x-6}$;
4. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{(\sqrt{7}+\sqrt{2}\cos x)^2}$!

21. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = \sqrt{3} + i$ és $z_2 = 2\sqrt{3} + 2i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $z_1^2 \cdot \bar{z}_2$, $z_2 / \bar{z}_1$, $\sqrt[4]{z_2 - z_1}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = \cos z$, $z_0 = \frac{\pi}{6} i + 2$;

b) $f(z) = Arch z$, $z_0 = 3i$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = 2i \ln z$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = -2e^{it} + \frac{1}{e^{it}}$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} 1 < |z-1| \le 2, \\ \operatorname{Im} z \ge 0, \\ \operatorname{Re} z < 1. \end{cases}$

b) $\operatorname{Im}\left(\overline{z^2 - \bar{z}}\right) \le 2 - \operatorname{Im} z$!

6. feladat. Lehet e az $v = \frac{e^{2x} - 1}{e^x} \sin y$ függvény képzetes része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 2$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = \frac{1}{z}$ leképezés által, ha $D: \begin{cases} |z| \le 1; \\ \operatorname{Re} z \le 0; \\ \operatorname{Im} z \ge 0 \,! \end{cases}$

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{5z + 50}{25z + 5z^2 - 2z^3}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z)=4\cdot\dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)}$, $z_0=-1-2i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z)=ze^{\frac{z}{(z-3i)^2}}$ függvényt a $z_0=3i$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z)=\dfrac{\sin^2 \pi z}{\left(z^2-\pi^2\right)^2}$;

b) $f(z)=\dfrac{\operatorname{ch} z}{z^4}$!

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$\int\limits_{AB} z\operatorname{Re} z^2 dz$ AB egy egyenes szakasza $z_A=0; z_B=1+2i$!

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int\limits_{|z|=4}\dfrac{e^{iz}dz}{(z-\pi)^3}$;

b) $\int\limits_{|z+i|=1}\dfrac{\cos z+z}{z^2}dz$!

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x^2+4}{(x^2+9)^2}dx$;
2. $\int\limits_{0}^{\infty}\dfrac{x\sin\frac{x}{2}}{x^2+4}dx$;
3. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{4\sqrt{3}\sin x-7}$;
4. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{(\sqrt{3}+\cos x)^2}$!

22. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = -4+3i$ és $z_2 = 3-4i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $\left(\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2\right)^2$, z_2/z_1, $\sqrt[5]{z_1+z_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = Lnz,\ z_0 = 1-i$;

b) $f(z) = Arctgz$, $z_0 = -\dfrac{i}{3}$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \operatorname{sh}(i-z)$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = 2e^{2it} - \dfrac{1}{e^{2it}}$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} |z-1| > 1, \\ 0 \le \operatorname{Re} z < 3, \\ -1 \le \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$

b) $\left|1 - \dfrac{\bar{z}}{4}\right| \ge |z - 0{,}25|$!

6. feladat. Lehet e az $v = 1 - \dfrac{y}{x^2+y^2}$ függvény képzetes része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(1) = 1+i$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = \dfrac{1}{z}$ leképezés által, ha $D: \begin{cases} -4 \le \operatorname{Re} z \le 4\,; \\ 0 \le \operatorname{Im} z \le 8\,! \end{cases}$

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \dfrac{3z+36}{18z^2+3z^3-z^4}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z)=4\cdot\dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)}$, $z_0=3+i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z)=z\operatorname{sh}\dfrac{\pi z}{z-\pi}$ függvényt a $z_0=\pi$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z)=\dfrac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}$;

b) $f(z)=\dfrac{2}{z}+\sin\dfrac{2}{z}$!

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$\int\limits_{AB}(2x+1)dz \quad AB:\{y=x^3; z_A=0; z_B=1+i\}$!

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int\limits_{|z+3|=2}\dfrac{\cos z/2}{z^2-4}dz$;

b) $\int\limits_{|z|=1}\dfrac{ze^z-z-1}{z^3}dz$!

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{(x^2+1)^5}$;
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sin 2x}{(x^2-x+1)^2}dx$;
3. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{4\sin x+5}$;
4. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{(2+\sqrt{3}\cos x)^2}$!

23. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = -2-2i$ és $z_2 = 1+3i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $\bar{z}_1 \cdot z_2$, $\bar{z}_1 / z_2$, $\sqrt[4]{z_2^3}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = tgz$, $z_0 = \frac{\pi}{3} + i$;

b) $f(z) = e^z$, $z_0 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} i$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \mathrm{Arctg}(iz)$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = \frac{1+t}{1-t} + i\frac{2+t}{2-t}$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} |z+i| < 1, \\ -\frac{3\pi}{4} \le \arg z \le -\frac{\pi}{4}. \end{cases}$

b) $\begin{cases} |z| - 2 \le \mathrm{Re}\, z, \\ 2 - |z| > \mathrm{Re}\, z\,! \end{cases}$

6. feladat. Lehet e az $u = e^{-y}\cos x + x$ függvény valós része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 1$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = \frac{1}{z}$ leképezés által, ha $D: \begin{cases} -1 \le \mathrm{Re}\, z \le 1; \\ -2 \le \mathrm{Im}\, z \le 0\,! \end{cases}$

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{7z+98}{49z + 7z^2 - 2z^3}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z)=4\cdot\dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)}$, $z_0=2-2i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z)=z\sin\pi\dfrac{z+2}{z}$ függvényt a $z_0=0$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z)=\dfrac{z^2-4}{z^6+4z^5+4z^4}$;

b) $f(z)=\cos\dfrac{1}{z}-\sin\dfrac{2-\pi z}{2z}$!

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$\int\limits_{ABC} z\bar{z}dz$ $AB:\{|z|=1;\operatorname{Re}z\geq 0;\operatorname{Im}z\geq 0\}$ BC egy $z_B=1, z_C=0$!

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int\limits_{|z|=4}\dfrac{e^{iz}dz}{(z-\pi)^3}$;

b) $\int\limits_{|z|=1}\dfrac{z^2+chz}{z^3}dz$!

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{(x^2+2)^2(x^2+10)^2}$;
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sin 2x}{(x^2+x+1)^2}dx$;
3. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{3\sin x+5}$;
4. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{(\sqrt{13}+2\sqrt{3}\cos x)^2}$!

24. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = 3 - 2i$ és $z_2 = 1 - i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $\overline{(z_1 \cdot z_2)}^2$, $z_1 / \overline{z_2}$, $\sqrt[3]{z_1 + z_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = \sin z$, $z_0 = \frac{\pi}{2} - 5i$;

b) $f(z) = Lnz$, $z_0 = -1 - i$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \operatorname{ch}^2(iz)$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = \frac{t - 1 + it}{t(t-1)}$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} |z+1| < 1, \\ |z-i| \le 1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} |z+i| < 1 + \operatorname{Im} z, \\ 0 < \arg(z+i) \le \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{Im} z \le 2 \,! \end{cases}$

6. feladat. Lehet e az $v = e^{-y} \sin x$ függvény képzetes része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 1$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = \frac{1}{z}$ leképezés által, ha D: $\begin{cases} -1 \le \operatorname{Re} z \le 1; \\ 0 \le \operatorname{Im} z \le 4 \,! \end{cases}$

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{4z + 64}{32z^2 + 4z^3 - z^4}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z)=4\cdot\dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)}$, $z_0=-2-i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z)=z\cos\pi\dfrac{z+3}{z-1}$ függvényt a $z_0=1$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z)=\dfrac{\mathrm{ch}z}{\left(z^2+\pi^2\right)^3}$;

b) $f(z)=3z\cos\dfrac{5}{z}$!

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$$\int_L(\cos iz+3z^2)dz;\ L:\{|z|=1,\ \mathrm{Im}\,z\geq 0\}\ !$$

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\displaystyle\int_{|z-1|=\sqrt{2}}\frac{\sin\pi z}{\left(z^2-1\right)^2}dz$;

b) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{e^{iz}-1}{z^3}dz$!

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+8x+17)^2}$;
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^3+5x)\sin x}{x^4+10x^2+9}dx$;
3. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{3\sqrt{7}\sin x+8}$;
4. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(2+\cos x)^2}$!

25. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = 5 - 5i$ és $z_2 = 2 - i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $\bar{z}_1 \cdot z_2^2$, $\bar{z}_2 / \bar{z}_1$, $\sqrt[5]{\overline{z_1 - z_2}}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = Arc\cos z$, $z_0 = -3i$;

b) $f(z) = e^z$, $z_0 = \frac{3\pi}{4} i + 2$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \mathrm{th}(iz)$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = \frac{1+i}{1-i} + \frac{t}{1-t}(2-4i)$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} |z+1| - |z-1| > 4, \\ \mathrm{Re}\, z \le 5. \end{cases}$

b) $\begin{cases} \mathrm{Re}\, z < \sqrt{(\mathrm{Im}\, z)^2 + 1}, \\ |\arg z| \le \frac{\pi}{4} \end{cases}$!

6. feladat. Lehet e az $v = 2xy + x$ függvény képzetes része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 0$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = z - \frac{4}{z}$ leképezés által, ha $D: |z| = 5$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{9z + 162}{81z + 9z^2 - 2z^3}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \frac{2z}{z^2 + 4}$, $z_0 = -1 - 3i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z)=z^2\sin\frac{z+3}{z}$ függvényt a $z_0=0$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z)=\frac{\cos z}{\left(z^2-\pi^2\right)^3}$;

b) $f(z)=(z-1)\operatorname{ch}\frac{3}{z}$!

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$\int_L |z|dz;\ L:\{|z|=\sqrt{2},\ 3\pi/4\le \arg z\le 5\pi/4\}$!

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{|z|=4}\frac{(z+1)dz}{z^2+2z-3}$;

b) $\int_{|z-i|=2}\frac{z-\sin z}{2z^4}dz$!

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+10}{(x^2+4)^2}dx$;
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\cos x}{x^4+10x^2+9}dx$;
3. $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{4\sqrt{5}\sin x+9}$;
4. $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(3+2\cos x)^2}$!

26. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = \sqrt{3} - i$ és $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $(z_1 \cdot z_2)^2$, z_1 / z_2, $\sqrt[4]{\bar{z}_1}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = \cos z$, $z_0 = \frac{\pi}{4} i + 1$;

b) $f(z) = Arctgz$, $z_0 = 2 - i$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \cos(2iz)$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = \frac{2+t}{2-t} + i\frac{1+t}{1-t}$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} |z - 1 + i| \geq 1, \\ \operatorname{Re} z < 1, \\ \operatorname{Im} z \leq -1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} |z - 2| \geq |z + 2i|, \\ |z + 3| < |z - 5| \end{cases}$!

6. feladat. Lehet e az $u = \frac{x}{(x^2 + y^2)} + x$ függvény valós része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(1) = 2$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = z + \frac{3}{z}$ leképezés által, ha $D: |z| = 5$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{5z + 100}{50z^2 + 5z^3 - z^4}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z)=\dfrac{2z}{z^2+4}$, $z_0=-3+2i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z)=z\sin\dfrac{z^2-2z}{(z-1)^2}$ függvényt a $z_0=1$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z)=\dfrac{\sin z}{\left(z^2-\pi^2\right)^2}$;

b) $f(z)=\dfrac{\operatorname{sh}(2z)}{z^2}$!

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$\int\limits_{ABC}(z^9+1)dz$; ABC egy törtegyenes $z_A=0; z_B=1+i; z_C=i$!

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int\limits_{|z-1|=3}\dfrac{\sin z}{(z-\pi)^5}dz$;

b) $\oint\limits_{|z|=4}\dfrac{e^{2z}+3z}{z^2}dz$!

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{(x^2+1)^4}$;
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{(x^3+1)\cos x}{x^4+5x^2+4}dx$;
3. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{\sqrt{7}\sin x+4}$;
4. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{(2+\cos x)^2}$!

27. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = 2+5i$ és $z_2 = -3-4i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $z_1^3 \cdot \bar{z}_2$, $\bar{z}_1 / z_2$, $\sqrt[3]{z_1 - \bar{z}_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = shz$, $z_0 = 1 - \frac{\pi}{3} i$;

b) $f(z) = Lnz$, $z_0 = \sqrt{3} + i$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \sin^2(2iz)$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = t^2 - 2 + i(t^2 - 4t + 5)$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} -\frac{5\pi}{6} \le \arg z \le -\frac{\pi}{6}, \\ \frac{\pi}{4} \le \arg(z+2i) \le \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$;

b) $\mathrm{Re}(z+1) = |z|$!

6. feladat. Lehet e az $v = x^2 - y^2 - x$ függvény képzetes része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 0$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = z - \frac{3}{z}$ leképezés által, ha $D: |z| = 4$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{11z + 242}{121z + 11z^2 - 2z^3}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \frac{2z}{z^2 + 4}$, $z_0 = 2 + 3i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z)=z\cos\frac{z}{z-3}$ függvényt a $z_0=3$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z)=\frac{\operatorname{tg} z}{z^2-\frac{\pi}{4}z}$;

b) $f(z)=\frac{1}{z^2}+\cos\frac{1}{z}$!

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$\int\limits_{ABC}(\sin z+z^5)dz$; ABC egy törtegyenes $z_A=0; z_B=1; z_C=2i$!

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int\limits_{|z+i|=1}\frac{dz}{\left(z^2+1\right)^2}$;

b) $\int\limits_{|z|=1} z^2\sin\frac{i}{z^2}dz$!

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+15)^2}$;
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^3+1)\sin x}{x^4+5x^2+4}dx$;
3. $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{\sqrt{5}\sin x+3}$;
4. $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{(\sqrt{10}+3\cos x)^2}$!

28. Változat

1. feladat.

a) Határozza meg a $z_1 = 2\sqrt{3} + 2i$ és $z_2 = 3 + 3\sqrt{3}i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $z_1 \cdot \bar{z}_2$, z_1^2 / z_2, $\sqrt[5]{\bar{z}_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = tgz$, $z_0 = \frac{\pi}{2} + i$;

b) $f(z) = Arcshz$, $z_0 = -4i$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = ie^{z^2}$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = t^2 + 2t + 5 + i\left(t^2 + 2t + 1\right)$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} |\mathrm{Re}\, z| \geq 2, \\ |\mathrm{Im}\, z| < 3. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2 \geq \left|2 - z^2\right|, \\ |\mathrm{Re}\, z| < 1 ! \end{cases}$

6. feladat. Lehet e az $u = -2xy - 2y$ függvény valós része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = i$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = z - \frac{2}{z}$ leképezés által, ha $D: |z| = 2$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \dfrac{6z + 144}{72z^2 + 6z^3 - z^4}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \dfrac{2z}{z^2 + 4}$, $z_0 = 3 + 2i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z)=z\sin\pi\dfrac{z-1}{z-2}$ függvényt a $z_0=2$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z)=\dfrac{z^2+4}{z^5+4iz^4-4z^3}$;

b) $f(z)=\dfrac{e^{z+e}}{z+e}$!

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$\int\limits_{AB} z\,\mathrm{Im}\,z^2 dz$ AB egy egyenes szakasza $z_A=0; z_B=1+i$!

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int\limits_{|z+1|=1} \dfrac{2+3z^3-5z^4}{z^5}dz$;

b) $\int\limits_{|z|=1} \dfrac{shz-z^2}{z^3}dz$!

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^2+2}{x^4+7x^2+12}dx$;
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\cos 2x-\cos x}{(x^2+1)^3}dx$;
3. $\int\limits_{0}^{2\pi} \dfrac{dx}{2\sqrt{2}\sin x+3}$;
4. $\int\limits_{0}^{2\pi} \dfrac{dx}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}\cos x)^2}$!

29. Változat

1. feladat.

a) Határozza meg a $z_1 = 5-3i$ és $z_2 = -2+i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $z_1^2 \cdot z_2$, $\bar{z}_2 / \bar{z}_1$, $\sqrt[4]{z_1 - \bar{z}_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = \sin z$, $z_0 = \dfrac{3\pi}{2} + i$;

b) $f(z) = \ln z$, $z_0 = 1+\sqrt{3}i$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \ln\left(z^2 - i\right)$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = 2t^2 + 2t + 1 - i\left(t^2 + t + 4\right)$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} |z-1-i| \geq 2, \\ \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 2. \end{cases}$

b) $\begin{cases} |3i+z| \leq |3-z|, \\ |\arg z| < \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$!

6. feladat. Lehet e az $v = 2xy - 2y$ függvény képzetes része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 1$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = z + \dfrac{1}{z}$ leképezés által, ha $D: |z| = 5$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \dfrac{13z + 338}{169z + 13z^2 - 2z^3}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \dfrac{2z}{z^2 - 4}$, $z_0 = -1 + 3i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z)=ze^{\frac{z}{z-4}}$ függvényt a $z_0=4$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z)=\dfrac{e^z}{\left(z^2+\pi^2\right)^2}$;

b) $f(z)=z^4\cos\dfrac{2-\pi z}{2z}$!

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$\int\limits_L (z^3+\sin z)dz;\ L:\{|z|=1,\ \operatorname{Re} z\geq 0\}$!

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int\limits_{|z+i|=2}\dfrac{\sin z}{z^2\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}dz$;

b) $\int\limits_{|z+i|=2}(z+1)e^{\frac{1}{z}}dz$!

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{(x^2-10x+29)^2}$;
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{(x^2+x)\sin x}{x^4+13x^2+36}dx$;
3. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{2\sqrt{3}\sin x+4}$;
4. $\int\limits_{0}^{2\pi}\dfrac{dx}{(\sqrt{7}+\sqrt{3}\cos x)^2}$!

30. Változat

1. feladat.

a) Határozza meg a $z_1 = 5 + 6i$ és $z_2 = 1 - 3i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $z_1 \cdot \bar{z}_2^2$, $z_1 / \bar{z}_2$, $\sqrt[3]{z_2 - \bar{z}_1}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = chz$, $z_0 = 2 - \pi i$;

b) $f(z) = Arctgz$, $z_0 = 2 + i$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \mathrm{th}\left(\frac{z}{i}\right)$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = t^2 - 2t + 3 + i\left(t^2 - 2t + 1\right)$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} \left|\dfrac{z + 2i}{3 - 4i}\right| \le 1, \\ |\arg z| < \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

b) $2z\bar{z} + (z + i)z + (2 - i)\bar{z} < 2$!

6. feladat. Lehet e az $u = x^3 - 3xy^2 - x$ függvény valós része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 0$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = z + \frac{4}{z}$ leképezés által, ha $D: |z| = 5$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \dfrac{7z + 196}{98z^2 + 7z^3 - z^4}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \dfrac{2z}{z^2 - 4}$, $z_0 = 2 + 2i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z)=z\cos\frac{z}{z-5}$ függvényt a $z_0=5$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z)=\frac{\sin^2 z}{z^3-z^5}$;

b) $f(z)=(z-2)\operatorname{sh}\frac{1}{z}$!

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$\int\limits_L z|z|dz;\ L:\{|z|=1,\ \operatorname{Im} z\geq 0\}$!

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int\limits_{|z|=1}\frac{ctg\ z}{4z-\pi}dz$;

b) $\int\limits_{|z|=1} z^3\sin\frac{1}{z}dz$!

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+11)^2}dx$;
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^2+x)\cos x}{x^4+13x^2+36}dx$;
3. $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{\sqrt{21}\sin x+5}$;
4. $\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{(\sqrt{7}+\cos x)^2}$!

Irodalom

1. *Halász Gábor*. Bevezető komplex függvénytanba . − Budapest: ELTE Eötvös Kiadó Kft., 2002.
2. *B.A.Fuksz, B.V. Sabat* Komplex változós függvények és néhány alkalmazásuk. −Budapest: Tankönyvkiadó, 1976 .
3. *Мартиненко, М. А.* Теорія функції комплексної змінної. Операційне числення : навч. посіб. */ М. А. Мартиненко, І. І. Юрик.* - К.: Видавничий дім «Слово», 2013. - 296 с.
4. *Долженко Є. П., Єрмаков А. І.* Теорія функції комплексної змінної та деякі її застосування: Навчальний посібник. Луганськ: Вид-во СНУ ім. В. Даля, 2003.
5. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. − М: Наука. 1987.
6. *Костина Е.В., Морозова Е.А., Плаксина В.П., Федосеева О.А.* Элементы теории функций комплексного переменного. Индивидуальные задания. ПГТУ. 2007.
7. *Свешников А.Г., Тихонов А.Н.* Теория функций комплексной переменной. − М: Наука. 1979.
8. *Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. − М: Наука. 1982.
9. *Евграфов М.А., Бежанов К.А., Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И.* Сборник задач по теории аналитических функций. − М: Наука. 1972.
10. *Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного. − М: Наука. 1970.