ЗАКАРПАТСЬКИЙ УГОРСЬКИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ФЕРЕНЦА РАКОЦІ II
II. RÁKÓCZI FERENC KÁRPÁTALJAI MAGYAR FŐISKOLA

Кафедра математики та інформатики
Matematika és Informatika Tanszék

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ ЧАСТИНА I./ MÓDSZERTANI ÚTMUTATÓ ELEMI MATEMATIKÁHOZ I. RÉSZ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ / MÓDSZERTANI ÚTMUTATÓ
до практичних (семінарських) занять / gyakorlati (szemináriumi) foglalkozásokhoz

Елементарна математика / Elemi matematika
(назва навчальної дисципліни / a tantárgy neve)

Перший (бакалаврський) / Alapképzés (BSc)
(ступінь вищої освіти / felsőoktatás szintje)

01 Освіта/Педагогіка / 01 Oktatás/Pedagógia
(галузь знань / képzési ág)

Середня освіта (Математика) / Középiskolai oktatás (Matematika)
(освітня програма / képzési program)

Берегове / Beregszász
2022 р. / 2022

Методичні вказівки «Методичні вказівки до елементарної математики частина I. / Módszertani útmutató elemi matematikához I. rész» призначаються для більш ефективної організації роботи на практичних заняттях з дисципліни «Елементарна математика» здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти, другого курсу денної та заочної форми навчання, які навчаються на спеціальності(спеціалізації) «014 Середня освіта (Математика)». Основна мета методичному вказівнику – це підвищити загальну математичну культуру студентів, навчити їх розв'язувати завдання шкільного курсу математики поглибленого і підвищеного рівнів; поглибити, систематизувати знання, отримані в школі; розвинути творчий підхід до розв'язання нестандартних завдань.

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II
(протокол № 1 від «26» серпня 2022 року)

Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості вищої освіти
Закарпатського угорського інституту ім. Ф. Ракоці II
(протокол № 1 від «10» жовтня 2022 року)

Рекомендовано до видання в електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту ім. Ф. Ракоці II
(протокол № 7 від «13» жовтня 2022 року)

Підготовлено до видання в електронній формі (PDF) кафедрою математики та інформатики спільно з Видавничим відділом Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Розробники методичних вказівок:

Дезидер ПОЛЛОЇ – старший викладач кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Адам ДОРОВЦІ – асистент кафедри математики та інформатики туризму Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Рецензенти:

Марія БОРТОШ – кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри алгебри та диференціальних рівнянь Ужгородського Національного Університету

Каталін КУЧІНКА – кандидат фіз.-мат. наук, завідувач кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Відповідальні за випуск:

Мирослав СТОЙКА – доцент; Кандидат фізико-математичних наук, доцент Кафедра математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II

Олександр ДОБОШ – начальник Видавничого відділу ЗУІ ім. Ф.Ракоці II

За зміст методичних вказівок відповідальність несуть розробники.

Видавництво: Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II (адреса: пл. Кошута 6, м. Берегове, 90202. Електронна пошта: foiskola@kmf.uz.ua)

A „Методичні вказівки до елементарної математики частина I. / Módszertani útmutató elemi matematikához I. rész" című módszertani útmutató az alapképzés (BSc) „Középiskolai oktatás (Matematika)" című képzési programja alapján lett kidolgozva nappali és levelező tagozatos hallgatók részére. A módszertani segédlet célja a hallgatók általános matematikai kultúrájának növelése, megtanítani az iskolai matematika tantárgy emelt színtű feladatainak megoldására, összefoglalni és rendszerezni a hallgatók számára az „Elemi matematika" című tantárgy keretein belül elsajátítandó ismereteket.

Az oktatási folyamatban történő felhasználását jóváhagyta
a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszéke
(2022. augusztus 26., 1. számú jegyzőkönyv).

Megjelentetésre javasolta a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Minőségbiztosítási Tanácsa
(2022. október 10., 1. számú jegyzőkönyv).

Elektronikus formában (PDF fájlformátumban) történő kiadásra javasolta
a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Tudományos Tanácsa
(2022. október 13., 7. számú jegyzőkönyv).

Kiadásra előkészítette a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Matematika és Informatika Tanszéke, valamint Kiadói Részlege.

A módszertani útmutató kidolgozói:

PALLAY Dezső – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének adjunktusa

DARÓCI Ádám – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének asszisztense

Szakmai lektorok:

Dr. BARTOS Mária – PhD, a fizika-matematika tudományok kandidátusa, az Ungvári Nemzeti Egyetem algebra és differenciális egyenletek tanszékének docense

Dr. KUCSINKA Katalin – PhD, a fizika-matematika tudományok kandidátusa, a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének tanszékvezetője

A kiadásért felelnek:

SZTOJKA Miroszláv – PhD, a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének docense és tanszékvezető helyettese

DOBOS Sándor – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Kiadói Részlegének vezetője

A segédlet tartalmáért kizárólag a módszertani útmutató kidolgozói felelnek.

Kiadó: a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola (cím: 90 202, Beregszász, Kossuth tér 6. E-mail: foiskola@kmf.uz.ua)

TARTALOM

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Методичний вказівник розроблений для студентів Закарпатського Угорського Інституту ім. Ференца Ракоці ІІ., які згідно навчального плану вивчають дисципліну «*Елементарна математика*» на другому курсі спеціальності *014 Середня освіта (Математика)*.

Мета видання: Підвищити загальну математичну культуру студентів, навчити їх розв'язувати завдання шкільного курсу математики поглибленого і підвищеного рівнів; поглибити, систематизувати знання, отримані в школі; розвинути творчий підхід до розв'язання нестандартних завдань.

Вивчення елементарної математики сприяє розвитку передусім таких ***програмних компетентностей***:

- Загальних:
  - ЗК 1. Здатність розвивати учнів критичного мислення
  - ЗК 3. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.
  - ЗК 4. Здатність вчитися і оволодівати сучасними знаннями, застосовувати знання у практичних ситуаціях.
  - ЗК 8. Навички використання інформаційний і комунікаційних технологій.
  - ЗК 15. Здатність до адаптації та дії в новій ситуації
- Фахових:
  - ФК 1. Здатність до використання математичних методів і моделей в освіті/педагогіці
  - ФК 2. Здатність до самоосвіти, самовдосконалення, самореалізації в професійній діяльності та до конкурентної спроможності на ринку праці.

Вивчення кліматичних класифікацій сприяє досягненню передусім таких ***програмних результатів навчання***:

- ПР2. Здійснювати перетворення даних з різних джерел за допомогою інформаційних процесів, використовувати цифрові технології в освітньому процесі в галузі освіти/педагогіки.
- ПР3. Застосувати методологію і методику, цифрові технології наукових досліджень в галузі освіти/педагогіки, предметних спеціальностях середньої освіти-інформатиці та математиці.
- ПР5. Képes megérteni az információ biztonság a jogi információk, valamint az adatvédelmi és szellemi tulajdonjogoknak tartalmát és alapvető tulajdonságait

RÖVID ISMERTETŐ

A módszertani útmutató a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola második évfolyamos *014 Középiskolai oktatás (Matematika)* szakos hallgatói számára készült, akik a tantervnek megfelelően előadásokon és gyakorlati foglalkozások keretében tanulják az *Elemi Matematika* című tantárgyat.

A módszertani segédlet célja a hallgatók általános matematikai kultúrájának növelése, megtanítani az iskolai matematika tantárgy emelt színtű feladatainak megoldására, összefoglalni és rendszerezni a hallgatók számára az „Elemi matematika” című tantárgy keretein belül elsajátítandó ismereteket.

1. TRIGONOMETRIKUS KIFEJEZÉSEK EGYSZERŰSÍTÉSE

A **trigonometrikus azonosságok** szögfüggvények között fennálló matematikai összefüggések (egyenlőségek, azonosságok). Ezek az azonosságok hasznosak szögfüggvényeket tartalmazó kifejezések egyszerűbb alakra hozásakor.

Jelölések

Az alábbi jelöléseket használjuk a hat szögfüggvényre:
szinusz (sin), koszinusz (cos), tangens (tg), kotangens (ctg), szekáns (sec) és koszekáns (csc). Egyszerűség kedvéért csak a szinusz esetét mutatja az alábbi táblázat.

Jelölések	Olvasd	Leírás	Definíció
$\sin^2(x)$	Szinusz négyzet x	a szinusz négyzete; szinusz a második hatványon	$\sin^2(x) = (\sin(x))^2$
$\arcsin(x)$	Arkszinusz x	a szinusz inverz függvénye	$\arcsin(x) = y$ akkor és csak akkor, ha $\sin(y) = x$ és $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$
$(\sin(x))^{-1}$	szinusz x a -1-ik hatványon	a szinusz reciproka	$(\sin(x))^{-1} =$ $1 / \sin(x) = \mathrm{cosec}(x)$

$\arcsin(x)$ így is írható: $\sin^{-1}(x)$; ezt nem szabad összetéveszteni a $(\sin(x))^{-1}$-nel.

1.1. TRIGONOMETRIKUS KÉPLETEK

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
2. $\mathrm{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$
3. $\mathrm{ctg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$
4. $\mathrm{tg}^2\alpha \cdot \mathrm{ctg}^2\alpha = 1$
5. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha$
6. $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha$
7. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$
8. $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$
9. $\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta}$
10. $\mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta}$
11. $\mathrm{ctg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\beta - 1}{1 + \mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\beta}$
12. $\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$
13. $\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
ctg α	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0	–

14. $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

15. $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

16. $\mathrm{tg}(2\alpha) = \dfrac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$

17. $\mathrm{ctg}(2\alpha) = \dfrac{\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{tg}\alpha}{2}$

18. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

19. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

20. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

21. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

22. $\sin\alpha\cdot\sin\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$

23. $\sin\alpha\cdot\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$

24. $\cos\alpha\cdot\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$

25. $\sin\alpha = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$

26. $\cos\alpha = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$

1.2. SZÖGFÜGGVÉNYEK

A **trigonometrikus függvények** vagy **szögfüggvények** eredetileg egy derékszögű háromszög egy szöge és két oldalának hányadosa közötti összefüggést írják le (innen nyerték magyar és latin nevüket is).
A szögfüggvényeknek a derékszögű háromszög két oldalának hányadosa és a szög összefüggésén kívül az egységsugarú körben tekintett forgásszög-végpontok metszeteivel (vetületeivel, koordinátáival) is definiálhatók. Ez utóbbi definíció már 90°, azaz π/2-nél nagyobb, sőt, negatív (mindent összevéve, tetszőleges valós) argumentumokra is működik.
Hagyományosan hat fontos szögfüggvény alakult ki (ezek közül négyet használnak gyakrabban, de csak kettő tekinthető igazán alapvetőnek, a többi ezekből racionális műveletekkel kapható), melyeket az alábbi táblázat tartalmaz:

Függvény	Rövidítés	Összefüggés
Szinusz	sin	$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
Koszinusz	cos	$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
Tangens	tg vagy (tan)	$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\mathrm{ctg}\,\alpha}$
Kotangens	ctg vagy (cot)	$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$
Szekáns	sec	$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \csc\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
Koszekáns	Csc vagy (cosec)	$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

1.3. KIDOLGOZOTT FELADATOK

1.Bizonyítsuk be, hogy a következő trigonometrikus kifejezések egyenlők!

$$\mathrm{ctg}^2\alpha - \mathrm{ctg}^2\beta = \frac{\cos^2\alpha - \cos^2\beta}{\sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta};$$

Megoldás:

Legelőször ki kell választani, hogy melyik oldalt alakítjuk át, és egyszerűsítjük, hogy megkapjuk a másik oldalt. Itt a baloldalt érdemes átalakítani, hogy megkapjuk a jobboldalt. **Ezért rögtön át is át is írjuk a kifejezést:**

$$\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta} =$$

Ezután közös nevezőre hozzuk a tagokat:

$$\frac{\cos^2\alpha \cdot \sin^2\beta - \cos^2\beta \cdot \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta} =$$

Majd a számlálóját ismét átalakítjuk:

$$\frac{\cos^2\alpha \cdot (1-\cos^2\beta) - \cos^2\beta \cdot (1-\cos^2\alpha)}{\sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta} =$$

Itt összeszorozzuk a számlálót:

$$\frac{\cos^2\alpha - \cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta - \cos^2\beta + \cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta}{\sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta} =$$

Egyszerűsítjük a számlálót, és kapjuk, hogy igaz az egyenlőség:

$$\frac{\cos^2\alpha - \cos^2\beta}{\sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta} = \frac{\cos^2\alpha - \cos^2\beta}{\sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta};$$

Felelet: az azonosság be van bizonyítva.

2. Egyszerűsítsük a következő trigonometrikus kifejezést!

$$\frac{1 + \mathrm{ctg}2\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha};$$

Megoldás:

Első lépésként átírjuk a kifejezést egy egyszerűbb alakra:

$$\frac{1 + \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} =$$

Ezt követően közös nevezőre hozzuk a számlálót, és a nevezőt is:

$$\frac{\dfrac{\sin 2\alpha \cdot \sin\alpha + \cos 2\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin 2\alpha \cdot \sin\alpha}}{\dfrac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}} =$$

A 8. képlet alapján a számlálóban felírhatjuk a kifejezést a következő alakra, és a nevezőt is egyszerűsíthetjük:

$$\frac{\dfrac{\cos(2\alpha - \alpha)}{\sin 2\alpha \cdot \sin\alpha}}{\dfrac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}} =$$

Átírjuk a törtet egy szorzattá:

$$\frac{\cos\alpha}{\sin 2\alpha \cdot \sin\alpha} \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{1} =$$

Egyszerűsítjük a kifejezést, majd a nevezőt a 14. képlet alapján felírjuk:

$$\frac{\cos^2\alpha}{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha} =$$

Újabb egyszerűsítés után kapjuk, hogy:

$$\frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha} =$$

Visszaalakítjuk a kifejezést, és kapjuk:

$$\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\alpha;$$

Felelet: a kifejezés egyszerűsítése után kaptuk: $\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\alpha;$

1.4. BEGYAKORLÓ FELADATOK

Bizonyítsuk be a következő trigonometrikus kifejezések azonosságát!

1. $(1+\cos^{-1}2\alpha+\operatorname{tg}2\alpha)\cdot(1-\cos^{-1}2\alpha+\operatorname{tg}2\alpha)=2\operatorname{tg}2\alpha;$

2. $\left(\cos^{-1}2\alpha+\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{2}\pi+2\alpha\right)\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{4}\pi-\alpha\right)=1;$

3. $\dfrac{\cos(3\pi-2\alpha)}{2\sin^2\left(\frac{5}{4}\pi+\alpha\right)}=\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{5}{4}\pi\right);$

4. $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{ctg}3\beta}{\operatorname{ctg}2\alpha+\operatorname{tg}3\beta}=\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}3\beta};$

5. $\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos6\alpha+\cos7\alpha=4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{5\alpha}{2}\cdot\cos4\alpha;$

6. $\sin9\alpha+\sin10\alpha+\sin11\alpha+\sin12\alpha=4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\alpha\cdot\sin\frac{21\alpha}{2};$

7. $\cos2\alpha-\cos3\alpha-\cos4\alpha+\cos5\alpha=-4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\frac{7\alpha}{2};$

8. $\sin4\alpha-\sin5\alpha-\sin6\alpha+\sin7\alpha=+4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\alpha\cdot\sin\frac{11\alpha}{2};$

9. $\cos\alpha+\sin\alpha+\cos3\alpha+\sin3\alpha=2\sqrt{2}\cos\alpha\cdot\left(\sin\frac{\pi}{4}+2\alpha\right);$

10. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}3\alpha+\operatorname{ctg}3\alpha=\dfrac{8\cos^2 2\alpha}{\sin6\alpha};$

11. $(\sin\alpha)^{-1}+(\operatorname{tg}\alpha)^{-1}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2};$

12. $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}{1-\sin(3\alpha-\pi)}=\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{3}{2}\alpha\right);$

13. $\dfrac{\sin2\alpha-\sin3\alpha+\sin4\alpha}{\cos2\alpha-\cos3\alpha+\cos4\alpha}=\operatorname{tg}3\alpha;$

14. $2\sin^2(3\pi-2\alpha)\cdot\cos^2(5\pi+2\alpha)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{5}{2}\pi-8\alpha\right);$

15. $\dfrac{1-\cos4\alpha}{\cos^{-2}2\alpha-1}+\dfrac{1+\cos4\alpha}{\sin^{-2}2\alpha-1}=2;$

16. $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha - \cos^{-1}\alpha}{\cos\alpha - \mathrm{ctg}\alpha} = \mathrm{tg}\alpha \cdot \cos^{-1}\alpha;$

17. $\cos(45^\circ - \alpha) - \cos^2(60^\circ + \alpha) - \cos 75^\circ \cdot \sin(75^\circ - 2\alpha) = \sin 2\alpha;$

18. $\mathrm{ctg}(45^\circ + 2\alpha) = \dfrac{\cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha};$

19. $\dfrac{\mathrm{tg}3\alpha}{\mathrm{tg}\alpha} = \dfrac{3 - \mathrm{tg}^2\alpha}{1 - 3\mathrm{tg}^2\alpha};$

20. $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = 1;$

21. $\sin\alpha \cdot \sin(x - \alpha) + \sin^2\left(\dfrac{x}{2} - \alpha\right) = \sin^2\dfrac{x}{2};$

22. $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta);$

23. $\mathrm{tg}\, 4\alpha + \cos^{-1} 4\alpha = \dfrac{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha};$

24. $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}(\alpha + \beta)} + \dfrac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}(\alpha - \beta)} + 2\mathrm{tg}^2\alpha = 2\cos^{-2}\alpha;$

25. $1 - \dfrac{1}{4}\sin^2 2\alpha + \cos 2\alpha = \cos^2\alpha + \cos^4\alpha;$

Egyszerűsítsük a következő trigonometrikus kifejezéseket!

26. $1 - \sin\left(\dfrac{\alpha}{2} - 3\pi\right) - \cos^2\dfrac{\alpha}{4} + \sin^2\dfrac{\alpha}{4};$

27. $\dfrac{1 + \sin 2\alpha}{\cos(2\alpha - 2\pi) \cdot \mathrm{ctg}\left(\alpha - \dfrac{5}{4}\pi\right)} + \cos^2\alpha;$

28. $\dfrac{\cos^2\left(\pi + \dfrac{\alpha}{4}\right)\left(1 + \mathrm{tg}^2\left(\dfrac{3}{4}\alpha - \dfrac{3}{2}\pi\right)\right)}{\sin^{-1}\left(\dfrac{9}{2}\pi + \dfrac{\alpha}{2}\right)\left(\mathrm{tg}^2\left(\dfrac{5}{2}\pi - \dfrac{\alpha}{4}\right) - \mathrm{tg}^2\left(\dfrac{3}{4}\alpha - \dfrac{7}{2}\pi\right)\right)};$

29. $\dfrac{1 - \cos(8\alpha - 3\pi)}{\mathrm{tg}\, 2\alpha - \mathrm{ctg}\, 2\alpha};$

30. $\cos\alpha(1 + \cos^{-1}\alpha + \mathrm{tg}\alpha)(1 - \cos^{-1}\alpha + \mathrm{tg}\alpha);$

31. $\sin^2\alpha(1 + \sin^{-1}\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha)(1 - \sin^{-1}\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha);$

32. $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$;

33. $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}+2\beta\right)-\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}-2\beta\right)$;

34. $\cos^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1$;

35. $\sin^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1$;

36. $\frac{\cos m\alpha-\cos n\alpha}{\sin n\alpha-\sin m\alpha}$;

37. $1-\frac{1}{1-\sin^{-1}\left(2\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)}$;

38. $\sqrt{\left(1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1\right)}$;

39. $\frac{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}-\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}+\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}$;

40. $\frac{\cos^2\alpha-\mathrm{ctg}^2\alpha+1}{\sin^2\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha-1}$;

41. $\sin^2\left(\frac{9}{8}\pi+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{17}{8}\pi-\alpha\right)$;

42. $\frac{4\sin^2(\alpha-5\pi)-\sin^2(2\alpha+\pi)}{\cos^2(2\alpha-\frac{3}{2}\pi)-4+4\sin^2\alpha}$;

43. $\sin\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\cos\left(2\alpha-\frac{8}{3}\pi\right)+\cos\left(\frac{2}{3}\pi+2\alpha\right)$;

44. $\frac{\cos^2+2\sin^2(\alpha-\pi)}{\cos^3(\alpha-4\pi)}+\frac{\cos^2\alpha+4\sin\alpha+\sin^2(\alpha+\pi)}{\cos\alpha(4\sin\alpha+1)}$;

45. $\frac{1}{2\,\mathrm{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\cdot\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}+\frac{1-\cos(4\alpha-\pi)}{\sin^3 2\alpha}-\frac{1}{2\,\mathrm{ctg}\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)\cdot\sin^2\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}$;

46. $\frac{\sin^2\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\mathrm{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)+\mathrm{tg}\left(\frac{3}{2}\pi+2\alpha\right)}$;

47. $\dfrac{\operatorname{ctg}(270^\circ-\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2(\alpha-180^\circ)}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}^2(360^\circ-\alpha)-1}{\operatorname{ctg}(180^\circ+\alpha)}$;

48. $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot\cos^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)}$;

49. $\dfrac{1-\operatorname{tg}(\pi-2\alpha)\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{3}{2\pi}-\alpha\right)+\operatorname{tg}\alpha}$;

50. $\dfrac{\cos2\alpha-\cos6\alpha+\cos10\alpha-\cos14\alpha}{\sin2\alpha+\sin6\alpha+\sin10\alpha+\sin14\alpha}$;

2. TRIGONOMETRIKUS EGYENLETEK MEGOLDÁSA

Azokat az egyenleteket, amelyekben az ismeretlen valamely szögfüggvénye szerepel, **trigonometrikus egyenleteknek** nevezzük. (Hasonlóan trigonometrikus egyenlőtlenségekről, trigonometrikus egyenletrendszerekről is beszélünk.)

A szögfüggvények értelmezésekor már említettük, hogy egy adott szöghöz egyetlen szinusz-, egyetlen koszinusz-, egyetlen tangens-, egyetlen kotangens érték tartozik (ha a szög olyan, hogy tangense is, kotangense is létezik). Fordítva azonban nincs meg az egyértelműség. Ha meg adunk egy szinusz értéket (vagy egy más szögfüggvényértéket), ahhoz nem egyetlen szög tartozik.

A $\sin x = a$, ahol $|a| \leq 1$, egyenlet megoldási képlete: $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z$, vagy az $x_1 = \arcsin a + 2\pi k, \text{és}\, x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in Z$.

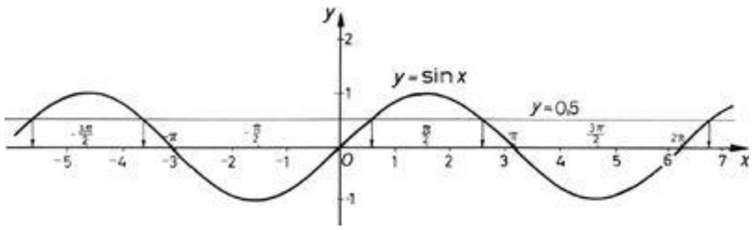
A $\cos x = a$, ahol $|a| \leq 1$, egyenlet megoldási képlete: $x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z$.

A $\operatorname{tg} x = a$ egyenlet megoldási képlete: $x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in Z$.

A $\sin(x) = 0{,}5 \quad (x \in R)$ egyenlet megoldását úgy is tekinthetjük, hogy az $f(x) = \sin(x)$ függvénynél megkeressük mindazokat az x értékeket, amelyekre $f(x) = 0{,}5$ Ezt szemléletessé is tesszük. Az egyenlet megoldása:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k_1\pi$$

$x_2 = \dfrac{5\pi}{6} + 2k_2\pi$, ahol $k_{1,2} \in Z$



2.1. KIDOLGOZOTT FELADATOK

1. ***feladat:***

$\sin 9x = 2\sin 3x$

$\sin 9x - \sin 3x = \sin 3x$

$2\sin\frac{9x-3x}{2} * \cos\frac{9x+3x}{2} - \sin 3x = 0$

$\sin 3x(2\cos 6x - 1) = 0$

$\sin 3x = 0$ vagy $2\cos 6x - 1 = 0$

$3x = \pi k$

$x = \frac{\pi}{3}k, k \in Z$

$2\cos 6x - 1 = 0$

$2\cos 6x = 1$

$\cos 6x = \frac{1}{2}$

$6x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n$

$x = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3}n, n \in Z$

2. feladat:

$$3\sin 5z - 2\cos 5z = 3$$

$$3(\sin 5z - 1) = 2\cos 5z$$

$$6\sin\frac{5z}{2}\cos\frac{5z}{2} - 3\sin^2\frac{5z}{2} - 3\cos^2\frac{5z}{2} = 2\cos^2\frac{5z}{2} - 2\sin^2\frac{5z}{2}$$

$$6\sin\frac{5z}{2}\cos\frac{5z}{2} - \sin^2\frac{5z}{2} - 5\cos^2\frac{5z}{2} = 0 / : \cos^2\frac{5z}{2}$$

$$6tg\frac{5z}{2} - tg^2\frac{5z}{2} - 5 = 0$$

$$tg\frac{5z}{2} = t$$

$$t^2 - 6t + 5 = 0$$

$$D = 36 - 20 = 16$$

$$t_1 = \frac{6-4}{2} = 1$$

$$t_2 = 5$$

$$tg\frac{5z}{2} = 1$$

$$\frac{5z}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$z = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}k, k \in Z$$

3. ***feladat:***

$\cos 7x + \sin 8x = \cos 3x - \sin 2x$

$\sin 8x + \sin 2x = \cos 3x - \cos 7x$

$2\sin 5x * \cos 3x = -2\sin(-2x) * \sin 5x$

$2\sin 5x \cos 3x = 2\sin 2x \sin 5x$

$2\sin 5x(\cos 3x - \sin 2x) = 0$

$\sin 5x = 0$

$5x = \pi k, k \in Z$

$x = \frac{\pi}{5}k, k \in Z$

$\cos 3x - \sin 2x = 0$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) - \sin 2x = 0$

$2\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 3x - 2x}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 3x + 2x}{2}\right) = 0$

$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5x}{2}\right) = 0$

$\frac{\pi}{4} - \frac{5x}{2} = \pi n$

$\frac{5x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n$

$5x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}n, n \in Z$

2.2. BEGYAKORLÓ FELADATOK

1. $1-\cos 6x = \operatorname{tg} 3x$

2. $\sqrt{2}\cos x + \cos 2x + \cos 4x = 0$

3. $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - 0{,}5$

4. $2\cos 2x + 2\operatorname{tg}^2 x = 5$

5. $\sin 2x \sin 6x = \cos x \cos 3x$

6. $\sin^4 2x + \cos^4 2x = \sin 2x \cos 2x$

7. $\cos(3x-30^\circ) - \sin(3x-30^\circ)\operatorname{tg} 30^\circ = \dfrac{1}{2\cos 210^\circ}$

8. $4\sin x + \cos x = 4$

9. $2\sin^2 z + \operatorname{tg}^2 z = 2$

10. $\cos 2x + \cos 6x + 2\sin^2 x = 1$

11. $\cos 3x \cos 6x = \cos 4x \cos 7x$

12. $\sin 3x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 5x + \dfrac{1}{2}\cos 5x = 0$

13. $\operatorname{ctg}^3 x + \sin^{-2} x - 3\operatorname{ctg} x - 4 = 0$

14. $\cos^2 3x + \cos^2 4x + \cos^2 5x = \dfrac{3}{2}$

15. $1 + \sin x + \cos 5x + \sin 7x = 2\cos^2 \dfrac{3}{2}x$

16. $\dfrac{\sin z}{1+\cos z} = 2 - \operatorname{ctg} z$

17. $\sin(15^\circ + x) + \cos(45^\circ + x) + \dfrac{1}{2} = 0$

18. $1 + \sin 2x = \sin x + \cos x$

19. $3(1-\sin t)\sin^4 t = 1 + \cos^4 t$

20. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{2} + x\right) - 3tg^2 x = (\cos 2x - 1)\cos^{-2} x$

21. $\cos^2 \dfrac{x}{2} + \cos^2 \dfrac{3}{2}x - \sin^2 2x - \sin^2 4x = 0$

22. $\dfrac{\sin^2 x - 2}{\sin^2 x - 4\cos^2 \dfrac{x}{2}} = \operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}$

23. $\sin 3x - 4\sin x \cos 2x = 0$

24. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2\cos^{-1} 4x$

25. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 3x\right) - \sin(\pi - 5x) = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 3x)$

26. $\sin x - \sin 3x - \sin 5x + \sin 7x = 0$

27. $\sin 3x - \sin 7x = \sqrt{3}\sin 2x$

28. $\sqrt{3} - \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)$

29. $\sin 2z - 4\cos 2z = 4$

30. $\operatorname{tg}(x - 15^\circ)\operatorname{ctg}(x + 15^\circ) = \dfrac{1}{3}$

31. $\cos(x+1)\sin 2(x+1) = \cos 3(x+1)\sin 4(x+1)$

32. $\cos(4x+2) + 3\sin(2x+1) = 2$

33. $\cos 4x + 2\cos^2 x = 1$

34. $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$

35. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 70^\circ = \operatorname{tg} xt\,\mathrm{g}\, 50^\circ\ \operatorname{tg} 70^\circ$

36. $\cos x - \sin x = 4\cos x \sin^2 x$

37. $\operatorname{tg} 2x \sin 2x - 3\sqrt{3}\operatorname{ctg} 2x \cos 2x = 0$

38. $\cos x - \cos 3x = \sin 2x$

39. $\sin^2 3x = 3\cos^2 3x$

40. $\sin 3x + \sin x = 4\sin^3 x$

41. $\sin 6x + \sin 2x = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg} 2x$

42. $\dfrac{2\cos(\pi + x) - 5\cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right)}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) - \cos(\pi - x)} = \dfrac{3}{2}$

43. $\operatorname{tg} x\, \mathrm{t}\, g 20^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} x = 1$

44. $2\cos^2 \dfrac{x}{2} - 1 = \sin 3x$

45. $\sin^2 2x + \sin^2 x = \dfrac{9}{16}$

46. $3\cos^2 x = \sin^2 x + \sin 2x$

47. $2(1 - \cos 2x) = \sqrt{3}\operatorname{tg} x$

48. $25\sin^2 x + 100\cos x = 89$

49. $\sin x + \sin 3x = 2$

50. $\cos 2x = 1 - \sin 2x$

IRODALOMJEGYZÉK

1. Пойа Д. Как решать задачу. – 2-е изд. испр. – М.: Учпедгиз, 1961. – 207 с.
2. Pólya György: A gondolkodás iskolája.– Gondolat Kiadó, Budapest 1969., 269 old.
3. М. І. Сканаві Збірник задач з математики – 2011. –Київ Арій– 605 с.
4. Підручники з математики для ЗОШ.
5. Підручники з математики для класів з поглибленим вивченням математики.
6. В. М. Орос, В. М. Петечук, К. М. Петечук Контрольно-практичні роботи з математики ч. 1, 2 Ужгород 2008 ЗІПО
7. Sümegi László Matematikai feladatok haladóknak Debrecen 2000
8. Gerőcs László Készüljünk az írásbeli érettségi vizsgára matematikából. Nemzeti Tankönyvkiadó Budapest 2012

Методичні вказівки до елементарної математики частина I. / Módszertani útmutató elemi matematikához I. rész: методичні вказівки до практичних (семінарських) занять з навчальної дисципліни «Елементарна математика» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання, освітня програма: «Середня освіта (Математика)», галузь знань: «01 Освіта/Педагогіка», спеціальність(спеціалізація): «014 Середня освіта (014.04 Математика)» / Розробники: Дезидер Поллої, Адам Доровці – Берегове: ЗУІ ім. Ф.Ракоці ІІ, 2022. – 26 с. (українською та угорською мовами)

Методичні вказівки «Методичні вказівки до елементарної математики частина I. / Módszertani útmutató elemi matematikához I. rész» призначаються для більш ефективної організації роботи на практичних заняттях з дисципліни «Елементарна математика» здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти, другого курсу денної та заочної форми навчання, які навчаються на спеціальності(спеціалізації) «014 Середня освіта (Математика)». Основна мета методичному вказівнику – це підвищити загальну математичну культуру студентів, навчити їх розв’язувати завдання шкільного курсу математики поглибленого і підвищеного рівнів; поглибити, систематизувати знання, отримані в школі; розвинути творчий підхід до розв’язання нестандартних завдань.

Виробничо-практичне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ ЧАСТИНА I./ MÓDSZERTANI ÚTMUTATÓ ELEMI MATEMATIKÁHOZ I. RÉSZ

Методичні вказівки до практичних (семінарських) занять

2022 р.

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці ІІ
(протокол № 1 від «26» серпня 2022 року)

Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості вищої освіти
Закарпатського угорського інституту ім. Ф. Ракоці ІІ
(протокол № 1 від «10» жовтня 2022 року)

Рекомендовано до видання в електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту ім. Ф. Ракоці ІІ
(протокол № 7 від «13» жовтня 2022 року)

Підготовлено до видання в електронній формі (PDF) кафедрою математики та інформатики спільно з Видавничим відділом Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці ІІ

Розробники методичних вказівок:

Дезидер ПОЛЛОЇ – старший викладач кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці ІІ

Адам ДОРОВЦІ – асистент кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці ІІ

Рецензенти:

Марія БОРТОШ – кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри алгебри та диференціальних рівнянь Ужгородського Національного Університету

Каталін КУЧІНКА – кандидат фіз.-мат. наук, завідувач кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці ІІ

Відповідальні за випуск:

Мирослав СТОЙКА – доцент; Кандидат фізико-математичних наук, доцент Кафедра математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці ІІ

Олександр ДОБОШ – начальник Видавничого відділу ЗУІ ім. Ф.Ракоці ІІ

За зміст методичних вказівок відповідальність несуть розробники.

Видавництво: Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці ІІ (адреса: пл. Кошута 6, м. Берегове, 90202. Електронна пошта: foiskola@kmf.uz.ua) *Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції Серія ДК 7637 від 19 липня 2022 року*

Шрифт «Times New Roman». Розмір сторінок методичних вказівок: А4 (210х297мм).