

Кафедра математики та інформатики
Matematika és Informatika Tanszék

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ
ЧАСТИНА ІІ./ MÓDSZERTANI ÚTMUTATÓ ELEMI
MATEMATIKÁHOZ II. RÉSZ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ / MÓDSZERTANI ÚTMUTATÓ
до практичних (семінарських) занять / gyakorlati (szemináriumi) foglalkozásokhoz

Елементарна математика / Elemi matematika
(назва навчальної дисципліни / a tantárgy neve)

Перший (бакалаврський) / Alapképzés (BSc)
(ступінь вищої освіти / felsőoktatás szintje)

01 Освіта/Педагогіка / 01 Oktatás/Pedagógia
(галузь знань / képzési ág)

Середня освіта (Математика) / Középiskolai oktatás (Matematika)
(освітня програма / képzési program)



Методичні вказівки «Методичні вказівки до елементарної математики частина II. / Módszertani útmutató elemi matematikához II. rész» призначаються для більш ефективної організації роботи на практичних заняттях з дисципліни «Елементарна математика» здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти, другого курсу денної та заочної форми навчання, які навчаються на спеціальності(спеціалізації) «014 Середня освіта (Математика)». Основна мета методичному вказівнику – це підвищити загальну математичну культуру студентів, навчити їх розв’язувати завдання шкільного курсу математики поглибленого і підвищеного рівнів; поглибити, систематизувати знання, отримані в школі; розвинути творчий підхід до розв’язання нестандартних завдань.

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II
(протокол № 1 від «26» серпня 2022 року)

Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості вищої освіти
Закарпатського угорського інституту ім. Ф. Ракоці II
(протокол № 1 від «10» жовтня 2022 року)

Рекомендовано до видання в електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту ім. Ф. Ракоці II
(протокол № 7 від «13» жовтня 2022 року)

Підготовлено до видання в електронній формі (PDF) кафедрою математики та інформатики
спільно з Видавничим відділом Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Розробники методичних вказівок:

Дезидер ПОЛЛОЇ – старший викладач кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Адам ДОРОВЦІ – асистент кафедри математики та інформатики туризму Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Рецензенти:

Марія БОРТОШ – кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри алгебри та диференціальних рівнянь Ужгородського Національного Університету

Каталін КУЧІНКА – кандидат фіз.-мат. наук, завідувач кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Відповідальні за випуск:

Мирослав СТОЙКА – доцент; Кандидат фізико-математичних наук, доцент Кафедра математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II

Олександр ДОБОШ – начальник Видавничого відділу ЗУІ ім. Ф.Ракоці II

За зміст методичних вказівок відповідальність несуть розробники.

Видавництво: Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II (адреса: пл. Кошута 6, м. Берегове, 90202. Електронна пошта: foiskola@kmf.uz.ua)

© Дезидер Поллої, Адам Доровці, 2022
© Кафедра математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II, 2022

A „Методичні вказівки до елементарної математики частина II. / Módszertani útmutató elemi matematikához II. rész” című módszertani útmutató az alapképzés (BSc) „Középiskolai oktatás (Matematika)” című képzési programja alapján lett kidolgozva nappali és levelező tagozatos hallgatók részére. A módszertani segédlet célja a hallgatók általános matematikai kultúrájának növelése, megtanítani az iskolai matematika tantárgy emelt szintű feladatainak megoldására, összefoglalni és rendszerezni a hallgatók számára az „Elemi matematika” című tantárgy keretein belül elsajátítandó ismereteket.

Az oktatási folyamatban történő felhasználását jóváhagyta
a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Matematika és Informatika Tanszéke
(2022. augusztus 26., 1. számú jegyzőkönyv).

Megjelentetésre javasolta a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Minőségbiztosítási Tanácsa
(2022. október 10., 1. számú jegyzőkönyv).

Elektronikus formában (PDF fájlformátumban) történő kiadásra javasolta
a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Tudományos Tanácsa
(2022. október 13., 7. számú jegyzőkönyv).

Kiadásra előkészítette a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Matematika és Informatika Tanszéke, valamint Kiadói Részlege.

A módszertani útmutató kidolgozói:

PALLAY Dezső – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének adjunktusa

DARÓCI Ádám – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének asszisztense

Szakmai lektorok:

Dr. BARTOS Mária – PhD, a fizika-matematika tudományok kandidátusa, az Ungvári Nemzeti Egyetem algebra és differenciális egyenletek tanszékének docense

Dr. KUCSINKA Katalin – PhD, a fizika-matematika tudományok kandidátusa, a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének tanszékvezetője

A kiadásért felelnek:

SZTOJKA Miroszláv – PhD, a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének docense és tanszékvezető helyettese

DOBOS Sándor – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Kiadói Részlegének vezetője

A segédlet tartalmáért kizárólag a módszertani útmutató kidolgozói felelnek.

Kiadó: a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola (cím: 90 202, Beregszász, Kossuth tér 6.
E-mail: foiskola@kmf.uz.ua)

© Pally Dezső, Daróci Ádám, 2022

© A II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszéke, 2022

TARTALOM

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА	6
RÖVID ISMERTETŐ.....	7
1. SÍKMÉRTANI SZÁMÍTÁSOK ÉS TRIGONOMETRIA	8
1.1. KIDOLGOZOTT FELADATOK	10
1.2. BEGYAKORLÓ FELADATOK	13
2. VEKTOROK ÉS KOORDINÁTAGEOMETRIA.....	15
2.1. KIDOLGOZOTT FELADATOK	16
2.2. BEGYAKORLÓ FELADATOK	19
IRODALOMJEGYZÉK.....	21

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Методичний вказівник розроблений для студентів Закарпатського Угорського Інституту ім. Ференца Ракоці II., які згідно навчального плану вивчають дисципліну «Елементарна математика» на другому курсі спеціальності 014 Середня освіта (Математика).

Мета видання: Підвищити загальну математичну культуру студентів, навчити їх розв'язувати завдання шкільного курсу математики поглибленого і підвищеного рівнів; поглибити, систематизувати знання, отримані в школі; розвинути творчий підхід до розв'язання нестандартних завдань.

Вивчення елементарної математики сприяє розвитку передусім таких **програмних компетентностей**:

- Загальних:
 - ЗК 1. Здатність розвивати учнів критичного мислення
 - ЗК 3. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.
 - ЗК 4. Здатність вчитися і оволодівати сучасними знаннями, застосовувати знання у практичних ситуаціях.
 - ЗК 8. Навички використання інформаційних і комунікаційних технологій.
 - ЗК 15. Здатність до адаптації та дії в новій ситуації
- Фахових:
 - ФК 1. Здатність до використання математичних методів і моделей в освіті/педагогіці
 - ФК 2. Здатність до самоосвіти, самовдосконалення, самореалізації в професійній діяльності та до конкурентної спроможності на ринку праці.

Вивчення кліматичних класифікацій сприяє досягненню передусім таких **програмних результатів навчання**:

- ПР2. Здійснювати перетворення даних з різних джерел за допомогою інформаційних процесів, використовувати цифрові технології в освітньому процесі в галузі освіти/педагогіки.
- ПР3. Застосувати методологію і методику, цифрові технології наукових досліджень в галузі освіти/педагогіки, предметних спеціальностях середньої освіти-інформатиці та математиці.
- ПР5. Képes megérteni az információ biztonság a jogi információk, valamint az adatvédelmi és szellemi tulajdonjogoknak tartalmát és alapvető tulajdonságait

RÖVID ISMERTETŐ

A módszertani útmutató a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola második évfolyamos *014 Középiskolai oktatás (Matematika)* szakos hallgatói számára készült, akik a tantervnek megfelelően előadásokon és gyakorlati foglalkozások keretében tanulják az *Elemi Matematika* című tantárgyat.

A módszertani segédlet célja a hallgatók általános matematikai kultúrájának növelése, megtanítani az iskolai matematika tantárgy emelt szintű feladatainak megoldására, összefoglalni és rendszerezni a hallgatók számára az „Elemi matematika” című tantárgy keretein belül elsajátítandó ismereteket.

1. SÍKMÉRTANI SZÁMÍTÁSOK ÉS TRIGONOMETRIA

1.) Háromszög

Területe:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin(a, b) \angle \quad \text{ahol, } a, b \text{ oldalak, } \sin(a, b) \angle \text{ a két oldal közötti szög}$$

Héron-képlete a terület kiszámítására:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{ahol, } p \text{ félkerület, } a, b, c \text{ háromszög oldalai}$$

Kerülete:

$$P = a + b + c$$

2.) Négyzet

Területe:

$$S = a^2, \text{ ahol } a \text{ négyzet oldala}$$

Kerülete:

$$P = 4a$$

3.) Téglalap:

Területe:

$$S = ab$$

Kerülete:

$$P = 2(a + b), \text{ ahol } a, b \text{ a téglalap oldalai}$$

4.) Paralelogramma

Területe:

$$S = ab, \text{ ahol } a \text{ paralelogramma oldala és } m \text{ az erre az oldalra húzott magasság}$$

Kerülete:

$$P = 2(a + b)$$

5.) Trapéz

Terület:

$$S = km, \text{ ahol } k \text{ az alapok félösszege, és } m \text{ az alapok távolsága}$$

Kerülete:

$$P = a + b + c + d, \text{ ahol } a, b, c, d \text{ a trapéz oldalai}$$

6.) Kör

Területe:

$$S = \pi \cdot r^2, \text{ ahol } r \text{ a kör sugara}$$

Kerülete:

$$P = 2\pi \cdot r$$

Koszinusztétel:

A háromszög bármely oldalának négyzetét megkapjuk, ha a másik két oldal négyzetének összegéből kivonjuk a két oldal és a közbezárt szög koszinuszának kétszeres szorzatát.

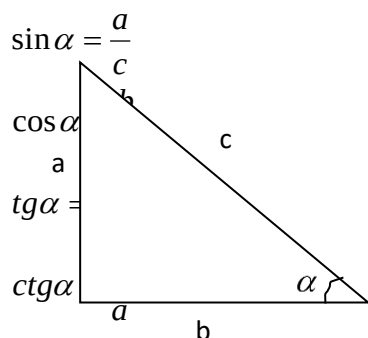
Szinusztétel:

A háromszög oldalai arányosak a szemben fekvő szögek szinuszával.

Pitagorasz-tétele:

A derékszögű háromszög átfogójának négyzete egyenlő a befogók négyzetének összegével.

Szögfüggvények a derékszögű háromszögben



1.1. KIDOLGOZOTT FELADATOK

1. Egy egyenlő szárú háromszög magassága 12 cm, beírt körének sugara 2 cm. Mekkora a háromszög szögei és oldalai?

Adva van:

ABC háromszög,

$AC=CB$,

– magasság,

$CE=12$ cm,

$OD=OE=2$ cm

$AC=?$ $CB=?$ $AB=?$ $CAB \angle=?$ $ABC \angle=?$ $BCA \angle=?$

Megoldás:

Mivel az egyenlő szárú háromszög magassága szögfelező is, ezért az CE magasság átmegy a beírt körvonal középpontján, és a középpont két részre osztja a magasságot: az OE sugárra, és a CE szakaszra. Az OE sugár 2 cm, tehát $CO=10$ cm. Meghúzzuk az OD sugarat az egyik érintési pontból, amely merőleges lesz a CB oldalra, tehát $ADC \angle=90^\circ$. Így OC az ODC derékszögű háromszög átfogója, OD sugár pedig a befogója.

Ebből a derékszögű háromszögből ki tudjuk fejezni $\sin \alpha$ -t:

A szöggel szemben fekvő befogó egyenlő az átfogó és $\sin \alpha$ szorzatával. Ebből következik, hogy:

$$\sin \alpha = \frac{OD}{OC} = \frac{2}{10} = 0,2. \text{ Tehát } \alpha \approx 12,5^\circ.$$

Mivel CE szögfelező, ezért

$$ACB \angle \approx 23^\circ.$$

Az egyenlő szárú háromszög alapján fekvő szögek egyenlők, ebből következik:

$$CAB \angle = ABC \angle \approx \frac{180^\circ - 23^\circ}{2} \approx \frac{157^\circ}{2} \approx 78,5^\circ.$$

Most pedig kiszámítjuk a szárak hosszát:

$$CB=CA = \frac{CE}{\cos \alpha} \approx \frac{12}{\cos 12,5} \approx \frac{12}{0,9762} \approx 12,25 \text{ cm.}$$

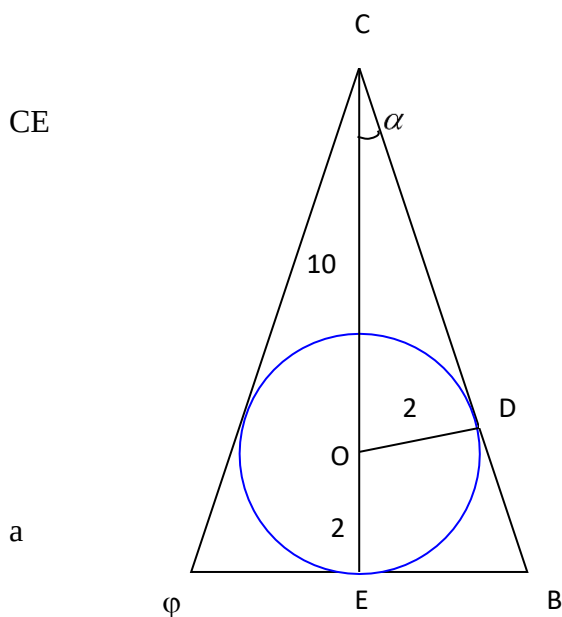
Kiszámítjuk EB-t:

$$EB = \sqrt{CB^2 - CE^2} \approx \sqrt{12,25^2 - 12^2} \approx \sqrt{150 - 144} \approx \sqrt{6} \approx 2,45 \text{ cm.}$$

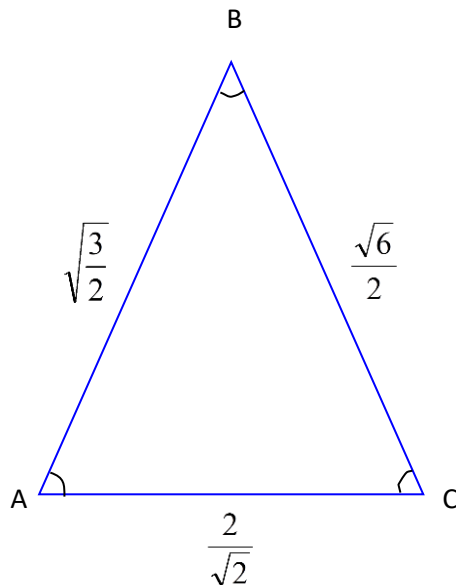
Mivel CE magasság súlyvonal is ezért: $AE=EB$, azaz

$$AB \approx EB+EB \approx 2,45+2,45 \approx 4,9 \text{ cm.}$$

Felelet: $AB \approx 4,9$ cm, $AC=CB \approx 12,25$ cm, $ACB \angle \approx 23^\circ$, $CAB \angle = ABC \angle \approx 78,5^\circ$



2. Egy háromszög oldalai $\frac{\sqrt{6}}{2}$, $\frac{3}{\sqrt{2}}$ és $\sqrt{\frac{3}{2}}$ hosszúságúak. Számítsa ki e háromszög szögeit és területét!



Adva van:

ABC háromszög,

$$AB = \sqrt{\frac{3}{2}},$$

$$BC = \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}},$$

$$AC = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$BAC \angle = ? \quad ACB \angle = ? \quad ABC \angle = ?$$

Megoldás:

Mivel $AB=BC$, ezért a háromszög egyenlő szárú. Az egyenlő szárú háromszög alapján fekvő szögek egyenlők, így $BAC \angle = ACB \angle$.

A $BAC \angle = ACB \angle$ szögeket kiszámíthatjuk cosinus tétellel:

a

A háromszög bármely oldalának négyzetét megkapjuk, ha a másik két oldal négyzetének összegéből kivonjuk e két oldal és a közbezárt szög sinusának kétszeres szorzatát:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos BAC \angle$$

$$\cos BAC \angle = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}$$

A $ABC \angle$ – get pedig kiszámíthatjuk:

$$ABC \angle = 180^\circ - 2BAC \angle$$

A területet pedig a következő képlettel kapjuk:

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin BAC \angle.$$

Most pedig bepótoljuk az adatokat a megfelelő képletekbe:

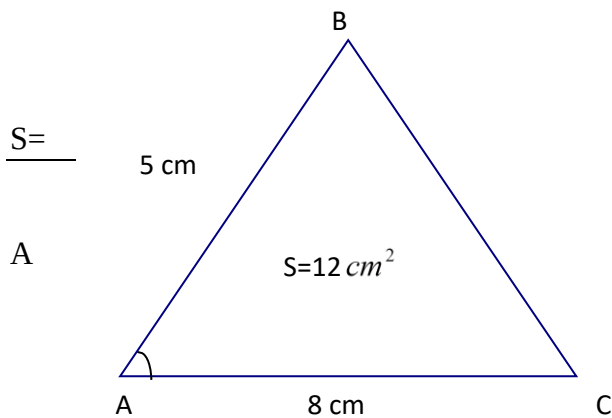
$$\cos BAC \angle = \frac{\frac{3}{2} + \frac{9}{2} - \frac{6}{4}}{2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad BAC \angle = ACB \angle = 30^\circ$$

$$ABC \angle = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{8}$$

Felelet: $BAC \angle = ACB \angle = 30^\circ$, $ABC \angle = 120^\circ$, $S = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{8}$

3. Egy háromszög két oldalának hossza 5 cm, illetve 8 cm, területe 12 cm^2 . Számítsa ki a harmadik oldalát!



Adva van:

ABC háromszög,

AB= 5cm,

AC= 8cm,

12 cm^2

BC=?

Megoldás:

terület meghatározására szolgáló képletből

kifejezzük $\sin BAC\angle$ -et. A trigonometrikus

alapazonosságból kivezetjük $\cos BAC\angle$ -t.

Aztán a cosinus tétellel kiszámítjuk a harmadik oldalt:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin BAC\angle$$

$$\sin BAC\angle = \frac{S}{\frac{1}{2} AB \cdot AC} = \frac{12}{\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8} = \frac{12}{20} = 0,6$$

$$\cos BAC\angle = \sqrt{1 - 0,6^2} = 0,8$$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot 0,8} = \sqrt{25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 0,8} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

Tehát egy egyenlő szárú háromszög a feladatunk tárgya.

Felelet: BC= 5cm

1.2. BEGYAKORLÓ FELADATOK

1. Egyenlő oldalú háromszög oldalainak a felezőpontjaiból merőlegeseket bocsátunk a szomszédos oldalakra; ezek a háromszögből egy hatszöget vágnak ki. Hányad része a hatszög területe a háromszögének?
2. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 8, szárai 12 egység hosszúak. A szárak metszéspontjától milyen távol kell elmetszeni a háromszöget az alappal párhuzamosan, hogy a keletkezett trapéz kerülete 20 egység legyen?
3. Az ABCD paralelogramma BAD szöge 60° . Az A, B és D csúcsokon áthaladó 3 egység sugarú kör felezi a CD oldalt. Számítsa ki a paralelogramma területét!
4. Egy 60° -os hegyesszöget tartalmazó derékszögű háromszög kerületének és területének mérőszámai egyenlők. Mekkora a háromszög oldalai?
5. Egy téglalapba konvex négyszöget írtunk. A téglalap kerületén végighaladva, a beírt négyszög csúcsai a téglalap egyes oldalait rendre azonos irányban osztják. Mekkora ez az arány, ha a beírt négyszög területének és a téglalap területének az aránya 5:8?
6. Egy rombusz oldalának hossza az átlók hosszának mértani közepe. Hányszorosa a hosszabb átló a rövidebb átlónak?
7. Egy egyenlő szárú háromszög alapjának hossza 40 cm, szárainak hossza 29 cm. Mekkora a háromszög súlypontjának az oldalaktól mért távolsága?
8. Számítsa ki az olyan derékszögű háromszög hegyesszögeit, amelyben a hosszabbik befogó
 - a) mértani közepe,
 - b) szántani közepeaz átfogónak és a rövidebb befogónak!
9. Egy kör a szabályos háromszög oldalait szabályos hatszög csúcspontjaiban metszi. A kör területe hány százaléka a háromszög területének?
10. Mekkora az r sugarú kör köré rajzolható egyenlő oldalú háromszög és a körbe írható szabályos hatszög területének aránya?
11. Egy 9 sugarú körbe írjunk két különböző sugarú kört úgy, hogy egymást kívülről, az adott kört pedig egy átmérőjének két végpontjában belülről érintsék! Mekkora a beírt körök sugara, ha az adott kör belsejének a beírt körökön kívül fekvő része 28π területű?
12. Egy kör $2r$ átmérője fölé egyenlő háromszöget szerkesztünk. Mekkora a háromszög körön kívül fekvő részének területe?
13. Egy 10 cm sugarú körbe írt egyenlő szárú háromszögben az alappal szemben fekvő szög 80° Mekkora a háromszög kerülete?
14. Egy 120° -os szög csúcsa köré egységkört rajzolunk. Számítsa ki annak az egységkört belülről érintő körnek a sugarát, amely a szög szárait érinti.
15. Az a oldalú szabályos háromszög kerületének minden pontja egy r sugarú kör középpontja. Számítsa ki a körök által lefedett síkrész területét!
16. Bizonyítsd be, hogy ha egy háromszögben:
$$\sin \gamma = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta},$$
akkor a háromszög derékszögű!
17. Egy háromszög két oldala 4 és 12 egység, a közbezárt szög felezője 3 egység. Mekkora a harmadik oldala és mekkorák a szögei?
18. Egy szabályos nyolcszög legrövidebb átlójának hossza 8 cm. Mekkora a nyolcszög oldala és területe?
19. Egy r sugarú körbe olyan konvex tizenkétszög írható, amelynek hat oldala $\sqrt{2}$, másik hat oldala pedig $\sqrt{24}$ hosszúságú. Mekkora az r ?
20. Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója $AB=10$. A D pont a háromszög köré írt körnek a C csúcsot nem tartalmazó AB ívén van, és C-ből az AD szakasz 30° -os szögben látszik. Mekkora az ACD háromszög oldalai?

21. Egy 4 egység sugarú körbe írt hegyesszögű ABC háromszögben $AB=4\sqrt{2}$, $AC=4\sqrt{3}$. Mekkora a háromszög szögei?
22. Az ABC háromszögben $AC=BC$. Az AC oldalon felvesszük a D és E pontokat úgy, hogy $AD=DE=EC$ legyen. Számítsuk ki a háromszög területét, ha $BD=8,5$ és $BE=10$.
23. Egy háromszög szögei α, β, γ . Bizonyítsa be, hogy ha:

$$2 \cos \alpha = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta},$$
akkor a háromszög egyenlő szárú!
24. Egy háromszög oldalainak hossza 13; 14, illetve 15 egység. Mekkora annak a körnek a sugara, amelynek középpontja a háromszög leghosszabb oldalán van, és a kör érinti a háromszög másik két oldalát?
25. Egy háromszög egyik szöge 120° -os, egyik oldala egyenlő a másik kettő számtani közepével. Hogyan aránylanak egymáshoz az oldalak?
26. Az ABCD húrnégyszögben $AB=1$, $BC=2$, $CD=3$ és $DA=4$. Mekkora a B csúcsnál levő szög?
27. Egy háromszög a, b és c oldala között a következő összefüggés áll fenn:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}.$$
Mekkora a b oldallal szemközti szög?
28. Egy r sugarú körbe írt háromszög egyik oldala $\frac{r}{2}$, a másik $r\sqrt{3}$. Mekkora a háromszög szögei?
29. Egy háromszög α és β szögeire

$$(1 + \operatorname{tg} \alpha)(1 + \operatorname{tg} \beta) = 2$$
Mekkora a háromszög harmadik szöge?
30. Egy hegyesszögű háromszög egyik oldala 16, másik két oldalának aránya 3:2; a háromszög köré írható kör sugara 10. Mekkora a háromszög másik két oldala?

2. VEKTOROK ÉS KOORDINÁTAGEOMETRIA

A koordinátageometria alapképletei

Legyen a síkon adva két pont $A_1(x_1, y_1)$ és $A_2(x_2, y_2)$. Ekkor távolságuk:

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

Az $A_0(a, b)$ középpontú körvonal egyenlete:

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$$

Ha az origó a körvonal középpontja:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Az egyenes általános egyenlete:

$$ax + by + c = 0, \text{ ahol } a, b \text{ a normál vektor koordinátái.}$$

Műveletek vektorokkal

Legyen adva $A_1(x_1, y_1)$ és $A_2(x_2, y_2)$ pontokkal meghatározott $\overline{A_1A_2}$ vektor. A vektor koordinátái:

$$a_1 = x_2 - x_1$$

$$a_2 = y_2 - y_1$$

A vektor abszolút értéke pedig:

$$|\overline{A_1A_2}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Vektorok összeadása:

$$\overline{a}(a_1, a_2) + \overline{b}(b_1, b_2) = \overline{c}(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

Az összeadás tulajdonságai:

$$1.) \overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$$

$$2.) (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$$

Vektor számmal való szorzása:

$$\lambda(\overline{a} + \overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}$$

Vektorok skaláris szorzata:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

$$\overline{a}^2 = \overline{a} \cdot \overline{a}.$$

2.1. KIDOLGOZOTT FELADATOK

1. Határozza meg a $2x - 3y = 2$ egyenletű egyenesnek azt a pontját, amely az A(0;3) és B(4;7) pontoktól egyenlő távolságra van!

Adva van:

$2x - 3y = 2$ egyenes,

A(0;3),

B(4;7).

$P(x, y) = ?$

Megoldás:

Mivel a keresett pont egyenlő távolságra van az A és B pontoktól, ezért a koordináták segítségével felírható az alábbi egyenlőség:

$$x^2 + (y - 3)^2 = (x - 4)^2 + (y - 7)^2,$$

most pedig egyszerűsítjük a kifejezést

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 14y + 49$$

$$-6y + 9 = -8x + 16 - 14y + 49$$

$$8x + 8y - 56 = 0$$

$$x + y - 7 = 0$$

Ez az a mértani alakzat egy egyenes, amely a két ponttól egyenlő távolságra lévő pontokat határozza meg.

Tehát a keresett P pontot megkapjuk, ha megkeressük a két egyenes metszéspontját:

$$\begin{cases} 2x - 3y - 2 = 0 \\ x + y - 7 = 0 \quad / \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y - 2 = 0 \\ 2x + 2y - 14 = 0 \end{cases}$$

$$-5y + 12 = 0$$

$$5y = 12$$

$$y = 2,4$$

Most pedig behelyettesítjük az egyik egyenletbe y-t, és megkapjuk az x koordinátát:

$$x + 2,4 - 7 = 0$$

$$x = 4,6$$

Tehát P(4,6; 2,4)

Felelet: a keresett pont P(4,6; 2,4)

2. Egy háromszög oldalainak felezőpontjai: A(-7;-2), B(-1;9) és C(5;-3). Számítsa ki a háromszög csúcsainak koordinátáit!

Adva van:

A, B, C felezőpontok,

A(-7;-2),

B(-1;9),

C(5;-3).

$D(x_1, y_1), E(x_2, y_2), F(x_3, y_3)$

Megoldás:

Ha A, B, C a háromszög csúcsainak felezőpontjai, akkor igazak az alábbi összefüggések:

1) ha A DE oldal felezőpontja, akkor:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -7 \quad \text{Ebből: } x_1 + x_2 = -14$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = -2 \quad y_1 + y_2 = -4$$

2) ha B a DF oldalé, akkor:

$$\frac{x_1 + x_3}{2} = -1 \quad \text{Ebből: } x_1 + x_3 = -2$$

$$\frac{y_1 + y_3}{2} = 9 \quad y_1 + y_3 = 18$$

3) ha C EF felezője, akkor:

$$\frac{x_2 + x_3}{2} = 5 \quad \text{Ebből: } x_2 + x_3 = 10$$

$$\frac{y_2 + y_3}{2} = -3 \quad y_2 + y_3 = -6$$

Most pedig egyenletrendszert alkotunk a koordinátákkal és meghatározzuk őket:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -14 \\ x_1 + x_3 = -2 \\ x_2 + x_3 = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 + y_2 = -4 \\ y_1 + y_3 = 18 \\ y_2 + y_3 = -6 \end{cases} \quad \text{és}$$

$$x_1 = -13 \quad y_1 = 10$$

A megoldások: $x_2 = -1 \quad y_2 = -14$

$$x_3 = 11 \quad y_3 = 8$$

Tehát a csúcsok koordinátái:

D(-13; 10), E(-1; -14), F(11; 8)

Felelet: D(-13; 10), E(-1; -14), F(11; 8)

3. Adott négy pont a koordinátaival: A(1;-1), B(5;1), C(7;7), D(3;5). Igazolja, hogy az ABCD négyszög paralelogramma, és számítsa ki a területét!

Adva van:

A(1;-1),

B(5;1),

C(7;7),

D(3;5)

S = ?

Megoldás:

A paralelogramma olyan négyszög, amelynek szemben fekvő oldalai párhuzamosak és egyenlők. Tehát ahhoz, hogy bebizonyítsuk, hogy paralelogramma a pontok által meghatározott mértani alakzat, elegendő bebizonyítanunk a szemben fekvő oldalak egyenlőségét. Tehát, ha $AB = DC$ és $AD = BC$, akkor ABCD négyszög paralelogramma.

$$AB = \sqrt{(1-5)^2 + ((-1)-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

$$DC = \sqrt{(3-7)^2 + (5-7)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

Tehát az első állítás igaz: $AB = DC$

$$AD = \sqrt{(1-3)^2 + ((-1)-5)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$$

$$BC = \sqrt{(5-7)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40}$$

Mivel $AB = DC$ és $AD = BC$ ezért a mértani alakzat paralelogramma.

Területét kiszámíthatjuk az alábbi képlettel:

$$S = a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

$$AB = \bar{a} = \sqrt{20}$$

$$AD = \bar{b} = \sqrt{40}$$

A $\sin \alpha$ kifejezhető $\cos \alpha$ -ból, $\cos \alpha$ pedig kifejezhető a vektorok skaláris szorzatából.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos \alpha$$

$$\bar{a} = (4, 2)$$

$$\bar{b} = (2, 6)$$

$$\cos \alpha = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{8+12}{\sqrt{16+4} \cdot \sqrt{4+36}} = \frac{20}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{40}} = \frac{20}{\sqrt{800}} = \frac{20}{20\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ, \alpha = 45^\circ$$

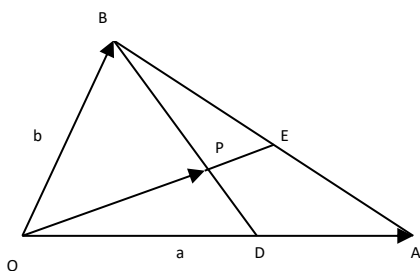
$$S = \sqrt{20} \cdot \sqrt{40} \cdot \cos 45^\circ = 20\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 20 \text{ terület egység.}$$

Felelet: az ABCD négyszög paralelogramma területe pedig 20 négyzet egység.

2.2. BEGYAKORLÓ FELADATOK

1. Egy rombusz egyik átlója a másik átlójának a kétszerese; a rövidebbik átló végpontjai: $A(6;-4)$ és $C(-2;6)$. Határozza meg a hiányzó csúcsok koordinátáit!
2. Egy háromszög köré írt kör O középpontjából a csúcsokhoz mutató vektorokat jelöljük a -val, b -vel és c -vel! Bizonyítsa be, hogy ha $\overrightarrow{OM} = a + b + c$, akkor az M pont a háromszög magasságpontja!
3. A $P(4;2)$ ponton átmenő egyenes az x tengelyt $(a,0)$, az y tengelyt $(0;b)$ pontban metszi. Fejezze ki a -t a b függvényeként!
4. Egy téglalap hosszabbik oldala háromszorosa a rövidebb oldalnak. Az egyik oldal végpontjainak koordinátái: $(-2;4)$ és $(7;16)$. Adja meg a téglalap hiányzó csúcsainak koordinátáit!
5. Az ABC háromszög AB , BC és CA oldalain jelölje ki a C' , A' és B' pontokat úgy, hogy azok a megfelelő oldalakat azonos arányban osszák. Bizonyítsd be, hogy az AA' , BB' , és CC' oldalakkal lehet háromszöget szerkeszteni!
6. Az $ABCD$ négyszög oldalvektorai $\overrightarrow{AB} = a$; $\overrightarrow{BC} = b$; $\overrightarrow{CD} = c$. Írja fel az a , b , c vektorok segítségével az átlók felezőpontjait összekötő vektort!
7. Egy háromszög két csúcsának koordinátái: $A(3;4)$, $B(7;4)$; a harmadik csúcson átmenő oldalak párhuzamosak a $v_1(7;6)$, illetve a $v_2(1;2)$ vektorokkal. Mekkora a háromszög területe?
8. Jelölje egy háromszög oldalait rendre a , b és c , a köré írt kör sugarát pedig r . Igazolja, hogy

$$K = a^2 + b^2 + c^2 - 8r^2$$
 Kifejezés pontosan akkor pozitív, nulla, illetve negatív, amikor a háromszög hegyesszögű, derékszögű, illetve tompaszögű!
9. Mit tud mondani egy téglatest egy csúcsából kiinduló 3 oldalélvektora, 3 lapátlóvektora és testátlóvektora (összesen 7 vektor) összegéről?
10. Az $SABC$ tetraéder S csúcsából induló SA , SB és SC élek páronként merőlegesek egymásra. Bizonyítsa be, hogy az ABC háromszög hegyesszögű!
11. Egy O csúcspontú szög egyik szárán felveszünk egy AB , a másik szárán egy, az AB -vel egyenlő hosszú $A'B'$ szakaszt. A pontok sorrendje OAB , illetve $OA'B'$. Az AA' és BB' szakaszok F_1 és F_2 felezőpontjait összekötő egyenesről mutassuk meg, hogy párhuzamos a szögfelező merőlegessel!



12. Az ABC háromszög A csúcsából induló súlyvonal melyik pontban lesz minimális a háromszög csúcsaitól mért távolságok négyzetösszege?

13. Adott az $ABCD$ négyszög két oldalvektora: $\overrightarrow{DC} = a$ és $\overrightarrow{AB} = b$. Legyen, az AD oldal felezőpontja az E pont, és a BC felezőpontja az F pont! Írja fel az $\overrightarrow{EF}$ vektort az a és b segítségével! 14. Az OAB általános háromszög OA és AB oldalait osszuk három egyenlő részre. Az ábrának megfelelően rajzolt $\overrightarrow{OP}$ vektort írjuk fel az $\overrightarrow{OA} = a$ és $\overrightarrow{OB} = b$ vektorok

segítségével! Határozzuk meg az $\overrightarrow{OP}$ vektor hosszát, ha $a(5;4)$ és $b(2;8)$.

14. Egy négyzet egyik csúcsának koordinátái $(5;7)$, egyik átlójának egyenlete $3x+4y = 18$. Írja fel a többi csúcs koordinátáit!
15. Állapítsa meg, hány olyan egyenes van, amely áthalad az $A(1;8)$ ponton, és egyenlő távolságra van a $P(-3;5)$ és $Q(9;-1)$ pontoktól! Írja fel ezeknek az egyeneseknek az egyenletét!

16. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $(3;5)$ ponton, a $3x+2y-14=0$ és a $3x+2y-9=0$ egyenletű egyeneseket pedig olyan pontokban metszi, amelyek abszcisszáinak különbsége 1.
17. Mekkora a területe annak a négyzetnek, amelynek két oldalegyenese az $5x-12y+26=0$ és az $5x-12y-65=0$ egyenletű egyenes?
18. Egy húrnégyszög átlói merőlegesek egymásra. Az átlók metszéspontja $E(1;2)$, a négyszög két szomszédos oldalának egyenlete $2x+y=0$, illetve $2x-y+4=0$. Írja fel a négyszög köré írt kör egyenletét!
19. Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely átmegy az $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ és az $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 4 = 0$ körök metszéspontjain, és középpontja az x tengelyen van!
20. Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely átmegy az $A(10;2)$ ponton, és az $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ egyenletű kört a legkisebb ordinátájú pontban érinti!
21. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletének, amely a koordináta-rendszer kezdőpontja körül rajzolt egységnyi sugarú kört az első síknegyedben érinti, és az y tengely pozitív feléből kétszer akkora szakaszt vág le, mint az x tengely pozitív feléből! Számítsa ki az érintési pont koordinátáit!
22. Az $x+2y=20$ egyenesnek melyik pontja van az $x^2 + y^2 = 4$ körvonalhoz legközelebb?
23. Az SB szakasz A -n túli meghosszabbításán vegyünk fel egy C pontot, és C -ben emeljünk egy g merőleges egyenest az AB egyenesre! Kössük össze a g egyenes egy P pontját A -val PA -ra, B -ben PB -re! Állapítsa meg e merőlegesek metszéspontjának halmazát, ha a P pont C kivételével befutja a g egyenes pontjait!
24. Írja fel az $y = 4x^2 + 4$ parabola origón áthaladó érintőinek egyenletét. Számítsa ki az érintési pontok koordinátáit!
25. Írja fel annak a legkisebb körnek az egyenletét, amely érinti az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű kört és a $3x + 4y = 75$ egyenletű egyenest!
26. Mekkora az $y^2 = 2px$ parabola p paraméterét, ha a parabola érinti az $ax + by + c = 0$ egyenest?
27. Írja fel a $4x+1001y=2002$ egyenes és a koordinátatengelyek által meghatározott háromszög belsejének azon egész koordinátájú pontját, mely az origótól legtávolabb van!
28. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$ egyenletű kör $P(1;3)$ pontra vonatkozó tükörképének egyenletét!
29. Írja fel $4x + 1001y = 2002$ egyenes és a koordinátatengelyek által meghatározott háromszög belsejének azon egész koordinátájú pontját, mely az origótól legtávolabb van!
30. Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely átmegy a $P_1(-1,3)$ és $P_2(2,6)$ ponton és középpontja illeszkedik a $2x - y - 1 = 0$ egyenesre!

IRODALOMJEGYZÉK

1. По́йа Д. Как решать задачу. – 2-е изд. испр. – М.: Учпедгиз, 1961. – 207 с.
2. Pólya György: A gondolkodás iskolája.– Gondolat Kiadó, Budapest 1969., 269 old.
3. М. І. Сканаві Збірник задач з математики – 2011. –Київ Арії– 605 с.
4. Підручники з математики для ЗОШ.
5. Підручники з математики для класів з поглибленим вивченням математики.
6. В. М. Орос, В. М. Петечук, К. М. Петечук Контрольно-практичні роботи з математики ч. 1, 2 Ужгород 2008 ЗІПО
7. Sümegi László Matematikai feladatok haladóknak Debrecen 2000
8. Gerőcs László Készüljünk az írásbeli érettségi vizsgára matematikából. Nemzeti Tankönyvkiadó Budapest 2012

Методичні вказівки до елементарної математики частина II. / Módszertani útmutató elemi matematikához II. rész: методичні вказівки до практичних (семінарських) занять з навчальної дисципліни «Елементарна математика» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання, освітня програма: «Середня освіта (Математика)», галузь знань: «01 Освіта/Педагогіка», спеціальність(спеціалізація): «014 Середня освіта (014.04 Математика)» / Розробники: Дезидер Поллої, Адам Доровці – Берегове: ЗУІ ім. Ф.Ракоці II, 2022. – 24 с. (українською та угорською мовами)

Методичні вказівки «Методичні вказівки до елементарної математики частина II. / Módszertani útmutató elemi matematikához II. rész» призначаються для більш ефективної організації роботи на практичних заняттях з дисципліни «Елементарна математика» здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти, другого курсу денної та заочної форми навчання, які навчаються на спеціальності(спеціалізації) «014 Середня освіта (Математика)». Основна мета методичному вказівнику – це підвищити загальну математичну культуру студентів, навчити їх розв’язувати завдання шкільного курсу математики поглибленого і підвищеного рівнів; поглибити, систематизувати знання, отримані в школі; розвинути творчий підхід до розв’язання нестандартних завдань.

Виробничо-практичне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ ЧАСТИНА II./ MÓDSZERTANI ÚTMUTATÓ ELEMÍ MATEMATIKÁHOZ II. RÉSZ

Методичні вказівки до практичних (семінарських) занять

2022 р.

Затверджено до використання у навчальному процесі на засіданні кафедри математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II (протокол № 1 від «26» серпня 2022 року)

*Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості вищої освіти
Закарпатського угорського інституту ім. Ф. Ракоці II
(протокол № 1 від «10» жовтня 2022 року)*

*Рекомендовано до видання в електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту ім. Ф. Ракоці II
(протокол № 7 від «13» жовтня 2022 року)*

Підготовлено до видання в електронній формі (PDF) кафедрою математики та інформатики спільно з Видавничим відділом Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Розробники методичних вказівок:

Дезидер ПОЛЛОЇ – старший викладач кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Адам ДОРОВЦІ – асистент кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Рецензенти:

Марія БОРТОШ – кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри алгебри та диференціальних рівнянь Ужгородського Національного Університету

Каталін КУЧІНКА – кандидат фіз.-мат. наук, завідувач кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Відповідальні за випуск:

Мирослав СТОЙКА – доцент; Кандидат фізико-математичних наук, доцент Кафедра математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II

Олександр ДОБОШ – начальник Видавничого відділу ЗУІ ім. Ф.Ракоці II

За зміст методичних вказівок відповідальність несуть розробники.

Видавництво: Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II (адреса: пл. Кошута 6, м. Берегове, 90202. Електронна пошта: foiskola@kmf.uz.ua) *Свідомо про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції Серія ДК 7637 від 19 липня 2022 року*

Шрифт «Times New Roman». Розмір сторінок методичних вказівок: А4 (210х297мм).