ЗАКАРПАТСЬКИЙ УГОРСЬКИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ФЕРЕНЦА РАКОЦІ II II. RÁKÓCZI FERENC KÁRPÁTALJAI MAGYAR FŐISKOLA

Кафедра математики та інформатики

Математичний аналіз/
Matematikai analízis

Курс лекції

Előadást támogató jegyzet

Берегове / Beregszász

2022р. / 2022

Укладач:
Кучінкай К.Й. – доцент кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

ЗМІСТ

Розділ 1

Теорія множин. Дійсні числа

1.1. Логічні символи

У математичних текстах заведено використовувати логічні символи, якими замінюють деякі вислови, що часто повторюються. Зокрема, замість висловів *"для всіх"*, *"для кожного"*, *"для будь-якого"* застосовують знак $\forall$, а замість слів *"існує"*, *"знайдеться"* — знак $\exists$. Ці знаки називають, відповідно, *кванторами загальності* та *існування.*

Кожна теорема складається з деякої властивості A (умови) та властивості B (висновку), що записують у вигляді $A \Rightarrow B$ і читають *"якщо A, то B"* ($\Rightarrow$ — *символ імплікації*). Також кажуть, що B є необхідною умовою A, і водночас A є достатньою умовою B. Якщо справджується й обернене твердження, що записують $B \Rightarrow A$, то властивості A та B називають *еквівалентними.* У такому разі записують $A \Leftrightarrow B$ ($\Leftrightarrow$ — символ еквівалентності) і читають *"для того, щоб A, необхідно і досить, щоб B"* або *"A тоді й лише тоді, коли B".*

Якщо деякий об'єкт має властивість A або властивість B, то записують $A \vee B$ і читають *"A або B"* ($\vee$ — *символ диз'юнкції*).

Якщо обидві властивості A та B виконуються одночасно, то це записують у вигляді $A \wedge B$ і читають "*A і B*" ($\wedge$ — *символ кон'юнкції*).

Запис $\neg A$ (читають "*не A*", "*неправильно, що A*") означає, що властивість A не виконується ($\neg$ — *символ заперечення*).

Замість слів *"існує єдиний"* вживають знак $\exists!$, замість *"дорівнює за означенням"* — знак $\stackrel{\text{def}}{=}$, а замість *"за означенням"* — знак $\stackrel{\text{def}}{\equiv}$ (синонім символа $\Leftrightarrow$).

Математичне висловлювання можна записати за допомогою логічних символів. Зазначимо, що заперечення висловлювання, яке містить деяку кількість кванторів $\forall$, $\exists$ та властивість A, отримують заміною кожного квантора $\forall$ квантором $\exists$, квантора $\exists$ — квантором $\forall$, а властивість A — її запереченням.

Пропонуємо ще раз звернути увагу на запис логічних знаків та їхній зміст (табл. 1.1):

Таблиця 1.1

Запис	Назва	Читають
$\forall$	Квантор загальності	*"Для кожного", "для всіх", "для будь-якого"*
$\exists$	Квантор існування	*"Існує", "знайдеться"*
$A \Rightarrow B$	Символ імплікації	*"Якщо A, то B "*
$A \Leftrightarrow B$	Символ еквівалентності	*"Для того, щоб A, необхідно і досить, щоб B"*
$A \vee B$	Символ диз'юнкції	*"A або B"*
$A \wedge B$	Символ кон'юнкції	*"A і B"*
$\neg A$	Символ заперечення	*"Не A"*
$\exists!$	Символ єдиності	*Існує єдиний*
$\stackrel{\text{def}}{=}$	—	*Дорівнює за означенням*
$\stackrel{\text{def}}{\equiv}$	—	*За означенням*

Зауваження 1.1.1. Для наочності у записі математичних висловлювань квантори записуватимемо у круглих дужках, а властивість — у фігурних. Наприклад,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\ \{|x_n - a| < \varepsilon\}.$$

Часто теореми доводять методом від супротивного. У цьому випадку використовуватимемо принцип вилучення третього, згідно з яким вислів $A \vee \neg A$ (A або не A) вважають істинним незалежно від конкретного змісту вислову A.

Також вважатимемо, що $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$, тобто повторне заперечення (заперечення заперечення) рівносильне початковому вислову.

1.2. Множини. Операції з множинами

Поняття *множини* є одним з первісних (початкових) понять математики, тобто тих, які не підлягають визначенню.

Найсуттєвішим у понятті множини є об'єднання *різних* об'єктів в *одне ціле*. За словами творця теорії множин, видатного німецького математика **Георга Кантора** (1845—1918), множина — це збірка певних і різних об'єктів нашої інтуїції чи інтелекту, яку розглядають як ціле.

Як синоніми до слова "множина" використовують слова *сукупність*, *сім'я*, *клас*.

Приклади множин:

— множина студентів університету;
— множина парт (столів, стільців) в аудиторії;
— множина листків на дереві;
— $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;
— $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел;

— $\mathbb{Q}$ — множина раціональних чисел;
— $\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел;
— $[a,b] = \{x \in \mathbb{R}\colon a \leq x \leq b\}$ — відрізок;
— $(a,b) = \{x \in \mathbb{R}\colon a < x < b\}$ — інтервал;
— $[a,b) = \{x \in \mathbb{R}\colon a \leq x < b\}$ — півінтервал;
— $(a,b] = \{x \in \mathbb{R}\colon a < x \leq b\}$ — півінтервал.

Об'єкти, що утворюють множину, називають її *елементами*. Те, що елемент x належить множині A (є її елементом), записують

$$x \in A \text{ або } A \ni x,$$

а те, що x не належить множині A (не є її елементом) —

$$x \notin A.$$

Множини позначатимемо великими літерами $A, B, C, X, Y, \dots$; елементи множин — малими $a, b, c, x, y, z, \dots$.

Множину вважають означеною, якщо про кожен об'єкт, який розглядають, можна сказати, належить він чи не належить множині.

Задати множину можна двома способами:

1) перелічити всі її об'єкти (елементи), наприклад $A = \{1, 10, -8\}$; $B = \{a, b, c, f\}$;

2) вказати властивість елементів множини, яку записують так:

$$A = \{x \in X : P(x)\} \text{ або } A = \{x \in X \mid P(x)\},$$

де $P(x)$ — деяка властивість, яку мають або якої не мають елементи з множини X.

Тобто множина A складається з тих елементів множини X, які мають властивість $P(x)$. Наприклад:

$$A = \{x \in \mathbb{R}\colon x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2, 3\};$$
$$B = \{x \in \mathbb{N}\colon x^2 = 9\} = \{3\};$$
$$C = \{x \in \mathbb{N}\colon n < 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

У випадку задання множини за допомогою деякої властивості можна не знати, чи існують взагалі елементи, які її мають. Тому доцільно і зручно ввести до розгляду множину, яка не має жодного елемента. Таку множину називають *порожньою* і позначають $\varnothing$.

Означення 1.2.1. Множину A називають *підмножиною* множини B, якщо кожен елемент множини A належить множині B.

У такому разі записують

$$A \subset B \quad (\text{або } B \supset A)$$

і читають “множина A є підмножиною множини B”, “множина A міститься в множині B”, “множина B містить множину A”.

Це ж означення можна записати так:

$$(A \subset B) \stackrel{\text{def}}{\equiv} (x \in A) \Rightarrow (x \in B).$$

Вважають, що $\varnothing \subset A$ для будь-якої множини A, тобто порожня множина є підмножиною будь-якої множини.

Означення 1.2.2. Множини A і B називають *рівними*, якщо $A \subset B$ і $B \subset A$ водночас. Тоді записують $A = B$.

Отже,

$$(A = B) \stackrel{\text{def}}{\equiv} (A \subset B) \wedge (B \subset A).$$

Означення 1.2.3. *Об'єднанням* множин A і B називають множину $A \cup B$, яка містить усі елементи, які належать хоча б одній з множин A, B і не містить інших елементів.

Отже,

$$A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \colon (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

Наприклад:

$$[-1, 0] \cup [0, 1] = [-1, 1], \quad \{3\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3\}.$$

Означення 1.2.4. *Перетином* множин A і B називають множину $A \cap B$, яка складається з усіх тих елементів, які належать кожній з множин A, B і не містить інших елементів.

Отже,

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \colon (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Наприклад:

$$\{a, b, c, d\} \cap \{b, c, f\} = \{b, c\}, \quad [-1, 0] \cap [0, 1] = \{0\}.$$

Означення 1.2.5. *Різницею* множин A і B називають множину $A \setminus B$, що складається з усіх тих елементів множини A, які не належать множині B.

Отже,

$$A \setminus B \overset{\text{def}}{=} \{x\colon (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

Наприклад:

$$\{a, b, c, d\} \setminus \{a, b, c, f\} = \{d\}, \quad [-1, 1] \setminus \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = \left[-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right].$$

Якщо розглядають підмножини деякої множини X, то її називають *універсальною* (або *основною*) множиною.

Означення 1.2.6. *Доповненням* до множини A називають множину $cA \overset{\text{def}}{=} X \setminus A$.

Означення 1.2.7. Множину $A \times B \overset{\text{def}}{=} \{(x, y)\colon x \in A, y \in B\}$ називають *декартовим добутком* множин A і B.

Проілюструємо основні дії з множинами за допомогою діаграм, які називають діаграмами Ейлера-Вена (рис. 1.1):

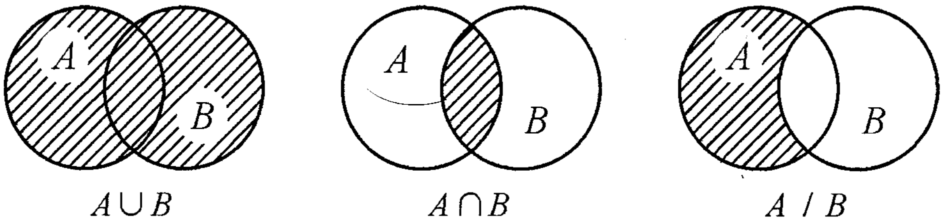


Рис. 1.1

Основні властивості дій з множинами:

I. 1) $A \cup B = B \cup A$;

2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \overset{\text{def}}{=} A \cup B \cup C$;

3) $(A \subset B) \Rightarrow (A \cup B = B)$;

4) $A \cup A = A$;

5) $A \cup \varnothing = A$.

II. 1) $A \cap B = B \cap A$;

2) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \overset{\text{def}}{=} A \cap B \cap C$;

3) $(A \subset B) \Rightarrow (A \cap B = A)$;

4) $A \cap \varnothing = \varnothing$;

5) $A \cap A = A$.

III. 1) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

3) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$;

4) $\mathsf{c}(A \cup B) = \mathsf{c}A \cap \mathsf{c}B$;

5) $\mathsf{c}(A \cap B) = \mathsf{c}A \cup \mathsf{c}B$;

Доведемо деякі з цих властивостей, решту пропонуємо довести самостійно.

Властивість III(1).

Доведення. Нехай $x \in (A \cup B) \cap C$. Тоді $x \in A \cup B \wedge x \in C$. Те, що $x \in A \cup B$, означає, що $x \in A$ або $x \in B$. Якщо $x \in A$, то $x \in A \cap C$, а якщо $x \in B$, то $x \in B \cap C$. Звідси $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Отже,

$$(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C). \tag{1.1}$$

Нехай $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Тоді або $x \in A \cap C$, або $x \in B \cap C$. Якщо $x \in A \cap C$, то $x \in A \wedge x \in C$. Оскільки $x \in A$, то $x \in A \cup B$, отже, $x \in (A \cup B) \cap C$. Якщо ж $x \in B \cap C$, то $x \in B \wedge x \in C$. Оскільки $x \in B$, то $x \in A \cup B$, отже, $x \in (A \cup B) \cap C$.

Звідси

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C. \tag{1.2}$$

Із співвідношень (1.1) та (1.2) згідно з означенням 1.2.2 маємо

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C.$$

□

Властивість III(4).

Доведення. Маємо

$$\big(x \in \mathsf{c}(A \cup B)\big) \Leftrightarrow \big(x \notin (A \cup B)\big) \Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \in \mathsf{c}A \wedge x \in \mathsf{c}B) \Leftrightarrow \big(x \in (\mathsf{c}A \cap \mathsf{c}B)\big).$$

Отже, $\mathsf{c}(A \cup B) = \mathsf{c}A \cap \mathsf{c}B$. □

Означення 1.2.8. Множину, яка складається зі скінченної кількості елементів, називають *скінченною*, а в протилежному випадку — *нескінченною*.

1.3. Загальне поняття функції (відображення)

Означення 1.3.1. *Функцією* (або *відображенням*) f множини X у множину Y називають правило, яке кожному елементу $x \in X$ ставить у відповідність один і лише один елемент $y \in Y$.

Множину X називають *областю визначення* функції f і позначають $\mathcal{D}(f)$.

Множину $R(f) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{y \in Y \mid (\exists x \in \mathcal{D}(f) \colon f(x) = y)\}$ називають *множиною значень* функції f.

Загальний елемент $x \in X$ називають *аргументом*, або *незалежною змінною*.

Елемент $y \in Y$, який відображення f ставить у відповідність елементові x, називають *образом елемента* x при відображенні f, або *значенням відображення* f у точці x і позначають символом $f(x)$ (писатимемо $y = f(x)$ або $f \colon x \mapsto y$).

Зазначимо, що слова *функція*, *відображення*, *оператор*, *відповідність*, *перетворення* — синоніми.

Кожен запис

$$1)\ y = f(x),\ x \in X, \quad 2)\ f \colon X \to Y, \quad 3)\ X \xrightarrow{f} Y$$

означає, що f є відображенням множини X у множину Y.

Приклад 1.3.1.

1) $X = Y = \{1, 2, 3, 4\}$

x	1	2	3	4
f(x)	2	1	4	3

(підстановка);

2) $X = \mathbb{N}$, $Y = \mathbb{R}$, $f(n) = \sqrt{n}$ (послідовність);

3) $X = (0; +\infty)$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = \lg x$ (дійсна функція однієї дійсної змінної);

4) $X = \mathbb{R}^2 \stackrel{\text{def}}{=\!=} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$ (дійсна функція двох дійсних змінних).

Означення 1.3.2. Відображення $f_1 \colon X_1 \to Y_1$ та $f_2 \colon X_2 \to Y_2$ називають *рівними*, якщо:

1) $X_1 = X_2$;

2) $(\forall x \in X_1)\ \{f_1(x) = f_2(x)\}$.

Означення 1.3.3. Нехай $f \colon X \to Y$, $X_0 \subset X$. Визначимо $f_0 \colon X_0 \to Y$, прийнявши

$$(\forall x \in X_0)\ \{f_0(x) \stackrel{\text{def}}{=\!=} f(x)\}.$$

Тоді функцію f_0 називають *звуженням* функції f на X_0, а функцію f — *продовженням* функції f_0 на X.

Означення 1.3.4. Нехай $f\colon X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$. *Образом* множини A при відображенні f називають множину

$$f(A) \overset{\text{def}}{=\!=} \{y \in Y \mid \big(\exists x \in A\colon f(x) = y\big)\} = \{f(x) : x \in A\}.$$

Прообразом множини B при відображенні f називають множину

$$f^{-1}(B) \overset{\text{def}}{=\!=} \{x \mid \big(\exists y \in B\colon f(x) = y\big)\} = \{x \in X \ : \ f(x) \in B\}.$$

Означення 1.3.5. Нехай $f\colon X \to Y$. *Графіком* функції f називають множину

$$G(f) = \{(x, y) \in X \times Y \colon x \in X, y = f(x)\}.$$

Зауважимо, що $G(f) \subset X \times Y$.

Означення 1.3.6. Нехай $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$. Функцію $h\colon X \to Z$, визначену формулою

$$h(x) \overset{\text{def}}{=\!=} g\big(f(x)\big) \overset{\text{def}}{=\!=} \big(g \circ f\big)(x),$$

називають *композицією* (або *суперпозицією*) функцій f і g.

Композицію називають також *складеною* функцією.

Означення 1.3.7. Відображення $f\colon X \to Y$ називають

а) *сюр'єкцією* (або відображенням множини X *на* множину Y), якщо $f(X) = Y$;

б) *ін'єкцією* (або взаємно однозначним відображенням множини X *у* множину Y), якщо

$$(\forall x_1 \in X)(\forall x_2 \in X)\colon x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2);$$

в) *бієкцією* (або взаємно однозначним відображенням множини X, на множину Y, або взаємно однозначною відповідністю між множинами X і Y), якщо відображення $f\colon X \to Y$ є сюр'єкцією та ін'єкцією.

Приклад 1.3.2.

1. У цих прикладах крапками позначатимемо елементи множин, а їхні образи визначатимемо за допомогою стрілок (рис. 1.2).

   а — не є функцією; б — не є функцією; в — функція, сюр'єкція, не ін'єкція, не бієкція; г — функція, не сюр'єкція, ін'єкція, не бієкція; д — функція, сюр'єкція, ін'єкція, бієкція; е — функція, не сюр'єкція, не ін'єкція, не бієкція.

2. а) $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ (не сюр'єкція, не ін'єкція);

   б) $X = \mathbb{R}$, $Y = [0, +\infty)$, $f(x) = x^2$ (сюр'єкція, не ін'єкція);

   в) $X = [0, +\infty)$, $Y = [0, +\infty)$, $f(x) = x^2$ (сюр'єкція, ін'єкція, бієкція).

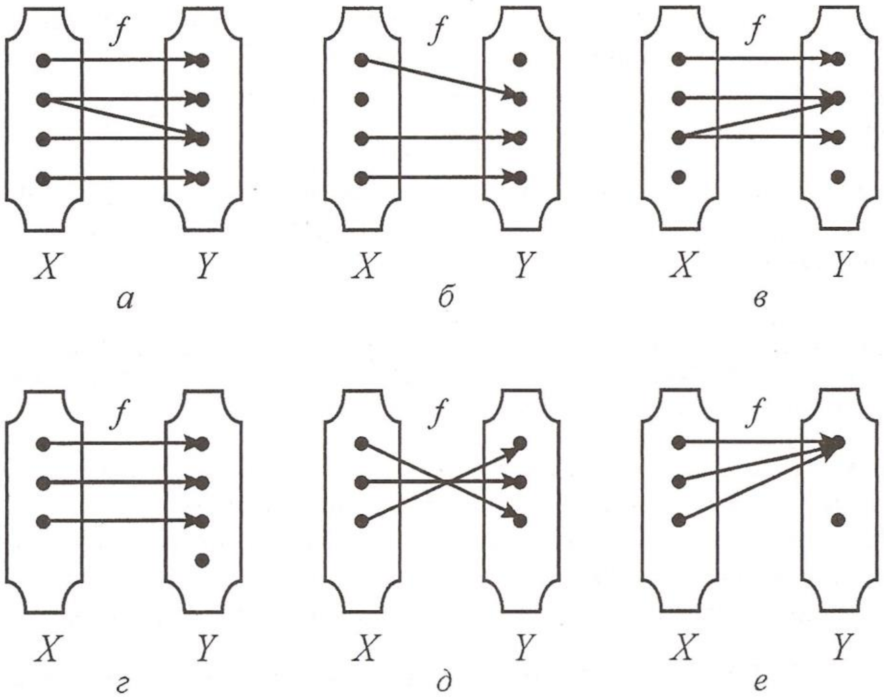


Рис. 1.2

Означення 1.3.8. Нехай функція $f\colon X \to Y$ — бієкція. Приймемо $D(f^{-1}) = Y$, $\forall y = f(x) \in Y\colon f^{-1}(y) \stackrel{\text{def}}{=} x$. Функцію $f^{-1}\colon Y \to X$ називають *оберненою* до функції f.

Переконаємось у коректності цього означення, тобто у тому, що задане правило задає функцію. Справді, нехай $y \in Y$. Тоді з огляду на сюр'єкцію функції f існує $x \in X$ таке, що $f(x) = y$. Нехай $y = f(x_1) = f(x_2)$. Тоді з огляду на ін'єктивність відображення f маємо $x_1 = x_2$, отже, $f^{-1}(y)$ визначена однозначно.

Означення 1.3.9. Відображення $f\colon \mathbb{N} \to X$ називають *послідовністю* елементів з X. Послідовність позначатимемо

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},\ \{a_n\colon n \geq 1\},\ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ або } \{a_n\},$$

де $a_n \stackrel{\text{def}}{=} f(n)$ — n-й член послідовності.

1.4. Потужність множин. Зліченні множини

Скінченні множини порівнюють за запасом їхніх елементів: потрібно порівняти кількість елементів у цих множинах. Для множин, які містять нескінченно багато елементів, такий спосіб не підходить. Чи однакові за запасом елементів множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$? Це питання і відповідь на нього не прості. Математичну теорію, яка відповідає на поставлене питання, створив Г. Кантор. Її вихідним пунктом є таке означення.

Означення 1.4.1. Множини A і B називають *рівнопотужними* (або такими, що *мають однакову потужність*), якщо існує біекція $f\colon A \to B$. Те, що множини A і B рівнопотужні, записують так: $A \sim B$.

Приклад 1.4.1.

Множини $\mathbb{N}$ та множина $B = \{10, 20, 30, \dots, 10n, \dots\}$ є рівнопотужними, оскільки існує біекція $f\colon \mathbb{N} \to B$, де $f(n) = 10n$. Звернемо увагу на те, що $B \subset \mathbb{N}$ і те, що, на перший погляд, у множині B є в десять разів менше елементів, ніж у множині $\mathbb{N}$.

Означення 1.4.2. Множину A називають *зліченною*, якщо $A \sim \mathbb{N}$. У цьому випадку кажуть, що елементи множини A можна занумерувати.

Множину A називають *не більш ніж зліченною*, якщо вона скінченна (у тому числі й порожня) або зліченна.

Нескінченну множину A, яка не є зліченною, називають *незліченною*.

Теорема 1.4.1. *Будь-яка нескінченна множина містить зліченну підмножину.*

Доведення. Нехай A —нескінченна множина. Зафіксуємо будь-який її елемент і позначимо його a_1. Зрозуміло, що множина $A_1 \stackrel{\text{def}}{=} A \setminus \{a_1\}$ — нескінченна. Виберемо будь-який елемент множини A_1 і позначимо його a_2. Продовжимо описаний процес: $A_2 = A_1 \setminus \{a_2\}$ тощо.

Нехай у множині A вибрані елементи $a_1, a_2, \dots, a_n$. Множина

$$A_n = A \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\} = A_{n-1} \setminus \{a_n\}$$

— нескінченна; у ній знову можна вибрати будь-який елемент і позначити його a_{n+1}. Продовжуючи описаний процес, одержуємо елементи $a_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$, які утворюють зліченну підмножину множини A. □

Теорема 1.4.2. *Нескінченна підмножина зліченної множини зліченна.*

Доведення. Нехай A — зліченна множина, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$. Нехай B — нескінченна підмножина множини A.

Перший елемент множини B, що трапиться у разі послідовного перегляду елементів $a_1, a_2, \dots$, позначимо b_1, тобто $b_1 = a_{n_1}$, причому $b_1 \in B$, $a_1 \notin B, \dots, a_{n_1 - 1} \notin B$.

Розглядаємо множину $A \setminus \{a_1, \dots, a_{n_1}\}$ й аналогічно знаходимо в ній елемент $b_2 = a_{n_2} \in B$.

Кожен елемент множини B є серед елементів множини A, тому через деяку кількість кроків йому буде присвоєно певний номер $b_m = a_{n_m}$. □

Теорема 1.4.3. *Об'єднання зліченної кількості зліченних множин є зліченною множиною.*

Доведення. Нехай $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ — зліченні множини. Тоді для кожного $n \geq 1$

$$A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nm}, \dots\},$$

а об'єднання $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ є множина, що складається з усіх елементів нескінченної прямокутної матриці

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11} & \rightarrow & a_{12} & & a_{13} & \rightarrow & \dots & a_{1n} & \dots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & \dots & a_{2n} & \dots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & \dots & a_{3n} & \dots \\
 & \swarrow & & & & & & & \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & & \dots & \cdot & \dots \\
\downarrow & & & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & \dots,
\end{array}$$

які можна занумерувати, наприклад, у порядку, вказаному стрілками. $\square$

Наслідок 1.4.1. *Об'єднання не більш ніж зліченної кількості не більше ніж зліченних множин є не більш ніж зліченною множиною.*

Теорема 1.4.4. *Існують незліченні множини.*

Доведення. Нехай A — множина всіх можливих послідовностей, елементами яких є лише 0 або 1. Елемент множини A має, наприклад, такий вигляд:

$$a = (1, 0, 0, 1, \dots, 0, \dots).$$

Припустимо, що множина A є зліченною, тобто всі її елементи занумеровано:

$$\begin{array}{ccllllll}
a_1 & = & (a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n}, & \dots); \\
a_2 & = & (a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n}, & \dots); \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_n & = & (a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn}, & \dots); \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots,
\end{array}$$

де кожне a_{ij} дорівнює 0 або 1. Однак елемент

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots),$$

де b_i — 0 або 1, що вибираємо за правилом $b_1 \neq a_{11}$, $b_2 \neq a_{22}, \ldots, b_n \neq a_{nn}, \ldots$, належить до множини A, але не збігається з жодним із занумерованих елементів a_n (бо хоча б на n-й позиції стоїть інше число). Отримана суперечність свідчить, що елементи множини A не можна занумерувати. □

Метод, використаний для доведення цієї теореми, називають *діагональним методом Кантора.*

1.5. Аксіоми та основні властивості множини дійсних чисел

Означення 1.5.1. Множину $\mathbb{R}$ елементів $a, b, c, d, \ldots$ називають *множиною дійсних чисел*, якщо для цих елементів визначені операції додавання, множення і відношення порядку, що задовольняють перелічені нижче аксіоми.

I. *Аксіоми додавання.*

У множині $\mathbb{R}$ визначене відображення (операція додавання)

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon (a, b) \mapsto a + b,$$

яке кожній упорядкованій парі елементів $a, b \in \mathbb{R}$ однозначно ставить у відповідність елемент множини $\mathbb{R}$, який називають їхньою *сумою* і позначають $a + b$. Водночас виконуються такі аксіоми:

I(1) (існування нуля). В $\mathbb{R}$ існує число, яке називають нулем (або нейтральним елементом операції додавання) і позначають символом 0, таке, що $\forall a \in \mathbb{R}$

$$a + 0 = a.$$

I(2) (існування оберненого елемента). $(\forall a \in \mathbb{R})(\exists (-a) \in \mathbb{R})$

$$a + (-a) = 0.$$

Число $-a$ називають *протилежним* до числа a.

I(3) (комутативність): $(\forall a, b \in \mathbb{R})$

$$a + b = b + a.$$

I(4) (асоціативність): $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})$

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

II. *Аксіоми множення.*

У множині $\mathbb{R}$ визначене відображення (операція множення)

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon (a, b) \mapsto a \cdot b,$$

яке кожній упорядкованій парі елементів $a, b \in \mathbb{R}$ однозначно ставить у відповідність елемент множини $\mathbb{R}$, який називають їхнім *добутком* і позначають $a \cdot b$. Водночас виконуються такі аксіоми:

II(1) (існування одиниці). В $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ існує число, яке називають одиницею і позначають символом 1, таке, що $\forall a \in \mathbb{R}$

$$a \cdot 1 = a.$$

II(2) (існування оберненого елемента): $(\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\exists a^{-1} \in \mathbb{R})$

$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

Число a^{-1} називають *оберненим* до числа a.

II(3) (комутативність): $(\forall a, b \in \mathbb{R})$

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

II(4) (асоціативність): $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

II(5) (дистрибутивність множення відносно додавання): $(\forall a,\ b, c \in \mathbb{R})$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

III. *Аксіоми порядку.* У множині $\mathbb{R}$ задане відношення $\leq$, тобто для кожної пари елементів $a, b \in \mathbb{R}$ визначено, чи виконується $a \leq b$ чи не виконується. Водночас відношення $\leq$ задовольняє такі аксіоми:

III(1) (рефлексивність): $(\forall a \in \mathbb{R})$

$$a \leq a.$$

III(2) (антисиметричність): $(\forall a, b \in \mathbb{R})$

$$(a \leq b) \wedge (b \leq a) \Rightarrow (a = b).$$

III(3) (транзитивність): $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})$

$$(a \leq b) \wedge (b \leq c) \Rightarrow (a \leq c).$$

III(4) $(\forall a, b \in \mathbb{R})$

$$(a \leq b) \vee (b \leq a).$$

III(5) (зв'язок додавання і порядку): $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})$

$$\big((a \leq b) \Rightarrow (a + c \leq b + c)\big).$$

III(6) (зв'язок множення і порядку): $(\forall a, b \in \mathbb{R})$

$$\big((0 \leq a) \wedge (0 \leq b) \Rightarrow (0 \leq ab)\big).$$

IV. *Аксіома повноти (неперервності).* Якщо X та Y — непорожні підмножини множини $\mathbb{R}$, причому $(\forall x \in X)(\forall y \in Y)\ \{x \leq y\}$, то

$$(\exists c \in \mathbb{R})(\forall x \in X)(\forall y \in Y) \quad \{x \leq c \leq y\}.$$

Наведемо наслідки з аксіом множини дійсних чисел. Ті наслідки, що сформульовані без доведення, пропонуємо довести самостійно.

1) (єдиність нуля): $\exists!\ 0 \in \mathbb{R}$.

Доведення. Припустимо, що існують нулі 0_1 та 0_2, $0_1 \neq 0_2$. Оскільки елемент 0_1 є нулем, то $0_2 + 0_1 = 0_2$, а оскільки елемент 0_2 є нулем, то $0_1 + 0_2 = 0_1$. З огляду на аксіому I(3)

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2,$$

отже, $0_1 = 0_2$; □

2) (єдиність протилежного елемента): $(\forall a \in \mathbb{R})\ \{\exists!\ (-a) \in \mathbb{R}\}$;

3) $(\forall a, b \in \mathbb{R})(\exists!\ x \in \mathbb{R}) \quad \{a + x = b\}$;

4) (єдиність одиниці): $\exists!\ 1 \in \mathbb{R}$;

5) (єдиність оберненого елемента): $(\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \quad \{\exists!\ a^{-1} \in \mathbb{R}\}$;

6) $(\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\forall b \in \mathbb{R})(\exists!\ x \in \mathbb{R}) \quad \{ax = b\}$;

7) $(\forall a \in \mathbb{R}) \quad \{a \cdot 0 = 0\}$;

8) $(\forall a, b \in \mathbb{R})(a \cdot b = 0) \Rightarrow \big((a = 0) \vee (b = 0)\big)$;

9) $(\forall a \in \mathbb{R}) \quad \{(-1) \cdot a = -a\}$;

Доведення. Використовуючи аксіоми II(1,3,5), I(2) та наслідок 7, маємо

$$a + (-1) \cdot a = a \cdot 1 + (-1) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = \big(1 + (-1)\big) \cdot a = 0 \cdot a = 0.$$

Отже, оскільки елемент $(-1) \cdot a$ є протилежним до a, то з огляду на наслідок 2 $(-1) \cdot a = -a$; □

10) $(\forall a \in \mathbb{R}) \quad \{(-1) \cdot (-a) = a\}$;

11) $(\forall a \in \mathbb{R}) \quad \{(-a) \cdot (-a) = a \cdot a\}$;

Означення 1.5.2.

$$(b \geq a) \overset{\text{def}}{\equiv} (a \leq b);$$
$$(a < b) \overset{\text{def}}{\equiv} (a \leq b) \wedge (a \neq b);$$
$$(a > b) \overset{\text{def}}{\equiv} (b < a);$$
$$(a \text{ — додатне }) \overset{\text{def}}{\equiv} (a > 0);$$
$$(a \text{ — невід'ємне }) \overset{\text{def}}{\equiv} (a \geq 0);$$
$$(a \text{ — від'ємне }) \overset{\text{def}}{\equiv} (a < 0);$$
$$(a \text{ — недодатне }) \overset{\text{def}}{\equiv} (a \leq 0);$$

12) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ справджується одне і лише одне зі співвідношень

$$1)\ a < b; \quad 2)\ a = b; \quad 3)\ a > b;$$

Доведення. Очевидно, що

$$(a < b) \Rightarrow (a \neq b), \quad (a > b) \Rightarrow (a \neq b),$$

тому 2 несумісне з 1 і 3. Нехай виконується 1. Якби, крім того, виконувалася і нерівність $a > b$, тим паче $a \geq b$, а з 1 випливає, що $a \leq b$, то згідно з III(2) $a = b$, що неможливо. Отже, ми довели, що з трьох співвідношень може виконуватися не більше, ніж одне.

Доведемо тепер, що одне з них обов'язково виконується. З огляду на III(4) або $a \leq b$, або $b \leq a$, або перше та друге. Нехай, наприклад, $a \leq b$. Якщо $a \neq b$, то справджується співвідношення 1, а якщо $a = b$, то — співвідношення 2. Випадок $b \leq a$ розглядають аналогічно. □

13) $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})\big((a < b) \wedge (b \leq c) \Rightarrow (a < c)\big)$;

14) $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})\big((a < b) \wedge (b < c) \Rightarrow (a < c)\big)$;

15) $(\forall a, b, c \in \mathbb{R})\big((a < b) \Rightarrow (a + c < b + c)\big)$;

16) $(\forall a \in \mathbb{R})\big((0 < a) \Rightarrow (-a < 0)\big)$;

17) $(\forall a, b, c, d \in \mathbb{R})\big((a \leq b) \wedge (c \leq d) \Rightarrow (a + c \leq b + d)\big)$;

18) $(\forall a, b, c, d \in \mathbb{R})\big((a \leq b) \wedge (c < d) \Rightarrow (a + c < b + d)\big)$;

19) $(0 < a) \wedge (0 < b) \Rightarrow (0 < a \cdot b)$;

20) $(a < 0) \wedge (b < 0) \Rightarrow (a \cdot b > 0)$;

21) $(a < 0) \wedge (0 < b) \Rightarrow (a \cdot b < 0)$;

22) $(a < b) \wedge (0 < c) \Rightarrow (a \cdot c < b \cdot c)$;

23) $(a < b) \wedge (c < 0) \Rightarrow (a \cdot c > b \cdot c)$;

24) $0 < 1$;

Доведення. Припустимо, що $1 < 0$. Тоді згідно з наслідком 16 $(-1) > 0$, а помноживши нерівність $1 < 0$ на додатне число (-1), згідно з наслідком 22, отримаємо

$$1 \cdot (-1) < 0.$$

Проте $1 \cdot (-1) = (-1) \cdot 1 = -1$. Отже, $(-1) < 0$, що суперечить припущенню. □

25) $(0 < a) \Rightarrow (0 < a^{-1})$.

1.6. Принцип точної верхньої межі

Означення 1.6.1. Множину $A \subset \mathbb{R}$ називають *обмеженою зверху*, якщо

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in A) \quad \{x \leq M\}.$$

Число M називають *верхньою межею* множини A.

Означення 1.6.2. Множину $A \subset \mathbb{R}$ називають *обмеженою знизу*, якщо

$$(\exists m \in \mathbb{R})(\forall x \in A) \quad \{x \geq m\}.$$

Число m називають *нижньою межею* множини A.

Означення 1.6.3. Множину $A \subset \mathbb{R}$ називають *обмеженою*, якщо вона обмежена і зверху, і знизу.

Означення 1.6.4. Нехай $A \subset \mathbb{R}$. Якщо

$$(\exists c \in A)(\forall x \in A) \quad \{x \leq c\},$$

то c називають *максимальним (найбільшим) елементом* множини A і позначають одним із символів

$$c \stackrel{\text{def}}{=} \max A = \max_{x \in A} x = \max\{x\colon x \in A\}.$$

Аналогічно, якщо

$$(\exists d \in A)(\forall x \in A) \quad \{x \geq d\},$$

то d називають *мінімальним (найменшим) елементом* множини A і позначають одним із символів

$$d \stackrel{\text{def}}{=} \min A = \min_{x \in A} x = \min\{x\colon x \in A\}.$$

Зауважимо, що не кожна числова множина (навіть якщо вона обмежена) має мінімальний чи максимальний елемент (хоча, якщо вже має, то єдиний).

Приклад 1.6.1.

Нехай $X = [0, 1)$. Тоді $\min X = 0$, а $\max X$ — не існує.

Означення 1.6.5. Найменшу верхню межу множини $A \subset \mathbb{R}$ називають її *точною верхньою межею* і позначають $\sup A$ (або $\sup\limits_{x \in A} x$).

Це означення є найважливішим у цьому пункті. Наведемо означення, рівносильне щойно сформульованому.

Означення 1.6.6.

$$(M = \sup A) \stackrel{\text{def}}{=} \left| \begin{array}{ll} 1) & (\forall x \in A) \quad \{x \leq M\}; \\ 2) & (\forall M' < M)(\exists x' \in A) \quad \{x' > M'\}. \end{array} \right.$$

У цьому означенні пункт 1 означає, що M є верхньою межею, а пункт 2 — те, що M є найменшою з верхніх меж (тобто жодне число, менше від M, не є верхньою межею). Прийнявши в цьому означенні $M - M' = \varepsilon$, отримуємо ще одне означення точної верхньої межі.

Означення 1.6.7.

$$(M = \sup A) \stackrel{\text{def}}{=} \left| \begin{array}{ll} 1) & (\forall x \in A) \quad \{x \leq M\}; \\ 2) & (\forall \varepsilon > 0)(\exists x' \in A) \quad \{x' > M - \varepsilon\}. \end{array} \right.$$

Означення 1.6.8. Найбільшу нижню межу множини $A \subset \mathbb{R}$ називають її *точною нижньою межею* і позначають $\inf A$ (або $\inf\limits_{x \in A} x$).

Аналогічно, як вище, отримуємо рівносильні означення.

Означення 1.6.9.

$$(m = \inf A) \overset{\text{def}}{\equiv} \left| \begin{array}{ll} 1) & (\forall x \in A) \quad \{x \geq m\}; \\ 2) & (\forall m' > m)(\exists x' \in A) \quad \{x' < m'\}. \end{array} \right.$$

Означення 1.6.10.

$$(m = \inf A) \overset{\text{def}}{\equiv} \left| \begin{array}{ll} 1) & (\forall x \in A) \quad \{x \geq m\}; \\ 2) & (\forall \varepsilon > 0)(\exists x' \in A) \quad \{x' < m + \varepsilon\}. \end{array} \right.$$

Лема 1.6.1 (принцип точної верхньої межі). *Кожна непорожня обмежена зверху підмножина множини дійсних чисел має точну верхню межу і до того ж лише одну.*

Доведення. Доведемо існування. Нехай $A \subset \mathbb{R}$ — ця підмножина, а $Y \overset{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}\colon (\forall x \in A)\,\{x \leq y\}\}$ — множина верхніх меж множини A. Згідно з умовою $A \neq \varnothing$, а оскільки множина A обмежена, то й $Y \neq \varnothing$. Далі $(\forall x \in A)(\forall y \in Y)\,\{x \leq y\}$. Тому з аксіоми повноти випливає, що існує $c \in \mathbb{R}$ таке, що

$$(\forall x \in A) \quad \{x \leq c\}, \tag{1.3}$$

$$(\forall y \in Y) \quad \{c \leq y\}. \tag{1.4}$$

З (1.3) випливає, що $c \in Y$, а звідси і з (1.4) — що $c = \min Y = \sup A$.

Доведемо єдиність. Під час доведення існування з'ясовано, що $\sup A = \min Y$. Нехай y_1, y_2 є мінімальними елементами множини Y. Тоді $y_1 \leq y_2$ та $y_2 \leq y_1$, а з огляду на аксіому III(2) $y_1 = y_2$. □

Наслідок 1.6.1. *Кожна непорожня обмежена знизу підмножина множини дійсних чисел має точну нижню межу і до того ж лише одну.*

Приклад 1.6.2.

Нехай $X = [0, 1) = \{x \in \mathbb{R}\colon 0 \leq x < 1\}$. Доведемо, що $\sup X = 1$.

Скористаємося означенням 1.6.7. Справді,

1) $(\forall x \in X) \quad \{x < 1\}$;

2) Нехай $M' < 1$. Розглянемо $x' = \frac{M'+1}{2} = \frac{M'}{2} + \frac{1}{2} < 1$. Оскільки $x' < 1$, то $x' \in X$ і водночас $x' > M'$ (рис. 1.3):

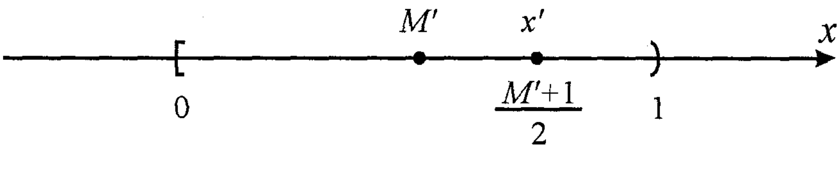


Рис. 1.3

Зазначимо, що $\inf X = \min X = 0$. І взагалі, якщо множина має мінімальний елемент, то саме він і є точною нижньою межею; аналогічно, якщо множина має максимальний елемент, то саме він і є точною верхньою межею.

1.7. Найважливіші класи дійсних чисел

Означення 1.7.1. Числа вигляду $1,\ 2 \overset{\text{def}}{=} 1+1,\ 3 \overset{\text{def}}{=} 2+1, \ldots$ (і лише такі числа) називають *натуральними*. Інакше: *множина* $\mathbb{N}$ *натуральних чисел* — це найменша підмножина множини дійсних чисел, яка має властивість

$$(1 \in \mathbb{N}) \wedge \big((x \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x+1 \in \mathbb{N})\big).$$

Зауваження 1.7.1. (принцип математичної індукції). Якщо підмножина E множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ така, що $1 \in \mathbb{N}$ і разом з числом $x \in E$ до множини E належить число $x+1$, то $E = \mathbb{N}$, тобто

$$(E \subset \mathbb{N}) \wedge (1 \in E) \wedge (\forall x \in E)\big((x \in E) \Rightarrow (x+1 \in E)\big) \Rightarrow (E = \mathbb{N}).$$

Наведемо деякі властивості натуральних чисел:

1) $(m, n \in \mathbb{N}) \Rightarrow (m+n \in \mathbb{N}) \wedge (m \cdot n \in \mathbb{N})$;

2) $(n \in \mathbb{N}) \wedge (n \neq 1) \Rightarrow (n-1 \in \mathbb{N})$;

3) $(n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \min\{x \in \mathbb{N} \colon n < x\} = n+1$;

4) $(m, n \in \mathbb{N}) \wedge (n < m) \Rightarrow (n+1 \leq m)$;

5) $(n \in \mathbb{N}) \wedge (n \neq 1) \Rightarrow \{x \in \mathbb{N} \colon n-1 < x < n\} = \varnothing$;

6) $(n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \{x \in \mathbb{N} \colon n < x < n+1\} = \varnothing$;

7) $(M \subset \mathbb{N}) \wedge (M \neq \varnothing) \Rightarrow (\exists \min M)$.

Доведемо лише властивість 1. (Інші можна довести також за допомогою методу математичної індукції).

Доведення. Нехай $m, n \in \mathbb{N}$. Доведемо, що $(m+n) \in \mathbb{N}$. Позначимо через E множину тих натуральних чисел n, для яких $(m+n) \in \mathbb{N}$ для всіх $m \in \mathbb{N}$. Тоді $1 \in E$, оскільки $(m \in \mathbb{N}) \Rightarrow \big((m+1) \in \mathbb{N}\big)$ для всіх $m \in \mathbb{N}$. Якщо $n \in E$, тобто $(m+n) \in \mathbb{N}$, то й $(n+1) \in E$, оскільки $m+(n+1) = (m+n)+1 \in \mathbb{N}$. За принципом математичної індукції $E = \mathbb{N}$.

Аналогічно позначимо через E множину таких натуральних чисел n, що для всіх $m \in \mathbb{N}$ виконується $(m \cdot n) \in \mathbb{N}$. Очевидно, що $1 \in E$, оскільки $m \cdot 1 = m$, і якщо $n \in E$, тобто $m \cdot n \in \mathbb{N}$, то $m \cdot (n+1) = m \cdot n + m$ є сумою натуральних чисел, яка, як уже доведено, також є натуральним числом. Отже, $(n \in E) \Rightarrow \big((n+1) \in E\big)$ і згідно з принципом математичної індукції $E = \mathbb{N}$. □

Означення 1.7.2. *Множиною цілих чисел* називають множину

$$\mathbb{Z} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{N} \cup \{-n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}.$$

Означення 1.7.3. *Множиною раціональних чисел* називають множину

$$\mathbb{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \{m \cdot n^{-1} \colon m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}.$$

Зауваження 1.7.2. $\frac{m}{n} \stackrel{\text{def}}{=} m \cdot n^{-1}$.

Теорема 1.7.1. *Множина раціональних чисел злічeнна.*

Доведення. Розмістимо усі раціональні числа в нескінченну прямокутну матрицю. У першій стрічці розмістимо всі цілі числа у порядку зростання за модулем: 0, 1, -1, 2, -2, …; у другій — нескоротні дроби зі знаменником 2: $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}, \ldots$; і взагалі, у n-й стрічці — нескоротні дроби зі знаменником n: $\frac{1}{n}$, $-\frac{1}{n}, \ldots$. Очевидно, що будь-яке раціональне число потрапить на якесь певне місце в отриманій матриці:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \rightarrow & 1 & & -1 & \rightarrow & 2 & -2 & \ldots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\frac{1}{2} & & -\frac{1}{2} & & \frac{3}{2} & & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \ldots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
\frac{1}{3} & & -\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \ldots \\
 & \swarrow & & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ldots \\
\frac{1}{n} & & -\frac{1}{n} & & \cdot & & \cdot & \cdot & \ldots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ldots,
\end{array}$$

тому раціональні числа можна занумерувати, наприклад, у порядку, вказаному стрілками. $\square$

Означення 1.7.4. Множину $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ називають *множиною ірраціональних чисел.*

Теорема 1.7.2. *Існує $s \in \mathbb{R}$ таке, що $s^2 = 2$, $s > 0$, $s \notin \mathbb{Q}$.*

Доведення. Нехай

$$X \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \colon x > 0, x^2 < 2\}, \quad Y \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}, y > 0, y^2 > 2\}.$$

Оскільки $1 \in X$, а $2 \in Y$, то $X \neq \varnothing$ та $Y \neq \varnothing$. Далі, оскільки для додатних x та y $(x < y) \Leftrightarrow (x^2 < y^2)$, то $(\forall x \in X)(\forall y \in Y)\ \{x < y\}$. Згідно з аксіомою повноти, існує число $s \in \mathbb{R}$ таке, що

$$(\forall x \in X)(\forall y \in Y)\ \{x \leq s \leq y\}.$$

Зрозуміло, що $s > 0$. Доведемо, що $s^2 = 2$. Припустимо, що $s^2 \neq 2$, тобто $s^2 < 2$ або $s^2 > 2$.

Нехай $s^2 < 2$. Тоді існує $\delta > 0$ (а саме $\delta = 2 - s^2$) таке, що $s^2 = 2 - \delta$. Маємо $4s^2 < 8 < 9$, отже,

$$s < \frac{3}{2}. \tag{1.5}$$

Оскільки $1 \in X$, то $1^2 \le s^2 < 2$ і

$$0 < \delta \le 1. \tag{1.6}$$

Крім того, $(\forall k \in \mathbb{N})\{s + \frac{\delta}{k} > s\}$, отже, $s + \frac{\delta}{k} \in Y$. З іншого боку, з огляду на (1.5) та (1.6) маємо

$$\left(s + \frac{\delta}{k}\right)^2 = s^2 + 2s\frac{\delta}{k} + \frac{\delta^2}{k^2} < s^2 + \frac{3\delta}{k} + \frac{\delta}{k} = s^2 + \frac{4\delta}{k}.$$

Зокрема, $(s + \frac{\delta}{4})^2 < s^2 + \delta = 2$, отже, $s + \frac{\delta}{4} \in X$, що неможливо, оскільки $X \cap Y = \varnothing$.

Припустимо тепер, що $2 < s^2$. Тоді $s^2 = 2 + \delta$, де $\delta = s^2 - 2 > 0$. Маємо $(\forall k \in \mathbb{N})\{s - \frac{\delta}{k} < s\}$, а, отже,

$$s - \frac{\delta}{k} \in X. \tag{1.7}$$

З іншого боку, враховуючи умову (1.5), яка справджується тому, що $\frac{3}{2} \in Y$, отримуємо

$$\left(s - \frac{\delta}{k}\right)^2 = s^2 - \frac{2s\delta}{k} + \frac{\delta^2}{k^2} > s^2 - \frac{2s\delta}{k} > s^2 - \frac{3\delta}{k}.$$

Зокрема, $\left(s - \frac{\delta}{3}\right)^2 > s^2 - \delta = 2$, тобто $s - \frac{\delta}{3} \in Y$, що суперечить співвідношенню (1.7). Отже, $s^2 = 2$.

Залишилось довести, що $s \notin \mathbb{Q}$. Справді, нехай $s \in \mathbb{Q}$, тобто $(\exists m \in \mathbb{Z})(\exists n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\})$ $\{s = \frac{m}{n}\}$. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $\frac{m}{n}$ — нескоротний дріб. Маємо $m^2 = 2n^2$, звідки випливає, що m — парне число. Нехай $m = 2k$. Тоді $4k^2 = 2n^2$, а, отже, $2k^2 = n^2$. Звідси n — парне число, а це суперечить нескоротності дробу $\frac{m}{n}$. □

1.8. Принцип Архімеда

Теорема 1.8.1 (принцип Архімеда). *Нехай $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Тоді*

$$(\exists!\, n \in \mathbb{Z})\ \{(n-1)x \le y < nx\}.$$

Доведення. Доведемо спочатку, що $(\exists k \in \mathbb{Z})$ $\{kx > y\}$. Припустимо, що це не так, тобто $(\forall k \in \mathbb{Z})$ $\{kx \le y\}$. Тоді множина $A \stackrel{\text{def}}{=} \{kx : k \in \mathbb{Z}\}$ обмежена зверху і, згідно з лемою 1.6.1, має точну верхню межу $\sup A = M \le y$. За означенням 1.6.6, маємо

$$(\exists px \in A)\ \{M - x < px \le M\}.$$

Звідси випливає, що $(p+1)x > M$, а це суперечить тому, що $M = \sup A$. Отже, множина A необмежена, тобто

$$(\exists k \in \mathbb{Z})\ \{kx > y\}. \tag{1.8}$$

Аналогічно доводимо, що

$$(\exists m \in \mathbb{Z})\ \{mx \le y\}. \tag{1.9}$$

Із (1.8) та (1.9), враховуючи наслідок 14 з аксіом дійсних чисел, маємо $mx < kx$, а оскільки $x > 0$, то $m < k$. Отже, $y \in [mx, kx)$. Поділимо цей півінтервал на $k - m$ півінтервалів

$$[mx, (m+1)x),\ [(m+1)x, (m+2)x), \ldots, [(k-1)x, kx).$$

Очевидно, що точка y належить до одного (і лише до одного) з них. Отже, існує $n \in \mathbb{Z}$ таке, що

$$(n-1)x \le y < nx.$$

□

Наслідок 1.8.1. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N})\ \{0 < \frac{1}{n} < \varepsilon\}$.

Доведення. Цей наслідок безпосередньо випливає з принципу Архімеда при $y = 1$, $x = \varepsilon$. □

Наслідок 1.8.2. $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists!\, n \in \mathbb{Z})\ \{n \le y < n+1\}$.

Доведення. Для доведення достатньо у теоремі 1.8.1 прийняти $x = 1$ і замінивши n на $n+1$. □

Означення 1.8.1. Число n, яке фігурує у попередньому наслідку, називають *цілою частиною числа y* і позначають $[y]$; число $\{y\} \overset{\text{def}}{=} y - [y]$ називають *дробовою частиною числа y*.

Приклад 1.8.1.
$[4,3] = 4,\ \{4,3\} = 0,3;\quad [-3,7] = -4,\ \{-3,7\} = 0,3.$

Теорема 1.8.2. *Нехай $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Тоді*

$$(\exists r \in \mathbb{Q})\ \{a < r < b\}.$$

Доведення. Згідно з наслідком 1.8.1,

$$(\exists n \in \mathbb{N})\ \left\{\frac{1}{n} < b - a\right\}. \tag{1.10}$$

Оскільки $\frac{1}{n} > 0$, то за принципом Архімеда

$$(\exists m \in \mathbb{Z})\ \left\{\frac{m}{n} \le a < \frac{m+1}{n}\right\}.$$

Звідси і з (1.10) отримуємо

$$a < \frac{m+1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} < a + b - a = b,$$

отже, $a < \dfrac{m+1}{n} < b$. □

Зауваження 1.8.1. З теореми 1.8.2 випливає, що між дійсними числами a і b існує нескінченна кількість раціональних чисел. Справді, застосовуючи теорему 1.8.1 до чисел a, r та r, b, з'ясовуємо існування раціональних чисел r_1 та r_2 таких, що $a < r_1 < r$ та $r < r_2 < b$ і тощо.

1.9. Принцип вкладених відрізків

Теорема 1.9.1 (принцип вкладених відрізків). *Нехай для послідовності відрізків $\{[a_n, b_n]\colon n \geq 1\}$ виконані такі умови:*

1) $(\forall n \geq 1)\ \{[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]\}$;

2) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N})\ \{b_n - a_n < \varepsilon\}$.

Тоді

$$(\exists! x \in \mathbb{R})(\forall n \geq 1)\ \big\{x \in [a_n, b_n]\big\}.$$

Послідовність відрізків, для яких виконується умова 1, називають *системою вкладених відрізків.*

Доведення. Оскільки

$$([a, b] \subset [c, d]) \Leftrightarrow c \leq a < b \leq d,$$

то за умовою 1

$$(\forall n \geq 1)\ \{a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n < b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_1\}.$$

Розглянемо множину $A \stackrel{\text{def}}{=} \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ і доведемо, що для будь-якого $m \in \mathbb{N}$ число b_m є верхньою межею множини A. Справді, якщо $n \leq m$, то за умовою 1

$$\big([a_m, b_m] \subset [a_n, b_n]\big) \Leftrightarrow (a_n \leq a_m < b_m \leq b_n),$$

звідки $a_n < b_m$. Якщо ж $n > m$, то

$$\big([a_n, b_n] \subset [a_m, b_m]\big) \Leftrightarrow (a_m \leq a_n < b_n \leq b_m)$$

і знову $a_n < b_m$.

За принципом існування точної верхньої межі (лема 1.6.1)

$$(\exists x \in \mathbb{R})\ \{x = \sup A\},$$

причому, згідно з означенням точної верхньої межі

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ \{a_n \le x\} \quad \text{і} \quad (\forall m \in \mathbb{N})\ \{x \le b_m\}.$$

Тому $(\forall n \in \mathbb{N})\ \big\{x \in [a_n, b_n]\big\}$.

Доведемо єдиність. Нехай $y \in \mathbb{R}$ таке, що

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ \big\{y \in [a_n, b_n]\big\}.$$

Припустимо, що $y \ge x$. З умови 1.9.1 випливає, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N})\ \{0 \le y - x \le b_n - a_n < \varepsilon\},$$

тобто

$$(\forall \varepsilon > 0)\ \{0 \le y - x < \varepsilon\},$$

звідки $y = x$ (якщо $y > x$, то досить взяти $\varepsilon = \frac{1}{2}(y-x)$, щоб одержати суперечність). □

Зауваження 1.9.1. У теоремі 1.9.1 не можна замість відрізків розглядати інтервали або півінтервали. Справді, розглянемо послідовність

$$\left\{\left(0, \frac{1}{n}\right] : n \in \mathbb{N}\right\}$$

і припустимо, що $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\ \big\{x \in (0, \frac{1}{n})\big]$, тобто

$$(\exists x)(\forall n \in \mathbb{N})\ \left\{0 < x \le \frac{1}{n}\right\}.$$

Однак останнє твердження неможливе, бо суперечить наслідкові 1.8.2.

1.10. Множина потужності континуум

Означення 1.10.1. Множину, рівнопотужну множині $[0,1]$, називають *множиною потужності континуум.*

Теорема 1.10.1. *Множина* $[0,1]$ *незліченна.*

Доведення. Припустимо супротивне: нехай множина всіх точок відрізка $[0,1]$ зліченна і нехай усі вони занумеровані:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots .$$

Побудуємо послідовність вкладених відрізків так. Розділимо відрізок $[0,1]$ на три рівні відрізки. Точка x_1 не може одночасно належати всім трьом відрізкам $[0, \frac{1}{3}]$ $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ $[\frac{2}{3}, 1]$. Виберемо серед них той, який не містить точки x_1, і позначимо його I_1. Далі розіб'ємо I_1 на три рівні відрізки і позначимо I_2 той з них, який не містить точки x_2. Отже, продовжуючи описаний процес, отримуємо систему вкладених відрізків

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \ldots .$$

За теоремою 1.9.1, існує точка ξ, що належить кожному з відрізків I_n, отже, не може збігатися з жодною точкою x_n. Це і свідчить, що послідовність

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

не може містити всіх точок відрізка $[0,1]$, а це суперечить припущенню. □

Оскільки множина раціональних чисел зліченна (теорема 1.7.1), то тим паче й множина раціональних чисел відрізка $[0,1]$ зліченна. Тому множина ірраціональних чисел відрізка $[0,1]$ незліченна. Отже, справджується такий наслідок.

Наслідок 1.10.1. *Множина ірраціональних чисел незліченна.*

Розділ 2

Границя числової послідовності

2.1. Означення границі послідовності

Нагадаємо (див. означення 1.3.9), що *послідовністю* $\{x_n\}$ елементів множини X називають відображення $f\colon \mathbb{N} \to X$, де $x_n = f(n)$ — n-й член послідовності. Якщо $X = \mathbb{R}$, то отримаємо послідовність, елементами якої є дійсні числа. Таку послідовність називатимемо *числовою послідовністю*.

Послідовність є заданою (або визначеною), якщо визначено закон, згідно з яким кожному $n \in \mathbb{N}$ поставлено у відповідність $x_n \in \mathbb{R}$.

Приклад 2.1.1.

У цьому прикладі за формулою загального члена послідовності запишемо декілька її елементів:

1) $x_n = \frac{1}{n}$, $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$;
2) $x_n = \frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}$, $\{0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{6}, \dots\}$;
3) $x_n = n$, $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$;
4) $x_n = (-1)^n$, $\{-1, 1, -1, 1, \dots\}$;
5) $x_n = (-1)^n \cdot n$, $\{-1, 2, -3, 4, -5, \dots\}$.

Означення 2.1.1. Число $a \in \mathbb{R}$ називають *границею* числової послідовності $\{x_n\}$, якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) \quad \{|x_n - a| < \varepsilon\}.$$

Тоді пишуть

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n$$

або

$$x_n \to a, \quad n \to \infty,$$

і кажуть, що послідовність $\{x_n\}$ *збігається* до a або *має границю* a.

Послідовність, що має границю, називають *збіжною*, а послідовність, що не має границі, — *розбіжною*.

Той факт, що число a не є границею послідовності $\{x_n\}$, запишемо так:

$$(\exists\varepsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n > N)\ \{|x_n - a| \geq \varepsilon\}.$$

Означення 2.1.2. Інтервал

$$\mathcal{U}_\varepsilon(a) \overset{\text{def}}{\equiv} (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$

називають *ε-околом числа a*.

За допомогою поняття ε-околу означення границі можна перефразувати так.

Означення 2.1.3. Число a називають *границею* числової послідовності $\{x_n\}$, якщо в будь-якому ε-околі числа a містяться всі елементи послідовності $\{x_n\}$, починаючи з деякого номера.

З цього означення випливає таке: якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то зовні ε-околу числа a, тобто у множині $\mathbb{R} \setminus \mathcal{U}_\varepsilon(a)$, може міститися лише скінченна кількість елементів послідовності $\{x_n\}$.

Приклад 2.1.2.

Дослідимо на збіжність послідовності, наведені у прикладі 2.1.1:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Справді, згідно з наслідком з принципу Архімеда $(\forall\varepsilon > 0)\ (\exists n \in \mathbb{N})\quad \{n > \frac{1}{\varepsilon}\}$, тобто $\{\frac{1}{n} < \varepsilon\}$. Тому при $n > N = [\frac{1}{\varepsilon}]$ маємо

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon;$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2} = 0$. Маємо

$$|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}\right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$$

для всіх $n > N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, як і в 1;

3) послідовність $\{n\}$ — розбіжна. Справді, жодне число $a \in \mathbb{R}$ не може бути границею цієї послідовності, тому що окіл $\mathcal{U}_{\frac{1}{3}}(a)$ містить не більше одного елемента послідовності $\{n\}$.

Аналогічно доводять, що послідовності 4 та 5 також розбіжні.

2.2. Загальні властивості границь

Теорема 2.2.1. *Послідовність не може мати двох різних границь.*

Доведення. Припустимо супротивне, тобто нехай існує така послідовність $\{x_n\}$, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, причому $a \neq b$, і нехай для визначеності $a < b$. Нехай $\varepsilon = \frac{b-a}{3}$.

Тоді (рис. 2.1)

$$\mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap \mathcal{U}_\varepsilon(b) = \varnothing. \tag{2.1}$$

Згідно з означенням границі маємо

$$(\exists N_1)(\forall n > N_1) \quad \{|x_n - a| < \varepsilon\},$$

$$(\exists N_2)(\forall n > N_2) \quad \{|x_n - b| < \varepsilon\}.$$

Нехай $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тоді для $(\forall n > N)$

$$\{|x_n - a| < \varepsilon\} \quad \text{і} \quad \{|x_n - b| < \varepsilon\},$$

тобто елементи послідовності $\{x_n\}$ з номерами, більшими від N, одночасно належать до $\mathcal{U}_\varepsilon(a)$ та $\mathcal{U}_\varepsilon(b)$, а це неможливо з огляду на співвідношення (2.1). Отримана суперечність доводить, що $a = b$. □

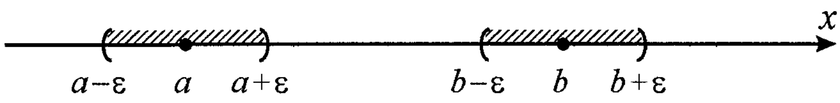


Рис. 2.1

Означення 2.2.1. Послідовність $\{x_n\}$ називають

1) *обмеженою зверху*, якщо $\quad (\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \{a_n \le M\}$;

2) *обмеженою знизу*, якщо $\quad (\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \{a_n \ge M\}$;

3) *обмеженою*, якщо $\quad (\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \{|a_n| \le M\}$.

Зауважимо таке: якщо послідовність є обмеженою зверху й обмеженою знизу, то вона обмежена, і навпаки, якщо послідовність обмежена, то вона обмежена і зверху, і знизу.

Теорема 2.2.2. *Збіжна послідовність обмежена.*

Доведення. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Згідно з означенням границі послідовності, для $\varepsilon = 1$ маємо

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) \quad \{|x_n - a| < 1\},$$

тобто

$$(\forall n > N) \quad \{a - 1 < x_n < a + 1\}.$$

Приймемо $M \stackrel{\text{def}}{=} \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|, |a-1|, |a+1|\}$. Отже,

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \{|x_n| \le M\}.$$

□

Теорема 2.2.3. *Нехай* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *і* $b > a$. *Тоді*

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) \quad \{x_n < b\}.$$

Доведення. В означенні границі послідовності візьмемо $\varepsilon = b - a > 0$. Тоді

$$(\exists N)(\forall n > N) \quad \{|x_n - a| < b - a\}.$$

Остання нерівність еквівалентна нерівності

$$-b + a < x_n - a < b - a,$$

звідси

$$x_n < b.$$

□

Аналогічно доводять і таку теорему.

Теорема 2.2.4. *Нехай* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *і* $c < a$. *Тоді*

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) \quad \{x_n > c\}.$$

Теорема 2.2.5. *Нехай* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *і* $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \{x_n \geq b\}$. *Тоді*

$$a \geq b.$$

Доведення. Припустимо, що $a < b$. Тоді, згідно з теоремою 2.2.3,

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) \quad \{x_n < b\},$$

а це суперечить умові. □

Також справджується аналогічна теорема.

Теорема 2.2.6. *Нехай* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *і* $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \{x_n \leq c\}$. *Тоді*

$$a \leq c.$$

Наслідок 2.2.1. *Нехай* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *і* $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \{b \leq x_n \leq c\}$. *Тоді*

$$a \in [b, c].$$

Теорема 2.2.7. *Нехай* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ *і* $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \{x_n \leq y_n\}$. *Тоді*

$$a \leq b.$$

Доведення. Припустимо супротивне. Нехай $a > b$, і приймемо $\varepsilon = \frac{a-b}{3} > 0$.

З означення границі випливає, що

$$(\exists N_1 \in \mathbb{N})(\forall n > N_1) \quad \{x_n \in \mathcal{U}_\varepsilon(a)\},$$

$$(\exists N_2 \in \mathbb{N})(\forall n > N_2) \quad \{x_n \in \mathcal{U}_\varepsilon(b)\}.$$

Зауважимо, що $\mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap \mathcal{U}_\varepsilon(b) = \varnothing$. Нехай $N \overset{\text{def}}{=} \max\{N_1, N_2\}$. Тому $(\forall n > N)$ $\{x_n > y_n\}$, що суперечить умові. □

Теорема 2.2.8. *Нехай* $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\{x_n \le z_n \le y_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. *Тоді*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a.$$

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$. Згідно з означенням границі

$$(\exists N_1 \in \mathbb{N})(\forall n > N_1) \quad \{a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon\},$$

$$(\exists N_2 \in \mathbb{N})(\forall n > N_2) \quad \{b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon\}.$$

Тому при $n > N = \max\{N_1, N_2\}$

$$\{a - \varepsilon < x_n \le z_n \le y_n < a + \varepsilon\},$$

тобто

$$|z_n - a| < \varepsilon.$$

□

Останню теорему з цілком зрозумілих міркувань у "народі" називають "теоремою про двох міліціонерів".

Зауваження 2.2.1. У теоремах 2.2.3 — 2.2.6, 2.2.7, 2.2.8 та наслідку 2.2.1 запис "$(\forall n \in \mathbb{N})$" можна замінити на

$$\text{“}(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)\text{”}.$$

2.3. Нескінченно малі (великі) послідовності

Означення 2.3.1. Послідовність $\{\alpha_n\}$ називають *нескінченно малою*, якщо

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$$

У підрозділі 2.1 (приклад 2.1.2 (1 та 2)) ми стикалися з нескінченно малими послідовностями $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ та $\left\{\frac{1}{n}\cos\frac{\pi n}{2}\right\}$.

Означення 2.3.2. Якщо $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ — дві числові послідовності, то їхньою *сумою*, *різницею*, *добутком* та *часткою* називають, відповідно, послідовності

$$\{x_n + y_n\}, \quad \{x_n - y_n\}, \quad \{x_n \cdot y_n\}, \quad \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}.$$

Частка, зрозуміло, визначена, якщо $(\forall n) \quad \{y_n \neq 0\}$. *Добутком послідовності* $\{x_n\}$ *на число* c називають послідовність $\{cx_n\}$.

Наведемо деякі властивості нескінченно малих послідовностей.

Теорема 2.3.1. *Нехай* $\{\alpha_n\}$ та $\{\beta_n\}$ *— нескінченно малі послідовності. Тоді послідовність* $\{\alpha_n + \beta_n\}$ *— нескінченно мала.*

Доведення. Нехай $\{\alpha_n\}$ та $\{\beta_n\}$ — нескінченно малі послідовності. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$, тоді

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) \quad \left\{\left(|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \wedge \left(|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}.$$

Тому для $n > N$ маємо

$$|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

а це означає, що $\lim\limits_{n \to \infty} (\alpha_n + \beta_n) = 0$, тобто $\{\alpha_n + \beta_n\}$ — нескінченно мала. □

З означення нескінченно малої послідовності бачимо таке: якщо $\{\alpha_n\}$ — нескінченно мала, то й послідовність $\{-\alpha_n\}$ нескінченно мала. Тому з останньої теореми та сформульованого зауваження отримуємо такий наслідок.

Наслідок 2.3.1. *Сума і різниця скінченної кількості нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою послідовністю.*

Теорема 2.3.2. *Нехай* $\{\alpha_n\}$ *— нескінченно мала послідовність, а* $\{x_n\}$ *— обмежена. Тоді* $\{\alpha_n x_n\}$ *— нескінченно мала послідовність.*

Доведення. Оскільки $\{x_n\}$ — обмежена, то

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \{|x_n| \leq M\}.$$

Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$, тоді

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) \quad \left\{|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}\right\}.$$

Тому для всіх $n > N$ маємо

$$|\alpha_n \cdot x_n| = |\alpha_n| \cdot |x_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon,$$

тобто $\{\alpha_n x_n\}$ — нескінченно мала послідовність. □

Наслідок 2.3.2. *Добуток скінченної кількості нескінченно малих послідовностей та скінченної кількості обмежених є нескінченно малою послідовністю.*

Зокрема, оскільки нескінченно мала послідовність є обмеженою, то добуток нескінченно малих послідовностей є нескінченно мала, а також послідовність $\{c\alpha_n\}$, де $c \in \mathbb{R}$, а $\{\alpha_n\}$ — нескінченно мала послідовність, є нескінченно малими послідовностями.

Як ми переконаємося згодом, подібні твердження для частки нескінченно малих послідовностей неправильні.

Означення 2.3.3. Послідовність $\{x_n\}$ називають *нескінченно великою*, якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) \quad \{|x_n| > \varepsilon\}.$$

Тоді записують

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Означення 2.3.4.

$$\left.\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty\right| \overset{\text{def}}{\equiv} \left|(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) \quad \{x_n > \varepsilon\}.\right.$$

Означення 2.3.5.

$$\left.\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty\right| \overset{\text{def}}{\equiv} \left|(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) \quad \{x_n < -\varepsilon\}.\right.$$

У всіх цих випадках кажуть, що послідовність $\{x_n\}$ має *нескінченну границю*, відповідно, ∞, $+\infty$ чи $-\infty$. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ або $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, то й $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, тобто $\{x_n\}$ є нескінченно великою. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, то легко бачити, що всі члени послідовності, починаючи з деякого номера, є додатними, тому таку послідовність іноді називають *додатною нескінченно великою*, і аналогічно, послідовність, для якої $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, — *від'ємною нескінченно великою*. Очевидно, що нескінченно великі послідовності не є збіжними в сенсі означеня 2.1.1. Надалі збіжною вважатимемо послідовність, яка має скінченну границю, якщо, звичайно, не обумовлене протилежне.

Нагадаємо (див. означення 2.1.2), що ε-околом числа a називають інтервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Визначимо поняття ε-околу для символів ∞, $+\infty$ та $-\infty$.

Означення 2.3.6.

$$\mathcal{U}_\varepsilon(\infty) \overset{\text{def}}{=} \{x\colon |x| > \varepsilon\};$$

$$\mathcal{U}_\varepsilon(+\infty) \overset{\text{def}}{=} \{x\colon x > \varepsilon\};$$

$$\mathcal{U}_\varepsilon(-\infty) \overset{\text{def}}{=} \{x\colon x < -\varepsilon\}.$$

Використовуючи цю термінологію наведемо загальне означення границі.

Означення 2.3.7. Нехай A — число або один із символів ∞, $+\infty$ чи $-\infty$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, якщо

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) \quad \{x_n \in \mathcal{U}_\varepsilon(A)\}.$$

Означення 2.3.8. Множину

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

називають *розширеною множиною дійсних чисел.*

Якщо числова послідовність є збіжною або її границею є один із символів $+\infty$ чи $-\infty$, то кажуть, що послідовність є збіжною у розумінні $\overline{\mathbb{R}}$ (або просто збіжною в $\overline{\mathbb{R}}$).

Наступна теорема відображає взаємозв'язок між нескінченно малими та нескінченно великими послідовностями.

Теорема 2.3.3. *Нехай* $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \{x_n \neq 0\}$. *Тоді*

$$\left.\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \right| \Leftrightarrow \left| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0.\right.$$

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Взявши в означенні 2.3.3 замість $\varepsilon > 0$ інше додатне число $\frac{1}{\varepsilon}$, отримаємо

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) \quad \left\{|x_n| > \frac{1}{\varepsilon}\right\}.$$

Оскільки остання нерівність еквівалентна нерівності $|\frac{1}{x_n}| < \varepsilon$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$.

Твердження ($\Leftarrow$) доводимо аналогічно. □

2.4. Арифметичні властивості границь

Лема 2.4.1. *Для того, щоб* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, *необхідно і досить, щоб послідовність* $\{x_n - a\}$ *була нескінченно малою.*

Доведення. ($\Rightarrow$)Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тоді, позначивши $\alpha_n = x_n - a$, отримуємо

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) \quad \{|\alpha_n| < \varepsilon\},$$

тобто $\alpha_n = x_n - a$ — нескінченно мала.

($\Leftarrow$)Нехай $\{x_n - a\}$ — нескінченно мала, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - a) = 0$. Це означає, що

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) \quad \{|x_n - a| < \varepsilon\},$$

звідки

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

$\square$

Зауважимо, що доведена лема дає ще одне означення границі послідовності.

Наслідок 2.4.1. *Нехай* $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \{x_n = c\}$. *Тоді*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c.$$

Справді, оскільки послідовність $x_n - c = c - c = 0$ — нескінченно мала, то з огляду на лему 2.4.1

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c.$$

Теорема 2.4.1. *Нехай* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. *Тоді*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b, \quad \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b.$$

Доведення. Згідно з лемою 2.4.1, послідовності $\{x_n - a\}$ та $\{y_n - b\}$ — нескінченно малі. Оскільки

$$(x_n + y_n) - (a + b) = (x_n - a) + (y_n - b),$$

то послідовність $\{(x_n + y_n) - (a + b)\}$ є нескінченно малою як сума нескінченно малих (теорема 2.3.1). Тому з огляду на лему 2.4.1

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b.$$

Рівність $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$ доводимо аналогічно. $\square$

Теорема 2.4.2. *Нехай* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. *Тоді*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = a \cdot b.$$

Доведення. Згідно з лемою 2.4.1, послідовності $\alpha_n = x_n - a$ та $\beta_n = y_n - b$ є нескінченно малими. Тоді

$$x_n y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n,$$

звідки

$$x_n y_n - ab = a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n.$$

Оскільки кожен з доданків у правій частині останнього співвідношення є нескінченно малою послідовністю, то і послідовність $\{x_n y_n - ab\}$ — нескінченно мала. Отже, з огляду на лему 2.4.1

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab.$$

□

Наслідок 2.4.2. *Нехай* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $c \in \mathbb{R}$. *Тоді*

$$\lim_{n\to\infty} cx_n = c \cdot a.$$

Наслідок 2.4.3. *Нехай* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $k \in \mathbb{N}$. *Тоді*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n)^k = a^k.$$

Лема 2.4.2. *Нехай* $(\forall n \in \mathbb{N})\ \{y_n \neq 0\}$ *і* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$. *Тоді послідовність* $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ *— обмежена.*

Доведення. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Прийнявши в означенні границі $\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0$, матимемо

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\ \left\{|y_n - b| < \frac{|b|}{2}\right\}.$$

Звідси, застосовуючи нерівність трикутника для суми модулів, отримуємо

$$|b| = |b - y_n + y_n| \le |b - y_n| + |y_n| < \frac{|b|}{2} + |y_n|,$$

звідки

$$|y_n| > \frac{|b|}{2}.$$

Отже, для будь-якого $n > N$ маємо

$$\left|\frac{1}{y_n}\right| < \frac{2}{|b|}.$$

Позначимо $M \overset{\text{def}}{=} \max\left\{\left|\frac{1}{y_1}\right|, \left|\frac{1}{y_2}\right|, \ldots, \left|\frac{1}{y_N}\right|, \frac{2}{|b|}\right\}$.

Отже,

$$(\forall n \in \mathbb{N})\left\{\left|\frac{1}{y_n}\right| \le M\right\}.$$

□

Теорема 2.4.3. *Нехай* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, $b \neq 0$ *і* $(\forall n \in \mathbb{N})\ \{y_n \neq 0\}$. *Тоді*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

Доведення. Згідно з лемою 2.4.1, маємо $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, де $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ — нескінченно малі послідовності. Тому

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{b(b+\beta_n)} \cdot (ab + b\alpha_n - ab - a\beta_n) =$$

$$= \frac{1}{by_n}(b\alpha_n - a\beta_n).$$

З огляду на лему 2.4.2 послідовність $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ — обмежена, тому $\left\{\frac{1}{by_n}\right\}$ також обмежена, а оскільки $\{b\alpha_n - a\beta_n\}$ — нескінченно мала, то і послідовність $\left\{\frac{1}{by_n}(b\alpha_n - a\beta_n)\right\}$ — нескінченно мала. Отже, згідно з лемою 2.4.1, отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

□

2.5. Невизначеності

Нехай задано дві послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$, причому $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\{y_n \neq 0\}$ і

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 0. \tag{2.2}$$

Виникає запитання: що можна сказати про $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$? Зрозуміло, що теорема 2.4.3 (про границю частки) відповіді на це питання не дає. Перш ніж робити якісь припущення, розглянемо низку елементарних прикладів (табл. 2.1):

Таблиця 2.1

$\mathbf{x_n}$	$\mathbf{y_n}$	$\frac{\mathbf{x_n}}{\mathbf{y_n}}$	$\lim\limits_{\mathbf{n}\to\infty} \frac{\mathbf{x_n}}{\mathbf{y_n}}$
$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n^2}$	n	$+\infty$
$\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	0
$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{(n+1)}$	$\frac{n+1}{n}$	1
$\frac{(-1)^n}{n}$	$\frac{1}{n}$	$(-1)^n$	Не існує

З таблиці зрозуміло, що зі зроблених припущень нічого конкретного про характер збіжності послідовності $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ сказати не можна: вона може мати скінченну ненульову границю, може її зовсім не мати, а також може бути нескінченно малою або нескінченно великою.

Якщо для послідовностей $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ виконуються умови (2.2), то послідовність $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ називають *невизначеністю типу* $\frac{0}{0}$.

Питання про границю послідовності вигляду $\frac{0}{0}$ вирішують по-різному в кожному конкретному випадку.

Аналогічно можна сказати про невизначеності типу $\frac{\infty}{\infty}$ (тобто послідовність $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$, де $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\infty$), $0\cdot\infty$ (тобто послідовність $\{x_n y_n\}$, де $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\infty$) та $\infty-\infty$ (тобто послідовність $\{x_n-y_n\}$, де $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\infty$).

Наведемо властивості операцій з нескінченно великими та нескінченно малими послідовностями (табл. 2.2):

Таблиця 2.2

Символьний запис	**Зміст**
$(+\infty)+(+\infty)=+\infty$	$(\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty)\wedge(\lim\limits_{n\to\infty} y_n=+\infty)\Rightarrow$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=+\infty$
$\infty\cdot\infty=\infty$	$(\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty)\wedge(\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\infty)\Rightarrow$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\infty$
$\frac{0}{\infty}=0$	$(\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0)\wedge(\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\infty)\Rightarrow$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0$
$\frac{\infty}{0}=\infty$	$(\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty)\wedge(\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0)\Rightarrow$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\infty$

Пропонуємо самостійно довести ці твердження.

2.6. Монотонні послідовності

Означення 2.6.1. Послідовність $\{x_n\}$ називають

а) *зростаючою*, якщо

$$(\forall n\in\mathbb{N})\ \{x_{n+1}>x_n\};$$

б) *неспадною*, якщо
$$(\forall n \in \mathbb{N})\ \{x_{n+1} \geq x_n\};$$

в) *спадною*, якщо
$$(\forall n \in \mathbb{N})\ \{x_{n+1} < x_n\};$$

г) *незростаючою*, якщо
$$(\forall n \in \mathbb{N})\ \{x_{n+1} \leq x_n\}.$$

Послідовності всіх цих типів називають *монотонними*, а послідовності зростаючі та спадні — *строго монотонними*. Зауважимо, що кожна зростаюча послідовність є неспадною, а кожна спадна — незростаючою.

Теорема 2.6.1. *Монотонна, обмежена послідовність має границю.*

Доведення. Розглянемо випадок неспадної послідовності $\{x_n\}$. З її обмеженості, згідно з принципом точної верхньої межі (лема 1.6.1), існує $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\} \stackrel{\text{def}}{=} a$. Отже (див. означення 1.6.7), маємо

$$\begin{array}{ll} 1) & (\forall n \in \mathbb{N})\ \{x_n \leq a\}; \\ 2) & (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})\ \{x_N > a - \varepsilon\}. \end{array}$$

Звідси, з використанням того, що $\{x_n\}$ неспадна, отримуємо

$$(\forall n > N)\ \{a - \varepsilon < x_n < a\},$$

а тому $(\forall n > N)\ \{a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon\}$, тобто

$$\{|x_n - a| < \varepsilon\}.$$

Це й означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Для випадку незростаючої послідовності теорему доводимо аналогічно. □

Наслідок 2.6.1. *Для того, щоб монотонна послідовність мала границю, необхідно і досить, щоб вона була обмеженою.*

Доведення. Достатність випливає із щойно доведеної теореми, а необхідність — із теореми про обмеженість збіжної послідовності (теорема 2.2.2). □

Теорема 2.6.2. *Нехай $\{x_n\}$ — неспадна, необмежена зверху послідовність. Тоді*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$. Оскільки послідовність $\{x_n\}$ необмежена, то

$$(\exists N \in \mathbb{N})\ \{x_N > \varepsilon\},$$

а з огляду на її монотонність

$$(\forall n > N)\ \{x_n > \varepsilon\},$$

тобто

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

□

Аналогічно доводять таку теорему.

Теорема 2.6.3. *Нехай $\{x_n\}$ — незростаюча, необмежена знизу послідовність. Тоді*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

Наслідок 2.6.2. *Будь-яка монотонна послідовність є збіжною в $\overline{\mathbb{R}}$.*

Зауваження 2.6.1. Оскільки скінченна кількість членів послідовності не впливає на наявність границі та її значення, то в теоремах і наслідках 2.6.1—2.6.5 достатньо вимагати виконання монотонності, починаючи з деякого номера.

Приклад 2.6.1.

Нехай $q > 1$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{q^n} = 0.$$

Доведення. Нехай $x_n = \frac{n}{q^n}$. Тоді $x_{n+1} = \frac{n+1}{q^{n+1}} = \frac{n+1}{nq} x_n$. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{nq} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{q} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q} = 1\cdot\frac{1}{q} = \frac{1}{q} < 1,$$

то

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\ \left\{\frac{n+1}{nq} < 1\right\}.$$

Отже,

$$(\forall n > N)\ \{x_{n+1} < x_n\}.$$

Усі члени послідовності $\{x_n\}$ додатні, тобто вона обмежена знизу. Оскільки скінченна кількість членів послідовності не впливає на її збіжність, то, згідно з теоремою 2.6.1, послідовність $\{x_n\}$ збіжна. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Перейшовши до границі у співвідношенні $x_{n+1} = \frac{n+1}{nq} x_n$, отримуємо

$$a = \frac{1}{q}\cdot a,$$

звідки $a(1-\frac{1}{q}) = 0$, отже, $a = 0$. □

Приклад 2.6.2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0 \quad (q \in \mathbb{R}).$$

Доведення. Якщо $q = 0$, то твердження очевидне. Оскільки $\left|\frac{q^n}{n!}\right| = \frac{|q|^n}{n!}$, то достатньо довести твердження при $q > 0$. Зауважимо, що

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left\{x_{n+1} = \frac{q}{n+1} \cdot x_n\right\},$$

оскільки

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N) \left\{0 < \frac{q}{n+1} < 1\right\},$$

маємо

$$(\forall n > N) \{x_{n+1} < x_n\}.$$

Як і в попередньому прикладі, враховуючи невід'ємність членів послідовності, робимо висновок, що вона збіжна. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Перейшовши до границі в рівності $x_{n+1} = \frac{q}{n+1} x_n$, отримуємо $a = 0 \cdot a = 0$. □

2.7. Число Ейлера

Теорема 2.7.1. *Існує*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \stackrel{\text{def}}{=\!=} e.$$

Доведення. Розглянемо послідовність

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доведемо, що ця послідовність зростаюча й обмежена зверху. За формулою бінома Ньютона, маємо:

$$\begin{aligned} x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} + \\ &+ \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \\ &+ \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \\ &+ \dots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Аналогічно

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots + \\ &+ \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \\ &+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\dots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Оскільки

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right),$$

то x_n менше від суми n перших доданків правої частини співвідношення (2.4). Крім того, у виразі для x_{n+1} є ще й $(n+1)$-й додатний доданок. Тому

$$x_n < x_{n+1}. \tag{2.5}$$

Із співвідношення (2.3) випливає, що

$$x_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}. \tag{2.6}$$

Оскільки для $k \geq 2$ виконується нерівність

$$k! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k \geq 2^{k-1},$$

то

$$x_n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} = 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 1+2=3.$$

Згідно з теоремою 2.6.1 (про границю монотонної послідовності), існує границя послідовності $\{x_n\}$, яку, наслідуючи Ейлера, позначають літерою e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

$\square$

Наслідок 2.7.1.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=e.$$

Доведення. Позначимо

$$y_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}.$$

Для фіксованого $k\in\mathbb{N}$, $k<n$, з (2.3) випливає нерівність

$$x_n > 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Перейшовши в цій нерівності до границі при $n\to\infty$, отримуємо

$$e \geq 2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!} = y_k.$$

Оскільки ця нерівність справджується при довільному k і, як випливає із (2.6), $x_n < y_n$, то

$$x_n < y_n \leq e.$$

Звідси, згідно з теоремою 2.2.8, маємо

$$\lim_{n\to\infty} y_n = e.$$

□

Послідовність $\{y_n\}$ "швидше" ніж $\{x_n\}$ збігається до числа e, тому є зручнішою для його наближеного обчислення. Також відомо, що число e ірраціональне, причому

$$e = 2,718281828459045\ldots .$$

2.8. Часткова границя послідовності. Верхня та нижня границі послідовності

Означення 2.8.1. Нехай $\{x_n\}$ — деяка послідовність, а $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \ldots$ — зростаюча послідовність натуральних чисел. Тоді послідовність $\{x_{n_k}\}$ називають *підпослідовністю* послідовності $\{x_n\}$.

Приклад 2.8.1.

1. Нехай $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Тоді
   а) якщо $n_k = 2k$, то $x_{n_k} = x_{2k} = \frac{1}{2k}$;
   б) якщо $n_k = 2k-1$, то $x_{n_k} = x_{2k-1} = \frac{-1}{2k-1}$.
2. Нехай $x_n = \sin\frac{\pi n}{3}$, $n_k = 3k$. Тоді $x_{n_k} = x_{3k} = \sin \pi k = 0$.

Теорема 2.8.1. *Нехай $\{x_n\}$ — збіжна в $\overline{\mathbb{R}}$ послідовність,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad a \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Тоді будь-яка підпослідовність $\{x_{n_k}\}$ послідовності $\{x_n\}$ збіжна, причому

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = a.$$

Доведення. Нехай $a \in \mathbb{R}$. Тоді

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\ \{|x_n - a| < \varepsilon\}. \tag{2.7}$$

Оскільки $\lim\limits_{k\to+\infty} n_k = +\infty$, то

$$(\exists K \in \mathbb{N})(\forall k > K)\ \{n_k > N\},$$

і, врахувавши (2.7), отримуємо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists K \in \mathbb{N})(\forall k > K)\ \{|x_{n_k} - a| < \varepsilon\},$$

а це й означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = a$.

Якщо $a = +\infty$, то

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\ \{x_n > \varepsilon\}. \tag{2.8}$$

Тоді аналогічно до випадку $a \in \mathbb{R}$

$$(\exists K \in \mathbb{N})(\forall k > K)\ \{n_k > N\},$$

і, враховуючи (2.8), маємо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists K \in \mathbb{N})(\forall k > K)\ \{x_{n_k} > \varepsilon\},$$

отже, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$.

Випадок $a = -\infty$ розглядаємо аналогічно. □

Теорема 2.8.2 (принцип Больцано-Вейєрштрасса). *Із будь-якої обмеженої послідовності можна виділити збіжну підпослідовність.*

Доведення. Нехай $\{x_n\}$ — обмежена послідовність, тобто

$$(\exists a \in \mathbb{R})(\exists b \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\ \{a \le x_n \le b\}.$$

Розділимо відрізок $[a,b]$ точкою $\frac{a+b}{2}$ навпіл. Тоді хоча б один із відрізків — $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ чи $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ — містить нескінченну кількість членів послідовності $\{x_n\}$. Позначимо такий відрізок $[a_1, b_1]$. Аналогічно утворимо відрізки $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$ та $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$, хоча б один з яких теж містить нескінченну кількість членів послідовності $\{x_n\}$. Позначимо його $[a_2, b_2]$. Продовжуючи описаний процес, отримуємо послідовність вкладених відрізків

$$[a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset [a_3,b_3] \supset \cdots \supset [a_k,b_k] \supset \ldots,$$

довжина яких $d_k \overset{\text{def}}{=\!=} b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$.

Оскільки $\lim\limits_{k\to\infty} d_k = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{b-a}{2^k} = 0$, то, згідно з теоремою 1.9.1 (принцип вкладених відрізків),

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k \overset{\text{def}}{=\!=} c. \tag{2.9}$$

Виберемо послідовність $\{x_{n_k}\}$ так. Нехай x_{n_1} — будь-який із членів послідовності $\{x_n\}$, що належить відрізку $[a_1, b_1]$; x_{n_2} — будь-який із членів послідовності $\{x_n\}$, що належить відрізку $[a_2, b_2]$ і такий, що $n_2 > n_1$. Такий член завжди існує, оскільки відрізок $[a_2, b_2]$ містить нескінченно багато членів послідовності $\{x_n\}$. І взагалі, x_{n_k} — будь-який із членів послідовності $\{x_n\}$, що належить відрізку $[a_k, b_k]$ і такий, що $n_k > n_{k-1}$. Продовжуючи описаний процес, отримуємо послідовність $\{x_{n_k}\}$, причому $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \ldots$ і виконуються нерівності

$$a_k \le x_{n_k} \le b_k.$$

Враховуючи (2.9), згідно з теоремою 2.2.8, маємо

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c.$$

□

Наслідок 2.8.1. *З будь-якої послідовності можна виділити збіжну в $\overline{\mathbb{R}}$ підпослідовність.*

Доведення. Нехай $\{x_n\}$ — довільна послідовність. Якщо $\{x_n\}$ — обмежена, то (за теоремою 2.8.2) з неї можна виділити збіжну підпослідовність.

Якщо $\{x_n\}$ — необмежена зверху, то

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\exists n_k \in \mathbb{N})\ \{x_{n_k} > k\}.$$

Доведемо, що

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty. \tag{2.10}$$

Справді, оскільки

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists K \in \mathbb{N})\ \{K > M\},$$

то

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists K \in \mathbb{N})(\forall k > K)\ \{x_{n_k} > M\},$$

що й означає виконання співвідношення (2.10). □

Означення 2.8.2. Нехай $\{x_{n_k}\}$ — збіжна в $\overline{\mathbb{R}}$ підпослідовність послідовності $\{x_n\}$ і

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a.$$

Тоді $a \in \overline{\mathbb{R}}$ називають *частковою границею* послідовності $\{x_n\}$.

Використовуючи наведене означення, наслідок 2.8.1 можна сформулювати так.

Наслідок 2.8.2. *Будь-яка послідовність має хоча б одну часткову границю.*

Означення 2.8.3. Найбільшу часткову границю послідовності $\{x_n\}$ називають її *верхньою границею* і позначають

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n.$$

Найменшу часткову границю послідовності $\{x_n\}$ називають її *нижньою границею* і позначають

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n.$$

Наведемо деякі твердження, що стосуються верхніх та нижніх границь, довести які пропонуємо самостійно.

Теорема 2.8.3. *Будь-яка послідовність має верхню та нижню границі.*

Наслідок 2.8.3. *Послідовність $\{x_n\}$ збіжна тоді й лише тоді, якщо вона обмежена і*

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \varliminf_{n\to\infty} x_n \overset{\text{def}}{=} a,$$

причому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Наслідок 2.8.4. *Послідовність $\{x_n\}$ збіжна в $\overline{\mathbb{R}}$ тоді й лише тоді, якщо*

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \varliminf_{n\to\infty} x_n \overset{\text{def}}{=} a,$$

причому

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Теорема 2.8.4 дає ще одне еквівалентне означення верхньої та нижньої границь послідовності, якщо вони скінченні.

Теорема 2.8.4. *Для того, щоб число $a \in \mathbb{R}$ було верхньою границею послідовності $\{x_n\}$, необхідно і досить, щоб:*

1) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\ \{x_n < a + \varepsilon\}$;

2) $(\forall \varepsilon > 0)(\forall M \in \mathbb{N})(\exists m > M)\ \{x_m > a - \varepsilon\}$.

Для того, щоб число $b \in \mathbb{R}$ було нижньою границею послідовності $\{x_n\}$, необхідно і досить, щоб:

1) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\ \{x_n > b - \varepsilon\}$;

2) $(\forall \varepsilon > 0)(\forall M \in \mathbb{N})(\exists m > M)\ \{x_m < b + \varepsilon\}$.

Приклад 2.8.2.

Для послідовності $x_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{2n+1}$ знайти $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ та $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

Розглянемо підпослідовності

$$x_{2k} = \frac{2k}{4k+1} \quad \text{та} \quad x_{2k-1} = \frac{-2k+1}{4k-1}.$$

Зауважимо, що $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{2k}{4k+1} = \frac{1}{2}$, а $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{-2k+1}{4k-1} = -\frac{1}{2}$.

Числа $\frac{1}{2}$ та $-\frac{1}{2}$ є частковими границями послідовності $\{x_n\}$. Доведемо, що послідовність $\{x_n\}$ не має інших часткових границь. Зауважимо, що підпослідовності $\{x_{2k}\}$ та $\{x_{2k-1}\}$ містять усі елементи послідовності $\{x_n\}$. Розглянемо довільну підпослідовність $\{x_{n_k}\}$. Можливі такі три випадки:

1) $\{x_{n_k}\}$ містить нескінченну кількість членів послідовності $\{x_{2k}\}$ і, можливо, скінченну кількість членів послідовності $\{x_{2k-1}\}$. Тоді $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \frac{1}{2}$;
2) $\{x_{n_k}\}$ містить нескінченну кількість членів послідовності $\{x_{2k-1}\}$ і, можливо, скінченну кількість членів послідовності $\{x_{2k}\}$. Тоді $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = -\frac{1}{2}$;
3) $\{x_{n_k}\}$ містить нескінченну кількість членів послідовності $\{x_{2k}\}$ і нескінченну кількість членів послідовності $\{x_{2k-1}\}$. Тоді, як неважко довести, $\{x_{n_k}\}$ не є збіжною.

Отже,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \frac{1}{2}, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = -\frac{1}{2}.$$

2.9. Фундаментальна послідовність. Критерій Коші

Означення 2.9.1. Послідовність $\{x_n\}$ називають *фундаментальною* (або такою, що задовольняє умову Коші), якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m, n > N)\ \{|x_m - x_n| < \varepsilon\}. \tag{2.11}$$

Теорема 2.9.1 (критерій Коші). *Для того, щоб послідовність збігалася, необхідно і досить, щоб вона була фундаментальною.*

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай $\{x_n\}$ — збіжна послідовність, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Тоді

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\ \left\{|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Для $n > N$ і $m > N$ маємо

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \le |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

тобто послідовність $\{x_n\}$ — фундаментальна.

($\Leftarrow$) Нехай послідовність $\{x_n\}$ — фундаментальна. Візьмемо у співвідношенні (2.11) $\varepsilon = 1$ і зафіксуємо довільне $m > N$. Тоді

$$(\forall n > N)\ \{x_m - 1 < x_n < x_m + 1\},$$

звідки

$$|x_n| \le |x_m| + 1.$$

Тому

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ \{|x_n| \le M\},$$

де $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_m|, |x_m| + 1\}$.

Отже, послідовність $\{x_n\}$ обмежена. Тому, згідно з принципом Больцано-Вейєрштрасса (теорема 2.8.2), існує її збіжна підпослідовність $\{x_{n_k}\}$. Нехай $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Доведемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Зафіксуємо деяке $\varepsilon > 0$. Згідно з означенням границі послідовності

$$(\exists N_1 \in \mathbb{N})(\forall n_k > N_1) \left\{|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Оскільки $\{x_n\}$ — фундаментальна, то

$$(\exists N_2 \in \mathbb{N})(\forall n, m > N_2) \left\{|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Приймемо $N = \max\{N_1, N_2\}$ і зафіксуємо деяке $n_k > N$. Тоді для довільного $n > N$ отримуємо

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

а це й означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. □

Зауважимо, що означення фундаментальної послідовності можна сформулювати і так.

Означення 2.9.2. Послідовність $\{x_n\}$ фундаментальна, якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(\forall p \in \mathbb{N}) \ \{|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon\}.$$

Розділ 3

Границя функції

3.1. Означення границі функції в точці за Коші та за Гейне. Їхня еквівалентність

Означення 3.1.1. Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі (a, b), крім, можливо, точки $x_0 \in (a, b)$. Число A називають *границею функції* $f(x)$ *в точці* x_0, якщо для будь-якої послідовності $\{x_n\}$, $x_n \in (a, b)$, $x_n \neq x_0$, $n \in \mathbb{N}$, такої, що

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0,$$

послідовність $\{f(x_n)\}$ збігається до числа A, тобто

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

У такому разі записують $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Це означення називають означенням границі функції за Гейне, або ж означенням границі функції "мовою послідовностей". З нього, враховуючи властивості границь послідовностей, випливає, зокрема, що функція не може мати в одній точці двох різних границь. Зауважимо також, що значення функції $f(x)$ в точках, які лежать зовні будь-якого околу, не впливають на наявність границі в цій точці та на її значення.

Означення 3.1.2. Множину
$\overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta\ (x_0) \overset{\text{def}}{=} \{x\colon 0 < |x - x_0| < \delta\} = \mathcal{U}_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ називають *проколеним δ-околом* точки x_0;
$\overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0 - 0) \overset{\text{def}}{=} \{x\colon x_0 - \delta < x < x_0\}$ — *лівостороннім δ-околом* точки x_0;
$\overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0 + 0) \overset{\text{def}}{=} \{x\colon x_0 < x < x_0 + \delta\}$ — *правостороннім δ-околом* точки x_0.

Означення 3.1.3. Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі (a, b), крім, можливо, точки $x_0 \in (a, b)$. Число A називають *границею функції* $f(x)$ *в точці* x_0, якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0))\ \{f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(A)\}.$$

Це означення називають означенням границі функції за Коші, або ж означенням границі мовою "$\varepsilon - \delta$".

Коректність цього означення доводить така теорема.

Теорема 3.1.1. *Означення 3.1.1 та 3.1.3 еквівалентні.*

Доведення. Нехай число A є границею функції $f(x)$ у точці x_0 за означенням 3.1.1. Припустимо, що водночас це число A не є границею функції $f(x)$ у точці x_0 за означенням 3.1.3, тобто

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x_\delta \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0))\ \{f(x_\delta) \notin \mathcal{U}_\varepsilon(A)\}. \tag{3.1}$$

Приймемо в співвідношенні (3.1) $\delta = \frac{1}{n}$ і позначимо, відповідно, $x_\delta = x_n$. Тоді $x_n \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_{\frac{1}{n}}(x_0)$, тобто $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, а звідси

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0. \tag{3.2}$$

Водночас із (3.1) отримуємо, що $f(x_n) \notin \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\varepsilon(A)$, тобто $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon$, отже,

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) \neq A. \tag{3.3}$$

Із співвідношень (3.2) та (3.3) випливає, що число A не є границею функції $f(x)$ у точці x_0 за означенням 3.1.1, що суперечить припущенню.

Навпаки, нехай число A є границею функції $f(x)$ у точці x_0 за означенням 3.1.3. Розглянемо довільну послідовність $\{x_n\}$ таку, як в означенні 3.1.1. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$, а δ виберемо так, як в означенні 3.1.3. Тоді, оскільки $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, маємо

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\ \{0 < |x_n - x_0| < \delta\},$$

тобто $x_n \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0)$, тому $\{f(x_n) \in \mathcal{U}_\varepsilon(A)\}$. З довільності ε випливає, що $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$. □

Приклад 3.1.1.

1. Нехай $f(x) = \frac{3x^3 - 4x + 2}{x + 1}$. З'ясуємо, чи існує $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

   Скористаємось означенням границі функції за Гейне (означення 3.1.1). Виберемо довільну послідовність $\{x_n\}$ таку, що $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$ і $x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді, використовуючи властивості границь послідовностей (див. 2.4), маємо

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3x_n^3 - 4x_n + 2}{x_n + 1} = \frac{3(\lim\limits_{n \to \infty} x_n)^3 - 4 \lim\limits_{n \to \infty} x_n + 2}{\lim\limits_{n \to \infty} x_n + 1} = 2.$$

Отже, існує $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 2$, і оскільки ця границя не залежить від вибору послідовності $\{x_n\}$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$), то і $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$.

2. Нехай $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. З'ясуємо, чи існує $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Виберемо дві послідовності:

$$x_n = \frac{1}{\pi n}, \quad x_n' = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для них виконуються умови

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0, \ x_n \neq 0; \quad \lim_{n\to\infty} x_n' = 0, \ x_n' \neq 0.$$

Та оскільки

$$f(x_n) = \sin \pi n = 0, \quad f(x_n') = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n') = 1,$$

отже, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ не існує.

3.2. Односторонні границі

Усі подальші означення різних типів границь ми наводитимемо "мовою послідовностей" (за Гейне) і мовою "$\varepsilon - \delta$" (за Коші), водночас, маючи на увазі, що їхню еквівалентність можемо довести аналогічно, як у теоремі 3.1.1 (рис. 3.1).

Означення 3.2.1. Нехай функція $f(x)$ визначена на півінтервалі $(a, x_0]$, окрім, можливо, точки x_0. Число B називають *границею функції* $f(x)$ *в точці* x_0 *зліва* (або *лівосторонньою границею*), якщо

(за Гейне)	(за Коші)
для будь-якої послідовності $\{x_n\}$, $x_n \in (a, x_0)$, $n \in \mathbb{N}$, такої, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, виконується $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = B$.	$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0 - 0))$ $\{f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(B)\}$.

У такому разі пишуть $\lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x) = B$ або $f(x_0 - 0) = B$.

Означення 3.2.2. Нехай функція $f(x)$ визначена на півінтервалі $[x_0, b)$, крім, можливо, точки x_0. Число C називають *границею функції* $f(x)$ *у точці* x_0 *справа* (або *правосторонньою границею*), якщо

(за Гейне)	(за Коші)
для будь-якої послідовності $\{x_n\}$, $x_n \in (x_0, b)$, $n \in \mathbb{N}$, такої, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, виконується $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = C$.	$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0 + 0))$ $\{f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(C)\}$.

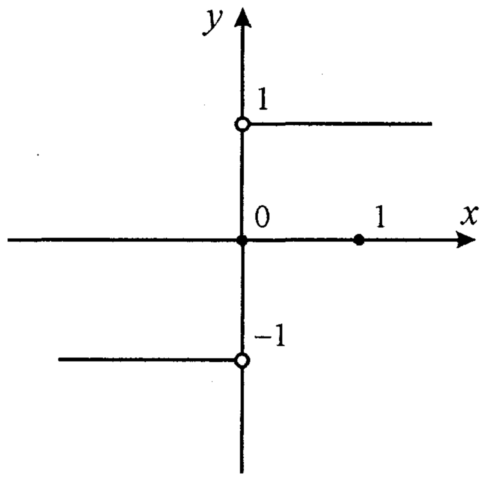


Рис. 3.1

Тоді пишуть $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = C$ або $f(x_0+0) = C$.

Приклад 3.2.1.
Нехай

$$f(x) = \operatorname{sign}\, x \stackrel{\text{def}}{=\!=} \begin{cases} 1, & \text{якщо } x > 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \\ -1, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Графік цієї функції зображено на рис. 3.1.

Нехай послідовності $\{x_n\}$ і $\{x'_n\}$ такі, що $x_n > 0$, $x'_n < 0$, $n \in \mathbb{N}$ і

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x'_n = 0.$$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sign} x_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sign} x'_n = \lim_{n\to\infty} (-1) = -1.$$

Отже,

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} \operatorname{sign} x = 1,$$

$$\lim_{x\to-0} f(x) = \lim_{x\to-0} \operatorname{sign} x = -1.$$

Зв'язок між границями та односторонніми границями відображає сформульована нижче теорема.

Теорема 3.2.1. *Функція $f(x)$ має границю в точці x_0 тоді й лише тоді, якщо в точці x_0 існують і дорівнюють одна одній її односторонні границі, причому*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x).$$

Доведення. ($\Rightarrow$)Нехай $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Тоді, згідно з означенням 3.1.2,

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta)(\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0))\ \{f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(A)\},$$

тобто для всіх $x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0 - 0)$ і $x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0 + 0)$ виконується умова $f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(A)$. Тоді згідно з означенням 3.2.1 маємо

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A \quad \text{і} \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = A.$$

($\Leftarrow$)Нехай $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$

$$(\exists\delta_1)(\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_{\delta_1}(x_0 - 0))\ \{f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(A)\}$$

і

$$(\exists\delta_2)(\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_{\delta_2}(x_0 + 0))\ \{f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(A)\}.$$

Позначимо $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. У цьому разі

$$(\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0))\ \{f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(A)\},$$

а це й означає, що $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. □

3.3. Основні властивості функцій, що мають границю в точці

Зазначимо, що всі функції, які ми розглядатимемо у цьому параграфі, визначені на деякому інтервалі (a, b), крім, можливо, точки x_0.

1. (Єдиність границі). Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ і $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = B$, то $A = B$.

2. Якщо існує $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то функція $f(x)$ обмежена в деякому $\overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0)$.

3. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ і $A > B$, то

$$(\exists\delta > 0)(\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0))\ \{f(x) > B\}.$$

Доведення. Нехай $\varepsilon = \frac{A-B}{2}$. З означення границі маємо, що

$$(\exists\delta > 0)(\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0))\ \{f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(A)\},$$

тобто $|f(x) - A| < \frac{A-B}{2}$, звідки $f(x) - A > -\frac{A-B}{2}$, отже, $f(x) > \frac{A}{2} + \frac{B}{2} > B$. □

4. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ і для всіх x з деякого $\overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0)$ виконується нерівність $f(x) \le B$, то
$$A \le B.$$

5. Якщо в деякому $\overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0)$ виконується нерівність
$$\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$$
і $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \psi(x) = A$, то
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

6. Якщо існують границі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ і $\lim\limits_{y\to y_0} F(y)$, і, крім того, $f(x) \ne y_0$ при $x \ne x_0$, тоді існує $\lim\limits_{x\to x_0} F(f(x))$, причому
$$\lim_{x\to x_0} F(f(x)) = \lim_{y\to y_0} F(y).$$

Властивості 1, 2, 4 — 6 пропонуємо довести самостійно.

Теорема 3.3.1 (границі та арифметичні операції). *Нехай* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$. *Тоді*

1) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$;

3) *якщо, окрім того,* $B \ne 0$, *то* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

Наслідок 3.3.1. *Нехай* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $c \in \mathbb{R}$. *Тоді*
$$\lim_{x\to x_0} cf(x) = cA.$$

Теорема 3.3.1 випливає із означення границі функції за Гейне (означення 3.1.1) з властивостей границь послідовностей, пов'язаних з арифметичними операціями (див. 2.4).

3.4. Нескінченно малі та нескінченно великі функції

Означення 3.4.1. Функцію $\alpha(x)$, що визначена на інтервалі (a, b), крім, можлив точки $x_0 \in (a, b)$, називають *нескінченно малою при* $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Теорема 3.4.1. *Для того, щоб* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, *необхідно і досить, щоб*

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - A) = 0.$$

Ця теорема безпосередньо випливає з леми 2.4.1 та означення границі за Гейн (див. 3.1).

Розглянемо узагальнення поняття границі на випадок нескінченних границ тобто якщо границею функції в точці є ∞, $+\infty$ або $-\infty$.

Означення 3.4.2. Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі (a, b), крім, можли во, точки x_0. Кажуть, що функція $f(x)$ *має в точці* x_0 *границю* ∞, якщо

(за Гейне)	(за Коші)
для будь-якої послідовності $\{x_n\}$, $x_n \in (a, b)$, $x_n \neq x_0$, $n \in \mathbb{N}$, такої, що $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, виконується $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \infty$.	$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0))$ $\{f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(\infty)\}$.

У такому разі пишуть $\lim\limits_{n \to x_0} f(x) = \infty$. Тоді функцію $f(x)$ називають *нескінченн великою при* $x \to x_0$.

Аналогічно до означення 3.4.2 вводять поняття $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ та $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$. Зауважимо таке: якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ або $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ (прот не навпаки).

За аналогією зі скінченними односторонніми границями визначають і нескінченні односторонні границі

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = -\infty.$$

3.5. Границі на нескінченності. Загальне означення границі

Розглянемо узагальнення поняття границі у разі прямування x до $+\infty$, $-\infty$ та ∞. Для зручності подальших означень ми не розрізнятимемо околів та проколених околів символів $+\infty$, $-\infty$ та ∞, тобто

$$\overset{\circ}{\mathcal{U}}_\varepsilon(+\infty) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{U}_\varepsilon(+\infty), \quad \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\varepsilon(-\infty) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{U}_\varepsilon(-\infty), \quad \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\varepsilon(\infty) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{U}_\varepsilon(\infty).$$

Означення 3.5.1. Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(a, +\infty)$. Число A називають *границею функції* $f(x)$ *при* $x \to +\infty$, якщо

(за Гейне)	(за Коші)
для кожної послідовності $\{x_n\}, x_n \in (a, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, такої, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, виконується $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.	$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(+\infty))$ $\{f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(A)\}$.

У такому разі пишуть $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

Цілком аналогічно вводять поняття границі при $x \to -\infty$ та $x \to \infty$, що записують $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ та $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Також аналогічно визначають і нескінченні границі на нескінченностях. Для прикладу наведемо таке означення.

Означення 3.5.2. Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(a, +\infty)$. Кажуть, що $+\infty$ є *границею функції* $f(x)$ *при* $x \to +\infty$, якщо:

(за Гейне)	(за Коші)
для кожної послідовності $\{x_n\}$, $x_n \in (a, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, такої, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, виконується $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$.	$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(+\infty))$ $\{f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(+\infty)\}$.

Тоді записують $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

З цього означення зрозуміло, що означають записи

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

тощо.

Наведемо тепер загальне означення границі, яке містить усі наведені вище означення границі різних типів.

Означення 3.5.3. Величину A, що є числом або одним із символів $+\infty$, $-\infty$ чи ∞, називають *границею функції* $f(x)$ *при* $x \to a$ (де a — число x_0 або один із символів $x_0 + 0$, $x_0 - 0$, $+\infty$, $-\infty$ чи ∞), якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(a))\ \{f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(A)\}.$$

3.6. Критерій Коші існування границі функції

Теорема 3.6.1 (критерій Коші існування границі функції). *Для того, щоб функція $f(x)$ мала скінченну границю при $x \to a$ (де a — число x_0 або один із символів x_0+0, x_0-0, $+\infty$, $-\infty$ чи ∞), необхідно і досить, щоб*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x, x' \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(a))\ \{|f(x') - f(x)| < \varepsilon\}. \tag{3.4}$$

Зауважимо, що умову (3.4) називають умовою Коші при $x \to a$.

Доведення. ($\Rightarrow$)Нехай $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $A \in \mathbb{R}$. Тоді

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(a))\ \{|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}\}. \tag{3.5}$$

Нехай $x' \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(a)$, $x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(a)$. Тоді з огляду на (3.5)

$$|f(x') - f(x)| = |(f(x') - A) + (A - f(x))| \le |f(x') - A| + |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отже, умова (3.4) виконується.

($\Leftarrow$)Нехай функція $f(x)$ задовольняє умову (3.4), отже, вона визначена в деякому околі $\overset{\circ}{\mathcal{U}}_{\delta_0}(a)$, і нехай $\{x_n\}$ — така послідовність, що

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ x_n \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_{\delta_0}(a), n \in \mathbb{N}. \tag{3.6}$$

Доведемо, що послідовність $\{f(x_n)\}$ — збіжна. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Згідно з умовою (3.4) маємо

$$(\exists\delta > 0)(\forall x, x' \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(a))\ \{|f(x') - f(x)| < \varepsilon\},$$

а з урахуванням (3.6)

$$(\exists N)(\forall n, m > N)\ \{x_n, x_m \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(a)\},$$

тому

$$(\forall n, m > N)\ \{|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon\}.$$

Як бачимо, послідовність $\{f(x_n)\}$ задовольняє умову Коші для послідовності, отже (див. теорему 2.9.1), є збіжною. Позначимо

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = B.$$

Доведемо, що для будь-якої іншої послідовності $\{x'_n\}$ такої, що

$$\lim_{n\to\infty} x'_n = a,\ x'_n \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_{\delta_0}(a), n \in \mathbb{N},$$

виконується

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = B.$$

Утворимо нову послідовність

$$x''_n = \begin{cases} x_n, & \text{якщо } n = 2k-1, \\ x'_n, & \text{якщо } n = 2k. \end{cases}$$

Очевидно, що

$$\lim_{n\to\infty} x''_n = a, \ x''_n \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_{\delta_0}(a), n \in \mathbb{N}.$$

Як доведено вище, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n)$ існує, а оскільки границя збіжної послідовності дорівнює границі будь-якої її підпослідовності (теорема 2.8.1), то

$$\lim_{n\to\infty} f(x''_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n), \ \lim_{n\to\infty} f(x''_n) = \lim_{n\to\infty} f(x'_n),$$

отже,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x'_n).$$

Тому згідно з означенням границі функції $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$. □

3.7. Границя монотонної функції

Означення 3.7.1. Функцію $f(x)$, що визначена на множині $E \subset \mathbb{R}$, називають

а) *зростаючою*;

б) *неспадною*;

в) *спадною*;

г) *незростаючою*

на множині E, якщо для всіх $x_1, x_2 \in E$, таких що $x_1 < x_2$, виконуються, відповідно, умови:

а) $f(x_1) < f(x_2)$;

б) $f(x_1) \le f(x_2)$;

в) $f(x_1) > f(x_2)$;

г) $f(x_1) \ge f(x_2)$.

Функції перелічених типів називають *монотонними*, а функції зростаючі та спадні — *строго монотонними*.

Теорема 3.7.1. *Нехай $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta_0 > 0$, $f(x)$ — неспадна й обмежена зверху на інтервалі $E = (x_0 - \delta_0, x_0)$. Тоді існує скінченна границя $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$.*

Доведення. Нехай $A \stackrel{\text{def}}{=} \sup\limits_{x \in E} f(x)$ (існування такого числа випливає з принципу точної верхньої межі). З означення точної верхньої межі (означення 1.6.7) маємо

$$\begin{aligned} &1)\ (\forall x \in E)\ \{f(x) \le A\}; \\ &2)\ (\forall \varepsilon > 0)(\exists x' \in E)\ \{f(x') > A - \varepsilon\}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Приймемо $\delta = x_0 - x'$. З монотонності $f(x)$ випливає, що для

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)\ \{f(x) > A - \varepsilon\}. \tag{3.8}$$

Отже,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0 - 0))\ \{f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(A)\},$$

тобто

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A.$$

$\square$

Теорема 3.7.2. *Нехай $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta_0 > 0$, $f(x)$ — неспадна й обмежена знизу на інтервалі $E = (x_0, x_0 + \delta_0)$. Тоді існує скінченна границя $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.*

Наслідок 3.7.1. *Монотонна на інтервалі функція $f(x)$ має скінченні односторонні границі в кожній точці цього інтервалу.*

3.8. Невизначеності

Як і у випадку розгляду числових послідовностей (див. підрозділ 2.5), під час розгляду границь функцій можуть виникати невизначеності типу

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty.$$

Наприклад, невизначеність $0 \cdot \infty$ ми розуміємо як границю функції $f(x) \cdot g(x)$, де $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$. Аналогічно розумітимемо й інші типи невизначеностей. Розглядаючи невизначеності, треба зазначати точку, в якій ми шукаємо границю. Наприклад, співвідношення $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$ є невизначеністю типу $\frac{\infty}{\infty}$ при $x \to \infty$, невизначеністю $\frac{0}{0}$ при $x \to -1$ і не є невизначеністю при $x \to 1$.

Знову ж, як і в підрозділі 2.5, використовуючи символьний запис, маємо

$$\frac{1}{+0} = +\infty, \quad \frac{1}{-0} = -\infty, \quad \frac{1}{0} = \infty, \quad \frac{1}{+\infty} = +0, \quad \frac{1}{-\infty} = -0, \quad \frac{1}{\infty} = 0.$$

Приклад 3.8.1.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0) = \lim\limits_{x\to\infty} x^n(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}) = \infty.$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_0} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_0}{x^n}}{b_n+\frac{b_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{b_0}{x^n}} = \frac{a_n}{b_n}$ (тут $b_n \neq 0$).

3) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x-4)} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{x-2}{x-4} = -1.$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2}.$

3.9. Важливі границі

Лема 3.9.1. *Для довільного $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ справджуються нерівності*

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x. \tag{3.9}$$

Доведення. З рис. 3.2 видно, що

$$S_{\triangle AOB} < S_{\text{сект.}AOB} < S_{\triangle AOC},$$

тобто

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$

□

Теорема 3.9.1 (перша важлива границя). *Справджується рівність*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Доведення. Із (3.9) випливає, що при $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

отже,

$$0 > \frac{\sin x}{x} - 1 > \cos x - 1,$$

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x.$$

Однак $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{2} < x$, тому

$$\left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| < |x|. \tag{3.10}$$

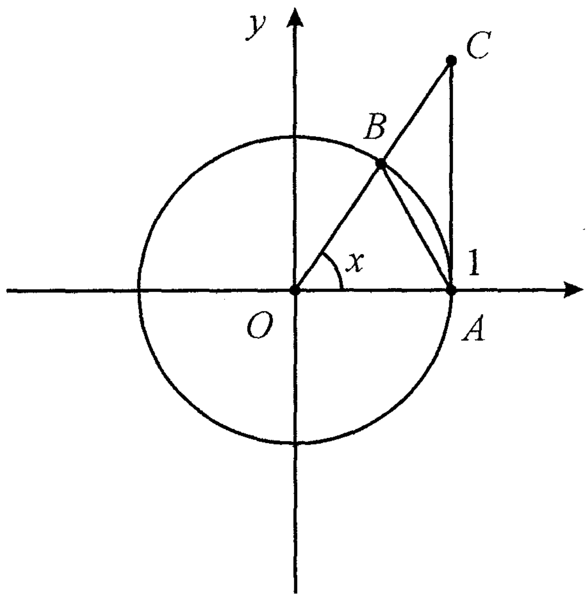


Рис. 3.2

З парності функцій $\frac{\sin x}{x}$ та $|x|$ випливає, що остання нерівність справджується і при $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$. Перейшовши у співвідношенні (3.10) до границі при $x \to 0$, отримуємо $\lim\limits_{x \to 0} |1 - \frac{\sin x}{x}| = 0$, звідки

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

□

Теорема 3.9.2 (друга важлива границя). *Справджується рівність*

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Доведення. Для доведення теореми достатньо довести, що

$$\lim_{x \to +0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to -0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Нехай $\{x_k\}$ — довільна послідовність додатних чисел така, що $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = 0$ (не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $x_k < 1$). Тоді

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\exists n_k \in \mathbb{N}) \left\{ \frac{1}{n_k + 1} < x_k \leq \frac{1}{n_k} \right\},$$

Отже,

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} < (1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} < \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}. \quad (3.11)$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$, то й границя будь-якої підпослідовності дорівнює e. Тому

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_{k+1}}\right)^{n_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n_{k+1}})^{n_{k+1}}}{1+\frac{1}{n_{k+1}}} = e,$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_{k+1}} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1+\frac{1}{n_k}\right) = e.$$

Звідси з урахуванням (3.11) отримуємо

$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Далі

$$\lim_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to+0}(1-t)^{-\frac{1}{t}} = \lim_{t\to+0}\left(1+\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1-t}{t}}\left(1+\frac{t}{1-t}\right) = e,$$

оскільки $\frac{t}{1-t} \to +0$ при $t \to +0$. □

3.10. Порівняння функцій

Означення 3.10.1. Нехай $a = x_0$ або є одним із символів x_0+0, x_0-0, $+\infty$, $-\infty$, ∞. Якщо існують константи $c > 0$ і $\delta > 0$ такі, що

$$(\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a))\ \{|f(x)| \le c\cdot|g(x)|\},$$

то кажуть, що $f(x)$ *є обмеженою порівняно з* $g(x)$ *при* $x \to a$, і пишуть

$$f(x) = O(g(x)),\ x \to a.$$

Читають: "$f(x)$ *є о велике від* $g(x)$ *при* $x \to a$").

Приклад 3.10.1.

Виконуються такі співвідношення:

$x^2 = O(x),\ x \to 1;$	$x = O(x^2),\ x \to 1;$
$x^2 = O(x),\ x \to 0;$	$x \ne O(x^2),\ x \to 0;$
$x^2 \ne O(x),\ x \to +\infty;$	$x = O(x^2),\ x \to +\infty.$

Означення 3.10.2. Якщо $f(x) = O(g(x))$, $x \to a$ і $g(x) = O(f(x))$, $x \to a$, то кажуть, що $f(x)$ і $g(x)$ є *функціями одного порядку* при $x \to a$.

Цей факт записують так: $f(x) \asymp g(x)$, $x \to a$.

Лема 3.10.1. *Якщо $f(x)$ і $g(x)$ у деякому $\overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(a)$ відмінні від нуля та існує границя*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0, \tag{3.12}$$

то $f(x) \asymp g(x)$, $x \to a$.

Доведення. Умова (3.12), згідно з теоремою 3.4.1, еквівалентна умовам

$$\frac{f(x)}{g(x)} - c = \varepsilon_1(x) \quad \text{і} \quad \frac{g(x)}{f(x)} - \frac{1}{c} = \varepsilon_2(x),$$

де $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon_1(x) = \lim\limits_{x\to a}\varepsilon_2(x) = 0$, отже,

$$(\exists\delta > 0)(\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(a))\left\{\left(|\varepsilon_1(x)| < 1\right) \wedge \left(|\varepsilon_2(x)| < 1\right)\right\}.$$

Тому

$$(\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(a))\left\{\left(\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \le |c| + 1\right) \wedge \left(\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| \le \frac{1}{|c|} + 1\right)\right\},$$

тобто $f(x) = O(g(x))$, $x \to a$ і $g(x) = O(f(x))$, $x \to a$. □

Зауважимо, що іноді для функцій $f(x)$ та $g(x)$, що задовольняють умову леми 3.10.1, тобто $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$, застосовують позначення $f(x) = O^*(g(x))$, $x \to a$.

Означення 3.10.3. Якщо $f(x) = \varepsilon(x)\cdot g(x)$, де $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$, то кажуть, що $f(x)$ є нескінченно малою порівняно з $g(x)$ при $x \to a$ і пишуть

$$f(x) = o(g(x)),\ x \to a$$

(читають так: "$f(x)$ є о маленьке від $g(x)$ при $x \to a$").

Зауваження 3.10.1. Якщо $g(x) \neq 0$ у деякому $\overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(a)$, то умову

$$f(x) = \varepsilon(x)g(x), \quad \lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0,$$

можна записати так:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Отже, якщо $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, то $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$.

Символи O і o називають *символами Ландау.*

Приклад 3.10.2.

Виконуються такі співвідношення:

$$x = o(x^2),\ x \to \infty;$$
$$x^2 = o(x),\ x \to 0;$$
$$x^2 = o(\sin x),\ x \to 0.$$

Зауваження 3.10.2. Якщо $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$, то $f(x) = O(g(x))$, $x \to a$.

Справді, якщо $\alpha(x)$ — нескінченно мала при $x \to a$, то $\alpha(x)$ обмежена в деякому $\overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(a)$, тобто $|\alpha(x)| \le c$. Тому

$$|f(x)| \le |\alpha(x)| \cdot |g(x)| \le c \cdot |g(x)|,$$

тобто $f(x) = O(g(x))$, $x \to a$.

Якщо $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$ і $f(x)$ та $g(x)$ — нескінченно малі при $x \to a$, то кажуть, що $f(x)$ *нескінченно мала вищого порядку, ніж* $g(x)$; якщо ж $f(x)$ та $g(x)$ — нескінченно великі при $x \to a$, то кажуть, що $f(x)$ *має нижчий порядок зростання, ніж* $g(x)$.

Означення 3.10.4. Функції $f(x)$ і $g(x)$ називають *еквівалентними* при $x \to a$, якщо в деякому $\overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(a)$ існує функція $\varphi(x)$ така, що

$$f(x) = \varphi(x) \cdot g(x)$$

і

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = 1.$$

Зауваження 3.10.3. Якщо $g(x) \ne 0$, $f(x) \ne 0$ в деякому $\overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(a)$, то умова еквівалентності функцій рівносильна умові

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1.$$

Еквівалентні функції називають також *асимптотично рівними* при $x \to a$ і цей факт записують так:

$$f(x) \sim g(x),\ x \to a.$$

Зауважимо також: якщо $f(x) \sim g(x)$, $x \to a$, то й $g(x) \sim f(x)$, $x \to a$.

Приклад 3.10.3.

1) $x^2 \sim \frac{x^2}{1+x^4}$, $x \to 0$.

Справді, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{\frac{x^2}{1+x^4}} = \lim\limits_{x \to 0}(1 + x^4) = 1;$

2) $x^3 \sim \frac{x^6}{2+x^3}$, $x \to \infty$.

Ця рівність справджується тому, що

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{\frac{x^6}{2+x^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^6+2x^3}{x^6} = 1.$$

Теорема 3.10.1. *Для того, щоб $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$, необхідно і досить, щоб виконувалась хоча б одна з умов:*

$$f(x) = g(x) + o(g(x)),\ x \to a \tag{3.13}$$

або

$$g(x) = f(x) + o(f(x)),\ x \to a. \tag{3.14}$$

Доведення. ($\Rightarrow$)Нехай $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$, тобто

$$f(x) = \varphi(x)g(x),$$

де $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 1$. Тоді

$$f(x) = g(x) + (\varphi(x) - 1)\cdot g(x) = g(x) + \varepsilon(x)\cdot g(x),$$

де $\varepsilon(x) = (\varphi(x) - 1) \to 0$ при $x \to a$. Отже, співвідношення (3.13) доведено.

Аналогічно доводимо співвідношення (3.14).

($\Leftarrow$)Нехай виконується, наприклад, умова (3.13), тобто

$$f(x) = g(x) + \varepsilon(x)g(x),$$

де $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. Тоді

$$f(x) = (1+\varepsilon(x))\cdot g(x) = \varphi(x)\cdot g(x),$$

де $\varphi(x) = (1+\varepsilon(x)) \to 1$ при $x \to a$, тобто $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$. Аналогічно доводимо і достатність умови (3.14). □

Зауважимо, що умови (3.13) та (3.14) виконуються або не виконуються одночасно.

Наслідок 3.10.1. *Нехай $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$, де $c \in \mathbb{R}$. Тоді*

$$f(x) \sim c\cdot g(x),\ x \to a$$

і

$$f(x) = c\cdot g(x) + o(g(x)),\ x \to a.$$

Теорема 3.10.2. *Нехай* $f(x) \sim f_1(x)$, $x \to a$ *і* $g(x) \sim g_1(x)$, $x \to a$. *Тоді якщо існує*

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)},$$

то існує і

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

причому

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

Доведення. Умова $f(x) \sim f_1(x)$ при $x \to a$ означає, що

$$f(x) = \varphi(x) \cdot f_1(x),$$

де $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 1$, а умова $g(x) \sim g_1(x)$ при $x \to a$, що

$$g(x) = \psi(x) \cdot g_1(x),$$

де $\lim\limits_{x\to a} \psi(x) = 1$. Крім того, оскільки існує границя $\lim\limits_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$, то функція $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ визначена в деякому проколеному околі точки a, отже, у цьому ж околі $g_1(x) \neq 0$. Оскільки і $\psi(x) \neq 0$ у деякому околі точки a, то існує окіл, у якому $g(x) = \psi(x) \cdot g_1(x) \neq 0$ і в ньому визначена функція $\frac{f(x)}{g(x)}$. Крім того,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\varphi(x) \cdot f_1(x)}{\psi(x) \cdot g_1(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)}{\lim\limits_{x\to a} \psi(x)} \cdot \lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

$\square$

Результат отриманої теореми часто застосовують під час обчислення границі.

Розділ 4

Неперервні функції

4.1. Неперервність функції в точці

Означення 4.1.1. Функцію $f(x)$, що визначена на інтервалі (a, b), називають *неперервною в точці* $x_0 \in (a, b)$, якщо

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{4.1}$$

Використовуючи означення границі функції за Гейне (означення 3.1.1) та за Коші (означення 3.1.3), отримуємо рівносильні означення неперервності функції в точці.

Означення 4.1.2. Функцію $f(x)$, що визначена на інтервалі (a, b), називають *неперервною в точці* $x_0 \in (a, b)$, якщо

(за Гейне)	(за Коші)
для будь-якої послідовності $\{x_n\}$, $x_n \in (a, b)$, $n \in \mathbb{N}$, такої, що $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, виконується $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.	$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathcal{U}_\delta(x_0))$ $\{f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(f(x_0))\}$.

На рис. 4.1 інтерпретовано означення 4.1.2 (за Коші), а саме: для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для всіх x з δ-околу точки x_0 значення функції належать до ε-околу точки $f(x_0)$.

Із співвідношення (4.1) випливає, що

$$\lim_{(x - x_0) \to 0} (f(x) - f(x_0)) = 0. \tag{4.2}$$

Позначимо

$$\Delta x \stackrel{\text{def}}{=} x - x_0$$

— приріст аргументу в точці x_0;

$$\triangle y \stackrel{\text{def}}{=\!=} f(x) - f(x_0)$$

— приріст функції $f(x)$ у точці x_0, що відповідає приросту аргументу $\triangle x$.

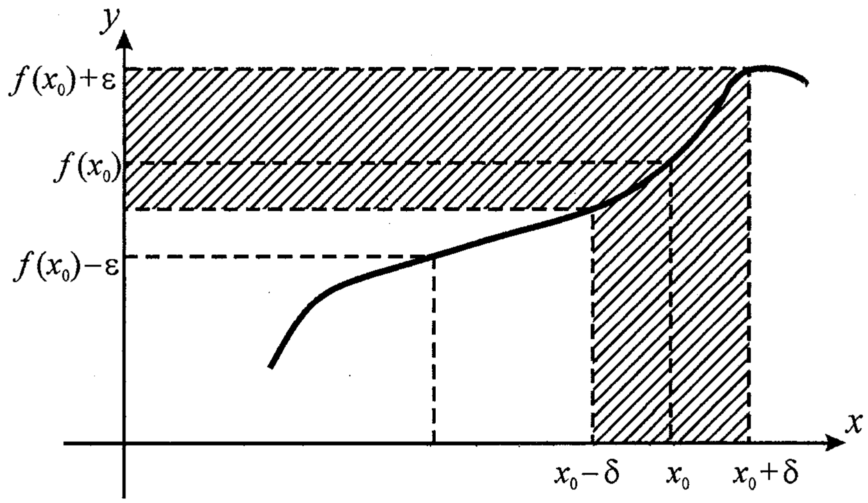


Рис. 4.1

Звідси умову (4.2), а, отже, й (4.1), запишемо так:

$$\lim_{\triangle x \to 0} \triangle y = 0, \tag{4.3}$$

а це означає, що для неперервних функцій нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції.

Приклад 4.1.1.

1. Нехай $f(x) = x$. Доведемо, що ця функція є неперервною в будь-якій точці $x_0 \in \mathbb{R}$. Справді, достатньо в означенні 4.1.2 (за Коші) для будь-якого фіксованого $\varepsilon > 0$ вибрати $\delta = \varepsilon$.

2. Нехай $f(x) = \frac{1}{x}$. Доведемо, що ця функція є неперервною в будь-якій точці $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$. Достатньо довести, що для $x_0 \neq 0$ виконується умова (4.3). Справді,

$$\triangle y = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = \frac{1}{x_0 + \triangle x} - \frac{1}{x_0} = \frac{-\triangle x}{(x_0 + \triangle x)x_0},$$

звідки при $x_0 \neq 0$ отримуємо

$$\lim_{\triangle x \to 0} \triangle y = -\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle x}{(x_0 + \triangle x) \cdot x_0} = 0.$$

3. Доведемо, що функція $y = |\operatorname{sign} x|$ не є неперервною в точці $x_0 = 0$. Справді,

$$\lim_{x \to 0} |\operatorname{sign} x| = 1 \neq \operatorname{sign} 0 = 0.$$

Означення 4.1.3. Функцію $f(x)$, що визначена на півінтервалі $(a, x_0]$, називають *неперервною в точці x_0 зліва*, якщо

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0).$$

Означення 4.1.4. Функцію $f(x)$, що визначена на півінтервалі $[x_0, b)$, називають *неперервною в точці x_0 справа*, якщо

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Безпосереднім наслідком з теореми 3.2.1 є такий критерій неперервності функції в точці в термінах односторонніх неперервностей.

Теорема 4.1.1. *Функція $f(x)$, що визначена на інтервалі (a, b), є неперервною в точці $x_0 \in (a, b)$ тоді й лише тоді, коли вона в точці x_0 неперервна і справа, і зліва.*

Приклад 4.1.2.

Нехай $y = [x]$ (ціла частина x). Графік цієї функції зображено на рис. 4.2:

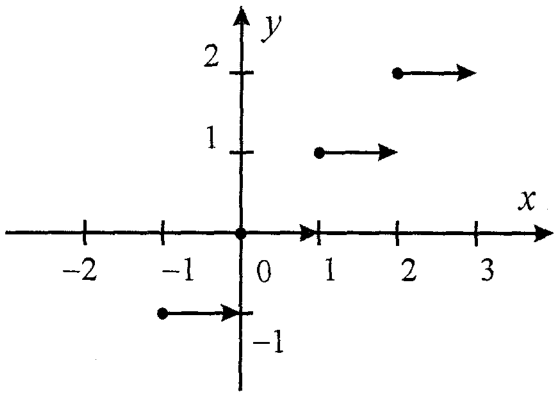


Рис. 4.2

Очевидно, що функція $y = [x]$ є неперервною в усіх точках x таких, що $x \neq n$, $n \in \mathbb{Z}$. А в усіх точках $x = n$, $n \in \mathbb{Z}$, функція $y = [x]$ є неперервною справа і не є неперервною зліва.

4.2. Точки розриву. Їхня класифікація

Означення 4.2.1. Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі (a, b), крім, можливо, точки $x_0 \in (a, b)$. Точку x_0 називають *точкою розриву функції $f(x)$*, якщо функція або не визначена в точці x_0, або не є в ній неперервною.

Означення 4.2.2. Якщо x_0 — точка розриву функції $f(x)$ та існують скінченні односторонні границі

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0) \quad \text{i} \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0),$$

то точку x_0 називають *точкою розриву першого роду*. У цьому випадку величину $f(x_0+0) - f(x_0-0)$ називають *величиною стрибка функції $f(x)$ у точці x_0*. Якщо $f(x_0+0) = f(x_0-0)$, то точку x_0 називають *точкою усувного розриву*.

Означення 4.2.3. Точку x_0 розриву функції $f(x_0)$ називають *точкою розриву другого роду*, якщо вона не є точкою розриву першого роду.

Очевидно таке: якщо x_0 — точка розриву другого роду функції $f(x)$, то хоча б одна з односторонніх границь $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ та $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ або є нескінченною, або не існує.

Приклад 4.2.1.

1. Нехай $f(x) = \operatorname{sign} x$. Точка $x = 0$ є точкою розриву першого роду функції $\operatorname{sign} x$, а величина стрибка в ній дорівнює
$$\lim_{x\to+0} \operatorname{sign} x - \lim_{x\to-0} \operatorname{sign} x = 1 - (-1) = 2.$$
2. Нехай $f(x) = |\operatorname{sign} x|$. Точка $x = 0$ є точкою розриву першого роду функції $f(x)$, причому точкою усувного розриву, тому що
$$\lim_{x\to+0} |\operatorname{sign} x| = \lim_{x\to-0} |\operatorname{sign} x| = 1 \neq \operatorname{sign} 0 = 0.$$
3. Нехай $f(x) = \frac{1}{x}$. Точка $x = 0$ є точкою розриву другого роду функції $f(x)$, оскільки
$$\lim_{x\to-0} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x\to+0} \frac{1}{x} = +\infty.$$
4. Нехай $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Точка $x = 0$ є точкою розриву другого роду функції $f(x)$, оскільки $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ не існує (див. приклад 3.1.1(2)).

4.3. Властивості неперервних у точці функцій

Теорема 4.3.1. *Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ є неперервними в точці x_0, то функції $cf(x)$ (де $c \in \mathbb{R}$), $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, а також $\frac{f(x)}{g(x)}$ за умови, що $g(x_0) \neq 0$, є неперервними в точці x_0.*

Ця теорема безпосередньо випливає з означення неперервності в точці та теореми 3.3.1.

Приклад 4.3.1.

1. Функція $f(x) = x^n$ неперервна для будь-якого $x \in \mathbb{R}$, а функція $g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^n$ є неперервною для будь-якого $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

   Це твердження випливає з теореми 4.3.1 з урахуванням того, що функція $y = x$ є неперервною для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ (див. приклад 4.1.1(1)), а функція $y = \frac{1}{x}$ є неперервною для будь-якого $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (див. приклад 4.1.1(2)).

2. Многочлен n-го степеня

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

є неперервним у всіх точках $x \in \mathbb{R}$.

Цей факт випливає з прикладу 4.3.1(1) і теореми 4.3.1.

3. Дробово-раціональна функція

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-5} + \dots + b_1 x + b_8}$$

є неперервною функцією в усіх точках з $\mathbb{R}$, за винятком тих, у яких $Q_m(x) = 0$.

Це твердження випливає з неперервності многочлена та теореми 4.4.1.

Теорема 4.3.2. *Нехай функція $y = \varphi(x)$ неперервна в точці x_0, а функція $f(y)$ неперервна в точці $y_0 = \varphi(x_2)$, тоді складена функція $f\big(\varphi(x)\big)$ неперервна в точці x_0.*

Доведення. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Тоді, з огляду на неперервність функції $f(y)$ у точці y_6, існує $\eta > 0$ таке, що для будь-якого $y \in \mathcal{U}_\eta(y_0)$ функція $f(y)$ визначена і $f(y) \in \mathcal{U}_\varepsilon(f(y_0))$. Для знайденого $\eta > 0$, з огляду на неперервність функції $\varphi(x)$ в точці x_0, існує $\delta > 0$ таке, що для будь-якого $x \in \mathcal{U}_\delta(x_0)$ функція $\varphi(x)$ визначена і $\varphi(x) \in \mathcal{U}_\eta(\varphi(x_0))$. Отже, для будь-якого $x \in \mathcal{U}_\delta(x_0)$ визначена функція $f(\varphi(x))$ і $y \in \mathcal{U}_\eta(y_0)$, $y = \varphi(x)$, тому $f(\varphi(x)) \in \mathcal{U}_\varepsilon(f(\varphi(x_0)))$, що й означає неперервність складеної функції $f(\varphi(x))$ у точці x_0. □

Твердження теореми можна також записати у вигляді співвідношення

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = f(\lim_{x\to x_0} \varphi(x)).$$

Для знаходження границі неперервних функцій останню теорему зручно застосувати у вигляді, який називають *правилом заміни змінної для границь неперервних функцій*, а саме:

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{y\to y_0} f(y),$$

де $y = \varphi(x)$.

4.4. Властивості функцій, неперервних на відрізках

Означення 4.4.1. Функцію $f(x)$ називають *неперервною на інтервалі* (a,b), якщо вона є неперервною в кожній точці інтервалу (a,b).

У такому разі писатимемо $f \in C_{(a,b)}$.

Означення 4.4.2. Функцію $f(x)$ називають *неперервною на відрізку* $[a,b]$, якщо вона неперервна на інтервалі (a,b), в точці a неперервна справа, а в точці b — зліва.

У такому разі писатимемо $f \in C_{[a,b]}$. Аналогічно розуміють неперервність функції $f(x)$ на півінтервалах $[a,b)$ та $(a,b]$.

Теорема 4.4.1 (теорема Вейєрштрасса). *Якщо функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a,b]$, то вона обмежена і досягає на ньому своїх верхньої та нижньої точних меж, тобто*

$$(\exists x^* \in [a,b]\colon f(x^*) = \sup_{[a,b]} f(x)) \wedge (\exists x_* \in [a,b]\colon f(x_*) = \inf_{[a,b]} f(x)).$$

Доведення. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і нехай

$$M = \begin{cases} \sup\limits_{[a,b]} f(x), & \text{якщо } f(x) \text{ обмежена зверху;} \\ +\infty, & \text{якщо } f(x) \text{ необмежена зверху.} \end{cases}$$

Доведемо, що $M < +\infty$ і що $\exists x^* \in [a,b]\colon f(x^*) = M$. Виберемо довільну послідовність $\{a_n\}$ таку, що

$$\lim_{n\to\infty} a_n = M, \quad a_n < M, \ n \in \mathbb{N}.$$

Тоді

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x_n \in [a,b]) \ \{f(x_n) > a_n\} \tag{4.4}$$

і

$$(\forall x \in [a,b]) \ \{f(x) \le M\}. \tag{4.5}$$

Оскільки послідовність $\{x_n\}$ обмежена ($a \le x_n \le b, n \in \mathbb{N}$), то, з огляду на теорему 2.8.2, з неї можна виділити збіжну підпослідовність $\{x_{n_k}\}$. Позначимо $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x^*$. Оскільки $a \le x_{n_k} \le b, k \in \mathbb{N}$, то $a \le x^* \le b$. Із співвідношень (4.4) та (4.5) випливає, що

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \ \{a_{n_k} \le f(x_{n_k}) \le M\}.$$

Перейшовши в останній нерівності до границі при $k \to \infty$ і врахувавши, що $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = M$, отримуємо

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M.$$

Оскільки ж функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то вона неперервна і в точці $x^* \in [a,b]$, а тому

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x^*).$$

Отже,

$$M = f(x^*) < +\infty.$$

Аналогічно доводимо, що неперервна на відрізку функція обмежена знизу і досягає своєї точної нижньої межі. $\square$

Теорема 4.4.2 (теорема Больцано-Коші). *Нехай функція $f(x)$ неперервна н відрізку $[a, b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$. Тоді для будь-якого числа C, що лежить між . і B, знайдеться точка $x_0 \in [a, b]$ така, що $f(x_0) = C$.*

Доведення. Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $f(a) = A < B = f(b$ Якщо $C = A$ або $C = B$, то твердження теореми очевидне (тоді $x_0 = a$ або $x_0 =$ відповідно). Розглянемо випадок $A < C < B$. Розділимо відрізок $[a, b]$ навпіл то кою $t_1 = \frac{a+b}{2}$. Тоді якщо $f(t_1) = C$, то шукана точка $x_0 = t_1$. Якщо ж $f(t_1) \neq C$ то у випадку $f(t_1) > C$ вибираємо відрізок $[a, t_1]$, а у випадку $f(t_1) < C$ — відрізо $[t_1, b]$. Вибраний відрізок позначимо $[a_1, b_1]$, причому, з огляду на його вибір,

$$f(a_1) < C < f(b_1).$$

Продовжимо процес поділу та вибору відрізка за описаною схемою. Тоді або н якомусь кроці ми знайдемо шукану точку ($x_0 = t_k$), або отримаємо послідовніст вкладених відрізків $[a_n, b_n]$ таку, що $|b_n - a_n| \to 0$ при $n \to \infty$ і

$$f(a_n) < C < f(b_n). \qquad (4.6$$

Нехай x_0 — спільна точка системи відрізків $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, існування і єдиність як випливає з теореми 1.9.1. Отже,

$$a_n \leq x_0 \leq b_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Звідси маємо, що

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n,$$

а з огляду на неперервність функції $f(x)$

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n),$$

звідки з урахуванням співвідношення (4.6)

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq C \leq \lim_{n\to\infty} f(b_n).$$

Отже,

$$f(x_0) = C.$$

□

Наслідок 4.4.1. *Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і набуває н його кінцях значень різних знаків. Тоді існує точка $x_0 \in [a, b]$ така, що $f(x_0) = 0$.*

Наслідок 4.4.2. *Нехай функція $f(x)$ неперервна на $[a, b]$ і нехай $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$ $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$. Тоді функція $f(x)$ набуває будь-яких значень з відрізка $[m, M]$ і ли ше їх.*

Доведення. Очевидно, що $(\forall x \in [a,b])$ $\{m \le f(x) \le M\}$. Згідно з теоремою 4.4.1, існують точки $x^*, x_* \in [a,b]$ такі, що $f(x^*) = M$, $f(x_*) = m$. Твердження наслідку, отже, випливає з теореми 4.4.2, застосованої до відрізка $[x^*, x_*]$ (якщо $x^* \le x_*$) або $[x_*, x^*]$ (якщо $x^* > x_*$). □

З останнього наслідку можна зробити висновок, що множиною значень неперервної на відрізку функції є відрізок.

4.5. Обернені функції

Лема 4.5.1. *Нехай функція $f(x)$ зростає (спадає) на множині X і нехай Y — множина її значень. Тоді існує обернена функція $f^{-1}(y)$, яка є зростаючою (спадною) функцією на множині Y.*

Доведення. Нехай для визначеності функція $f(x)$ зростає на множині X. Доведемо, що існує обернена функція, тобто що для довільного $y \in Y$ множина $\{f^{-1}(y)\}$ містить лише один елемент. Припустимо супротивне: нехай $\exists y \in Y$ таке, що множина $\{f^{-1}(y)\}$ містить принаймні дві різні точки x_1 і x_2:

$$x_1 \in \{f^{-1}(y)\}, \quad x_2 \in \{f^{-1}(y)\}, \; x_1 \ne x_2,$$

отже,

$$f(x_1) = f(x_2) = y. \tag{4.7}$$

Та оскільки $x_1 \ne x_2$, то $x_1 > x_2$ або $x_1 < x_2$. З огляду на зростання $f(x)$ у випадку $x_1 > x_2$ маємо $f(x_1) > f(x_2)$, а у випадку $x_1 < x_2$ маємо $f(x_1) < f(x_2)$. Як бачимо, співвідношення (4.7) не виконується, отже, зроблене припущення неправильне. Існування оберненої функції доведено.

Доведемо тепер, що $f^{-1}(y)$ зростає на множині Y. Нехай

$$y_1 < y_2, \quad y_1 \in Y, y_2 \in Y, \tag{4.8}$$

і нехай $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$, тоді $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. Потрібно довести, що $x_1 < x_2$. Справді, якби було $x_1 > x_2$, то з огляду на монотонність $f(x)$ виконувалась би нерівність $y_1 > y_2$, а якби $x_1 = x_2$, то $y_1 = y_2$, що суперечило б умові (4.8). Отже, $x_1 < x_2$. Монотонність оберненої функції доведено.

Аналогічно доводимо лему у випадку спадної функції. □

Теорема 4.5.1. *Нехай функція $f(x)$ визначена, зростаюча (спадна) та неперервна на відрізку $[a,b]$. Тоді оберена функція $f^{-1}(y)$ визначена, зростаюча (спадна) і неперервна на відрізку $[f(a), f(b)]$ (на відрізку $[f(b), f(a)]$).*

Доведення. Розглянемо випадок зростаючої функції. Нехай $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$. Оскільки

$$\alpha = \min_{[a,b]} f(x), \quad \beta = \max_{[a,b]} f(x),$$

то, з огляду на наслідок 4.4.2, відрізок $[\alpha, \beta]$ є множиною значень функції $f(x)$. Використовуючи лему 4.5.1, одержуємо, що $f^{-1}(y)$ визначена і зростаюча на відрізку $[\alpha, \beta]$.

Доведемо неперервність функції $f^{-1}(y)$. Нехай $y_0 \in (\alpha, \beta)$ і $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Оскільки функція $f^{-1}(y)$ зростає, то $a < x_0 < b$. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ таке, що

$$a \le x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon \le b.$$

Позначимо $f(x_0 - \varepsilon) = y_1$, $f(x_0 + \varepsilon) = y_2$. Тоді, з огляду на монотонне зростання $f(x)$,

$$\alpha \le y_1 < y_0 < y_2 \le \beta.$$

Виберемо $\delta > 0$ так, що $y_1 \le y_0 - \delta < y_0 + \delta \le y_2$.

Описану схему зображено на рис. 4.3:

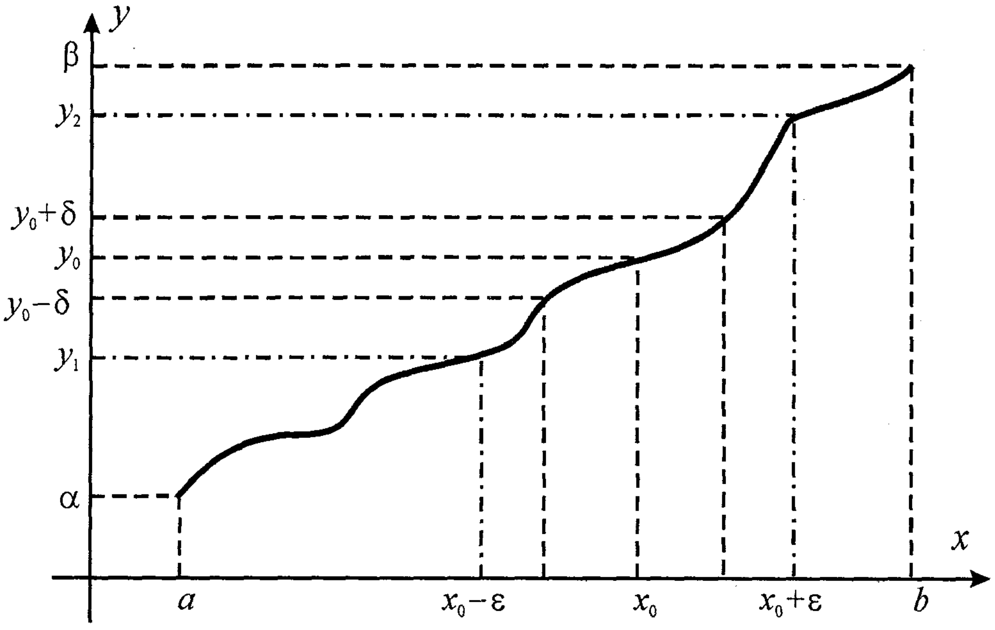


Рис. 4.3

Тепер якщо $y \in U_\delta(y_0)$, то тим паче $y_1 < y < y_2$, і з огляду на монотонне зростання $f^{-1}(y)$ виконується нерівність

$$x_0 - \varepsilon = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) = x_0 + \varepsilon.$$

Як бачимо, для довільно вибраного $\varepsilon > 0$ знайдено $\delta > 0$ таке, що

$$(\forall y \in \mathcal{U}_\delta(y_0))\ \{f^{-1}(y) \in \mathcal{U}_\varepsilon(f^{-1}(y_0))\},$$

отже, функція $f^{-1}(y)$ неперервна в точці y_0, а з огляду на довільність y_0 отримуємо $f^{-1}(y) \in C_{(\alpha,\beta)}$. Аналогічно доводимо, що функція $f^{-1}(y)$ неперервна справа в точці α і неперервна зліва в точці β. Отже, $f^{-1} \in C_{[\alpha,\beta]}$. □

Справджується також аналогічна теорема для функцій, визначених на інтервалах, у тому числі необмежених.

Теорема 4.5.2. *Нехай функція $f(x)$ визначена, зростаюча (спадна) і неперервна на інтервалі (a,b), де $-\infty \le a < b \le +\infty$. Позначимо*

$$\alpha = \lim_{x\to a+0} f(x), \quad \beta = \lim_{x\to b-0} f(x),$$

де $-\infty \le \alpha \le +\infty$, $-\infty \le \beta \le +\infty$. Тоді існує обернена функція $f^{-1}(y)$, визначена, зростаюча (спадна) і неперервна на інтервалі (α,β) (на інтервалі (β,α)).

Доводити цю теорему не будемо, лише зазначимо, що ідея її доведення близька до ідеї доведення теореми 4.5.1.

Зауваження 4.5.1. Теорема 4.5.1 справджується також для множини $[a,b)$ з образом $[\alpha,\beta)$ (звісно, для $a \in \mathbb{R}$). Аналогічне зауваження стосується і точки b.

4.6. Умова неперервності монотонних функцій

Нагадаємо, що область визначення та множину значень функції ми позначали символами $\mathcal{D}(f)$ та $\mathcal{R}(f)$ (див. означення 1.3.1).

Множину будь-якого з видів

$$(a,b),\ [a,b],\ (a,b],\ [a,b)\ (-\infty,b),\ (-\infty,b],\ (a,+\infty),\ [a,+\infty),\ \mathbb{R}$$

називатимемо *проміжком.*

Теорема 4.6.1. *Нехай $\mathcal{D}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{I}$ — деякий проміжок, а функція $f(x)$ зростаюча (спадна) на проміжку $\mathcal{I}$. Якщо $\mathcal{R}(f)$ — проміжок, то $f(x)$ неперервна на проміжку $\mathcal{I}$.*

Доведення. Наведемо доведення для випадку зростання функції $f(x)$. Доведемо таке:

а) якщо $x_0 \in \mathcal{I}$ і x_0 не є правим кінцем $\mathcal{I}$, то функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 справа, тобто $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$.

У цьому випадку точка $y_0 = f(x_0)$ належить проміжку $\mathcal{R}(f)$ і не є його правим кінцем. Справді, існує $x' \in \mathcal{I}$ таке, що $x_0 < x'$ і з огляду на зростання $f(x)$ маємо, що $y_0 < f(x')$, причому $f(x') \in \mathcal{R}(f)$. Отже, y_0 не є правим кінцем проміжку $\mathcal{R}(f)$. Тому існує $\varepsilon > 0$ таке, що $y_0+\varepsilon \overset{\text{def}}{=} y_1 \in \mathcal{R}(f)$, отже, існує $x_1 \in \mathcal{I}$ таке, що $f(x_1) = y_1$. З огляду на монотонність $f(x)$, $x_1 > x_0$. Приймемо $\delta = x_1 - x_0$. Якщо $0 < x - x_0 < \delta$, тобто $x_0 < x < x_1$, то знову ж із монотонності $f(x)$ маємо $y_0 = f(x_0) < f(x) < f(x_1)$, тобто $0 < f(x) - f(x_0) < \varepsilon$. А це й означає, що $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0)$, тобто неперервність $f(x)$ у точці x_0 справа;

б) аналогічно доводимо таке: якщо $x_0 \in \mathcal{I}$ і не є лівим кінцем проміжку $\mathcal{I}$, то функція $f(x)$ неперервна зліва у точці x_0.

Безпосередньо з *а* і *б* випливає таке: якщо x_0 є внутрішньою точкою проміжку $\mathcal{I}$, то в цій точці функція $f(x)$ неперервна, якщо ж x_0 є правим кінцем проміжку $\mathcal{I}$, то в цій точці функція $f(x)$ неперервна зліва, а якщо x_0 є лівим кінцем проміжку $\mathcal{I}$, то в цій точці функція $f(x)$ неперервна справа.

Аналогічно доводимо теорему для спадної функції. □

4.7. Неперервність основних елементарних функцій

Основними елементарними функціями є такі:

1) *стала*, $f(x)$=const, $x \in \mathbb{R}$;

2) *степенева*, $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$;

3) *показникова*, $f(x) = a^x$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$;

4) *логарифмічна*, $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$;

5) *тригонометричні*:

   а) $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$;
   б) $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$;
   в) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in (\pi n - \frac{\pi}{2}, \pi n + \frac{\pi}{2})$, $n \in \mathbb{Z}$;
   г) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $x \in (\pi n, \pi n + \pi)$, $n \in \mathbb{Z}$;

6) *обернені тригонометричні*:

   а) $f(x) = \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$;
   б) $f(x) = \arccos x$, $x \in [-1, 1]$;
   в) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$;
   г) $f(x) = \operatorname{arcctg} x$, $x \in \mathbb{R}$.

Елементарні функції класифікують так:

а) функції, що утворені з функцій $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, за допомогою скінченної кількості операцій додавання, множення і множення на константи, називають *многочленами*, або *поліномами*. Загальний вигляд многочлена n-го степеня можна записати так:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \ x \in \mathbb{R},$$

де $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$;

б) частку двох многочленів називають *дробово-раціональною функцією*:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0},$$

визначеною на множині всіх точок з $\mathbb{R}$, у яких $Q_m(x) \neq 0$;

в) функції, що утворені з функцій $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, за допомогою операцій, зазначених у пункті *а*, операцій ділення та добування кореня, називають *алгебраїчними*. Алгебраїчні функції, що не є раціональними, називають *ірраціональними*;

г) елементарні функції, що не є алгебраїчними, називають *трансцендентними*.

Неперервність многочлена для всіх $x \in \mathbb{R}$ та дробово-раціональної функції для всіх $x \in \mathbb{R}$ таких, що $Q_m(x) \neq 0$, було доведено у прикладі 4.3.1 (2,3).

З'ясуємо неперервність інших основних елементарних функцій.

Для степеневої функції $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$, маємо $\mathcal{D}(f) = (0, +\infty)$, $\mathcal{R}(f) = (0, +\infty)$. Окрім того, степенева функція є зростаючою при $\alpha > 0$ і спадною при $\alpha < 0$. Тому, з огляду на теорему 4.6.1, степенева функція є неперервною при $x > 0$. Аналогічно, застосувавши теорему 4.6.1 та врахувавши властивості показникової та логарифмічної функцій, отримаємо їхню неперервність на областях визначення.

Доведемо неперервність тригонометричних функцій. Нехай $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ — довільне фіксоване число. Маємо

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2\sin\frac{x - x_0}{2} \cdot \cos\frac{x + x_0}{2}\right| \leq 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| < |x - x_0|.$$

Звідси, прийнявши в означенні 4.1.2 $\delta = \varepsilon$, маємо неперервність функції $f(x) = \sin x$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Оскільки $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, то функція $f(x) = \cos x$ є неперервною для всіх $x \in \mathbb{R}$ як суперпозиція неперервних функцій (теорема 4.3.2). Звідси випливає неперервність функцій $f(x) = \operatorname{tg} x$ та $f(x) = \operatorname{ctg} x$ у їхніх областях визначення.

З огляду на теореми 4.5.1 та 4.5.2 також неперервними є обернені тригонометричні функції у своїх областях визначення.

Отже, всі елементарні функції є неперервними у своїх областях визначення.

На завершення розглянемо функції, які називають *гіперболічними:*

косинус гіперболічний

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \ x \in \mathbb{R};$$

синус гіперболічний

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \ x \in \mathbb{R};$$

тангенс гіперболічний

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \ x \in \mathbb{R};$$

котангенс гіперболічний

$$\operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \ x \in \mathbb{R}, \ x \neq 0.$$

Очевидно, що гіперболічні функції є неперервними в своїх областях визначення.

Легко бачити, що функція $f(x) = \operatorname{ch} x$ є парною, $f(0) = 1$, спадає на півінтервалі $(-\infty; 0]$ і зростає на півінтервалі $[0; +\infty)$,

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{ch} x = \lim_{x \to +\infty} \operatorname{ch} x = +\infty.$$

Функція $f(x) = \operatorname{sh} x$ є непарною, зростає на множині $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{sh} x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sh} x = +\infty$.

4.8. Обчислення деяких границь

Використовуючи неперервність елементарних функцій та правила обчислення границь, обчислимо границі деяких функцій, що є наслідками з першої та другої важливих границь (див. підрозділ 3.9).

Наслідки з першої важливої границі.

Наслідок 4.8.1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

Наслідок 4.8.2.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

Доведення. Зробимо заміну $x = \sin t$ і, зауваживши, що з огляду на неперервність функції $\sin t$ умови $x \to 0$ та $t \to 0$ еквівалентні, отримуємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{\arcsin(\sin t)}{\sin t} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t} = 1.$$

□

Наслідок 4.8.3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

Цей наслідок доводимо аналогічно до попереднього з урахуванням наслідку 4.8.2. Наслідки з другої важливої границі.

Наслідок 4.8.4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e,\ \ a > 0, a \neq 1,$$

і, зокрема, при $a = e$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Доведення. Використовуючи неперервність логарифмічної функції та неперервність складеної функції (теорема 4.3.2), отримуємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a\bigl(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\bigr) = \log_a e.$$

□

Наслідок 4.8.5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a,$$

і, зокрема, при $a = e$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$$

Доведення. Зробимо заміну $t = a^x - 1$ і зауважимо, що умови $x \to 0$ та $t \to 0$ еквівалентні. Отже, з урахуванням наслідку 4.8.4 маємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(t+1)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a.$$

□

Наслідок 4.8.6.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha.$$

Доведення. Маємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\Big(\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\cdot\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}\Big)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}\cdot\alpha\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\alpha.$$

□

4.9. Рівномірна неперервність. Теорема Кантора

Означення 4.9.1. Функцію $f(x)$ називають *рівномірно неперервною* на множині X, якщо

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x',x''\in X\colon |x'-x''|<\delta)\ \{|f(x')-f(x'')|<\varepsilon\}.$$

Зауважимо, що головним в означенні рівномірної неперервності є те, що для будь-якого $\varepsilon>0$ існує $\delta>0$ таке, що нерівність $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ виконується *одразу для всіх* точок x' та x'' з множини X за умови, що $|x'-x''|<\delta$.

Також зазначимо, що з рівномірної неперервності функції на множині X випливає її неперервність на цій множині. Справді, для цього досить в означенні 4.9.1 замість x'' взяти довільну фіксовану точку x_0 з множини X. Отже, отримуємо неперервність функції в точці x_0 і, з огляду на довільність x_0, на множині X.

Виникає запитання: чи кожна неперервна на множині X функція є рівномірно неперервною на цій множині? Відповідь (негативну) на поставлене запитання дає такий приклад.

Приклад 4.9.1.

Доведемо, що функція $f(x)=\frac{1}{x}$ не є рівномірно неперервною на $(0,+\infty)$.

Той факт, що функція $f(x)$ не є рівномірно неперервною на множині X, запишемо так:

$$(\exists\varepsilon>0)(\forall\delta>0)(\exists x',x''\in X\colon |x'-x''|<\delta)\ \{|f(x')-f(x'')|\ge\varepsilon\}. \tag{4.9}$$

Візьмемо $\varepsilon=1$ і зафіксуємо довільне $\delta>0$. У випадку $\delta\le\frac{1}{3}$ приймемо $x'=\delta$, $x''=\frac{3}{2}\delta$. Тоді $|x'-x''|=|\delta-\frac{3}{2}\delta|=\frac{\delta}{2}<\delta$, $|f(x')-f(x'')|=|\frac{1}{\delta}-\frac{2}{3\delta}|=\frac{1}{3\delta}\ge 1$. Якщо ж $\delta>\frac{1}{3}$, то візьмемо $x'=\frac{1}{2}$, $x''=\frac{1}{4}$. Тоді $|x'-x''|=|\frac{1}{2}-\frac{1}{4}|=\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\delta$ і $|f(x')-f(x'')|=|2-4|=2\ge 1$. Отже, функція $f(x)=\frac{1}{x}$ не є рівномірно неперервною на $(0,+\infty)$, хоча є неперервною на цій множині.

Теорема 4.9.1 (теорема Кантора). *Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то вона є рівномірно неперервною на ньому.*

Доведення. Припустимо супротивне: нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, проте не є рівномірно неперервною на ньому (тобто виконується умова (4.9) з $[a,b]$ замість X). Отже, для $\delta=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$, знайдуться точки x_n' та x_n'', для яких виконуються нерівності

$$|x_n'-x_n''|<\frac{1}{n} \tag{4.10}$$

та

$$|f(x_n') - f(x_n'')| \geq \varepsilon. \tag{4.11}$$

Оскільки $\{x_n'\}$ — послідовність точок з $[a,b]$, то, згідно з теоремою Больцано-Вейєрштрасса (теорема 2.8.2), з цієї послідовності можна виділити збіжну підпослідовність $\{x_{n_k}\}$. Нехай $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k}' = x_0$. Зауважимо, що $x_0 \in [a,b]$. З умови (4.10) випливає рівність $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k}'' = x_0$. З урахуванням неперервності функції $f(x)$ на $[a,b]$ і, зокрема, в точці x_0, маємо

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}') = f(x_0), \quad \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}'') = f(x_0),$$

що суперечить нерівності (4.11). Отримана суперечність доводить хибність початкового припущення.

□

4.10. Лема про скінченне покриття

Означення 4.10.1. Нехай X — деяка множина, а $\{G_\alpha\colon \alpha \in A\}$ — система множин (тут A — деяка допоміжна множина, яку називають множиною індексів). Кажуть, що система множин $\{G_\alpha\}$ *покриває множину* X, якщо

$$X \subset \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha.$$

Підмножину множини $\{G_\alpha\colon \alpha \in A\}$, тобто систему множин вигляду $\{G_\alpha\colon \alpha \in B\}$, де $B \subset A$, називають її *підсистемою*. Підсистему називають *скінченною*, якщо вона містить скінченну кількість множин.

Лема 4.10.1 (принцип Бореля-Лебега). *Для будь-якої системи інтервалів $\{\mathcal{U}_\alpha\colon \alpha \in A\}$, що покриває відрізок $\mathcal{I} = [a,b]$, існує скінченна підсистема, що покриває цей відрізок.*

Доведення. Якби відрізок $\mathcal{I}$ не допускав покриття скінченним набором інтервалів системи $\{\mathcal{U}_\alpha\}$, то, поділивши $\mathcal{I}$ навпіл, ми отримали б, що принаймні одна з його половинок, яку позначимо через $\mathcal{I}_1$, теж не допускає скінченного покриття. З відрізком $\mathcal{I}_1$ виконаємо цю ж процедуру поділу на дві рівні частини, отримаємо відрізок $\mathcal{I}_2$ тощо.

Отже, виникає послідовність $\mathcal{I} \supset \mathcal{I}_1 \supset \mathcal{I}_2 \supset \cdots \subset \mathcal{I}_n \supset \ldots$ вкладених відрізків, які не допускають скінченного покриття інтервалами системи $\{\mathcal{U}_\alpha\}$. Оскільки довжина відрізка $\mathcal{I}_n$ дорівнює

$$\frac{b-a}{2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

то з леми про вкладені відрізки випливає, що існує $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{I}_n$. Оскільки $c \in [a, b]$, то існує $\alpha \in A$ таке, що $c \in \mathcal{U}_\alpha \overset{\text{def}}{=\!=} (d, f)$, тобто $d < c < f$. Нехай $\varepsilon = \min\{c - d, f - c\}$. Знайдемо в побудованій послідовності такий відрізок $\mathcal{I}_n$, довжина якого менша ε. Зрозуміло, що $\mathcal{I}_n \subset \mathcal{U}_\alpha = (d, f)$. А це суперечить тому, що $\mathcal{I}_n$ не можна покрити скінченним набором інтервалів системи. □

Пропонуємо, використовуючи лему про скінченне покриття, навести нові доведення теорем Вейєрштрасса та Кантора.

Розділ 5

Похідна і диференціал

5.1. Означення похідної

Означення 5.1.1. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі (a, b) і нехай $x_0 \in (a, b)$. Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \tag{5.1}$$

то цю границю називають *похідною функції* $y = f(x)$ *у точці* x_0 і позначають одним із символів

$$f'(x_0),\ \frac{df}{dx}(x_0)\ (\text{або } y'_x,\ y'(x_0),\ \frac{dy}{dx}(x_0)).$$

Нехай $\Delta x = x - x_0$ — приріст аргументу такий, що $x_0 + \Delta x$ належить інтервалу (a, b), а $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — відповідний приріст функції. Використовуючи ці терміни, маємо

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Отже, похідна функції — це границя відношення приросту функції до приросту аргументу.

Зауваження 5.1.1. Якщо існує нескінченна границя у співвідношенні (5.1), то кажуть, що функція $y = f(x)$ має у точці x_0 відповідну нескінченну похідну.

Означення 5.1.2. Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \left(\lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right),$$

то цю границю називають *правосторонньою (лівосторонньою) похідною* функції $y = f(x)$ у точці x_0 і позначають

$$f'_+(x_0) \quad (f'_-(x_0)).$$

Правосторонню та лівосторонню похідні називають *односторонніми похідними.*

Із теореми про односторонні границі (теорема 3.2.1) випливає, що функція має похідну в точці, якщо існують та дорівнюють одна одній односторонні похідні в цій же точці.

Приклад 5.1.1.

1) $y = c$ (c — стала).
   Оскільки $\Delta y = c - c = 0$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. Отже, $(c)' = 0$;

2) $y = \sin x$.
   Маємо $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \sin \frac{\Delta x}{2}$, тому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x.$$

   Отже, $(\sin x)' = \cos x$;

3) $y = a^x$.
   Знаходимо

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - a).$$

   Отже,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a.$$

   Звідси, $(a^x)' = a^x \ln a$, зокрема $(e^x)' = e^x$.

5.2. Геометричний зміст похідної

Розглянемо графік функції $y = f(x)$, що визначена і неперервна на інтервалі (a, b). Зафіксуємо точку $x_0 \in (a, b)$ і розглянемо точки графіка функції $M_0(x_0, y_0)$, $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, де $y_0 = f(x_0)$, $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$. Пряму, що проходить через точки M_0 та M, називатимемо *січною*. Рівняння січної (рис. 5.1)

$$y = k(\Delta x)(x - x_0) + y_0, \tag{5.2}$$

де

$$k(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha(\Delta x), \tag{5.3}$$

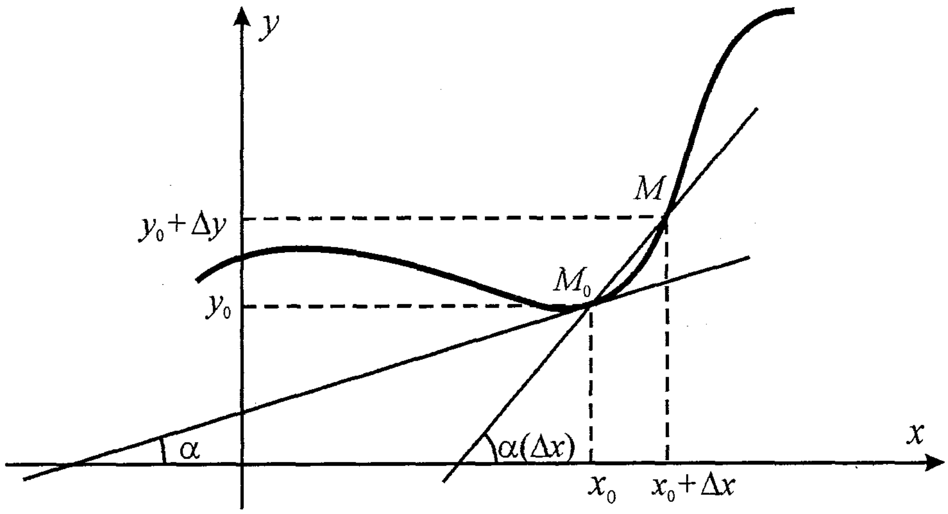


Рис. 5.1

а $\alpha(\Delta x)$ — кут нахилу січної до осі Ox, який відраховують від додатного напряму осі Ox (у цьому випадку достатньо обмежитися значеннями кута $\alpha(\Delta x) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$.

Оскільки функція $y = f(x)$ неперервна, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Тому відстань $|M_0M|$ від точки M_0 до точки M прямує до нуля при $\Delta x \to 0$ (у такому випадку кажуть, що точка M прямує до M_0, і пишуть $M \to M_0$), оскільки $|MM_0| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Означення 5.2.1. Якщо існує граничне положення січної M_0M при $M \to M_0$ (те ж саме, що й при $\Delta x \to 0$), то це граничне положення називають *дотичною* до графіка функції $y = f(x)$ у точці M_0.

Дотичну, що паралельна до осі Oy, називають *вертикальною дотичною*, а в іншому випадку — *похилою дотичною.*

Теорема 5.2.1. *Для того, щоб існувала похила дотична до графіка функції $y=f(x)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$, необхідно і досить, щоб функція $y = f(x)$ мала похідну в точці x_0, причому рівняння дотичної має вигляд*

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Доведення. Із означення дотичної та співвідношення (5.2) випливає, що похила дотична до графіка функції існує тоді і тільки тоді, коли існує скінченна границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = k.$$

З урахуванням (5.3) маємо

$$k = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = f'(x_0),$$

причому

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha, \tag{5.4}$$

де α — кут нахилу дотичної до осі Ox. □

Зауваження 5.2.1. Можна довести, що в точці $M_0(x_0, y_0)$ існує вертикальна дотична до графіка функції $y = f(x)$ тоді й тільки тоді, коли в точці x_0 функція $y = f(x)$ має нескінченну похідну, причому рівняння дотичної в цьому випадку має вигляд $x = x_0$.

5.3. Диференційовні функції. Диференціал

Означення 5.3.1. Функцію $y = f(x)$, що визначена на інтервалі (a, b), називають *диференційовною* в точці $x_0 \in (a, b)$, якщо її приріст у цій точці можна зобразити у вигляді

$$\triangle y = A \cdot \triangle x + \alpha(\triangle x), \tag{5.5}$$

де A — деяка стала, $\alpha(\triangle x) = o(\triangle x)$ при $\triangle x \to 0$.

Лінійну частину приросту функції $A \cdot \triangle x$ називають *диференціалом* функції $y = f(x)$ в точці x_0 і позначають символом $df(x_0)$ або dy.

Теорема 5.3.1. *Для того, щоб функція $y = f(x)$ була диференційовною в точці x_0, необхідно і досить, щоб вона мала в цій точці похідну.*

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0, тобто приріст $\triangle y = A \cdot \triangle x + \alpha(\triangle x)$, де $\alpha(\triangle x) = o(\triangle x)$ при $\triangle x \to 0$. Тоді

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \left(A + \frac{\alpha(\triangle x)}{\triangle x} \right) = A + \lim_{\triangle x \to 0} \frac{o(\triangle x)}{\triangle x} = A.$$

Тому похідна $f'(x_0)$ існує, причому $f'(x_0) = A$.
($\Leftarrow$)Нехай існує похідна функції $y = f(x)$ у точці x_0, тобто

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = f'(x_0).$$

Тоді

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = f'(x_0) + \varepsilon(\triangle x),$$

де $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$. Отже,

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x), \tag{5.6}$$

де $\alpha(\Delta x) = \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x$. Оскільки

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0,$$

то $\alpha(\Delta x) = o(\Delta x)$. Отже, виконання співвідношення (5.6) означає диференційовність функції $y = f(x)$ у точці x_0. □

Доведена теорема дає змогу надалі ототожнювати поняття диференційовної функції в точці та наявності похідної цієї функції у тій самій точці. Тому операцію знаходження похідної називатимемо *диференціюванням.*

Із співвідношення (5.6) випливає, що

$$dy = A \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot \Delta x. \tag{5.7}$$

Уведемо поняття диференціала аргументу x, причому розрізнятимемо два випадки: 1) аргумент x є незалежною змінною; 2) аргумент x є диференційовною функцією $x = \varphi(t)$ незалежної змінної t. Якщо аргумент x є незалежною змінною, то ототожнюватимемо диференціал цього аргументу з його приростом, тобто вважатимемо, що $dx = \Delta x$. Згідно з цією домовленістю співвідношення (5.7) набуде вигляду

$$dy = f'(x)dx.$$

З'ясуємо зв'язок між диференційовністю та неперервністю функції в точці.

Теорема 5.3.2. *Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0, то вона неперервна в точці x_0.*

Доведення. Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0, тобто

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0.$$

Тоді

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = A \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} o(\Delta x) = 0,$$

що й означає неперервність функції $y = f(x)$ у точці x_0. □

Зазначимо, що твердження, обернене до теореми 5.3.2, неправильне, тобто з неперервності функції $y = f(x)$ в точці x_0 не випливає її диференційовність у цій точці. Наведемо приклад, що підтверджує це.

Приклад 5.3.1.

Розглянемо функцію $y = |x|$, яка, очевидно, є неперервною в точці $x = 0$. Знайдемо

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$
$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Оскільки $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, то похідна функції $y = |x|$ в точці $x = 0$ не існує. Отже, функція $y = |x|$ не є диференційовною в точці $x = 0$.

5.4. Диференціювання й арифметичні дії з функціями

Теорема 5.4.1. *Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$ диференційовні в точці x_0. Тоді їхня сума, різниця, добуток та частка (остання за умови $v(x_0) \neq 0$) є диференційовними в точці x_0, причому*

$$(u \pm v)'(x_0) = u'(x_0) \pm v'(x_0);$$
$$(uv)'(x_0) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0);$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}.$$

Доведення. Розглянемо випадок суми (різниці) двох функцій. Нехай функція $y(x)$ має вигляд $y(x) = u(x) \pm v(x)$. Позначимо символами Δu, Δv і Δy, відповідно, прирости функцій $u(x)$, $v(x)$ і $y(x)$ в точці x_0, що відповідають приростові аргументу Δx. Тоді

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = (u(x_0 + \Delta x) \pm v(x_0 + \Delta x)) -$$
$$-(u(x_0) \pm v(x_0)) = (u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)) \pm (v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)) =$$
$$= \Delta u \pm \Delta v.$$

Отже,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}. \tag{5.8}$$

Перейдемо у співвідношенні (5.8) до границі при $\Delta x \to 0$, врахуємо диференційовність функцій $u(x)$ і $v(x)$ у точці x_0 та отримаємо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u'(x_0) \pm v'(x_0),$$

тобто

$$y'(x_0) = (u \pm v)'(x_0) = u'(x_0) \pm v'(x_0).$$

Зауважимо, що з диференційовності функцій $u(x)$ та $v(x)$ у точці x_0 випливає, з огляду на теорему 5.3.2, їхня неперервність у точці x_0.

Розглянемо добуток. Нехай $y(x) = u(x) \cdot v(x)$. Тоді

$$\begin{gathered}\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = u(x_0 + \Delta x) \cdot v(x_0 + \Delta x) - u(x_0)v(x_0) = \\ = u(x_0 + \Delta x)v(x_0 + \Delta x) - u(x_0 + \Delta x) \cdot v(x_0) + u(x_0 + \Delta x) \cdot v(x_0) - \\ -u(x_0)v(x_0) = u(x_0 + \Delta x)(v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)) + \\ +v(x_0)(u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)) = u(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta v + v(x_0) \cdot \Delta u.\end{gathered}$$

Звідси

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u(x_0 + \Delta x)\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x_0)\frac{\Delta u}{\Delta x}. \tag{5.9}$$

Перейдемо у співвідношенні (5.9) до границі при $\Delta x \to 0$ і врахуємо диференційовність функцій $u(x)$ та $v(x)$ у точці x_0 і неперервність функції $u(x)$ у точці x_0, одержимо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u(x_0) \cdot v'(x_0) + v(x_0) \cdot u'(x_0),$$

тобто

$$y'(x_0) = (u \cdot v)'(x_0) = u'(x_0) \cdot v(x_0) + u(x_0) \cdot v'(x_0).$$

Розглянемо тепер випадок частки. Нехай $y(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$. Оскільки функція $v(x)$ неперервна в точці x_0 і $v(x_0) \neq 0$, то існує таке $\delta > 0$, що для всіх $x \in \mathcal{U}_\delta(x_0)$ виконується умова $v(x) \neq 0$. Нехай тепер $|\Delta x| < \delta$. Маємо

$$\begin{gathered}\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = \frac{u(x_0 + \Delta x)}{v(x_0 + \Delta x)} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \\ = \frac{u(x_0 + \Delta x) \cdot v(x_0) - v(x_0 + \Delta x) \cdot u(x_0)}{v(x_0) \cdot v(x_0 + \Delta x)} = \\ = \frac{v(x_0)(u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)) - u(x_0)(v(x_0 + \Delta x) - v(x_0))}{v(x_0) \cdot v(x_0 + \Delta x)} = \\ = \frac{v(x_0)\Delta u - u(x_0)\Delta v}{v(x_0) \cdot v(x_0 + \Delta x)}.\end{gathered}$$

Отже,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v(x_0) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x_0) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x_0) \cdot v(x_0 + \Delta x)}. \tag{5.10}$$

Перейдемо у співвідношенні (5.10) до границі при $\Delta x \to 0$ і врахуємо диференційовність функцій $u(x)$ та $v(x)$ у точці x_0 і неперервність функції $v(x)$ у точці x_0

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v(x_0) \cdot u'(x_0) - u(x_0) \cdot v'(x_0)}{v^2(x_0)}.$$

Отже,

$$y'(x_0) = \left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) = \frac{u'(x_0) \cdot v(x_0) - u(x_0) \cdot v'(x_0)}{v^2(x_0)}.$$

$\square$

Наслідок 5.4.1. *Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0. Тоді функція $c \cdot f(x)$, де c — деяка стала, також диференційовна в точці x_0, причому*

$$(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0).$$

Доведення. Справді, використовуючи формулу для похідної добутку і те, що $c' = 0$, маємо

$$(c \cdot f)'(x_0) = c'(x_0) \cdot f(x_0) + c(x_0) \cdot f'(x_0) = c \cdot f'(x_0).$$

□

Приклад 5.4.1.
Нехай $y = \operatorname{tg} x$.
Тоді, враховуючи формулу похідної частки, маємо

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos' x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Отже,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

5.5. Похідна оберненої функції

Теорема 5.5.1. *Нехай функція $y = f(x)$ неперервна, строго монотонна в деякому околі точки x_0 і диференційовна в точці x_0, причому $f'(x_0) \neq 0$. Тоді обернена функція $x = f^{-1}(y)$ диференційовна в точці $y_0 = f(x_0)$, причому*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доведення. Оскільки функція $y = f(x)$ строго монотонна і неперервна в деякому околі точки x_0, то з огляду на теорему 4.5.2 обернена функція $x = f^{-1}(y)$ визначена, строго монотонна і неперервна в деякому околі точки $y_0 = f(x_0)$. Надамо аргументові цієї оберненої функції у зазначеній точці y_0 довільний додатний приріст $\Delta y \neq 0$. Цьому приросту відповідає приріст $\Delta x = f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)$ оберненої функції в точці y_0, причому, з огляду на строгу монотонність оберненої функції, $\Delta x \neq 0$. Тому ми можемо записати

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}. \tag{5.11}$$

Зазначимо, що з огляду на неперервність функції $y = f(x)$ умови $\Delta x \to 0$ та $\Delta y \to 0$ рівносильні. Тому, перейшовши у співвідношенні (5.11) до границі при $\triangle y \to 0$, отримуємо

$$\lim_{\triangle y\to 0}\frac{\triangle x}{\triangle y} = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{1}{\frac{\triangle y}{\triangle x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Отже,

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

Доведена теорема має простий геометричний зміст. Похідна $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, де α — кут, утворений дотичною до графіка функції $y = f(x)$ у точці (x_0, y_0) з додатним напрямом осі Ox, а похідна оберненої функції $x = f^{-1}(y)$ у точці y_0 дорівнює тангенсу кута β нахилу цієї ж дотичної до осі Oy. Оскільки кути нахилу α і β в сумі становлять $\frac{\pi}{2}$, то формула (5.11) виражає очевидний факт: $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ при $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$.

Приклад 5.5.1.

Нехай $y = \arcsin x$. Функція $y = \arcsin x$ визначена на інтервалі $x \in (-1, 1)$ і є оберненою до функції $x = \sin y$, визначеної на інтервалі $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Функція $x = \sin y$ в околі будь-якої точки $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ задовольняє умови теореми 5.5.1, тому, враховуючи співвідношення (5.11), маємо

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}.$$

Оскільки $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, то $\cos y > 0$, тому $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$.

Отже,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

5.6. Похідна і диференціал складеної функції

Теорема 5.6.1. *Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0, а функція $z = F(y)$ диференційовна в точці $y_0 = f(x_0)$. Тоді складена функція $\Phi(x) = F(f(x))$ диференційовна в точці x_0, причому*

$$\Phi'(x_0) = F'(y_0)\cdot f'(x_0).$$

Доведення. З огляду на диференційовність функції $z = F(y)$ у точці y_0 маємо

$$\triangle z = F'(y_0)\triangle y + \varepsilon(\triangle y)\cdot\triangle y, \tag{5.12}$$

де $\lim\limits_{\triangle y\to 0}\varepsilon(\triangle y) = 0$. Функція $\varepsilon(\triangle y)$ не визначена при $\triangle y = 0$. Довизначимо її у точці 0, прийнявши $\varepsilon(0) = 0$. Тоді функція $\varepsilon(\triangle y)$ неперервна в точці $\triangle y = 0$. Із співвідношення (5.12)

$$\frac{\triangle z}{\triangle x} = F'(y_0)\cdot\frac{\triangle y}{\triangle x} + \varepsilon(\triangle y)\cdot\frac{\triangle y}{\triangle x}. \tag{5.13}$$

Оскільки функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0). \tag{5.14}$$

З огляду на неперервність функції $y = f(x)$ у точці x_0 отримуємо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, а при $\Delta x = 0$ маємо $\Delta y = 0$. Отже, Δy, як функція від Δx, неперервна в точці $\Delta x = 0$. Тому, згідно з правилом заміни змінної для границь неперервних функцій (теорема 4.3.2), отримуємо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta y) = 0. \tag{5.15}$$

Перейшовши у співвідношенні (5.13) до границі при $\Delta x \to 0$ та врахувавши (5.14) і (5.15), знаходимо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = F'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

□

У 5.3 з'ясовано таке: якщо аргумент x диференційовної функції $y = f(x)$ є незалежною змінною, то для диференціала dy справджується зображення

$$dy = f'(x_0)dx. \tag{5.16}$$

Доведемо, що це зображення справджується і тоді, коли аргумент x є диференційовною функцією іншої незалежної змінної. Цю властивість називають *інваріантністю форми першого диференціала*. Справді, нехай функції $y = f(x)$ та $x = \varphi(t)$ диференційовні, відповідно, в точках $x_0 = \varphi(t_0)$ та t_0. Тоді y можна розглядати як складену функцію $y = f(\varphi(t)) = \Phi(t)$. Отже,

$$dy = \Phi'(t_0)dt. \tag{5.17}$$

Згідно з правилом диференціювання складеної функції, $\Phi'(t_0) = f'(x_0) \cdot \varphi'(t_0)$, та враховуючи, що $\varphi'(t_0)dt = dx$, із (5.17) отримуємо

$$dy = f'(x_0) \cdot \varphi'(t_0)dt = f'(x_0)dx.$$

Інваріантність форми першого диференціала доведено.

Із співвідношення (5.16) отримуємо

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx},$$

причому як у випадку незалежної змінної, так і у випадку, коли аргумент є диференційовною функцією іншої незалежної змінної.

5.7. Таблиця похідних основних елементарних функцій

Запишемо у вигляді таблиці похідні елементарних функцій. Пропонуємо самостійно довести правильність тих формул, які ми не довели.

1) $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \quad (x > 0)$.
   Зокрема, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

2) $(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e \quad (0 < a \neq 1,\ x > 0)$.
   Зокрема, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

3) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad (0 < a \neq 1)$.
   Зокрема, $(e^x)' = e^x$;

4) $(\sin x)' = \cos x$;

5) $(\cos x)' = -\sin x$;

6) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z})$;

7) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (x \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z})$;

8) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$;

9) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$;

10) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;

11) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$;

12) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;

13) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;

14) $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

15) $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \quad (x \neq 0)$.

Із наведеної вище таблиці і правил диференціювання суми, різниці, добутку, частки та складеної функції можна зробити висновок, що похідна будь-якої елементарної функції є елементарною функцією, тобто операція диференціювання не виводить нас з класу елементарних функцій.

5.8. Похідні вищих порядків

Означення 5.8.1. Нехай функція $y = f(x)$ визначена і диференційовна в кожній точці інтервалу (a, b), тобто на інтервалі (a, b) визначена функція $f'(x)$. Якщо функція $f'(x)$ є диференційовною в точці $x_0 \in (a, b)$, то її похідну в цій точці називають *другою похідною* функції $y = f(x)$ у точці x_0 і позначають $f''(x_0)$, $y''(x_0)$, $y^{(2)}(x_0)$ або $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Отже, $f''(x_0) = \big(f'(x)\big)'(x_0)$, або, пропускаючи позначення аргументу, $y'' = (y')'$. Аналогічно визначають похідну $y^{(n)}$ для будь-якого порядку n, $n \in \mathbb{N}$, а саме:

$$y^{(n)} = \big(y^{(n-1)}\big)',$$

у цьому випадку маємо на увазі, що $y^{(0)} = y$ а $y^{(1)} = y'$.

Означення n-ї похідної в точці x_0 можна записати у вигляді границі

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Зауваження 5.8.1. Якщо функція $y = f(x)$ n разів диференційовна в точці x_0, тобто якщо існує похідна $f^{(n)}(x_0)$, то звідси з огляду на означення n-ї похідної випливає, що похідна $(n-1)$-го порядку існує у деякому околі точки x_0, причому є неперервною в точці x_0. Отже, при $n > 1$ усі похідні порядку $k < n - 1$ існують і є неперервними у згадуваному околі.

Означення 5.8.1 аналогічно можна перенести на випадок односторонніх похідних вищих порядків.

Означення 5.8.2. Функцію $y = f(x)$ називають n разів диференційовною на проміжку $\mathcal{I}$, якщо вона є n разів диференційовна в кожній точці цього проміжку, причому, якщо це потрібно, то диференційовність у крайній точці проміжку розуміють як наявність у цій точці відповідної односторонньої похідної n-го порядку. Якщо n-на похідна є неперервною функцією на проміжку $\mathcal{I}$, то замість $f^{(n)} \in C_{\mathcal{I}}$ пишуть $f \in C^n_{\mathcal{I}}$ і називають f функцією з класу C^n. Функцію $y = f(x)$ називають *нескінченно диференційовною на проміжку* $\mathcal{I}$, якщо для довільного $n \in \mathbb{N}$ вона має на $\mathcal{I}$ похідну n-го порядку. Тоді пишуть $f \in C^\infty_{\mathcal{I}}$ і називають f функцією з класу C^∞.

Приклад 5.8.1.

Обчислити n-ні похідні таких функцій.

1) $y = x^5$.
   Маємо $y' = 5x^4$, $y'' = (5x^4)' = 20x^3$, $y^{(3)} = (20x^3)' = 60x^2$, $y^{(4)} = (60x^2)' = 120x$, $y^{(5)} = (120x)' = 120$, $y^{(6)} = y^{(7)} = \dots = 0$;

2) $y = x^\alpha \quad (x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R})$.
   Послідовно продиференціювавши, отримуємо

$$y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1},\ y^{(2)} = \alpha(\alpha-1) \cdot x^{\alpha-2},\ y^{(3)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot x^{\alpha-3}, \dots$$

Звідси бачимо загальне правило

$$(x^{\alpha})^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdot\ \dots\ \cdot(\alpha-n+1)\cdot x^{\alpha-n},$$

яке строго доводять методом математичної індукції;

3) $y = \sin x$.

Знаходимо

$$\begin{aligned} y' &= \cos x = \sin(x+\frac{\pi}{2}),\\ y'' &= \left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),\\ y''' &= \left(\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

тощо.

Припустимо, що справджується формула

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Знаходимо

$$(\sin x)^{(n+1)} = \left((\sin x)^{(n)}\right)' = \left(\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x+(n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Отже, методом математичної індукції доведено формулу

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

5.9. Формула Лейбніца для n-ї похідної добутку двох функцій

Теорема 5.9.1. *Нехай функції $u(x)$ та $v(x)$ мають похідні n-го порядку в точці x_0, тоді функція $u(x)\cdot v(x)$ також має в точці x_0 похідну n-го порядку, причому*

$$(u\cdot v)^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m u^{(n-m)} v^{(m)}, \tag{5.18}$$

де $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ — кількість комбінацій з n елементів по m.

Доведення. При $n = 1$ формула Лейбніца (5.18) набуває вигляду

$$(uv)' = \sum_{m=0}^{1} C_1^m u^{(1-m)} v^{(m)} = C_1^0 u^{(1)} v^{(0)} + C_1^1 u^{(0)} v^{(1)} = u'v + v'u,$$

тобто перетворюється у правило диференціювання добутку (див. теорему 5.4.1).

Припустимо, що формула (5.18) справджується, і нехай функції $u(x)$ та $v(x)$ мають у точці x_0 похідні $(n+1)$-го порядку. Тоді отримуємо таке:

$$(u \cdot v)^{(n+1)} = \Big((uv)^{(n)}\Big)' = \Big(\sum_{m=0}^{n} C_n^m u^{(n-m)} v^{(m)}\Big)' =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} C_n^m \Big(u^{(n-m)} v^{(m)}\Big)' = \sum_{m=0}^{n} C_n^m \Big(u^{(n-m+1)} v^{(m)} + u^{(n-m)} v^{(m+1)}\Big) =$$

$$= C_n^0 u^{(n+1)} v^{(0)} + \sum_{m=1}^{n} C_n^m u^{(n+1-m)} v^{(m)} +$$

$$+ \sum_{m=0}^{n-1} C_n^m u^{(n-m)} v^{(m+1)} + C_n^n u^{(0)} v^{(n+1)} = C_n^0 u^{(n+1)} v +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n} C_n^m u^{(n+1-m)} v^{(m)} + \sum_{p=1}^{n} C_n^{p-1} u^{(n+1-p)} v^{(p)} + C_n^n u v^{(n+1)} =$$

$$= u^{(n+1)} v + \sum_{p=1}^{n} C_n^p u^{(n+1-p)} v^{(p)} + \sum_{p=1}^{n} C_n^{p-1} u^{(n+1-p)} v^{(p)} + u v^{(n+1)} =$$

$$= u^{(n+1)} v + \sum_{p=1}^{n} \Big(C_n^p + C_n^{p-1}\Big) u^{(n+1-p)} v^{(p)} + u v^{(n+1)} =$$

$$= C_{n+1}^0 u^{(n+1)} v + \sum_{p=1}^{n} C_{n+1}^p u^{(n+1-p)} v^{(p)} + C_{n+1}^{n+1} u v^{(n+1)} =$$

$$= \sum_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^p u^{(n+1-p)} v^{(p)}.$$

Тут ми врахували, що $C_n^0 = C_{n+1}^0 = C_n^n = C_{n+1}^{n+1} = 1$, $C_n^p + C_n^{p-1} = C_{n+1}^p$.

Отже, методом математичної індукції ми з'ясували правильність співвідношення (5.18), яке й називають *формулою Лейбніца для n-ї похідної добутку двох функцій.* □

Зауважимо, що формула Лейбніца особливо ефективна, якщо одна з функцій має скінченну кількість відмінних від нуля похідних.

Приклад 5.9.1.

Нехай $y = x^2 \cdot \sin 5x$. Знайдемо за допомогою формули Лейбніца $y^{(500)}$. Позначимо $u = x^2$, $v = \sin 5x$. Маємо таке:

$$u' = 2x,\ u'' = 2,\ u^{(3)} = u^{(4)} = \cdots = u^{(n)} = \cdots = 0,$$
$$v^{(500)} = (\sin 5x)^{(500)} = 5^{500} \cdot \sin\Big(5x + 500 \cdot \frac{\pi}{2}\Big) = 5^{500} \sin 5x,$$
$$v^{(499)} = (\sin 5x)^{(499)} = 5^{499} \cdot \sin\Big(5x + 499 \cdot \frac{\pi}{2}\Big) = -5^{499} \cos 5x,$$
$$v^{(498)} = (\sin 5x)^{(498)} = 5^{498} \cdot \sin\Big(5x + 498 \cdot \frac{\pi}{2}\Big) = -5^{498} \sin 5x.$$

Отже,

$$y^{(500)} = \sum_{m=0}^{500} C_{500}^m u^{(500-m)} v^{(m)} = C_{500}^0 u^{(0)} v^{(500)} + C_{500}^1 u^{(1)} v^{(499)} +$$
$$+ C_{500}^2 u^{(2)} v^{(498)} = x^2 \cdot 5^{500} \sin 5x + 500 \cdot 2x \cdot \Big(-5^{499} \cdot \cos 5x\Big) +$$
$$+ \frac{500 \cdot 499}{2} \cdot 2 \cdot \Big(-5^{498} \cdot \sin 5x\Big) = 5^{498}(25x^2 \sin 5x - 500(10 \cos 5x + 499 \sin 5x)).$$

5.10. Диференціали вищих порядків

Для позначення диференціала аргументу та відповідного йому диференціала функції тут поряд зі звичними dx та dy використовуватимемо, відповідно, рівнозначні символи δx та δy. Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна на деякому інтервалі (a, b). Розглянемо її диференціал

$$dy = f'(x)dx. \tag{5.19}$$

Припустимо, що величина з правого боку співвідношення (5.19) є диференційовною функцією в точці $x_0 \in (a, b)$. Для цього досить, щоб функція $y = f(x)$ була двічі диференційовною в точці x_0, а аргумент x був або незалежною змінною, або двічі диференційовною функцією деякої незалежної змінної t. Отже, можна розглянути диференціал

$$\delta(dy) = \delta(f'(x)dx).$$

Означення 5.10.1. Значення $\delta(dy)$ диференціала від першого диференціала при $\delta x = dx$ називають *другим диференціалом* функції $y = f(x)$ у точці x_0 і позначають d^2y (або $d^2 f(x_0)$), тобто

$$d^2y = \delta(dy)\Big|_{\delta x = dx} = \delta(f'(x)dx)\Big|_{\delta x = dx}.$$

Диференціал $d^n y$ будь-якого порядку вводять за індукцією. Припустимо, що вже введено диференціал $d^{n-1}y$ і що функція $y = f(x)$ n разів диференційовна в точці x_0, а її аргумент x є або незалежною змінною, або n разів диференційовною функцією деякої незалежної змінної t.

Означення 5.10.2. Значення $\delta(d^{n-1}y)$ диференціала від $(n-1)$-го диференціала $d^{n-1}y$ при $\delta x = dx$ називають *n-м диференціалом* функції $y = f(x)$ у точці x_0 і позначають $d^n y$ (або $d^n f(x_0)$), тобто

$$d^n y = \delta(d^{n-1}y)\Big|_{\delta x = dx}.$$

У разі відшукання диференціалів вищих порядків потрібно розрізняти два випадки:

1) аргумент x є незалежною змінною;

2) аргумент x є відповідну кількість разів диференційовною функцією деякої незалежної змінної t.

У першому випадку диференціал dx не залежить від x і дорівнює Δx. Тому

$$\delta(dx) = (dx)' \cdot \delta x = 0. \tag{5.20}$$

Отже, для другого диференціала маємо

$$\begin{aligned} d^2y =&\delta(dy)\Big|_{\delta x=dx} = \delta(f'(x)dx)\Big|_{\delta x=dx} = (\delta(f'(x)) \cdot dx + \\ &+ f'(x) \cdot \delta(dx))\Big|_{\delta x=dx} = (f''(x) \cdot \delta x) \cdot dx\Big|_{\delta x=dx} + (f'(x) \cdot \delta(\delta(dx))\Big|_{\delta x=dx}. \end{aligned}$$

Звідси у випадку, коли аргумент x є незалежною змінною, з урахуванням співвідношення (5.20) отримаємо

$$d^2y = f''(x) \cdot (dx)^2 = f''(x)dx^2, \tag{5.21}$$

а для випадку, коли аргумент x є двічі диференційовною функцією деякої незалежної змінної t з урахуванням того, що $\delta(dx)|_{\delta x=dx} = d^2x$, знаходимо

$$d^2y = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x. \tag{5.22}$$

Порівнюючи співвідношення (5.21) та (5.22), бачимо, що (на відміну від першого диференціала) другий диференціал не має властивості інваріантності форми. Тим паче не мають властивості інваріантності й наступні диференціали.

Для випадку незалежної змінної легко довести за індукцією, що

$$d^n y = f^n(x)dx^n.$$

5.11. Похідні заданої параметрично функції

Означення 5.11.1. Нехай функції $x = x(t)$ та $y = y(t)$ визначені в деякому околі точки t_0 і одна з цих функцій, наприклад $x = x(t)$, неперервна і строго монотонна у зазначеному околі. Тоді для функції $x = x(t)$ існує обернена функція $t = t(x)$ і в деякому околі точки $x_0 = x(t_0)$ має зміст складна функція $y(t(x))$. Цю функцію називають *параметрично заданою формулами $x = x(t)$, $y = y(t)$ функцією.*

Визначимо формули для диференціювання параметрично заданих функцій.

Нехай функції $x(t)$ та $y(t)$ диференційовні в точці t_0, причому $x'(t_0) \neq 0$. Тоді параметрично задана функція $y(t(x))$ також має похідну, причому

$$y'(x_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}. \tag{5.23}$$

Справді, з огляду на інваріантність форми першого диференціала

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}, \; dy = y'(t)dt, \; dx = x'(t)dt,$$

звідки одразу ж випливає співвідношення (5.23).

Обчислимо другу похідну заданої параметрично функції. З огляду на інваріантність форми першого диференціала, враховуючи співвідношення (5.23), знаходимо

$$y''(x) = \frac{d(y'(x))}{dx} = \frac{d\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)}{x'(t)dt} = \frac{\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)' \cdot dt}{x'(t)dt} = \frac{y''(t) \cdot x'(t) - x''(t) \cdot y'(t)}{(x'(t))^3}.$$

У теоремі 5.5.1 за виконання певних умов отримано формулу для обчисленя похідної оберненої функції, а саме:

$$\frac{df^{-1}}{dy} = \frac{1}{\frac{df}{dx}}.$$

Знайдемо формулу для обчислення другої похідної оберненої функції:

$$\frac{d^2 f^{-1}}{dy^2} = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\frac{df}{dx}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\frac{df}{dx}}\right) \cdot \frac{1}{\frac{df}{dx}} = -\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}.$$

Користуючись наведеними схемами, можна знайти похідні третього та вищих порядків заданих параметрично та обернених функцій.

Розділ 6

Основні теореми про диференційовні функції

6.1. Зростання та спадання функції в точці. Теорема Ферма

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі (a, b) і нехай $x_0 \in (a, b)$.

Означення 6.1.1. Кажуть, що функція $y = f(x)$ *зростає в точці* x_0, якщо знайдеться таке $\delta > 0$, що

$$(\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0 - 0))\ \{f(x) < f(x_0)\}$$

і

$$(\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0 + 0))\ \{f(x) > f(x_0)\}.$$

Означення 6.1.2. Кажуть, що функція $y = f(x)$ *спадає в точці* x_0, якщо знайдеться таке $\delta > 0$, що

$$(\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0 - 0))\ \{f(x) > f(x_0)\}$$

і

$$(\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0 + 0))\ \{f(x) < f(x_0)\}.$$

Означення 6.1.3. Точку x_0 називають *точкою максимуму функції* $y = f(x)$, якщо

$$(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathcal{U}_\delta(x_0))\ \{f(x) \le f(x_0)\}.$$

Означення 6.1.4. Точку x_0 називають *точкою мінімуму функції* $y = f(x)$, якщо

$$(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathcal{U}_\delta(x_0))\ \{f(x) \ge f(x_0)\}.$$

Точки максимуму та мінімуму називають *точками екстремуму функції.*

Теорема 6.1.1. *Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0. Тоді якщо $f'(x_0) > 0$, то функція $y = f(x)$ зростає в точці x_0, а якщо $f'(x_0) < 0$, то функція $y = f(x)$ спадає в точці x_0.*

Доведення. Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0 і нехай $f'(x_0) > 0$. Згідно з означенням похідної

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Звідси, прийнявши в означенні границі функції за Коші $\varepsilon = f'(x_0) > 0$, отримуємо, що

$$(\exists \delta > 0)(\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0)) \left\{ \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < f'(x_0) \right\},$$

тобто

$$(\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0)) \left\{ 0 < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 2f'(x_0) \right\}.$$

Отже,

$$(\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0 - 0)) \; \{f(x) < f(x_0)\}$$

і

$$(\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0 + 0)) \; \{f(x) > f(x_0)\},$$

тобто функція $y = f(x)$ зростає в точці x_0. Аналогічно розглядають випадок $f'(x_0) < 0$. □

Теорема 6.1.2 (теорема Ферма). *Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0 і має в точці x_0 екстремум, то $f'(x_0) = 0$.*

Доведення. Функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0, тобто її похідна $f'(x_0)$ існує. Оскільки точка x_0 є точкою екстремуму функції $y = f(x)$, то ця функція не може ні зростати, ні спадати в точці x_0. Тому з огляду на теорему 6.1.1 похідна $f'(x_0)$ не може бути ні додатною, ні від'ємною. Отже, $f'(x_0) = 0$. □

Зауваження 6.1.1. Додатність (від'ємність) похідної не є необхідною умовою зростання (спадання) функції.

Це доводить приклад функції $y = x^3$, яка зростає в точці $x = 0$, і водночас $y'(0) = 3x^2|_{x=0} = 0$.

Цей самий приклад свідчить, що умова $f'(x_0) = 0$ не є достатньою умовою наявності екстремуму функції в точці x_0. Справді, $y'(0) = 0$, однак точка $x = 0$ не є точкою екстремуму функції $y = x^3$.

Зауваження 6.1.2. Теорема Ферма має простий геометричний зміст, а саме: якщо в точці екстремуму існує дотична, то вона паралельна до осі Ox.

6.2. Теореми Ролля, Лагранжа та Коші

Теорема 6.2.1 (теорема Ролля). *Нехай функція $y = f(x)$:*

1) *неперервна на відрізку $[a, b]$;*

2) *диференційовна на інтервалі (a, b);*

3) $f(a) = f(b)$.

Тоді існує точка $\xi \in (a, b)$ така, що $f'(\xi) = 0$.

Доведення. Оскільки функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то з огляду на теорему Веєрштрасса (теорема 4.4.1) вона досягає на цьому відрізку найбільшого та найменшого значень. Нехай $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Тоді

$$(\forall x \in [a, b]) \ \{m \le f(x) \le M\}.$$

Можливі два випадки: $m = M$ та $m < M$.

Розглянемо перший випадок. Тоді $(\forall x \in [a, b]) \ \{f(x) = m = M = \text{const}\}$. Звідси $(\forall x \in [a, b]) \ \{f'(x) = 0\}$. Отже, за ξ можна взяти будь-яку точку з інтервалу (a, b).

Розглянемо другий випадок. Оскільки $f(a) = f(b)$, то хоча б одне зі значень m та M функція досягає у якійсь точці $\xi \in (a, b)$. Отже, точка ξ є точкою екстремуму функції $y = f(x)$. Тому з огляду на диференційовність функції $y = f(x)$ в точці ξ та згідно з теоремою Ферма (теорема 6.1.2) отримуємо, що $f'(\xi) = 0$. □

Зауваження 6.2.1. Геометричний зміст теореми Ролля: на графіку неперервної на відрізку і диференційовної всередині цього відрізка функції, що набуває на кінцях відрізка однакових значень, знайдеться принаймні одна точка, в якій дотична паралельна до осі Ox.

Зауваження 6.2.2. Усі умови теореми Ролля суттєві, тобто невиконання хоча б однієї з них призводить до того, що висновок теореми є неправильним.

Доведемо це твердження. Функція

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } 0 \le x < 1; \\ 0, & \text{якщо } x = 1, \end{cases}$$

задовольняє умови 2 і 3 та не задовольняє умову 1 теореми 6.2.1, причому

$$\forall x \in (0, 1): \quad f'(x) = 1 \ne 0.$$

Функція $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$, задовольняє умови 1 та 3 і не задовольняє умову 2 теореми 6.2.1. Для цієї функції

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{якщо } x \in (-1, 0); \\ 1, & \text{якщо } x \in (0, 1), \end{cases}$$

а похідна в точці $x = 0$ не існує. Отже, знову ж таки похідна в жодній точці інтервалу $(-1, 1)$ не дорівнює нулю.

Врешті, функція $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$ задовольняє умови 1 та 2 і не задовольняє умову 3 теореми 6.2.1, причому

$$\forall x \in (0,1): \quad f'(x) = 1 \neq 0.$$

Теорема 6.2.2 (теорема Лагранжа). *Нехай функція $y = f(x)$:*

1) *неперервна на відрізку $[a, b]$;*

2) *диференційовна на інтервалі (a, b).*

Тоді існує точка $\xi \in (a, b)$ така, що

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \tag{6.1}$$

Доведення. Розглянемо на відрізку $[a, b]$ функцію

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Зауважимо, що функція $y = F(x)$ задовольняє всі умови теореми 6.2.1. Справді, функція $y = F(x)$ є неперервною на $[a, b]$, диференційовною на (a, b), причому

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

і $F(a) = F(b) = 0$. Тому з огляду на теорему 6.2.1 знайдеться точка $\xi \in (a, b)$, для якої

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

звідки випливає співвідношення (6.1). □

Співвідношення (6.1) називають *формулою Лагранжа*, або *формулою скінченних приростів.*

Зауваження 6.2.3. Теорема Ролля є частковим випадком теореми Лагранжа (при $f(a) = f(b)$). Хоча для доведення загальнішої теореми Лагранжа використано саме теорему Ролля.

Зауваження 6.2.4. З'ясуємо геометричний зміст теореми Лагранжа. Зауважимо, що величина $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ — це кутовий коефіцієнт січної, що проходить через точки $A(a, f(a))$ та $B(b, f(b))$, а $f'(\xi)$ — кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = f(x)$, що проходить через точку $C(\xi, f(\xi))$. Теорема Лагранжа стверджує, що знайдеться принаймні одна точка C графіка функції, в якій дотична паралельна до січної AB (рис. 6.1).

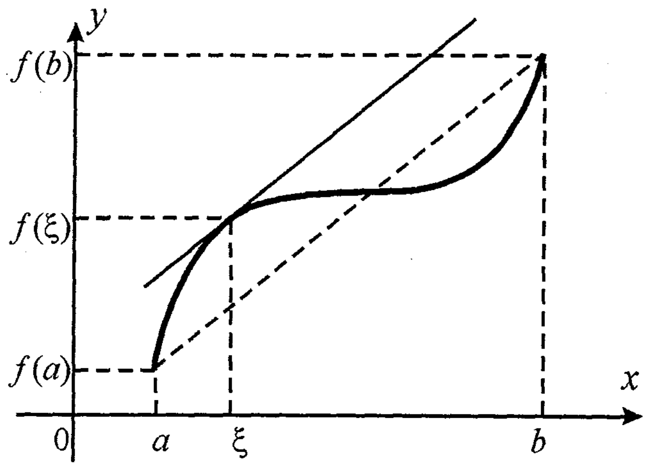


Рис. 6.1

Зауваження 6.2.5. Формула Лагранжа справджується й у випадку $a > b$.

Зауваження 6.2.6. Формулу Лагранжа можна записати у вигляді

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta x \cdot f'(x_0 + \theta \Delta x),$$

де θ — деяке число з інтервалу $(0, 1)$.

Теорема 6.2.3 (теорема Коші). *Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$:*

1) *неперервні на відрізку $[a, b]$;*

2) *диференційовні на інтервалі (a, b);*

3) $(\forall x \in (a, b))$ $\{g'(x) \neq 0\}$.

Тоді існує точка $\xi \in (a, b)$ така, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{6.2}$$

Доведення. Доведемо, що співвідношення (6.1) має сенс, тобто що $g(b) \neq g(a)$. Насправді, якби $g(a) = g(b)$, то для функції $g(x)$ виконувалися б умови теореми 6.2.1 (Ролля) і згідно з цією теоремою існувала б точка $\eta \in (a, b)$ така, що $g'(\eta) = 0$. А це суперечило б умові теореми. Отже, $g(a) \neq g(b)$.

Розглянемо функцію

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(b)).$$

З огляду на умови теореми функція $F(x)$ задовольняє умови теореми Ролля, тому існує точка $\xi \in (a,b)$ така, що $F'(\xi) = 0$, тобто

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(\xi),$$

звідки випливає співвідношення (6.2). □

Співвідношення (6.2) називають *формулою Коші*, або *узагальненою формулою скінченних приростів*.

Зауваження 6.2.7. Формула Лагранжа (6.1) є частковим випадком формули Коші (при $g(x) = x$).

Зауваження 6.2.8. Формула Коші (6.2) справджується й у випадку $a > b$.

6.3. Деякі наслідки з теореми Лагранжа

Теорема 6.3.1. *Нехай функція $y = f(x)$:*

1) *диференційовна на інтервалі (a,b);*

2) $(\forall x \in (a,b))$ $\{f'(x) = 0\}$.

Тоді $f(x) =$const на інтервалі (a,b).

Доведення. Нехай x_0 — деяка фіксована точка з інтервалу (a,b), а x — довільна точка з цього інтервалу. Відрізок $[x_0, x]$, або, відповідно, $[x, x_0]$, належить інтервалу (a,b). Тому функція $y = f(x)$ диференційовна (а, отже, й неперервна) на зазначеному відрізку. Застосовуємо до цієї функції на зазначеному відрізку теорему Лагранжа (теорема 6.2.2) й отримаємо, що знайдеться точка $\xi \in (x_0, x)$, або, відповідно, $\xi \in (x, x_0)$ така, що

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) \cdot f'(\xi).$$

Звідси, оскільки за умовою теореми $f'(\xi) = 0$, маємо

$$f(x) = f(x_0).$$

Остання рівність означає, що значення функції $y = f(x)$ в будь-якій точці x інтервалу (a,b) дорівнює її значенню у фіксованій точці x_0, тобто $f(x) = \text{const}$ на (a,b). □

Теорема 6.3.2. *Для того, щоб диференційовна на інтервалі (a,b) функція $y = f(x)$ була неспадною (незростаючою) на цьому інтервалі, необхідно і досить, щоб для довільного $x \in (a,b)$ виконувалась умова*

$$f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0).$$

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна на інтервалі (a, b) і є неспадною на цьому інтервалі. Тоді ця функція не може бути спадною в жодній точці з інтервалу (a, b). Отже, згідно з теоремою 6.1.1, у жодній точці інтервалу (a, b) похідна $f'(x)$ не може бути від'ємною. Тому $(\forall x \in (a, b))$ $\{f'(x) \geq 0\}$. Випадок незростаючої функції розглядаємо аналогічно.
($\Leftarrow$) Нехай $f'(x) \geq 0$ на інтервалі (a, b). Нехай x_1 та x_2 — довільні точки з інтервалу (a, b) такі, що $x_1 < x_2$. Функція $y = f(x)$ диференційовна (а, отже, й неперервна) на відрізку $[x_1, x_2]$. Тому до функції $y = f(x)$ на відрізку $[x_1, x_2]$ можна застосувати теорему Лагранжа, з огляду на яку існує точка $\xi \in (x_1, x_2)$ така, що

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot f'(\xi).$$

Оскільки $f'(\xi) \geq 0$, $x_2 - x_1 > 0$, то $f(x_2) \geq f(x_1)$, тобто функція $y = f(x)$ є неспадною на відрізку $[a, b]$.

Випадок $f'(x) \leq 0$ розглядають аналогічно. □

Теорема 6.3.3. *Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна на інтервалі (a, b). Тоді якщо $(\forall x \in (a, b))$ $\{f'(x) > 0\}$, то функція $y = f(x)$ зростає на інтервалі (a, b), а якщо $(\forall x \in (a, b))$ $\{f'(x) < 0\}$, то функція $y = f(x)$ спадає на інтервалі (a, b).*

Цю теорему доводять за тією ж схемою, що й достатність у теоремі 6.3.2.

Зауваження 6.3.1. Додатність (від'ємність) похідної $f'(x)$ на інтервалі (a, b) не є необхідною умовою зростання (спадання) функції на зазначеному інтервалі.

Справді, функція $y = x^3$ зростає на інтервалі $(-1, 1)$, однак $f'(x) = 3x^2$ не є додатною на ньому ($f'(0) = 0$).

Взагалі кажучи, легко довести таке твердження: функція $y = f(x)$ зростає (спадає) на інтервалі (a, b), якщо її похідна $f'(x)$ є додатною (від'ємною) на цьому інтервалі, крім, можливо, скінченної кількості точок, у яких ця похідна дорівнює нулю.

6.4. Відсутність точок розриву першого роду похідної

Лема 6.4.1. *Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в деякому правосторонньому околі $\overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0 + 0)$ точки x_0 і має в точці x_0 правосторонню похідну $f'_+(x_0)$. Тоді якщо існує $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f'(x)$, то ця границя дорівнює $f'_+(x_0)$.*

Доведення. Оскільки існує правостороння похідна $f'_+(x_0)$, то існує границя

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0). \tag{6.3}$$

Звідси випливає, що $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} (f(x) - f(x_0)) = 0$, тобто функція $y = f(x)$ є неперервною справа у точці x_0. Зафіксуємо довільне $x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0 + 0)$. Оскільки функція

$y = f(x)$ диференційовна (а, отже, й неперервна) в околі $\overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0 + 0)$ і, крім того, неперервна в точці x_0 справа, то для цієї функції на відрізку $[x_0, x]$ виконуються умови теореми Лагранжа (теорема 6.2.2). З огляду на цю теорему знайдеться точка $\xi \in (x_0, x)$ така, що

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{6.4}$$

Перейдемо у співвідношенні (6.4) до границі при $x \to x_0 + 0$. Зауважимо таке: якщо $x \to x_0 + 0$, то $\xi \to x_0 + 0$, оскільки $\xi \in (x_0, x)$. Отже, ліва частина співвідношення прямує до $\lim\limits_{x \to x_0+0} f'(x)$. Тому зі співвідношення (6.3), враховуючи (6.4), отримуємо

$$\lim_{x \to x_0+0} f'(x) = \lim_{x \to x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0).$$

□

Аналогічно доводять таку лему.

Лема 6.4.2. *Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в деякому лівосторонньому околі $\overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0 - 0)$ точки x_0 і має в точці x_0 лівосторонню похідну $f'_-(x_0)$. Тоді якщо існує $\lim\limits_{x \to x_0-0} f'(x)$, то ця границя дорівнює $f'_-(x_0)$.*

Наслідком з цих двох лем є така теорема.

Теорема 6.4.1. *Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна на інтервалі (a, b), то її похідна $f'(x)$ не має на цьому інтервалі точок розриву першого роду.*

Зауваження 6.4.1. Похідні диференційовних на інтервалі функцій можуть мати точки розриву другого роду.

Наведемо приклад такої функції. Нехай

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & \text{якщо } x \neq 0; \\ 0, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

Для будь-якого $x \neq 0$ похідна $f'(x)$ існує, причому

$$f'(x) = 2x \cdot \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}.$$

Оскільки

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cos \frac{1}{\Delta x} = 0,$$

то $f'(0) = 0$. Отже, функція $y = f(x)$ диференційовна на всій числовій осі. Проте оскільки $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ не існує, а $\lim\limits_{x \to 0} 2x \cdot \cos \frac{1}{x} = 0$, то похідна $f'(x)$ в точці $x = 0$ не має односторонніх границь.

Отже, точка $x = 0$ є точкою розриву другого роду похідної $f'(x)$.

6.5. Розкриття невизначеностей. Правила Лопіталя

Нагадаємо (див. підрозділ 3.8), що частку двох функцій $\frac{f(x)}{g(x)}$ називають невизначеністю типу $\frac{0}{0}$ при $x \to x_0$, якщо

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0.$$

Розкрити невизначеність означає знайти границю $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ за умови, що вона існує.

Аналогічно розумітимемо невизначеність типу $\frac{0}{0}$ при $x \to x_0 + 0$, $x \to x_0 - 0$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ та $x \to \infty$, а також невизначеності інших типів, а саме: $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^∞, ∞^0, 1^∞.

Теорема 6.5.1 (перше правило Лопіталя). *Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені в проколеному околі $\overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0)$ точки x_0, причому:*

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$;

2) *функції $f(x)$ та $g(x)$ диференційовні у $\overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0)$;*

3) $(\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0))\ \{g'(x) \neq 0\}$;

4) *існує скінченна чи нескінченна границя*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{6.5}$$

Тоді існує границя

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}, \tag{6.6}$$

причому

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доведення. Довизначимо функції $f(x)$ та $g(x)$ в точці x_0, прийнявши $f(x_0) = 0$ та $g(x_0) = 0$. Довизначені функції $f(x)$ та $g(x)$ є неперервними в $\mathcal{U}_\delta(x_0)$. Нехай x — довільна точка з $\overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0)$. Функції $f(x)$ та $g(x)$ задовольняють на відрізку $[x_0, x]$ (або ж $[x, x_0]$) умови теореми Коші (теорема 6.2.3). Згідно з цією теоремою, знайдеться точка $\xi \in (x_0, x)$ (або ж $\xi \in (x, x_0)$) така, що

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{6.7}$$

Зафіксувавши для кожного x одне зі зазначених ξ, отримуємо, що $\lim\limits_{x\to x_0}\xi(x)=x_0$. Тому якщо існує $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K$, то згідно з правилом заміни змінної для границь функцій існує і $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=K$. Отже, перейшовши у співвідношенні (6.7) до границі при $x\to x_0$, отримуємо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K.$$

□

Зауваження 6.5.1. Границя частки функцій (6.6) може існувати й у тому випадку, якщо границі частки похідних (6.5) не існує.

Наприклад, для функцій $f(x)=x^2\cos\frac{1}{x}$, $g(x)=\sin x$ існує границя

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=0,$$

а границі

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}}{\cos x}$$

не існує.

Зауваження 6.5.2. Якщо похідні $f'(x)$ та $g'(x)$ задовольняють ті ж умови, що й власне функції $f(x)$ та $g(x)$, то правило Лопіталя можна застосувати повторно, тобто

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Приклад 6.5.1.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4}{x^3+3\cos x-3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^3}{3x^2-3\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{12x^2}{6x-3\cos x}=0$.

Правило Лопіталя справджується для односторонніх границь і для границь на нескінченностях. Сформулюємо теорему, що є узагальненням теореми 6.5.1.

Теорема 6.5.2. *Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені в проколеному околі $\overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(a)$, де a — число x_0 або один із символів x_0-0, x_0+0, $+\infty$, $-\infty$, ∞, причому:*

1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$;

2) *функції $f(x)$ та $g(x)$ диференційовні у $\overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(a)$;*

3) $(\forall x\in\overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(a))\ \{g'(x)\neq 0\}$;

4) *існує скінченна чи нескінченна границя*

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{6.8}$$

Тоді існує границя $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, *причому*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доведення. Зауважимо таке: якщо $a = x_0$, то отримуємо доведену вище теорему 6.5.1.

У разі односторонніх границь теорему доводимо аналогічно, як і теорему 6.5.1, з тією лише відмінністю, що замість проколеного околу точки x_0 розглядаємо відповідні односторонні околи.

Розглянемо випадок $a = \infty$, тобто $x \to \infty$. Зробимо заміну змінної $t = \frac{1}{x}$ і приймемо $F(t) = f(\frac{1}{t}) = f(x)$, $G(t) = g(\frac{1}{t}) = g(x)$. Тоді функції $F(t)$ і $G(t)$ визначені і диференційовні в $\overset{\circ}{\mathcal{U}}_{\frac{1}{\delta}}(0)$, причому в цьому околі похідна

$$G'(t) = g'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) = g'(x) \cdot (-x^2) \neq 0.$$

З огляду на існування границі (6.8) існує границя

$$\lim_{t \to 0} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t \to 0} \frac{f'(\frac{1}{t}) \cdot (-\frac{1}{t^2})}{g'(\frac{1}{t}) \cdot (-\frac{1}{t^2})} = \lim_{t \to 0} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{6.9}$$

Отже, згідно з теоремою 6.5.1, існує границя

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)},$$

причому з урахуванням співвідношення (6.9)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \to 0} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t \to 0} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Справджуваність теореми при $x \to +\infty$ та $x \to -\infty$ доводять аналогічно. □

Приклад 6.5.2.

1) $\lim\limits_{x \to +0} \frac{x^2}{\ln(1+x)} = \lim\limits_{x \to +0} \frac{2x}{\frac{1}{x+1}} = \lim\limits_{x \to +0} 2x(x+1) = 0.$

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{\pi}{4} - \mathrm{arctg}(1-\frac{1}{x})}{\sin\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{-\frac{1}{1+(1-\frac{1}{x})^2} \cdot \frac{1}{x^2}}{\cos\frac{1}{x} \cdot (-\frac{1}{x^2})} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{\cos\frac{1}{x}(1+(1-\frac{1}{x})^2)} = \frac{1}{2}.$

Для розкриття невизначеностей типу $\frac{\infty}{\infty}$ використовують твердження теореми, аналогічної до теореми 6.5.2.

Теорема 6.5.3 (друге правило Лопіталя). *Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені в проколеному околі $\overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(a)$, де a — число x_0 або один із символів $x_0 - 0$, $x_0 + 0$, $+\infty$, $-\infty$, ∞, причому:*

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$;

2) *функції $f(x)$ та $g(x)$ диференційовні у $\overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(a)$;*

3) $(\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(a))\ \{g'(x) \neq 0\}$;

4) *існує скінченна чи нескінченна границя*

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{6.10}$$

Тоді існує границя $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, причому

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доведення сформульованої теореми ми не наводимо.

Приклад 6.5.3.

1. Знайдемо $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$.

   Маємо
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha \cdot x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0.$$

2. Знайдемо $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{a^x}$, $n \in \mathbb{N}$, $a > 1$.

   Застосовуючи n разів правило Лопіталя, отримуємо
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{a^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{a^x \cdot \ln a} = \cdots = \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{a^x \cdot \ln^n a} = 0.$$

Невизначеності інших типів, а саме: $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0, можна звести за допомогою алгебраїчних перетворень до вже вивчених типів невизначеностей $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$. Не обговорюючи у загальному випадку їхньої правильності, наведемо схеми таких перетворень.

1. Невизначеність типу $0 \cdot \infty$.

Нехай $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \infty$. Тоді $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$, тобто у правій частині останнього співвідношення отримано невизначеність типу $\frac{0}{0}$.

2. Невизначеність типу $\infty - \infty$.

Нехай $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$. Маємо

$$\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}.$$

Отримана у правій частині границя є невизначеністю типу $\frac{0}{0}$.

3. Невизначеності типів 1^∞, 0^0, ∞^0.

Нехай

$$y = f(x)^{g(x)}, \tag{6.11}$$

де $f(x)$ прямує до 1, 0 чи ∞, а $g(x)$ прямує, відповідно, до ∞ чи 0 при $x \to a$.

Прологарифмувавши обидві сторони співвідношення (6.11), отримуємо

$$\ln y = g(x) \cdot \ln f(x). \tag{6.12}$$

Зауважимо, що у кожному з трьох випадків, які ми розглядаємо, права частина співвідношення (6.12) є невизначеністю типу $0\cdot\infty$, а такі невизначеності розглянуто вище.

Приклад 6.5.4.

1. Знайти $\lim\limits_{x\to+0} x^x$.

   Позначимо $y(x) = x^x$. Тоді

$$\ln y(x) = x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}.$$

   Користуючись правилом Лопіталя, знаходимо

$$\lim_{x\to+0} \ln y(x) = \lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to+0} x = 0,$$

   звідки

$$\lim_{x\to+0} y(x) = \lim_{x\to+0} x^x = 1.$$

2. Знайти $\lim\limits_{x\to0}(1 + x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}}$.

   Нехай $y(x) = (1 + x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}}$. Тоді

$$\ln y(x) = \frac{\ln(1 + x^2)}{e^x - 1 - x}.$$

   Користуючись правилом Лопіталя, знаходимо

$$\lim_{x\to0}(\ln y(x)) = \lim_{x\to0} \frac{\ln(1 + x^2)}{e^x - 1 - x} = \lim_{x\to0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{e^x - 1} =$$
$$= \lim_{x\to0} \frac{2x}{(e^x - 1)(1 + x^2)} = \lim_{x\to0} \frac{2}{e^x(1 + x^2) + (e^x - 1)2x} = 2.$$

   Звідси

$$\lim_{x\to0} y(x) = \lim_{x\to0}(1 + x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}} = e^2.$$

6.6. Формула Тейлора

Теорема 6.6.1 (теорема Тейлора). *Нехай функція $y = f(x)$ є $(n-1)$ разів неперервно диференційовна в $\mathcal{U}_\delta(x_0)$ і має n-ну похідну в точці x_0. Тоді*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n), \quad x \to x_0. \tag{6.13}$$

Доведення. Нехай

$$\varphi(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

$$\psi(x) = (x-x_0)^n.$$

Тоді для доведення співвідношення (6.13) достатньо довести, що

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0.$$

Під знаком границі маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$ при $x \to x_0$. Застосувавши $n-1$ разів правило Лопіталя, знаходимо

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \cdots = \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi^{(n-1)}(x)}{\psi^{(n-1)}(x)} =$$

$$= \frac{1}{n!} \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - f^{(n)}(x_0) \right) = \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)\right) = 0.$$

□

Формулу (6.13) називають *формулою Тейлора зі залишковим членом у формі Пеано*, многочлен

$$P_n(x; x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

— *многочленом Тейлора* порядку n функції $y = f(x)$ в точці x_0, а доданок

$$R_{n+1}(x; x_0) = o((x-x_0)^n), \quad x \to x_0;$$

— *залишковим членом формули Тейлора у формі Пеано.*

Якщо $x_0 = 0$, то формулу (6.13) називають *формулою Маклорена.* У такому разі маємо

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n), \quad x \to 0. \tag{6.14}$$

Формула (6.13) є локальною, тому її ліву сторону називають *асимптотичним зображенням функції* $y = f(x)$ в околі точки x_0. Формула (6.13) ефективна для знаходження границь, а також для наближених обчислень значень функції у точках, близьких до точки x_0.

Однак якщо точка x не належить достатньо малому околу точки x_0, то застосування формули (6.13) не є ефективним, оскільки нічого визначеного не можна сказати про похибку, яка виникає у разі заміни значення функції у фіксованій точці значенням многочлена $P_n(x; x_0)$.

Накладемо на функцію $y = f(x)$ жорсткіші, ніж у теоремі 6.6.1, умови й отримаємо глобальну теорему Тейлора.

Теорема 6.6.2. *Нехай функція $y = f(x)$ визначена та n разів неперервно диференційовна на інтервалі (a, b) і має в кожній точці цього інтервалу, крім, можливо, точки $x_0 \in (a, b)$, похідну $(n+1)$-го порядку і нехай $p > 0$. Тоді між точкою x_0 і будь-якою точкою $x \in (a, b)$ знайдеться точка ξ така, що*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_{n+1}(x; x_0), \tag{6.15}$$

де

$$R_{n+1}(x; x_0) = \frac{1}{n! \cdot p}\left(\frac{x - x_0}{x - \xi}\right)^p \cdot (x - \xi)^{n+1} \cdot f^{(n+1)}(\xi). \tag{6.16}$$

Формулу (6.15) називають *формулою Тейлора для функції $y = f(x)$ зі залишковим членом у загальній формі, або у формі Шльомільха-Роша.*

Доведення. Нехай для визначеності $x > x_0$. Розглянемо функцію

$$h(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x - t)^k - \frac{(x - t)^p}{n! p} \cdot \lambda, \ t \in [x_0, x],$$

де λ — числовий параметр.

Функція $h(t)$ неперервна на відрізку $[x_0, x]$, причому $h(x) = 0$, а похідна $h'(t)$ існує на інтервалі (x_0, x). Виберемо λ таке, щоб виконувалась умова

$$h(x_0) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k - \frac{(x - x_0)^p}{n! p} \cdot \lambda = 0. \tag{6.17}$$

За такого вибору λ функція $h(t)$ задовольняє на відрізку $[x_0, x]$ умови теореми Ролля, з огляду на яку існує точка $\xi \in (x_0, x)$ така, що

$$h'(\xi) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n + \frac{(x - \xi)^{p-1}}{n!} \cdot \lambda = 0.$$

З останнього співвідношення знаходимо $\lambda = f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x-\xi)^{n-p+1}$ і, підставивши його у співвідношення (6.17), отримуємо

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_{n+1}(x; x_0),$$

де

$$R_{n+1}(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p} \left(\frac{x-x_0}{x-\xi}\right)^p (x-\xi)^{n+1}.$$

Випадок $x < x_0$ розглядають аналогічно. □

Вибираючи конкретні значення $p > 0$, отримуємо часткові випадки форми запису залишкового члена. Розглянемо найважливіші з них. Приймаємо у формулі (6.16) $p = n+1$, отримаємо залишковий член формули Тейлора *у формі Лагранжа*:

$$R_{n+1}(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}. \tag{6.18}$$

Приймемо у формулі (6.16) $p = 1$ і зобразимо в ній точку ξ у вигляді $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$, де $0 < \theta < 1$, отримаємо залишковий член формули Тейлора *у формі Коші*

$$R_{n+1}(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{n!} (x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n. \tag{6.19}$$

Якщо у формулі (6.15) прийняти $x_0 = 0$, то отримаємо формулу Маклорена

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_{n+1}(x, 0). \tag{6.20}$$

Залишкові члени формули Маклорена у формах Лагранжа і Коші мають, відповідно, такий вигляд:

$$R_{n+1}(x; 0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}, \tag{6.21}$$

$$R_{n+1}(x; 0) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!} (1-\theta)^n x^{n+1}, \ 0 < \theta < 1. \tag{6.22}$$

Нехай функція $y = f(x)$ є нескінченно диференційовною на інтервалі (a, b). Тоді для всіх $n \in \mathbb{N}$ для неї можна записати формулу Тейлора (6.15). Її залишковий член

$$R_{n+1}(x; x_0) = f(x) - P_n(x; x_0),$$

де $P_n(x; x_0) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$ — многочлен Тейлора.

Якщо для кожного x з деякої множини $E \in (a, b)$, $x_0 \in E$, виконується співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x; x_0) = 0,$$

то

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\ \{|R_{n+1}(x; x_0)| < \varepsilon\}.$$

Тоді в кожній точці $x \in E$ значення функції $y = f(x)$ можна обчислювати з будь-якою наперед заданою точністю, приймаючи $f(x) \approx P_n(x; x_0)$.

6.7. П'ять основних формул Маклорена

1. Нехай $f(x) = e^x$. Оскільки для будь-якого k виконується $f^{(k)}(x) = e^x$, $f^{(k)}(0) = 1$. то формула Маклорена (6.20) для функції $f(x) = e^x$ набуде вигляду

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x; 0) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x; 0), \quad (6.23)$$

де залишковий член у формі Лагранжа

$$R_{n+1}(x; 0) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Оцінимо залишковий член. Маємо

$$|R_{n+1}(x; 0)| \le \frac{e^{\theta|x|}}{(n+1)!} \cdot |x|^{n+1} < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} \cdot |x|^{n+1}.$$

Легко побачити (див. приклад 2.6.2), що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x; 0) = 0.$$

2. Нехай $f(x) = \cos x$. Оскільки

$$f^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right),$$

то

$$f^{(k)}(0) = \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } k = 2m - 1; \\ (-1)^{\frac{k}{2}}, & \text{якщо } k = 2m. \end{cases}$$

Отже, формула (6.20) набуває вигляду

$$\cos x = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + R_{2n+2}(x; 0) =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+2}(x; 0), \quad (6.24)$$

де залишковий член у формі Лагранжа

$$R_{2n+2}(x;0) = \frac{\cos(\theta x + (2n+2)\frac{\pi}{2})}{(2n+2)!} \cdot x^{2n+2}, \quad 0 < \theta < 1.$$

З останнього співвідношення знаходимо оцінку залишкового члена, а саме:

$$|R_{2n+2}(x;0)| \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!},$$

звідки, як і в 1, маємо

$$\lim_{n\to\infty} R_{2n+2}(x;0) = 0.$$

3. Нехай $f(x) = \sin x$. Оскільки

$$f^{(k)}(x) = \sin\Big(x + k\frac{\pi}{2}\Big),$$

то

$$f^{(k)}(0) = \sin\Big(k \cdot \frac{\pi}{2}\Big) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } k = 2m; \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}}, & \text{якщо } k = 2m-1. \end{cases}$$

Тоді формула Маклорена (6.20) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \sin x = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2n+1}(x;0) = \\ = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n+1}(x;0), \quad (6.25) \end{aligned}$$

де залишковий член у формі Лагранжа

$$R_{2n+1}(x;0) = \frac{\sin(\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2})}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Для цього залишкового члена виконується оцінка

$$|R_{2n+1}(x;0)| \le \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

причому $\lim\limits_{n\to\infty} R_{2n+1}(x;0) = 0$.

4. Нехай $f(x) = \ln(1+x)$, $x > -1$. Оскільки

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k},$$

то

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)!.$$

Тоді формула Маклорена (6.20) набуде вигляду

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + R_{n+1}(x;0) =$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x;0), \quad (6.26)$$

де залишковий член у формі Лагранжа має вигляд

$$R_{n+1}(x;0) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \quad 0 < \theta < 1, \quad (6.27)$$

а у формі Коші —

$$R_{n+1}(x;0) = (-1)^n \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} \cdot x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1. \quad (6.28)$$

Якщо $x \in [0,1]$, то оцінку залишкового члена формули (6.26) отримаємо зі співвідношення (6.27), а саме:

$$|R_{2n+1}(x;0)| \le \frac{1}{n+1}. \quad (6.29)$$

Якщо ж $x \in (-1,0)$, то скористаємося співвідношенням (6.28). Оскільки для довільного $x \in (-1,0)$

$$\frac{1-\theta}{1+\theta x} < \frac{1-\theta}{1-\theta} = 1, \quad 1 + \theta x > 1 - |x|,$$

то з (6.28) отримуємо

$$|R_{n+1}(x;0)| = \left| \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right) \cdot \frac{x}{1+\theta x} \right| < \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}. \quad (6.30)$$

Із співвідношень (6.29) і (6.30) одержимо, що для будь-якого $x \in (-1;1]$

$$\lim_{n \to \infty} R_{n+1}(x;0) = 0.$$

Зауважимо, що формула (6.26) справджується для довільного $x \in (-1;+\infty)$, однак якщо $x > 1$, то її залишковий член не прямує до нуля, що унеможливлює застосування цієї формули для наближеного обчислення значень функції $f(x) = \ln(1+x)$ для $x > 1$.

5. Нехай $f(x) = (1+x)^\alpha$, $x > -1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Оскільки

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k},$$

то
$$f^{(0)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1).$$

Отже, формула (6.20) набуде вигляду

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)x^k}{k!} + \\ + R_{n+1}(x;0) = 1 + \frac{\alpha}{1!}\cdot x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\cdot x^n + R_{n+1}(x;0), \quad (6.31)$$

це залишковий член у формі Лагранжа має вигляд

$$R_{n+1}(x;0) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n-1)!}\cdot(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}\cdot x^{n+1}, \quad 0<\theta<1.$$

Якщо $x \in (-1,1)$, то
$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x;0) = 0.$$

Цей факт приймемо без доведення.

Розділ 7

Дослідження функцій

7.1. Ознаки монотонності функцій

Зв'язок між характером монотонності диференційовної на інтервалі (a,b) функції $y = f(x)$ та знаком її похідної на цьому інтервалі описано у підрозділі 6.3. Коротко нагадаємо результати теорем 6.3.1—6.3.3:

$$\begin{aligned}
&(f'(x) \geq 0) \Leftrightarrow (f(x) \text{ неспадна});\\
&(f'(x) \leq 0) \Leftrightarrow (f(x) \text{ незростаюча});\\
&(f'(x) > 0) \Rightarrow (f(x) \text{ зростаюча});\\
&(f'(x) < 0) \Rightarrow (f(x) \text{ спадна});\\
&(f'(x) \equiv 0) \Leftrightarrow (f(x) \equiv \text{const}).
\end{aligned}$$

7.2. Достатні умови екстремуму

У теоремі Ферма (теорема 6.1.2) знайдено необхідну умову наявності екстремуму диференційовної функції $y = f(x)$ у точці x_0, а саме $f'(x_0) = 0$. Точки, у яких $f'(x) = 0$, називають *стаціонарними точками.* Зауважимо, що функція $y = f(x)$ може мати екстремум у точці, похідна в якій не існує. Справді, функція $y = |x|$, $x \in [-1,1]$, має мінімум у точці $x = 0$ і водночас не є диференційовною в цій точці.

Означення 7.2.1. Говоритимемо, що функція $y = \varphi(x)$ *змінює знак*, переходячи через точку $x_0 \in (a,b)$, якщо існує $\delta > 0$ таке, що:

1) $(\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0 - 0))\ \{\varphi(x) < 0\} \wedge (\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0 + 0))\ \{\varphi(x) > 0\}$

або

2) $(\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0 - 0))\ \{\varphi(x) > 0\} \wedge (\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0 + 0))\ \{\varphi(x) < 0\}$,

причому у випадку 1 говоритимемо, що функція змінює знак з "$-$" на "$+$", а у випадку 2 — з "$+$" на "$-$".

Теорема 7.2.1 (перша достатня умова екстремуму). *Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на інтервалі (a, b) і диференційовна в деякому околі $\mathcal{U}_\delta(x_0)$ точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0. Тоді:*

1) *якщо, переходячи через точку x_0, похідна $f'(x)$ змінює знак, то точка x_0 є точкою екстремуму функції $y = f(x)$, причому якщо з "+" на "−", то x_0 — точка максимуму, а якщо з "−" на "+", то x_0 — точка мінімуму;*

2) *якщо, переходячи через точку x_0, похідна $f'(x)$ не змінює знака, то точка x_0 є не є точкою екстремуму функції $y = f(x)$.*

Доведення. Нехай x^* — довільна точка з $\overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0)$. Функція $y = f(x)$ задовольняє на відрізку $[x_0, x^*]$ (або $[x^*, x_0]$) умови теореми Лагранжа (теорема 6.2.2). З огляду на цю теорему

$$f(x_0) - f(x^*) = f'(\xi)(x_0 - x^*), \tag{7.1}$$

де $\xi \in (x_0, x^*)$ (або $\xi \in (x^*, x_0)$).

1. Нехай похідна $f'(x)$ змінює знак, переходячи через точку x_0, з "+" на "−". Тоді існує $\delta_0 > 0$, $\delta_0 \le \delta$, таке, що

$$(\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_{\delta_0}(x_0 - 0))\ \{f'(x) > 0\} \wedge (\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_{\delta_0}(x_0 + 0))\ \{f'(x) < 0\}. \tag{7.2}$$

З урахуванням (7.2), зі співвідношення (7.1) для всіх $x^* \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_{\delta_0}(x_0)$ отримуємо $f(x_0) > f(x^*)$. Отже, точка x_0 є точкою максимуму функції $y = f(x)$. Аналогічно доводять теорему й у разі зміни знака похідної $f'(x)$ з "−" на "+".

2. Нехай похідна $f'(x)$, переходячи через точку x_0, не змінює знака. Припустимо, для визначеності, що в деякому проколеному околі точки x_0 похідна $f'(x) > 0$, тобто існую $\delta_0 > 0$, $\delta_0 \le \delta$, таке, що

$$(\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_{\delta_0}(x_0 - 0))\ \{f'(x) > 0\} \wedge (\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_{\delta_0}(x_0 + 0))\ \{f'(x) > 0\}.$$

Звідси з огляду на співвідношення (7.1) отримуємо

$$(\forall x^* \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_{\delta_0}(x_0 - 0))\ \{f(x_0) > f(x^*)\} \wedge (\forall x^* \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_{\delta_0}(x_0 + 0))\ \{f(x_0) < f(x^*)\}.$$

Отже, точка x_0 не є точкою екстремуму функції $y = f(x)$. □

Теорема 7.2.2 (друга достатня умова екстремуму). *Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі (a, b), $x_0 \in (a, b)$, $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$. Тоді x_0 є точкою екстремуму функції $y = f(x)$, причому якщо $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка мінімуму, а якщо $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка максимуму.*

Доведення. Нехай $f''(x_0) > 0$. Тоді з огляду на теорему 6.1.1 функція $f'(x)$ зростає у точці x_0. Оскільки $f'(x_0) = 0$, то існує $\delta > 0$ таке, що

$$(\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0 - 0))\ \{f'(x) < 0\} \wedge (\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0 + 0))\ \{f'(x) > 0\}.$$

Отже, похідна $f'(x)$ змінює знак, переходячи через точку x_0, з "$-$" на "$+$", тому з огляду на теорему 7.2.2 точка x_0 є точкою мінімуму функції $y = f(x)$.

Випадок $f''(x_0) < 0$ розглядають аналогічно. □

Теорема 7.2.3 (третя достатня умова екстремуму). *Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі (a, b), $x_0 \in (a, b)$,*

$$f'(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \tag{7.3}$$

а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Якщо n — парне число, то точка x_0 є точкою екстремуму функції $y = f(x)$, причому якщо $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 — точка мінімуму, а якщо $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 — точка максимуму. Якщо ж n — непарне число, то точка x_0 не є точкою екстремуму функції $y = f(x)$.

Доведення. Якщо $n = 2$, то теорема 7.2.3 збігається з доведеною вище теоремою 7.2.2. Отже, достатньо довести теорему для $n \geq 3$.

Нехай $f^{(n)}(x_0) > 0$. Тоді з огляду на теорему 6.1.1 функція $f^{(n-1)}(x)$ зростає у точці x_0. Отже, оскільки $f^{(n-1)}(x_0) = 0$, то існує $\delta > 0$ таке, що

$$(\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0 - 0))\ \{f^{(n-1)}(x) < 0\} \wedge (\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0 + 0))\ \{f^{(n-1)}(x) > 0\}. \tag{7.4}$$

Згідно з формулою Тейлора (6.15), із залишковим членом у формі Лагранжа (6.18) для функції $y = f'(x)$ маємо

$$f'(x) = f'(x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n-2)}(x_0)}{(n-3)!}(x - x_0)^{n-3} + \frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2},$$

де точка ξ лежить між точками x_0 та x. Звідси, враховуючи співвідношення (7.3), маємо

$$f'(x) = \frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2}. \tag{7.5}$$

Оскільки точка ξ лежить між точками x_0 та x, то враховуючи співвідношення (7.4), отримуємо

$$(\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0 - 0))\ \{f^{(n-1)}(\xi) < 0\} \wedge (\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}_\delta(x_0 + 0))\ \{f^{(n-1)}(\xi) > 0\}.$$

Отже, якщо n — парне число, то зі співвідношення (7.5) випливає, що похідна $f'(x)$, переходячи через точку x_0, змінює знак "$-$" на "$+$", а тому з огляду на теорему 7.2.1 точка x_0 є точкою мінімуму функції $y = f(x)$.

Якщо ж n непарне, то похідна $f'(x)$, переходячи через точку x_0, не змінює знака, тому з огляду на теорему 7.2.1 точка x_0 не є точкою екстремуму функції $y = f(x)$.

Випадок $f^{(n)}(x_0) < 0$ розглядають аналогічно. □

7.3. Опуклість функції

Означення 7.3.1. Функцію $y = f(x)$, що визначена і диференційовна на інтервалі (a, b), називають *опуклою вниз* (*опуклою вгору*), якщо графік функції лежить не нижче (не вище) від своєї дотичної, проведеної в будь-якій точці інтервалу (a, b).

Зауваження 7.3.1. Коректність цього означення, тобто існування похилої дотичної в кожній точці інтервалу (a, b), випливає з теореми 5.2.1.

На рис. 7.1, *а* зображено графік функції, опуклої вниз, а на рис. 7.1, *б* — опуклої вгору.

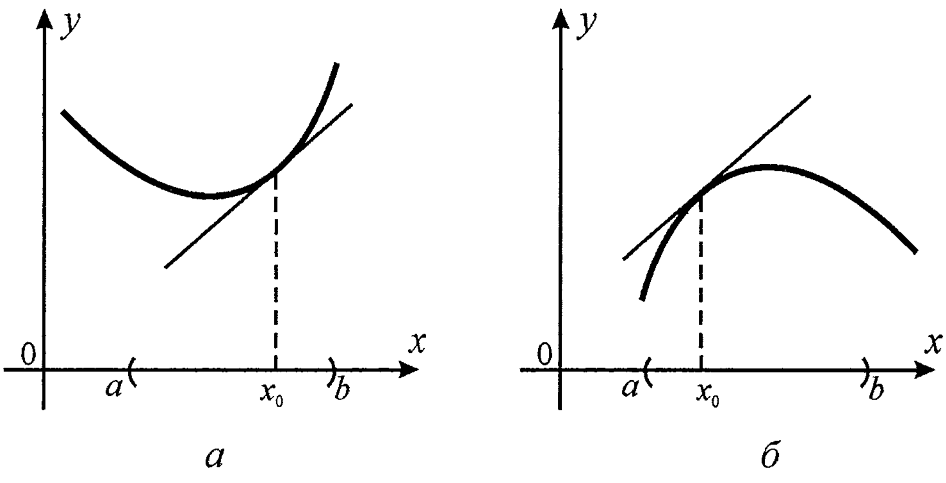


Рис. 7.1

Теорема 7.3.1. *Нехай функція $y = f(x)$ двічі диференційовна на інтервалі (a, b). Якщо*

$$(\forall x \in (a, b))\ \{f''(x) \geq 0\}, \tag{7.6}$$

то функція $y = f(x)$ опукла вниз на інтервалі (a, b), а якщо

$$(\forall x \in (a, b))\ \{f''(x) \leq 0\}, \tag{7.7}$$

то функція $y = f(x)$ опукла вгору на інтервалі (a, b).

Доведення. Нехай x_0 — довільна точка з інтервалу (a, b). Відповідно до теореми 5.2.1, рівняння дотичної до графіка функції в точці x_0 має вигляд

$$Y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0. \tag{7.8}$$

Згідно з фомулою Тейлора (6.15), з $n = 1$ із залишковим членом у формі Лагранжа (6.18) для будь-якого $x \in (a, b)$ маємо

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}(x - x_0)^2, \tag{7.9}$$

де точка ξ є між точками x_0 та x.

Із співвідношень (7.8) та (7.9) отримуємо, що для всіх $x \in (a, b)$

$$f(x) - Y = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2}(x - x_0)^2.$$

Отже, якщо виконується умова (7.6), то $f(x) - Y \geq 0$, тобто функція $y = f(x)$ опукла вниз на інтервалі (a, b), а якщо виконується умова (7.7), то $f(x) - Y \leq 0$, тобто функція $y = f(x)$ опукла вгору на інтервалі (a, b). □

Наслідок 7.3.1. *Нехай функція $y = f(x)$ двічі диференційовна на інтервалі (a, b) і $f''(x)$ неперервна в точці $x_0 \in (a, b)$. Якщо $f''(x_0) > 0$, то в деякому околі точки x_0 функція $y = f(x)$ опукла вниз, а якщо $f''(x_0) < 0$, то в деякому околі точки x_0 функція $y = f(x)$ опукла вгору.*

7.4. Точки перегину

Означення 7.4.1. Точку x_0, що належить до області визначення функції $y = f(x)$, називають *точкою перегину* цієї функції, якщо існує $\delta > 0$ таке, що в односторонніх δ-околах точки x_0 функція $y = f(x)$ має різний характер опуклості.

Теорема 7.4.1 (необхідна умова перегину). *Нехай функція $y = f(x)$ двічі неперервно диференційовна на інтервалі (a, b) і точка $x_0 \in (a, b)$ є точкою перегину функції $y = f(x)$. Тоді $f''(x_0) = 0$.*

Доведення. Припустимо, що $f''(x_0) \neq 0$. Тоді $f'(x_0) > 0$ або $f'(x_0) < 0$. Проте в обох цих випадках згідно з наслідком 7.3.1 у деякому околі точки x_0 функція має однаковий характер опуклості. Отже, точка x_0 не є точкою перегину функції $y = f(x)$. Отримана суперечність доводить теорему. □

Зауваження 7.4.1. Умови теореми 7.4.1 можна послабити, а саме: вимагати диференційовність функції $y = f(x)$ на інтервалі (a, b) та існування $f''(x_0)$.

Зауваження 7.4.2. Умова $f''(x_0) = 0$ є лише необхідною, однак не є достатньою умовою перегину.

Справді, функція $y = x^4$ не має точок перегину і водночас $y''(0) = 12x^2\big|_{x=0} = 0$.

7.5. Достатні умови перегину

Теорема 7.5.1 (перша достатня умова перегину). *Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі (a, b) і двічі диференційовна в деякому околі точки x_0. Якщо друга похідна $f''(x)$ змінює знак, переходячи через точку x_0, то точка x_0 є точкою перегину функції.*

Доведення. Оскільки похідна $f''(x)$ змінює знак, переходячи через точку x_0, то, згідно з теоремою 7.3.1, функція має у деяких односторонніх околах точки x_0 різний характер опуклості, тобто точка x_0 є точкою перегину функції $y = f(x)$. □

Зауваження 7.5.1. Умови теореми 7.5.1 можна послабити, а саме: вимагати, щоб функція $y = f(x)$ була двічі диференційовною в деякому проколеному околі точки x_0 і мала дотичну (похилу чи вертикальну) в цій точці.

Теорема 7.5.2 (друга достатня умова перегину). *Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі (a, b), $x_0 \in (a, b)$, $f''(x_0) = 0$, а $f^{(3)}(x_0) \neq 0$. Тоді точка x_0 є точкою перегину функції $y = f(x)$.*

Доведення. З умови $f^{(3)}(x_0) \neq 0$ і теореми 6.1.1 випливає, що функція $f''(x)$ або зростає, або спадає в точці x_0. Отже, з огляду на теорему 7.5.1 точка x_0 є точкою перегину функції $y = f(x)$. □

Теорема 7.5.3 (третя достатня умова перегину). *Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі (a, b), $x_0 \in (a, b)$,*

$$f^{(2)}(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \tag{7.10}$$

а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Якщо n — непарне число, то x_0 — точка перегину.

Доведення. Якщо $n = 3$, то сформульована теорема збігається з теоремою 7.5.2, отже, достатньо довести теорему для непарних $n \geq 5$.

Оскільки $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то за теоремою 6.1.1 функція $f^{(n-1)}(x)$ або зростає, або спадає в точці x_0. Тому з огляду на те, що $f^{(n-1)}(x_0) = 0$, функція $f^{(n-1)}(x)$ змінює знак, переходячи через точку x_0. За формулою Тейлора (6.15), для функції $f^{(2)}(x)$

$$f^{(2)}(x) = f^{(2)}(x_0) + \frac{f^{(3)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \\ + \frac{f^{(n-2)}(x_0)}{(n-4)!}(x - x_0)^{n-4} + \frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-3)!}(x - x_0)^{n-3},$$

звідки, врахувавши співвідношення (7.10), отримуємо

$$f^{(2)}(x) = \frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-3)!}(x - x_0)^{n-3}.$$

Отже, функція $f^{(2)}(x)$ змінює знак, переходячи через точку x_0, а тому з огляду на терорему 7.5.1 точка x_0 є точкою перегину функції $y = f(x)$. □

7.6. Асимптоти

Означення 7.6.1. Якщо хоча б одна з односторонніх границь

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x), \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

дорівнює $+\infty$ або $-\infty$, то пряму $x = x_0$ називають *вертикальною асимптотою* функції $y = f(x)$.

Означення 7.6.2. Пряму

$$Y = kx + b$$

називають *похилою асимптотою* функції $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, якщо

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (kx + b)) = 0. \tag{7.11}$$

Теорема 7.6.1. *Для того, щоб функція $y = f(x)$ мала похилу асимптоту $y = kx+b$ при $x \to +\infty$, необхідно і досить, щоб існували границі*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \tag{7.12}$$

і

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = b. \tag{7.13}$$

Доведення. ($\Rightarrow$)Нехай пряма $Y = kx + b$ є похилою асимптотою функції $y = f(x)$ при $x \to +\infty$. Зі співвідношення (7.11) отримуємо, що

$$f(x) - (kx + b) = \alpha(x),$$

де $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Тому

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{kx + b + \alpha(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(k + \frac{k}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right) = k;$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty}(b + \alpha(x)) = b.$$

($\Leftarrow$)Нехай існують границі (7.12) та (7.13). Зі співвідношення (7.13) випливає, що

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx - b) = 0.$$

□

Зауваження 7.6.1. Аналогічно визначають похилу асимптоту при $x \to -\infty$ і доводять теорему 7.6.1 у разі $x \to -\infty$.

Розділ 8

Первісна та невизначений інтеграл

8.1. Означення первісної та невизначеного інтеграла

Нехай $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ — проміжок, а $f\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ — деяка функція.

Означення 8.1.1. Функцію $F(x)$ називають *первісною* для функції $f(x)$ на $\mathcal{I}$, якщо F диференційовна на $\mathcal{I}$ і для всіх $x \in \mathcal{I}$ виконується $F'(x) = f(x)$, або, що еквівалентно, $dF(x) = f(x)dx$.

Зауваження 8.1.1. Оскільки, згідно з означенням, первісна є диференційовною на $\mathcal{I}$, то вона неперервна на цьому проміжку (див. теорему 5.3.2).

Теорема 8.1.1 (основна теорема для первісних). *Якщо $F_1(x)$ і $F_2(x)$ — будь-які первісні для $f(x)$ на $\mathcal{I}$, то $F_1(x) - F_2(x) = C$ на $\mathcal{I}$, де C — деяка стала.*

Доведення. Нехай $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Оскільки $F_1(x)$ та $F_2(x)$ диференційовні на $\mathcal{I}$, то й $\Phi(x)$ диференційовна на $\mathcal{I}$, причому

$$\Phi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Отже, згідно з теоремою 6.3.1, $\Phi(x) = C = \text{const}$ на $\mathcal{I}$. □

Наслідок 8.1.1. *Якщо $F(x)$ — деяка первісна для $f(x)$ на $\mathcal{I}$, то будь-яка інша первісна $\Phi(x)$ для $f(x)$ на $\mathcal{I}$ має вигляд*

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

де C — деяка стала.

Означення 8.1.2. Довільну первісну функції f називають *невизначеним інтегралом* цієї функції і позначають символом

$$\int f(x)dx.$$

У цьому разі $f(x)dx$ називають *підінтегральним виразом*, а $f(x)$ — *підінтегральною функцією*.

Зауваження 8.1.2. З теореми 8.1.1 випливає: якщо $F(x)$ — деяка первісна для $f(x)$ на $\mathcal{I}$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де C — деяка стала.

Вправа 8.1.1. *Довести, що з означення невизначеного інтеграла випливає:*

$$\text{а) } d\int f(x)dx = f(x)dx, \quad \text{б) } \int dF(x) = F(x) + C.$$

Приклад 8.1.1.

Нехай $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$. Зрозуміло, що $\int x^2dx = \frac{x^3}{3} + C$. Це перевіряють оберненою дією — диференціюванням.

Зауваження 8.1.3. Може постати питання: чому ми пишемо $\int f(x)dx$, а не $\int f(x)$. Наведемо декілька аргументів на користь прийнятої форми запису:

а) так склалося історично;

б) нехай $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — функція двох змінних, наприклад, $f(x,y) = x^2y$; що ж таке $\int f(x,y)$ — незрозуміло, тоді як очевидно, що

$$\int f(x,y)dx = \int x^2ydx = \frac{x^3y}{3} + C_1,$$

$$\int f(x,y)dy = \int x^2ydy = \frac{x^2y^2}{2} + C_2,$$

де $C_1 = C_1(y)$, $C_2 = C_2(x)$;

в) зручність прийнятої форми запису особливо виявляється в разі інтегрування методом заміни змінної (див. зауваження 8.3.1).

Теорема 8.1.2 (лінійність невизначеного інтеграла). *Нехай функції f, g мають первісні на проміжку $\mathcal{I}$, а $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ — число. Тоді* а) *функція* $f+g$ *має первісну на* $\mathcal{I}$, *причому*

$$\int\big(f(x)+g(x)\big)dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx \tag{8.1}$$

("невизначений інтеграл від суми дорівнює сумі невизначених інтегралів");

б) *функція* kf *має первісну на* $\mathcal{I}$, *причому*

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx \tag{8.2}$$

("сталий множник можна виносити за знак інтеграла").

Доведення. Нехай $\int f(x)dx=F(x)+C_1$, $\int g(x)dx=G(x)+C_2$, а, отже,

$$(\forall x\in\mathcal{I})\{F'(x)=f(x),\ G'(x)=g(x)\}.$$

Приймемо $H=F+G$. Тоді

$$(\forall x\in\mathcal{I})\ \{H'(x)=\big(F(x)+G(x)\big)'=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x)\}.$$

Це означає, що H є первісною для функції $f+g$ на $\mathcal{I}$, а тому

$$\int[f(x)+g(x)]dx=H(x)+C=F(x)+G(x)+C.$$

Отже, ліва частина формули (8.1) складається з функцій вигляду $F(x)+G(x)+C$, права — з функцій вигляду $F(x)+C_1+G(x)+C_2$. З огляду на довільність сталих C, C_1 та C_2 ці сукупності збігаються;

Нехай $\int f(x)dx=F(x)+C$, а, отже, $(\forall x\in\mathcal{I})\ \{F'(x)=f(x)\}$. Тоді $(\forall x\in\mathcal{I})$ $\{(kF(x))'=kF'(x)=kf(x)\}$, тобто $(\forall x\in\mathcal{I})\ \{\int kf(x)dx=kF(x)+C_1\}$.

Отже, ліва частина формули (8.2) є сукупністю функцій вигляду $kF(x)+C_1$, а права складається з функцій вигляду $k\big(F(x)+C\big)=kF(x)+kC$.

З огляду на довільність сталих C та C_1 й умови $k\neq 0$ обидві сукупності збігаються. □

8.2. Таблиця основних інтегралів

Оскільки

$$F'(x)=f(x)\Leftrightarrow\int f(x)dx=F(x)+C, \tag{8.3}$$

то на підставі викладеного у підрозділі 5.7 складемо *таблицю інтегралів*:

1) $\int 0\,dx=C$;

2) $\int 1\, dx = x + C$;

3) $\int x^\mu\, dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$;

4) $\int \frac{1}{x}\, dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad \big(x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)\big)$;

5) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad \int e^x dx = e^x + C$;

6) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$;

7) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$;

8) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\operatorname{ctg} x + C$;

9) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x + C$;

10) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad (a > 0)$;

11) $\int \frac{1}{a^2+x^2}\, dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C, \quad (a \neq 0)$.

Крім того, за допомогою (8.3), неважко переконатись у справджуваності наступних співвідношень:

12) $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$;

13) $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$;

14) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$;

15) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$;

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$;

17) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C, \quad (a \neq 0)$;

18) $\int \frac{x dx}{a^2 \pm x^2} = \pm\frac{1}{2}\ln|a^2 \pm x^2| + C$;

19) $\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C$;

20) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C, \quad (a > 0)$;

21) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$.

8.3. Методи заміни змінної та інтегрування частинами

Теорема 8.3.1 (заміна змінної в невизначеному інтегралі). *Нехай функції $f(x)$ та $\varphi(t)$ визначені, відповідно, на проміжках $\mathcal{I}_x$ та $\mathcal{I}_t$, причому $\varphi(\mathcal{I}_t) \subset \mathcal{I}_x$ і $\varphi \in C^1_{\mathcal{I}_t}$. Тоді якщо $f(x)$ має первісну $F(x)$ на $\mathcal{I}_x$, тобто*

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{8.4}$$

то функція $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ має на $\mathcal{I}_t$ первісну $F(\varphi(t))$, тобто

$$\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = F\big(\varphi(t)\big)+C. \tag{8.5}$$

Доведення. На підставі (8.3) бачимо, що співвідношення (8.4), (8.5) можна записати, відповідно, так:

$$F'(x) = f(x), \tag{8.6}$$

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t))= f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t). \tag{8.7}$$

Однак (8.7) випливає з (8.6) і теореми 5.6.1 про похідну складеної функції. □

Зауваження 8.3.1. Враховуючи рівність $\varphi'(t)dt = d\varphi(t)$, (8.5) можна формально записати так:

$$\int f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int f(x)dx\bigg|_{x=\varphi(t)} + C. \tag{8.8}$$

Іншими словами: *з точністю до адитивної сталої і заміни $x = \varphi(t)$ інтеграл $\int f(x)dx$ не зміниться, якщо початкова незалежна змінна x замінена новою t, де $x = \varphi(t)$, $\varphi \in C^1_{\mathcal{I}_t}$. Це твердження є ще одним аргументом на користь прийнятої форми запису невизначеного інтеграла (див. зауваження 8.1.3).*

Приклад 8.3.1.

1) $\int e^{x^2}xdx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}dx^2 = \frac{1}{2}\int e^y dy|_{y=x^2} = \frac{1}{2}e^y|_{y=x^2} + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$;

2) $\int \sin^5 x \cos x dx = \int \sin^5 x d\sin x = \int y^5 dy|_{y=\sin x} = \frac{y^6}{6}|_{y=\sin x} + C = \frac{\sin^6 x}{6} + C$;

3) нехай $\int f(x)dx = F(x) + C$, $a, b \in \mathbb{R}$, причому $a \neq 0$. Тоді

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b) = \frac{1}{a}\int f(y)dy|_{y=ax+b} = \frac{1}{a}F(y)|_{y=ax+b} + C,$$

тобто

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C; \tag{8.9}$$

4) обчислимо $\int \sqrt{1-x^2}dx$. Для цього використаємо формулу (8.8) у зворотному порядку, тобто справа наліво. А саме: приймемо $x = \sin t$ (тут $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $x \in [-1, 1]$). Враховуючи (8.9) і рівність $t = \arcsin x$, отримуємо

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 x} d\sin t = \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)dt =$$
$$= \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) + C = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t \cos t + C = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$$

Теорема 8.3.2 (інтегрування частинами). *Нехай $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ — проміжок, $u, v \in C^1_{\mathcal{I}}$ та існує $\int vdu$. Тоді існує $\int udv$, причому*

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{8.10}$$

Доведення. Використовуючи правило диференціювання добутку, отримаємо

$$d(uv) = \big(u(x)v(x)\big)'dx = u'(x)v(x)dx + u(x)v'(x)dx = vdu + udv,$$

звідки

$$udv = d(uv) - vdu.$$

Інтеграл від кожного доданка в правій частині існує, оскільки $\int d(uv) = uv + C$, а $\int vdu$ існує за умовою. Тому, зважаючи на теорему 8.1.2,

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu. \tag{8.11}$$

Підставимо в праву частину виразу (8.11) функцію $uv + C$ замість $\int d(uv)$ і віднесемо сталу C до інтеграла $\int vdu$, тоді отримаємо (8.10). □

Приклад 8.3.2.

1) $\int \ln x dx = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - x + C$ (тут $u = \ln x$, $v = x$ $(x > 0)$);
2) обчислимо інтеграли $\mathcal{I}_n(x) = \int x^n \cos ax dx$, $\mathcal{J}_n(x) = \int x^n \sin ax dx$, $E_n(x) = \int x^n e^{ax} dx$ ($n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$):

$$a)\quad \mathcal{I}_n(x) = \frac{1}{a}\int x^n d\sin ax = \frac{1}{a}\Big(x^n \sin ax - n\int x^{n-1}\sin ax dx\Big) = \frac{1}{a}\Big(x^n \sin ax +$$
$$+ \frac{n}{a}\int x^{n-1} d\cos ax\Big) = \frac{1}{a}\Big(x^n \sin ax + \frac{n}{a}(x^{n-1}\cos ax - (n-1)\int x^{n-2}\cos ax dx)\Big).$$

Отже,

$$\mathcal{I}_n(x) = \frac{x^n}{a}\sin ax + \frac{nx^{n-1}}{a^2}\cos ax - \frac{n(n-1)}{a^2}\mathcal{I}_{n-2}(x). \tag{8.12}$$

Звідси, оскільки

$$\mathcal{I}_0(x) = \int \cos ax dx = \frac{1}{a}\sin ax + C,$$

$$\mathcal{I}_1(x) = \int x\cos ax dx = \frac{1}{a}\int x d\sin ax = \frac{1}{a}(x\sin ax - \int \sin ax dx) = \frac{x}{a}\sin ax + \frac{1}{a^2}\cos ax + C,$$

то неважко знайти $\mathcal{I}_n(x)$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$;

б) аналогічно доводять, що

$$\mathcal{J}_n(x) = -\frac{x^n}{a}\cos ax + \frac{nx^{n-1}}{a^2}\sin ax - \frac{n(n-1)}{a^2}\mathcal{J}_{n-2}(x). \tag{8.13}$$

Для обчислення $\mathcal{J}_n(x)$ за цією формулою треба мати на увазі, що

$$\mathcal{J}_0(x) = \int \sin ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C,$$

$$\mathcal{J}_1(x) = \int x\sin ax dx = -\frac{x}{a}\cos ax + \frac{1}{a^2}\sin ax + C.$$

в) $E_n(x) = \int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a}\int x^n de^{ax} = \frac{1}{a}(x^n e^{ax} - n\int x^{n-1}e^{ax}dx)$, тобто

$$E_n(x) = \frac{x^n}{a}e^{ax} - \frac{n}{a}E_{n-1}(x). \tag{8.14}$$

Зазначимо, що $E_0(x) = \frac{1}{a}e^{ax} + C$;

3) обчислимо інтеграли $C_{a,b}(x) = \int e^{ax}\cos bx dx$, $S_{a,b}(x) = \int e^{ax}\sin bx dx$.
Маємо $\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{1}{a}\int \cos bx\, de^{ax} = \frac{1}{a}[\cos bx \cdot e^{ax} + b\int e^{ax}\sin bx dx]$, тобто

$$C_{a,b}(x) = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}S_{a,b}(x).$$

Аналогічно

$$S_{a,b}(x) = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}C_{a,b}(x).$$

Розв'яжемо систему отриманих рівнянь і побачимо, що

$$C_{a,b}(x) = \int e^{ax}\cos bx dx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C, \tag{8.15}$$

$$S_{a,b}(x) = \int e^{ax}\sin bx dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C; \tag{8.16}$$

4) обчислимо інтеграли $\mathcal{I}_n(a,b;x) = \int x^n e^{ax}\cos bx dx$, $\mathcal{J}_n(a,b;x) = \int x^n e^{ax}\sin bx dx$.
Для обчислення першого інтеграла використаємо метод інтегрування частинами, прийнявши $u = x^n$, $dv = e^{ax}\cos bx dx$ (а отже, $du = nx^{n-1}dx$, $v = C_{a,b}(x)$; див. (8.15)).
Маємо

$$\int x^n e^{ax}\cos bx dx = x^n \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax} - $$
$$- \frac{1}{a^2+b^2}[na\int x^{n-1}e^{ax}\cos bx dx + nb\int x^{n-1}e^{ax}\sin bx dx].$$

Іншими словами,

$$\mathcal{I}_n(a,b;x) = \frac{1}{a^2+b^2}[x^n(a\cos bx + b\sin bx)e^{ax} - na\mathcal{I}_{n-1}(a,b;x) - nb\mathcal{J}_{n-1}(a,b,;x)]. \tag{8.17}$$

Аналогічно

$$\mathcal{J}_n(a,b;x) = \frac{1}{a^2+b^2}[x^n(a\sin bx - b\cos bx)e^{ax} - na\mathcal{J}_{n-1}(a,b;x) + nb\mathcal{I}_{n-1}(a,b,;x)]. \tag{8.18}$$

Зазначимо, що

$$\mathcal{I}_0(a,b;x) = C_{a,b}(x), \quad \mathcal{J}_0(a,b;x) = S_{a,b}(x)$$

(див. (8.15), (8.16)).

8.4. Інтегрування раціональних функцій. Метод Остроградського

Розглянемо питання про обчислення інтегралів вигляду $\int R(x)dx$, де $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ — частка многочленів. Оскільки дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ є сумою многочлена та правильного дробу, тобто такого, у якого степінь чисельника менший, ніж степінь знаменника, а інтегрування многочлена нескладне, то будемо вважати, що дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ є правильним: $\deg P < \deg Q$.

Далі, не зменшуючи загальності, можна вважати, що старший коефіцієнт многочлена Q дорівнює одиниці, а, отже, як відомо з алгебри, $Q(x)$ можна зобразити у вигляді добутку лінійних та квадратичних многочленів з дійсними коефіцієнтами:

$$Q(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdot \ \ldots \ \cdot (x - x_l)^{k_l}(x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} \cdot \ \ldots \ \cdot (x^2 + p_n x + q_n)^{m_n}, \quad (8.19)$$

де $k_1 + \cdots + k_l + 2(m_1 + \cdots + m_n) = \deg Q$, а жоден з тричленів $x^2 + p_j x + q_j$ не має дійсних коренів, тобто

$$\frac{p_j^2}{4} - q_j < 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Нагадаємо, що простими дробами називають дроби одного з чотирьох типів:

а) $\frac{A}{x-a}$;

б) $\frac{A}{(x-a)^k}$, $k = 2, 3, \ldots$;

в) $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$;

г) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$, $m = 2, 3, \ldots$,

де $A, M, N, p, q \in \mathbb{R}$; крім того, припускають, що тричлен $x^2 + px + q$ не має дійсних коренів, тобто $q - \frac{p^2}{4} > 0$.

У курсі алгебри доводять таке твердження:

Якщо $\frac{P(x)}{Q(x)}$ — правильний дріб, причому $Q(x)$ має вигляд (8.19), то існує зображення цього дробу у вигляді суми простих дробів:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{l}\Bigl(\sum_{k=1}^{k_j} \frac{a_{jk}}{(x - x_j)^k}\Bigr) + \sum_{j=1}^{n}\Bigl(\sum_{k=1}^{m_j} \frac{b_{jk}x + c_{jk}}{(x^2 + p_j x + q_j)^k}\Bigr), \quad (8.20)$$

де a_{jk}, b_{jk}, c_{jk} — дійсні числа.

Отже, обчислення інтеграла $\int R(x)dx$ зводиться до інтегрування простих дробів і до знаходження чисел a_{jk}, b_{jk}, c_{jk}.

З'ясуємо питання про інтегрування простих дробів. Використовуючи таблицю основних інтегралів та формулу (8.9), отримуємо

а) $\int \frac{Adx}{x-a} = A\ln|x-a| + C$;

б) $\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k}dx = A\frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + C = -\frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$, $k = 2, 3, \ldots$.

Далі $x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)$. Приймемо $a \overset{\text{def}}{=} \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$ і зробимо заміну $x + \frac{p}{2} = t$ (звідки випливає, що $dx = dt$). Тоді

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx = \int \frac{Mt + (N - \frac{Mp}{2})}{(t^2+a^2)^m}dt =$$
$$= \frac{M}{2}\int \frac{2tdt}{(t^2+a^2)^m} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}; \quad (8.21)$$

в) використовуючи (8.21) при $m = 1$, отримуємо

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\int \frac{2tdt}{t^2+a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$
$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}\int \frac{d(\frac{t}{a})}{(\frac{t}{a})^2+1} =$$
$$= \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{1}{a}\left(N - \frac{Mp}{2}\right)\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C =$$
$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C;$$

г) якщо $m = 2, 3, \ldots$, то

$$\int \frac{2tdt}{(t^2+a^2)^m} = \int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^m} = -\frac{1}{m-1}\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}} + C =$$
$$= -\frac{1}{m-1}\frac{1}{(x^2+px+q)^{m-1}} + C. \quad (8.22)$$

Другий інтеграл у правій частині (8.21) обчислюють за допомогою рекурентної формули, яку виводять так.

Нехай $\mathcal{I}_m \overset{\text{def}}{=} \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}$, $m = 1, 2, 3, \ldots$. Застосуємо формулу (8.10) (інтегрування частинами), прийнявши $u = \frac{1}{(t^2+a^2)^m}$, $dv = dt$, так що $du = -\frac{2mtdt}{(t^2+a^2)^{m+1}}$, $v = t$. Отримуємо:

$$\mathcal{I}_m = \frac{t}{(t^2+a^2)^m} + 2m\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^{m+1}}dt =$$
$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^m} + 2m\left[\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m} - a^2\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{m+1}}\right],$$

тобто

$$\mathcal{I}_m = \frac{t}{(t^2+a^2)^m} + 2m(\mathcal{I}_m - a^2\mathcal{I}_{m+1});$$

$$2ma^2\mathcal{I}_{m+1} = (2m-1)\mathcal{I}_m + \frac{t}{(t^2+a^2)^m};$$

$$\mathcal{I}_{m+1} = \frac{2m-1}{2ma^2}\mathcal{I}_m + \frac{1}{2ma^2}\frac{t}{(t^2+a^2)^m}. \qquad (8.23)$$

Знаючи, що інтеграл $\mathcal{I}_1 = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}$ (ми беремо одне з його значень), на підставі (8.21) знаходимо $\mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3, \ldots$ тощо.

Зокрема,

$$\mathcal{I}_2 = \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + \frac{1}{2a^2}\frac{t}{t^2+a^2}.$$

Отже, для завершення інтегрування досить прийняти в результаті $t = \frac{2x+p}{2}$.

Числа a_{jk}, b_{jk}, c_{jk}, що фігурують у теоремі про зображення дробово-раціональної функції у вигляді суми простих дробів, зазвичай шукають *методом невизначених коефіцієнтів*. Цей метод полягає в тому, що праву частину рівності (8.19) зводять до спільного знаменника $Q(x)$, потім відкидають ліворуч і праворуч знаменник Q та отримують рівність двох многочленів. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях цих многочленів, одержують систему $\deg Q$ лінійних рівнянь з такою ж кількістю невідомих. Із сформульованої вище теореми випливає, що вона завжди має єдиний розв'язок.

Приклад 8.4.1.

Обчислимо $\int \frac{3x^2+5x+4}{(x^2+1)(x+1)}dx$.

Розв'язування. Згідно зі сказаним вище, існують A, B, $C \in \mathbb{R}$ такі, що

$$\frac{3x^2+5x+4}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Зведемо до спільного знаменника, отримаємо

$$\frac{3x^2+5x+4}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x^2+1)(x+1)};$$

відкинемо знаменник:

$$(A+B)x^2 + (B+C)x + (A+C) = 3x^2+5x+4;$$

прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях:

$$\begin{aligned} x^2 &\mid A+B=3,\\ x^1 &\mid B+C=5,\\ x^0 &\mid A+C=4; \end{aligned}$$

розв'язавши цю систему, отримаємо $A=1$, $B=2$, $C=3$.

Отже,

$$\int \frac{3x^2+5x+4}{(x^2+1)(x+1)}dx = \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{2xdx}{x^2+1} + 3\int \frac{dx}{x^2+1} = \ln|x+1| + \ln(x^2+1) + 3\operatorname{arctg} x + C.$$

Наведемо ще один спосіб знаходження коефіцієнтів a_{jk}, які фігурують у (8.20). Для цього перепишемо співвідношення (8.20) у такому вигляді:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-x_1)^{k_1}Q_1(x)} = \sum_{k=1}^{k_1} \frac{a_{1k}}{(x-x_1)^k} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}. \tag{8.24}$$

Помножимо рівність (8.24) на $(x-x_1)^{k_1}$:

$$\frac{P(x)}{Q_1(x)} = a_{11}(x-x_1)^{k_1-1} + \cdots + a_{1k_1-1}(x-x_1) + a_{1k_1} + (x-x_1)^{k_1}\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}. \tag{8.25}$$

Звідси бачимо, що $a_{1k_1} = \frac{P(x)}{Q_1(x)}\Big|_{x=x_1}$. Далі, продиференціювавши (8.25), отримаємо

$$\left(\frac{P(x)}{Q_1(x)}\right)' = (k_1-1)a_{11}(x-x_1)^{k_1-2} + \cdots + 2a_{1k_1-2}(x-x_1) +$$
$$+ a_{1k_1-1} + k_1(x-x_1)^{k_1-1}\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + (x-x_1)^{k_1}\left(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right)',$$

звідки випливає, що $a_{1k_1-1} = \left(\frac{P(x)}{Q_1(x)}\right)'\Big|_{x=x_1}$. Продовживши описаний процес, отримаємо формулу

$$a_{1k_1-i} = \frac{1}{i!}\left(\frac{P(x)}{Q_1(x)}\right)'\Bigg|_{x=x_1}, \quad i = 0, \ldots, k_1 - 1.$$

Аналогічно обчислюють інші коефіцієнти a_{jk}.

Приклад 8.4.2.

Знайдемо інтеграл $\int \frac{x^3+1}{x^3+5x^2+6x}dx$.

Розв'язування. Поділивши чисельник дробу на знаменник, побачимо, що

$$\frac{x^3+1}{x^3-5x+4} = 1 + \frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}.$$

З (8.20) випливає, що при деяких $A, B, C \in \mathbb{R}$

$$\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x} = \frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Виконаємо описану вище процедуру і переконаємось, що

$$A = \frac{5x^2-6x+1}{(x-2)(x-3)}\Bigg|_{x=0} = \frac{1}{6}, \quad B = \frac{5x^2-6x+1}{x(x-3)}\Bigg|_{x=2} = -\frac{9}{2}, \quad C = \frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)}\Bigg|_{x=3} = \frac{28}{3}.$$

Проінтегруємо тотожність

$$\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} = 1 + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x} - \frac{2}{9}\frac{1}{x-2} + \frac{28}{3}\cdot\frac{1}{x-3}$$

і отримаємо

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx = x + \frac{1}{6}\ln|x| - \frac{2}{9}\ln|x-2| + \frac{28}{3}\ln|x-3| + C, \quad (x \neq 0, 2, 3).$$

Видатний український математик М. В. Остроградський (1801—1862) запропонував метод, який дає змогу значно спростити інтегрування правильного раціонального дробу, звівши його до інтегрування дробу, знаменник якого має тільки прості корені. Викладемо коротко суть цього методу.

Нехай $\frac{P(x)}{Q(x)}$ — правильний раціональний дріб, знаменник якого $Q(x)$ має вигляд (8.19). З (8.20) випливає, що $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ є сумою інтегралів від функцій вигляду

$$\frac{a_1}{x-x_0}+\frac{a_2}{(x-x_0)^2}+\cdots+\frac{a_k}{(x-x_0)^k} \tag{8.26}$$

та

$$\frac{b_1x+c_1}{x^2+px+q}+\frac{b_2x+c_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{b_mx+c_m}{(x^2+px+q)^m} \quad \left(q-\frac{p^2}{4}>0\right). \tag{8.27}$$

Як з'ясовано вище,

$$\int \frac{A}{(x-x_0)^k}dx=-\frac{A}{k-1}\cdot\frac{1}{(x-x_0)^{k-1}},\ k=2,3,\ldots \tag{8.28}$$

Визначимо тепер, який вигляд має інтеграл типу

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}dx \quad \left(m>1,\ q-\frac{p^2}{4}>0\right).$$

Застосуємо заміну $x+\frac{p}{2}=t$, використаємо рівності (8.21)—(8.23) і, повернувшись до змінної x, отримаємо

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}dx=\frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^{m-1}}+\alpha_1\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-1}},$$

де $B_1, C_1, \alpha_1 \in \mathbb{R}$. Аналогічно, якщо $m>2$, то

$$\int \frac{\alpha_1 dx}{(x^2+px+q)^{m-1}}=\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^{m-2}}+\alpha_2\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-2}}$$

тощо. Цей процес продовжимо доти, доки показник степеня тричлена x^2+px+q в інтегралі праворуч не дорівнюватиме одиниці. Усі послідовно виділювані раціональні члени є правильними дробами. Додавши їх і врахувавши, що *сума правильних раціональних дробів є правильним дробом*, побачимо, що існує многочлен $\widetilde{P}(x)$ такий, що $\deg\widetilde{P}<2(m-1)$ і $\alpha\in\mathbb{R}$, для якого виконується співвідношення

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}dx=\frac{\widetilde{P}(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}}+\alpha\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-1}}. \tag{8.29}$$

Якщо k (або m) більше від одиниці, то інтеграли всіх дробів групи (8.26) (або (8.27)), крім першого, перетворюють за формулою (8.28) (або (8.29)).

Об'єднаємо наведені вище міркування і ще раз врахуємо, що сума правильних раціональних дробів є правильним дробом. Тоді зможемо зробити такий висновок: *існують многочлени* $P_1(x)$, $P_2(x)$ *такі, що*

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx, \tag{8.30}$$

де

$$Q_1(x) = (x-x_1)^{k_1-1}\dots(x-x_l)^{k_l-1}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1-1}\dots(x^2+p_nx+q_n)^{m_n-1},$$

$$Q_2(x) = (x-x_1)\dots(x-x_l)(x^2+p_1x+q_1)\dots(x^2+p_nx+q_n),$$

$$\deg P_1 < \deg Q_1, \quad \deg P_2 < \deg Q_2.$$

Формулу (8.30) називають *формулою Остроградського.*

Зазначимо таке: якщо розвинення (8.19) знаменника $Q(x)$ на незвідні множники невідоме, то $Q_1(x)$ та $Q_2(x)$ можна знайти з того, що $Q_1(x)$ — найбільший спільний дільник для $Q(x)$ та $Q'(x)$ (використовуючи, наприклад, відомий з алгебри алгоритм Евкліда), а $Q_2(x) = Q(x)/Q_1(x)$.

Для визначення чисельників P_1 та P_2 також використовують *метод невизначених коефіцієтів.* Диференціюючи (8.30), отримаємо

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right)' + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} \tag{8.31}$$

або

$$\frac{P_1'Q_1 - P_1Q_1'}{Q_1^2} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P}{Q}.$$

Зауважимо, що

$$\frac{P_1'Q_1 - P_1Q_1'}{Q_1^2} = \frac{P_1'Q_2 - P_1\frac{Q_1'Q_2}{Q_1}}{Q_1Q_2} = \frac{P_1'Q_2 - P_1H}{Q},$$

де $H \overset{\text{def}}{=} \frac{Q_1'Q_2}{Q_1}$ — многочлен. Справді, якщо $(x-x_0)^k$ $(k \geq 1)$ належить до Q_1, то $(x-x_0)^{k-1}$ увійде в Q_1', а $(x-x_0)$ — в Q_2. Аналогічний висновок можна зробити і про множник вигляду $(x^2+px+q)^m$, $m \geq 1$. Отже, $Q_1'Q_2$ ділиться на Q_1 без остачі.

Звільнимось від спільного знаменника Q, отримаємо тотожність двох многочленів (степеня $\deg Q - 1$)

$$P_1'Q_2 - P_1H + P_2Q_1 = P.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях і отримаємо систему $\deg Q$ лінійних рівнянь з такою ж кількістю невідомих.

Оскільки можливість розвинення (8.31) визначено для довільного P, то ця система є сумісною за будь-яких вільних членів, а тому має розв'язок, причому єдиний.

Зазначимо, що в разі використання методу Остроградського часто доцільно записувати формулу (8.30) у вигляді

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \Big[\sum_{j=1}^{l} \frac{A_j}{x - x_j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{B_j x + C}{x^2 + p j x + q_j}\Big] dx, \qquad (8.32)$$

оскільки тоді після знаходження невідомих коефіцієнтів у підінтегральній функції її одразу можна проінтегрувати. Невідомі коефіцієнти в (8.32) шукають за описаною вище схемою.

Приклад 8.4.3.

Застосуємо метод Остроградського для обчислення інтеграла

$$\int \frac{4x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 12x + 8}{(x+1)^2(x^2+1)^2} dx.$$

У цьому разі

$$Q_1(x) = Q_2(x) = (x+1)(x^2+1) = x^3 + x^2 + x + 1,$$

тому (див. (8.31))

$$\frac{4x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 12x + 8}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = \left(\frac{ax^2 + bx + c}{x^3 + x^2 + x + 1}\right)' + \frac{dx^2 + ex + f}{x^3 + x^2 + x + 1} =$$

$$= \frac{(2ax+b)(x^3+x^2+x+1) - (ax^2+bx+c)(3x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2(x+1)^2} + \frac{dx^2+ex+f}{(x^2+1)(x+1)},$$

звідки випливає, що

$$(2ax+b)(x^3+x^2+x+1) - (ax^2+bx+c)(3x^2+2x+1) +$$
$$+ (dx^2+ex+f)(x^3+x^2+x+1) = 4x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 12x + 8.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях в обидвох частинах і отримаємо систему рівнянь

$$\begin{array}{l|l} x^5 & d = 0 \\ x^4 & -a + e = 4 \\ x^3 & -2b + e + f = 4 \\ x^2 & a - b - 3c + e + f = 16 \\ x^1 & 2a - 2c + e + f = 12 \\ x^0 & b - c + f = 8, \end{array}$$

яка має єдиний розв'язок

$$a = -1,\ b = 1,\ c = -4,\ d = 0,\ e = 3,\ f = 3.$$

Отже,

$$\int \frac{4x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 12x + 8}{(x+1)^2(x^2+1)^2} dx = -\frac{x^2 - x + 4}{(x+1)(x^2+1)} + 3\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= -\frac{x^2 - x + 4}{(x+1)(x^2+1)} + 3 \operatorname{arctg} x + C.$$

8.5. Інтегрування деяких виразів, що містять радикали

Нагадаємо, що такі функції, як многочлен, степенева, показникова, логарифмічна, тригонометричні та обернені тригонометричні, а також функції, виражені за допомогою скінченної кількості арифметичних операцій та композицій перерахованих, називають *елементарними*.

Як зазначено вище, похідна елементарної функції є елементарною функцією. Обернене твердження неправильне. Існують елементарні функції, що мають первісні, які, однак, не є елементарними функціями. Можна довести, що такими є функції, які називають *інтегральним синусом* $\operatorname{si} x = \int \frac{\sin x}{x} dx$, $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{si} x = 0$, *інтегральним косинусом* $\operatorname{ci} x = \int \frac{\cos x}{x} dx$, $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{ci} x = 0$ та *інтегральним логарифмом* $\operatorname{li} x = \int \frac{dx}{\ln x}$, $\lim\limits_{x\to +0} \operatorname{li} x = 0$.

Також не можна виразити у скінченному вигляді й інтеграли

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad (0 < k < 1), \qquad \int \frac{x^2 dx}{(1-x^2)(1-k^2x^2)}, \quad (0 < k < 1),$$

які називають, відповідно, *еліптичними інтегралами першого та другого роду*.

Про такі функції кажуть, що вони *неінтегровні в скінченному вигляді.*

Як доведено вище, будь-яка дробово-раціональна функція інтегровна в скінченному вигляді. У цьому та наступному параграфі розглянемо інтеграли, кожен з яких за допомогою відповідної заміни можна звести до інтеграла від дробово-раціональної функції, а, отже, виразити в скінченному вигляді.

Під $R(x, y)$ будемо розуміти дробово-раціональну функцію двох змінних, тобто $R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, де P, Q — многочлени.

А. Інтеграли вигляду $\int \mathbf{R}\Big(\mathbf{x}, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\Big)\mathbf{dx}$ $(\mathbf{m} \in \mathbb{N})$

Приймемо $t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$. Тоді

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad ax + b = ct^m x + dt^m;$$

$$(a - ct^m)x = dt^m - b, \quad x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m};$$

$$dx = \frac{dmt^{m-1}(a - ct^m) + mc(dt^m - b)t^{m-1}}{(a - ct^m)^2} dt \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p(t)dt}{(a - ct^m)^2},$$

отже,

$$\int R\Big(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\Big)dx = \int R\Big(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}, t\Big)\frac{p(t)}{(a - ct^m)^2}dt.$$

Оскільки $p(t)$ — многочлен, то права частина останньої рівності є інтегралом від дробово-раціональної функції.

Б. Знаходження інтеграла від диференціального бінома

Інтегралом від диференціального бінома називають інтеграл

$$\mathcal{I} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \int x^m(a+bx^n)^p dx \quad (a,b\in\mathbb{R}; m,n,p\in\mathbb{Q}). \tag{8.33}$$

Цей інтеграл можна виразити у скінченому вигляді у трьох випадках.

А. Нехай $p\in\mathbb{Z}$, а λ — найменше спільне кратне знаменників дробів m та n, тобто $m=\frac{m_1}{\lambda}$, $n=\frac{n_1}{\lambda}$, де $m_1,n_1\in\mathbb{Z}$, $\lambda\in\mathbb{N}$.

Приймемо $t=x^{\frac{1}{\lambda}}$. Тоді $x=t^\lambda$, $dx=\lambda t^{\lambda-1}$, а, отже,

$$\mathcal{I}=\lambda\int t^{m_1}(a+bt^{n_1})t^{\lambda-1}dt.$$

Б. Нехай $\frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$, а ν — знаменник дробу p, тобто $p=\frac{p_1}{\nu}$, де $p_1\in\mathbb{Z}$, $\nu\in\mathbb{N}$.

Приймемо $t=(a+bx^n)^{\frac{1}{\nu}}$. Маємо $a+bx^n=t^\nu$, $x^n=\frac{t^\nu-a}{b}$, $x=\frac{(t^\nu-a)^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$, $dx=\frac{1}{nb^{\frac{1}{n}}}(t^\nu-a)^{\frac{1}{n}-1}\nu t^{\nu-1}dt$.

Отже, за умови, що $b>0$,

$$\mathcal{I}=\int\frac{1}{b^{\frac{m}{n}}}(t^\nu-a)^{\frac{m}{n}}t^{p_1}\frac{1}{nb^{\frac{1}{n}}}(t^\nu-a)^{\frac{1}{n}-1}\nu t^{\nu-1}dt=\frac{\nu}{nb^{\frac{m+1}{n}}}\int t^{p_1+\nu-1}(t^\nu-a)^{\frac{m+1}{n}-1}dt.$$

Випадок $b<0$ розглядають аналогічно.

В. Нехай $\frac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}$, а ν — знаменник дробу p, тобто $p=\frac{p_1}{\nu}$, де $p_1\in\mathbb{Z}$, $\nu\in\mathbb{N}$.

Приймемо $t=(ax^{-n}+b)^{\frac{1}{\nu}}$. Маємо $t^\nu=ax^{-n}+b$, $x^{-n}=\frac{t^\nu-b}{a}$, $x=a^{\frac{1}{n}}(t^\nu-b)^{-\frac{1}{n}}$, $dx=-\frac{a^{\frac{1}{n}}}{n}(t^\nu-b)^{-\frac{1}{n}-1}\nu t^{\nu-1}dt$, $(a+bx^n)=x^n(ax^{-n}+b)=a(t^\nu-b)^{-1}t^\nu$ (якщо $a>0$). Звідси

$$\mathcal{I}=\int a^{\frac{m}{n}}(t^\nu-b)^{-\frac{m}{n}}a^p(t^\nu-b)^{-p}t^{\nu p}\frac{-\nu a^{\frac{1}{n}}}{n}(t^\nu-b)^{-\frac{1}{n}-1}t^{\nu-1}dt=$$

$$=\int\frac{-\nu a^{\frac{m+1}{n}+p}}{n}t^{\nu p+\nu-1}(t^\nu-b)^{-[\frac{m+1}{n}+p+1]}dt=-\frac{\nu a^{\frac{m+1}{n}+p}}{n}\int t^{p_1+\nu-1}(t^\nu-b)^{-[\frac{m+1}{n}+p+1]}dt$$

Випадок $a<0$ розглядають аналогічно.

Отже, *інтеграл* (8.33) *можна виразити в скінченному вигляді, якщо одне з чисел*

$$p,\quad \frac{m+1}{n},\quad \frac{m+1}{n}+p$$

є цілим.

У всіх інших випадках, як довів П. Л. Чебишов, диференціальний біном неінтегровний у скінченному вигляді.

В. Підстановки Ейлера.

Розглянемо питання про обчислення інтеграла

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx. \tag{8.34}$$

Виявляється, що він зводиться до інтеграла від дробово-раціональної функції за допомогою підстановок, які називають, відповідно, першою, другою та третьою *підстановками Ейлера*, а саме:

а) $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm \sqrt{a}x$, якщо $a > 0$;

б) $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$, якщо $c > 0$;

в) $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\lambda)$, якщо $ax^2+bx+c = t(x-\lambda)(x-\mu)$.

Доведемо це:

а) нехай $a > 0$. Приймемо, наприклад,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x.$$

Після піднесення обидвох частин цієї рівності до квадрата і зведення подібних членів отримаємо $bx + c = t^2 - 2\sqrt{a}tx$, так що

$$x = \frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b};$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b} = \frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b};$$

$$dx = \frac{2t(2\sqrt{a}t+b) - 2\sqrt{a}(t^2-c)}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt.$$

Якщо підставити отримані вирази в (8.23), то питання зведеться до інтегрування дробово-раціональної функції від t;

б) нехай $c > 0$. Приймемо, наприклад,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}.$$

Тоді

$$ax^2+bx+c = x^2t^2 + 2\sqrt{c}xt + c;$$

$$ax^2+bx = x^2t^2 + 2\sqrt{c}xt, \quad ax+b = xt^2 + 2\sqrt{c}t;$$

$$x = \frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2};$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2}t + \sqrt{c} = \frac{\sqrt{c}t^2-bt+\sqrt{c}a}{a-t^2};$$

$$dx = \frac{2\sqrt{c}(a-t^2) + (2\sqrt{c}t - b)2t}{(a-t^2)^2}dt = 2\frac{\sqrt{c}t^2 - bt + \sqrt{c}a}{(a-t^2)^2}.$$

Підставимо отримані вирази в (8.23) і отримаємо інтеграл від дробово-раціональної функції змінної t;

в) нехай $ax^2 + bx + c = a(x-\lambda)(x-\mu)$. Приймемо

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\lambda).$$

Маємо

$$a(x-\lambda)(x-\mu) = t^2(x-\lambda)^2; \quad a(x-\mu) = t^2(x-\lambda);$$

$$(a-t^2)x = a\mu - \lambda t^2; \quad x = \frac{\lambda t^2 - a\mu}{t^2 - a};$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t\Big(\frac{\lambda t^2 - a\mu}{t^2-a} - \lambda\Big) = \frac{a(\lambda-\mu)t}{t^2-a};$$

$$dx = \frac{2\lambda t(t^2-a) - 2t(\lambda t^2 - a\mu)}{(t^2-a)^2}dt = \frac{2a(\mu-\lambda)t}{(t^2-a)^2}dt.$$

Для раціоналізації розглядуваного підінтегрального виразу достатньо підставити праві частини виписаних рівностей у (8.23).

Висновок. *Інтеграли типу* (8.34) *завжди відшукують у скінченному вигляді.*

8.6. Інтегрування деяких тригонометричних функцій

Розглянемо інтеграли вигляду

$$\int R(\sin x, \cos x)dx. \tag{8.35}$$

Використаємо *універсальну тригонометричну підстановку*

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2},\ x \in (-\pi, \pi).$$

Маємо $\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $x = 2\operatorname{arctg} t$; $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, тому $R(\sin x, \cos x)dx = R\Big(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\Big)\frac{2dt}{1+t^2}$.

Отже, *інтеграли типу* (8.35) *завжди раціоналізовні, а тому їх відшукують у скінченному вигляді.*

Зауваження 8.6.1. Використання універсальної тригонометричної підстановки не завжди доцільне, оскільки воно може призвести до громіздких обчислень. Однак у деяких випадках інтеграл (8.35) можна звести до інтеграла від дробово-раціональної функції за допомогою простіших підстановок, а саме:

а) якщо $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то виконуємо заміну

$$t = \cos x;$$

б) якщо $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то виконуємо заміну

$$t = \sin x;$$

в) якщо $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то виконуємо заміну

$$t = \operatorname{tg} x \text{ або } t = \operatorname{ctg} x.$$

Приклад 8.6.1.

Обчислимо інтеграл $I = \int \frac{dx}{\cos x(\sin x + \cos x)}$.

Маємо випадок в, бо функція $R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{\cos x(\sin x + \cos x)} = R(-\sin x, -\cos x)$. Тому виконавши заміну $t = \operatorname{tg} x$, отримуємо $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{1}{1+t^2}dt$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, а, отже,

$$I = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + C = \ln|1+\operatorname{tg} x| + C.$$

Розділ 9

Визначений інтеграл

9.1. Поняття визначеного інтеграла

Означення 9.1.1. *Розбиттям* τ відрізка $[a,b]$ $(a < b)$ називають будь-яку скінченну систему його точок x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, таку, що

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

У цьому разі пишемо $\tau = \{x_i\}_{i=0}^n$. Кожен з відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, називають *відрізком розбиття* τ.

Величину

$$|\tau| = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i,$$

де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$, називають *діаметром розбиття* τ.

Означення 9.1.2. Кажуть, що маємо *розбиття* $(\tau, \overline{\xi})$ *з вибраними точками* відрізка $[a,b]$, якщо τ — розбиття відрізка $[a,b]$ і в кожному з відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ цього розбиття вибрано точку $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Набір $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ позначають одним символом $\overline{\xi}$.

Означення 9.1.3. Нехай $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ — деяка функція, а $(\tau, \overline{\xi})$ — розбиття з вибраними точками відрізка $[a,b]$. Суму

$$\sigma(f; (\tau, \overline{\xi})) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \tag{9.1}$$

називають *інтегральною сумою* (або *сумою Рімана*) функції f, що відповідає розбиттю $(\tau, \overline{\xi})$ з вибраними точками відрізка $[a,b]$.

Зауваження 9.1.1. Геометрично у випадку, коли функція f невід'ємна (рис. 9.1), кожен доданок інтегральної суми (9.1) дорівнює площі прямокутника з основою довжини Δx_i і висотою $f(\xi_i)$, а вся сума — площі східчастої фігури $AA_1B_1A_2B_2\ldots A_iB_i\ldots A_nB_nB$, утвореної об'єднанням зазначених прямокутників.

Означення 9.1.4. Число $I \in \mathbb{R}$ називають границею інтегральної суми (9.1) при $|\tau| \to 0$ і пишуть

$$I = \lim_{|\tau|\to 0} \sigma(f;(\tau,\overline{\xi})), \tag{9.2}$$

якщо

$$(\forall\varepsilon > 0)\ (\exists\delta > 0)\ (\forall\tau : |\tau| < \delta)\ (\forall\overline{\xi})\quad \{|\sigma(f;(\tau,\overline{\xi})) - I| < \varepsilon\}.$$

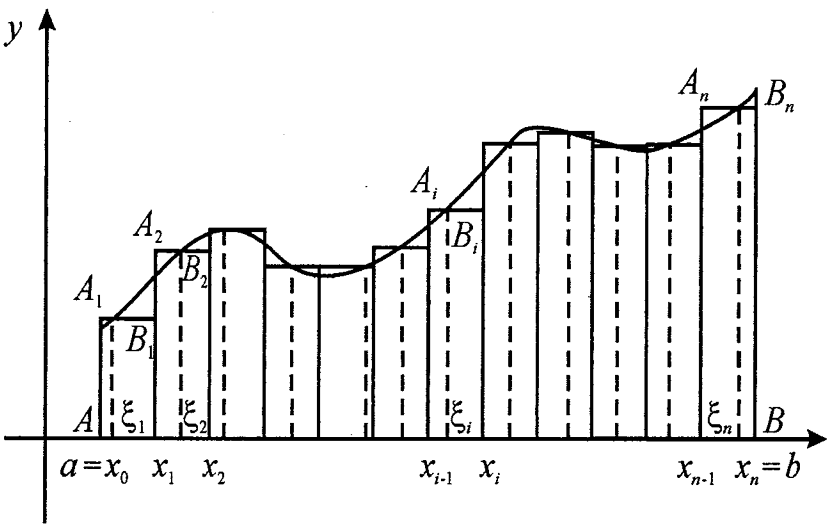


Рис. 9.1

Вправа 9.1.1. *Число* $I = \lim\limits_{|\tau|\to 0} \sigma(f;(\tau,\overline{\xi}))$ *тоді і лише тоді, коли для будь-якої послідовності* $(\tau^{(k)},\overline{\xi}^{(k)})$ *розбиттів з вибраними точками виконується умова*

$$(\lim_{k\to\infty} |\tau^{(k)}| = 0) \Rightarrow \left(\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n_k} f(\xi_i^{(k)})\Delta x_i^k = I\right),$$

де $\tau^{(k)} = \{x_i^{(k)}\}_{i=0}^{n_k}$; $\xi_i^{(k)} \in [x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k)}], i = 1,\ldots,n_k$; $\overline{\xi}^{(k)} = (\xi_1^{(k)},\ldots,\xi_{n_k}^{(k)})$, $k \in \mathbb{N}$.

Означення 9.1.5. Функцію $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ називають *інтегровною за Ріманом* на $[a,b]$ і пишуть $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, якщо для неї існує границя (9.2). Число I в цьому разі називають *інтегралом Рімана* (або *визначеним інтегралом*) функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ і позначають символом $\int\limits_a^b f(x)dx$, числа a, b — *нижньою* та *верхньою межами інтегрування*, відповідно, f — *підінтегральною функцією*, $f(x)dx$ — *підінтегральним виразом*, а x — *змінною інтегрування*.

Отже,

$$\int\limits_a^b f(x)dx \overset{\text{def}}{=\!=} \lim_{|\tau|\to 0} \sigma(f;(\tau,\overline{\xi})). \tag{9.3}$$

Зауваження 9.1.2. Для невід'ємних функцій інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ є границею площ відповідних східчастих фігур (див. зауваження 9.1.1). Тому, на підставі інтуїтивного уявлення про площу, природно прийняти цю границю за площу криволінійної трапеції

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}.$$

Для того, щоб обґрунтувати коректність цього означення, потрібно уточнити саме поняття площі фігури. Це зробимо згодом.

Зауваження 9.1.3. Уведене в означенні 9.1.4 поняття границі інтегральних сум є новим, воно відмінне і від поняття границі послідовності, і від поняття границі функції.

9.2. Обмеженість інтегровної функції

Теорема 9.2.1. *Якщо $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, то f обмежена на $[a,b]$.*

Доведення. Нехай f необмежена на $[a,b]$, а $\sigma_\tau = \sigma(f;(\tau,\overline{\xi})) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ — її деяка інтегральна сума, що відповідає розбиттю τ. Оскільки f необмежена на $[a,b]$, то вона необмежена хоча б на одному з відрізків розбиття, наприклад, на $[x_{i_0-1}, x_{i_0}]$. Маємо

$$\sigma_\tau = f(\xi_{i_0})\Delta x_{i_0} + \sum{}' f(\xi_i)\Delta x_i \overset{\text{def}}{=\!=} f(\xi_{i_0})\Delta x_{i_0} + A,$$

де сума $\sum'$ поширена на всі $i \ne i_0$, а всі ξ_i, які в неї входять, довільні, але фіксовані. Оскільки функція f необмежена на $[x_{i_0-1}, x_{i_0}]$, то для довільного $M > 0$ можна вибрати точку ξ_{i_0} так, щоб

$$|\sigma_\tau| \ge |f(\xi_{i_0})|\Delta x_{i_0} - |A| > M,$$

тому $f \notin \mathcal{R}_{[a,b]}$. □

Зауваження 9.2.1. Твердження теореми еквівалентне такому твердженню:

$$(f \text{ необмежена на } [a,b]) \Rightarrow (f \notin \mathcal{R}_{[a,b]}).$$

Зауваження 9.2.2. Обмеженість функції є лише необхідною умовою інтегровності, але не є достаньою. Тобто з обмеженості функції не випливає її інтегровність.

Вправа 9.2.1. *Довести, що функція Діріхле*

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, \; x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}; \\ 1, \; x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

не є інтегровною за Ріманом на $[0,1]$.

9.3. Суми Дарбу

Тут уважатимемо, що $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ — обмежена функція.

Означення 9.3.1. Нехай $\tau = \{x_i\}_{i=0}^n$ — деяке розбиття відрізка $[a,b]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Числа

$$s = s(f,\tau) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \quad \text{та} \quad S = S(f,\tau) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

називають, відповідно, *нижньою* та *верхньою сумами Дарбу* функції f, що відповідають розбиттю τ.

Зауваження 9.3.1. Якщо $\tau = \{x_i\}_{i=0}^n$ — фіксоване розбиття відрізка $[a,b]$, $(\tau, \overline{\xi})$ — деяке породжене ним розбиття з вибраними точками, а $\sigma = \sigma(f; (\tau, \overline{\xi}))$ — відповідна інтегральна сума, то зрозуміло, що

$$s \le \sigma \le S. \tag{9.4}$$

Крім того,

$$s = \inf_{\overline{\xi}} \sigma, \quad S = \sup_{\overline{\xi}} \sigma, \tag{9.5}$$

де верхня і нижня точні межі взяті за всеможливими $\overline{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ такими, що $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Вправа 9.3.1. *З'ясувати геометричний зміст верхньої та нижньої сум Дарбу у випадку, коли* $f \in C_{[a,b]}$ *— невід'ємна функція.*

Означення 9.3.2. Розбиття τ_2 називають *подрібненням* розбиття τ_1, якщо $\tau_1 \subset \tau_2$ (тобто кожна точка розбиття τ_1 є точкою розбиття τ_2).

Теорема 9.3.1. *Якщо τ_2 — подрібнення розбиття τ_1, то*

$$s(f,\tau_1) \le s(f,\tau_2), \quad S(f,\tau_1) \ge S(f,\tau_2). \tag{9.6}$$

Доведення. Для доведення досить обмежитися випадком, коли τ_2 містить на одну точку більше, ніж τ_1. Позначимо цю точку через x' і припустимо, що $x_{k-1} < x' < x_k$, де $\{x_i\}_{i=1}^n = \tau_1$. Далі нехай $M \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sup\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$, $M_1 \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sup\limits_{x\in[x_{k-1},x']} f(x)$, $M_2 \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sup\limits_{x\in[x',x_k]} f(x)$ (так що $M_1 \le M$, $M_2 \le M$). Маємо

$$S(f,\tau_1) - S(f,\tau_2) = M(x_k - x_{k-1}) - [M_1(x' - x_{k-1}) + \\ + M_2(x_k - x')] \ge M(x_k - x_{k-1}) - M[(x' - x_{k-1}) + (x_k - x')] = 0.$$

Другу з нерівностей (9.6) доведено, а доведення першої аналогічне. □

Теорема 9.3.2. *Будь-яка нижня сума Дарбу не перевищує будь-якої верхньої суми Дарбу.*

Доведення. Нехай τ_1, τ_2 — два розбиття відрізка $[a,b]$, а $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$. З (9.4) і теореми 9.3.1 випливає, що

$$s(f,\tau_1) \le s(f,\tau) \le S(f,\tau) \le S(f,\tau_2).$$

□

Зауваження 9.3.2. Множина нижніх сум Дарбу обмеженої функції обмежена зверху, а множина її верхніх сум обмежена знизу, тому існують (скінченні)

$$I_* \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sup_\tau s(f,\tau), \quad I^* \stackrel{\text{def}}{=\!=} \inf_\tau S(f,\tau),$$

де верхню і нижню точні межі знаходять за всеможливими розбиттями відрізка $[a,b]$.

Означення 9.3.3. Числа I_*, I^* називають, відповідно, нижнім та верхнім інтегралами Дарбу функції f на відрізку $[a,b]$.

Зрозуміло, що для будь-якого розбиття τ

$$s(f,\tau) \le I_* \le I^* \le S(f,\tau). \tag{9.7}$$

9.4. Критерій інтегровності обмеженої функції

Теорема 9.4.1. *Обмежена функція* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *інтегровна за Ріманом на відрізку* $[a,b]$ *тоді і лише тоді, коли*

$$\lim_{|\tau|\to 0}[S(f,\tau) - s(f,\tau)] = 0. \tag{9.8}$$

Доведення. Передусім, зазначимо, що умова (9.8) означає таке

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)\ (\forall\tau : |\tau| < \delta)\{S(f,\tau) - s(f,\tau) < \varepsilon\}.$$

Тому якщо $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, $\int\limits_a^b f(x)dx = I$, а $(\tau,\overline{\xi})$ — довільне розбиття з вибраними точками відрізка $[a,b]$, то

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)\ (\forall\tau : |\tau| < \delta)\ \ \left\{|\sigma(f,(\tau,\overline{\xi})) - I| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

З останньої нерівності, яку можна переписати у вигляді $I - \frac{\varepsilon}{2} < \sigma(f;(\tau,\overline{\xi})) < I + \frac{\varepsilon}{2}$, або з урахуванням (9.5)

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < S(f,\tau) \le I + \frac{\varepsilon}{2}, \quad I - \frac{\varepsilon}{2} \le s(f,\tau) < I + \frac{\varepsilon}{2},$$

маємо $0 < S(f,\tau) - s(f,\tau) < \varepsilon$.

Навпаки, нехай виконується (9.8). Оскільки (див. (9.7)) $s(f,\tau)\le I_*\le I^*\le S(f,\tau)$, то $I_* = I^* \stackrel{\text{def}}{=} I$. Отже,

$$s(f,\tau) \le I \le S(f,\tau).$$

Крім того, з огляду на (9.4), для будь-якого розбиття $(\tau,\overline{\xi})$ з вибраними точками маємо

$$s(f,\tau) \le \sigma(f;(\tau,\overline{\xi})) \le S(f,\tau).$$

Із двох останніх нерівностей випливає, що $|\sigma(f;(\tau,\overline{\xi})) - I| \le S(f,\tau) - s(f,\tau)$, тому

$$I = \lim_{|\tau|\to 0}\sigma(f;(\tau,\overline{\xi})) \ = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

□

Зауваження 9.4.1. Теорему 9.4.1 можна записати дещо по-іншому, а саме:

$$\left(f \in \mathcal{R}_{[a,b]}\right)\Leftrightarrow \left((\forall\varepsilon > 0)(\exists\tau)\ \{S(f,\tau) - s(f,\tau) < \varepsilon\}\right).$$

Зауваження 9.4.2. Нехай

$$\omega_i = M_i - m_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad i = 1,\dots,n.$$

Число ω_i називають *коливанням* функції f на відрізку $[x_{i-1}, x_i]$. Неважко зауважити, що

$$\omega_i = \sup_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]} |f(x') - f(x'')|,$$

а умову існування визначеного інтеграла можна переформулювати так:

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0. \tag{9.9}$$

Вправа 9.4.1. *(критерій інтегровності в термінах інтегралів Дарбу)*

$$(f \in \mathcal{R}_{[a,b]}) \Leftrightarrow (I^* = I_*).$$

Вправа 9.4.2. *Проаналізувати доведення теореми 9.4.1 і довести, що $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ тоді і лише тоді, коли існує $I \in \mathbb{R}$ таке, що*

$$\lim_{|\tau|\to 0} S(f,\tau) = \lim_{|\tau|\to 0} s(f,\tau) = I.$$

У цьому разі $\int\limits_a^b f(x)dx = I$.

Приклад 9.4.1.

(Приклад обмеженої неінтегровної функції). Нехай $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ — *функція Діріхле*:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Оскільки будь-який відрізок містить як раціональні, так і ірраціональні точки, то для кожного розбиття $\tau = \{x_i\}_{i=0}^n$ відрізка $[0,1]$ $\omega_i = 1$ $(i = 1,\dots,n)$, отже, $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 1$. Як бачимо, умова (9.9) не виконується, тому $f \notin \mathcal{R}_{[0,1]}$.

9.5. Класи інтегровних функцій

Теорема 9.5.1. *Якщо $f \in C_{[a,b]}$, то $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$.*

Доведення. Нехай $\tau = \{x_i\}_{i=0}^n$ — розбиття відрізка $[a,b]$. Згідно з теоремою Кантора,

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)\ (\forall\tau : |\tau| < \delta)(\forall i \in \{1,\dots,n\}) \left\{\omega_i < \frac{\varepsilon}{b-a}\right\}.$$

З останньої нерівності випливає, що $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon$. Оскільки ε може бути як завгодно малим, то виконується умова (9.9), а, отже, $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. □

Вправа 9.5.1. *Якщо обмежена функція $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ має лише скінченну кількість точок розриву, то $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$.*

Теорема 9.5.2. *Функція, визначена і монотонна на відрізку $[a,b]$, інтегровна на цьому відрізку.*

Доведення. Нехай f монотонна (наприклад, неспадна) на $[a,b]$. Тоді для кожного $x \in [a,b]$ маємо
$$f(a) \le f(x) \le f(b).$$
Отже, f обмежена на $[a,b]$. Зауважимо, що для будь-якого розбиття $\tau = \{x_i\}_{i=0}^n$ її коливання ω_i на $[x_{i-1}, x_i]$ дорівнює $f(x_i) - f(x_{i-1})$.

Задамо довільне $\varepsilon > 0$ і приймемо $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Тоді якщо $\Delta x_i < \delta$ $(i = 1, \dots, n)$, то
$$\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \delta \sum_{i=1}^n \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big) = \delta\big(f(b) - f(a)\big) = \varepsilon,$$
звідки й випливає інтегровність функції f. □

9.6. Властивості визначеного інтеграла

Теорема 9.6.1 (адитивність визначеного інтеграла). *Нехай $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ — деяка функція, $a < c < b$. Для того, щоб $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, необхідно і досить, щоб $f \in \mathcal{R}_{[a,c]}$ та $f \in \mathcal{R}_{[c,b]}$, причому*
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{9.10}$$

Доведення. ($\Rightarrow$)Нехай τ_1, τ_2 — розбиття проміжків $[a,c]$ та $[c,b]$, відповідно. Тоді $\tau = \tau_1 \cup \tau_2 \overset{\text{def}}{=\!=} \{x_i\}_{i=0}^n$ — розбиття проміжку $[a,b]$, причому існує $k \in \mathbb{N}$ $(0 < k < n)$ таке, що $x_k = c$. Зрозуміло, що
$$S(f,\tau) - s(f,\tau) = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^k \omega_i \Delta x_i + \sum_{i=k+1}^n \omega_i \Delta x_i =$$
$$= [S(f,\tau_1) - s(f,\tau_1)] + [S(f,\tau_2) - s(f,\tau_2)] \tag{9.11}$$
(тут, як звичайно, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, а ω_i — коливання функції $f(x)$ на $[x_{i-1}, x_i]$). Оскільки вираз ліворуч прямує до нуля при $|\tau| \to 0$, а вирази в квадратичних дужках праворуч невід'ємні, то кожен з них прямує до нуля при $|\tau_1| \to 0$ та, відповідно, $|\tau_2| \to 0$, тому f є інтегровною як на $[a,c]$, так і на $[c,b]$.

Далі нехай $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$. Тоді

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\triangle x_i + \sum_{i=k+1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i.$$

Перейдемо в цій рівності до границі при $|\tau| \to 0$ (границя ліворуч існує за умовою, границі праворуч – за доведеним) і отримаємо (9.10).
($\Leftarrow$)Нехай f інтегровна на $[a, c]$ та на $[c, b]$, а τ — довільне розбиття проміжку $[a, b]$. Якщо обмежитись розбиттями, які містять точку c, то рівність

$$\lim_{|\tau|\to 0} [S(f, \tau) - s(f, \tau)] = 0$$

випливає з (9.11).

Якщо ж $c \notin \tau$, то розглянемо розбиття $\tau \cup \{c\} \stackrel{\text{def}}{=} \{x_i\}_{i=0}^{n}$, де $a = x_0 < \dots < x_k = c < \dots < x_n = b$. Крім того, приймемо $\tau_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{x_i\}_{i=0}^{k}$, $\tau_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{x_i\}_{i=k}^{n}$. Очевидно, що

$$S(f, \tau) - s(f, \tau) = \sum_{i=1}^{k-1} \omega_i \triangle x_i + \sum_{i=k+2}^{n} \omega_i \triangle x_i + \omega(x_{k+1} - x_{k-1}), \tag{9.12}$$

де ω — коливання функції $f(x)$ на $[x_{k-1}, x_{k+1}]$. Однак ця функція є обмеженою:

$$(\exists M > 0)(\forall x \in [a, b])\{|f(x)| \le M\},$$

тому $\omega \le 2M$. Крім цього,

$$\sum_{i=1}^{k-1} \omega_i \triangle x_i \le S(f, \tau_1) - s(f, \tau_1), \qquad \sum_{i=k+2}^{n} \omega_i \triangle x_i \le S(f, \tau_2) - s(f, \tau_2).$$

Звідси і з (9.12) випливає, що

$$\begin{aligned} S(f, \tau) - s(f, \tau) &\le (S(f, \tau_1) - s(f, \tau_1)) + \\ &+ (S(f, \tau_2) - s(f, \tau_2)) + 2M(x_{k+1} - x_{k-1}). \end{aligned} \tag{9.13}$$

Припустимо тепер, що $\varepsilon > 0$. З інтегровності функції f на $[a, c]$ та на $[c, b]$ випливає, що

$$(\exists \delta_i > 0)\ (\forall \tau_i : |\tau_i| < \delta_i) \quad \left\{S(f, \tau_i) - s(f, \tau_i) < \frac{\varepsilon}{3}\right\},$$

де $i = 1, 2$. Приймемо $\delta = \min\left(\delta_1, \delta_2, \frac{\varepsilon}{6M}\right)$. Тому якщо $|\tau| < \delta$, то $S(f, \tau) - s(f, \tau) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, і звідси маємо $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. □

Теорема 9.6.2 (лінійність інтеграла). *Нехай* $f, g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, $k \in \mathbb{R}$. *Тоді*

а) $(f+g) \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, *причому* $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$;

б) $kf \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, *причому* $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$.

Доведення. Нехай $(\tau, \overline{\xi})$ — довільне розбиття з вибраними точками відрізка $[a,b]$. Утворивши відповідні інтегральні суми, матимемо

$$\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i.$$

Оскільки за умовою обидві границі праворуч при $|\tau| \to 0$ існують, то існує й границя ліворуч, тобто $(f \pm g) \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. Перейшовши в попередній рівності до згаданої границі, одержимо потрібне співвідношення. Доведення твердження *б* аналогічне до попереднього. □

Теорема 9.6.3 (монотонність інтеграла). *Нехай* $f, g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ *і* $(\forall x \in [a,b])$ $\{f(x) \le g(x)\}$. *Тоді*

$$\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx. \tag{9.14}$$

Доведення. Якщо $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ — невід'ємна функція, то всі відповідні їй інтегральні суми невід'ємні, а, отже, $\int\limits_a^b f(x)dx \ge 0$. Застосувавши цей факт до різниці $g(x) - f(x)$ і використавши перше твердження теореми 9.6.2, переконуємось у правильності нерівності (9.14). □

Зауваження 9.6.1. Нехай $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. Тоді $|f| \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ і має місце нерівність

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx. \tag{9.15}$$

Справді, для будь-яких $x', x'' \in [a,b]$ виконується

$$\big||f(x')| - |f(x'')|\big| \le |f(x') - f(x'')|.$$

Тому якщо $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ — розбиття відрізка $[a,b]$, а ω_i, ω_i^* — коливання функції f та, відповідно, $|f|$ на $[x_{i-1}, x_i]$, то $0 \le \omega_i^* \le \omega_i$, а, отже, $0 \le \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i^* \Delta x_i \le \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i$. Оскільки $\lim\limits_{|\tau| \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0$, то й $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i^* \Delta x_i = 0$, тобто $|f| \in \mathcal{R}_{[a,b]}$.

Далі якщо $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$, то

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|\Delta x_i.$$

Перейшовши в цій нерівності до границі при $|\tau| \to 0$, отримаємо (9.15).

Теорема 9.6.4 (про середнє значення). *Нехай $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ і для всіх $x \in [a,b]$ виконується $m \leq f(x) \leq M$. Тоді існує $\mu \in [m, M]$ таке, що*

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a). \tag{9.16}$$

Доведення. Оскільки $m \leq f(x) \leq M$, то з огляду на теорему 9.6.3

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx,$$

отже,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a);$$

$$m \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Число $\mu = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx$ є шуканим. □

Зауваження 9.6.2. Якщо $f \in C_{[a,b]}$, то існує $c \in [a,b]$ таке, що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a). \tag{9.17}$$

Справді, умови теореми 9.6.4 виконуються, якщо прийняти за m та M, відповідно, найменше та найбільше значення функції f, які існують згідно з теоремою Вейєрштрасса. Проте в цьому разі з огляду на теорему Коші про проміжне значення

$$(\forall \mu \in [m, M])\ (\exists c \in [a,b])\ \{f(c) = \mu\},$$

тому (9.17) випливає безпосередньо з (9.16).

9.7. Інтеграл по орієнтованому проміжку

Досі, коли йшлося про проміжок $[a, b]$ або інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, ми мали на увазі, що $a < b$. Виявляється, що цього обмеження можна уникнути.

Означення 9.7.1. *Орієнтованим проміжком* $[a, b]$ (де може бути $a < b$ або $a > b$) називають множину $\{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x \leq b\}$ або, відповідно, $\{x \in \mathbb{R} \ : \ a \geq x \geq b\}$, елементи якої розташовані від a до b, тобто в порядку зростання, якщо $a < b$, або спадання, якщо $a > b$.

Зауваження 9.7.1. Проміжки $[a, b]$ та $[b, a]$ збігаються як числові множини, однак відрізняються за напрямом.

Зауваження 9.7.2. Можна сказати, що означення 9.1.5 визначеного інтеграла стосується орієнтованого проміжку $[a, b]$ лише для випадку, коли $a < b$.

Означення 9.7.2. Нехай $a \geq b$. Тоді

а) $\int\limits_a^b f(x)dx \overset{\text{def}}{=\!=} -\int\limits_b^a f(x)dx$; б) $\int\limits_a^a f(x)dx \overset{\text{def}}{=\!=} 0$.

Теорема 9.7.1. *Нехай $a, b, c \in \mathbb{R}$. Функція f інтегровна в найбільшому з проміжків $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$ тоді і лише тоді, коли вона інтегровна в двох інших з них. У цьому разі справджується рівність*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx, \tag{9.18}$$

яким би не було взаємне розташування точок a, b та c.

Доведення. Справджуваність цієї теореми випливає безпосередньо з теореми 9.6.1, оскільки всеможливі способи розташування точок a, b та c зводяться до випадку, коли $a < c < b$. Справді, нехай, наприклад, $b < a < c$ і $f \in \mathcal{R}_{[b,c]}$. Тоді за згаданою теоремою f інтегровна на $[b, a]$ (або, що еквівалентно, на $[a, b]$) та на $[a, c]$

$$\int\limits_b^c f(x)dx = \int\limits_b^a f(x)dx + \int\limits_a^c f(x)dx,$$

тобто

$$-\int\limits_c^b f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^c f(x)dx.$$

Звідси випливає (9.18). □

Вправа 9.7.1. 1. *Нехай* $f, g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. *Довести, що* $f \cdot g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$.

Вказівка. Доведіть таке: якщо $\omega_i(f)$ *та* $\omega_i(g)$ *— коливання функцій* f *та* g *на деякому проміжку* $[x_{i-1}, x_i] \subset [a,b]$, *то*

$$\omega_i(fg) \leq \sup_{x\in[a,b]} |g(x)| \cdot \omega_i(f) + \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \cdot \omega_i(g).$$

2. *Нехай* $g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ *і* $\inf\limits_{x\in[a,b]} |g(x)| \stackrel{\text{def}}{=} m > 0$. *Довести, що* $\frac{1}{g} \in \mathcal{R}_{[a,b]}$.

Вказівка. Доведіть, що $\omega_i\left(\frac{1}{f}\right) \leq \frac{1}{m^2}\omega_i(f)$.

3. *Нехай* $f, g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ *та* $\inf\limits_{x\in[a,b]} |g(x)| > 0$. *Довести, що* $\frac{f}{g} \in \mathcal{R}_{[a,b]}$.

4. *Нехай* $f \in C_{[a,b]}$ *— невід'ємна функція,* $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$. *Довести, що* $(\forall x \in [a,b])$ $\{f(x) = 0\}$.

5. *Довести узагальнену теорему про середнє значення, тобто таке твердження: нехай* $f, g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, $m \leq f(x) \leq M$, $(\forall x \in [a,b])$ $\{g(x) \geq 0\}$. *Тоді існує* $\mu \in [m, M]$ *таке, що* $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int\limits_a^b g(x)dx$. *Зокрема, якщо* $f \in C_{[a,b]}$, *то існує* $c \in [a,b]$ *таке, що* $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int\limits_a^b g(x)dx$.

6. *Сформулювати і довести аналоги основних тверджень цього параграфа для інтегралів за орієнтованим проміжком* $[a,b]$, *де* $a > b$.

9.8. Зв'язок між визначеним та невизначеним інтегралами

Нехай функція f інтегровна на проміжку $[a,b]$ ($a < b$ або $a > b$), а, отже, і на проміжку $[a,x]$, де $x \in [a,b]$. Приймемо

$$\Phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_a^x f(t)dt. \tag{9.19}$$

Тут змінну інтегрування позначено через t, щоб відрізнити її від верхньої межі інтегрування x. Зрозуміло, що права частина (9.19) не зміниться, якщо замість t використовуватимемо якусь іншу букву (крім x). Тому t часто називають *"німою" змінною.*

Теорема 9.8.1. *Якщо* $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, *то* $\Phi \in C_{[a,b]}$.

Доведення. Надамо змінній x приросту $\Delta x = h$ такого, що $x + h \in [a, b]$. Використаємо адитивність інтеграла та теорему про середнє значення і побачимо, що

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \int\limits_a^{x+h} f(t)dt - \int\limits_a^{x} f(t)dt = \int\limits_x^{x+h} f(t)dt = \mu h, \tag{9.20}$$

де число μ є між нижньою та верхньою точними межами функції $f(x)$ на $[x, x+h]$. Із (9.20) випливає $\Phi(x+h) - \Phi(x) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$, що й доводить неперервність функції Φ. $\square$

Теорема 9.8.2. *Якщо* $f \in C_{[a,b]}$, *то* $\Phi \in C^1_{[a,b]}$ *і* $\Phi'(x) = f(x)$, $x \in [a, b]$.

Доведення. Як при доведенні співвідношення (9.20), враховуючи зауваження 9.6.2, бачимо: існує $\theta \in (0, 1)$ таке, що

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = f(x + \theta h).$$

Переходячи у цьому співвідношення до границі при $h \to 0$ і враховуючи, що з огляду на неперервність функції f маємо $\lim\limits_{h\to o} f(x + \theta h) = f(x)$, переконуємось у справджуваності теореми. $\square$

Зауваження 9.8.1. Для функції $f \in C_{[a,b]}$ завжди існує первісна.

Справді, прикладом такої первісної є визначений інтеграл (9.19) зі змінною верхньою межею.

Теорема 9.8.3 (основна теорема інтегрального числення). *Нехай f — неперервна на відрізку $[a, b]$, а F — її первісна на цьому відрізку. Тоді*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{9.21}$$

Цю формулу називають *формулою Ньютона-Лейбніца.*

Доведення. Приймемо $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$. Оскільки $\Phi(x)$ — первісна для $f(x)$ (див. теорему 9.8.2), то існує $C \in \mathbb{R}$ таке, що $\Phi(x) = F(x) + C$. Підставимо в цю рівність $x = a$ і врахуємо, що $\Phi(a) = 0$, тоді отримаємо

$$0 = \Phi(a) = F(a) + C,$$

звідси $C = -F(a)$.

Отже, $\Phi(x) = F(x) - F(a)$. Зокрема, при $x = b$ отримуємо

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

□

Зауваження 9.8.2. Праву частину рівності (9.21) позначають $F(x)\big|_a^b$:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Приклад 9.8.1.

1) $\int\limits_a^b \cos x dx = \sin x\big|_a^b = \sin b - \sin a$;

2) $\int\limits_a^b x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\big|_a^b = \frac{b^{\mu+1}-a^{\mu+1}}{\mu+1}$ $(\mu \neq -1, a, b > 0)$;

3) $\int\limits_a^b \frac{dx}{x} = \ln x\big|_a^b = \ln b - \ln a = \ln\frac{b}{a}$ $(a, b > 0)$.

Теорема 9.8.4 (про заміну змінних у визначеному інтегралі). *Нехай*

а) $f \in C_{[a,b]}$;

б) $\varphi \in C^1_{[\alpha,\beta]}$;

в) $R(\varphi) \overset{\text{def}}{=} \{\varphi(t) \ : \ t \in [\alpha, \beta]\} \subset [a, b]$;

г) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Тоді

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{9.22}$$

Доведення. Оскільки підінтегральні функції ліворуч і праворуч неперервні, то кожна з них має первісну. Припустимо, що $F(x)$ — одна з первісних для $f(x)$. Тоді за теоремою 8.3.1, $\Phi(t) \overset{\text{def}}{=} F(\varphi(t))$ — первісна для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Тому згідно з (9.21)

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a);$$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\Phi(\alpha)) = F(b) - F(a),$$

звідки й випливає (9.22). □

Приклад 9.8.2.

1) $\int\limits_0^2 e^{x^2}xdx = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 e^{x^2}dx^2 = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 e^y dy = \frac{1}{2}e^y\big|_0^4 = \frac{1}{2}(e^4-1)$;

2) $\int\limits_0^{\sqrt{\pi}} x\sin x^2 dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{\pi}} \sin x^2 dx^2 = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\sin y dy = -\frac{1}{2}\cos y\big|_0^{\pi} = 1$;

3) $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}(t+\frac{\sin 2t}{2})\big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

Теорема 9.8.5. *Якщо* $u, v \in C^1_{[a,b]}$, *то*

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)dx. \tag{9.23}$$

Цю формулу переважно записують у скороченому вигляді

$$\int\limits_a^b udv = u\cdot v\big|_a^b - \int\limits_a^b vu'du$$

і називають *формулою інтегрування* частинами у визначеному інтегралі.

Доведення. Оскільки всі підінтегральні функції, які фігурують у співвідношенні (9.23), є неперервними, то обидві сторони співвідношення мають зміст.

Далі, за правилом диферецірування добутку функцій, маємо

$$\big(u(x)v(x)\big)' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x).$$

Використавши формулу Ньютона-Лейбніца і лінійність інтеграла, отримаємо

$$u(x)v(x)\big|_a^b = \int\limits_a^b u'(x)v(x)dx + \int\limits_a^b v'(x)u(x)dx.$$

□

Приклад 9.8.3.

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\, d\sin x = x\sin x\big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx = \frac{\pi}{2} + x\cos x\big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$;

2) $\int\limits_0^1 xe^x dx = \int\limits_0^1 x\, de^x = xe^x\big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^x dx = e - e^x\big|_0^1 = 1$;

3) $\int\limits_0^2 \ln x dx = x\ln x\big|_1^2 - \int\limits_1^2 x\cdot\frac{dx}{x} = 2\ln 2 - x\big|_1^2 = \ln 4 - 1 = \ln\frac{4}{e}$.

Розділ 10

Геометричні застосування зизначеного інтеграла

Інтеграл Рімана в застосуваннях найчастіше використовують за однією й тією ж кемою, до якої приводять міркування геометричного або фізичного характеру, ритаманні нашій інтуїції. Викладові цієї схеми присвячено перший підрозділ цього эзділу.

0.1. Адитивна функція орієнтованого проміжку та інтеграл

значення 10.1.1. Нехай $[a,b] \subset \mathbb{R}$, а $F\colon [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R}$ — деяке відображення; називають *адитивною функцією орієнтованого* (в розумінні означення 9.7.1) *юміжку*, якщо

$$(\forall \alpha,\beta,\gamma \in [a,b]) \quad \{F(\alpha,\beta) = F(\alpha,\gamma) + F(\gamma,\beta)\}. \qquad (10.1)$$

уваження 10.1.1. Зрозуміло, що F можна інтерпретувати як відображення $[a,b] \supset$ $\beta] \mapsto F(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}$, де $[\alpha,\beta]$ — орієнтований проміжок, тому означення 10.1.1 є оектним.

иклад 10.1.1.

Нехай $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ і $(\forall \alpha,\beta \in [a,b])\ \{F(\alpha,\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\}$; F є адитивною функцією орієнтованого міжку (далі скорочено: адитивною функцією). Це випливає з теореми 9.7.1.

рава 10.1.1. *Довести таке: якщо F — адитивна функція, то*

а) $(\forall\, \alpha,\beta \in [a,b]) \quad \{F(\alpha,\beta) = -F(\beta,\alpha)\}$;

б) $(\forall\, \alpha \in [a,b]) \quad \{F(\alpha,\alpha) = 0\}$.

Зауваження 10.1.2. Приймемо $\Phi(x) = F(a, x)$. Тоді $F(\alpha, \beta) = F(a, \beta) - F(a, \alpha) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$. Отже, кожна адитивна функція має вигляд

$$F(\alpha, \beta) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha), \tag{10.2}$$

де $\Phi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ — деяка функція.

Легко бачити, що справджується й обернене твердження, тобто що будь-яка функція $\Phi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ породжує за формулою (10.2) адитивну функцію.

Наприклад, якщо $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, то функція $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ породжує, з огляду на (10.2), адитивну функцію $F(\alpha, \beta) = \int\limits_\alpha^\beta f(t)dt$.

Теорема 10.1.1. *Нехай $F\colon [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ — адитивна функція, причому існує функція $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ така, що*

$$(\forall \alpha, \beta : a \le \alpha < \beta \le b) \left\{ \inf_{x \in [\alpha, \beta]} f(x)(\beta - \alpha) \le F(\alpha, \beta) \le \sup_{x \in [\alpha, \beta]} f(x)(\beta - \alpha) \right\}.$$

Тоді

$$F(a, b) = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{10.3}$$

Доведення. Нехай $\tau = \{x_i\}_{i=0}^n$ — довільне розбиття відрізка $[a, b]$, $m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тоді

$$m_i \Delta x_i \le F(x_{i-1}, x_i) \le M_i \Delta x_i \quad (i = 1, \ldots, n);$$

$$s(f, \tau) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \le F(a, b) \le \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = S(f, \tau);$$

$$0 \le |F(a, b) - \int\limits_a^b f(x)dx| \le S(f, \tau) - s(f, \tau).$$

Переходячи тут до границі при $|\tau| \to 0$ і беручи до уваги критерій інтегровності (теорема 9.4.1), отримуємо (10.3). □

10.2. Площа криволінійної трапеції та криволінійного сектора

У цьому підрозділі чіткого означення площі $S(\Omega)$ плоскої фігури $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ не наведено, це буде зроблено далі. Поки що постулюємо лише таке:

S_1) якщо відрізок розбиває фігуру $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ на частини Ω_1 та Ω_2, то $S(\Omega) = S(\Omega_1) + S(\Omega_2)$ (адитивність площі);

S_2) якщо $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$, то $S(\Omega_1) \leq S(\Omega_2)$ (невід'ємність площі).

Розглянемо питання про площу *криволінійної трапеції*

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b, \ 0 \leq y \leq f(x)\}, \tag{10.4}$$

де $f \in C_{[a,b]}$ і $(\forall x \in [a,b]) \ \{f(x) \geq 0\}$.

Припустимо, що $a \leq \alpha < \beta \leq b$, і приймемо

$$\Omega_{\alpha,\beta} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon \ \alpha \leq x \leq \beta, \ 0 \leq y \leq f(x)\}, \tag{10.5}$$

$$F(\alpha,\beta) = S(\Omega_{\alpha,\beta}), \ F(\beta,\alpha) = -S(\Omega_{\alpha,\beta}), \ F(\alpha,\alpha) = 0.$$

З аксіоми S_1 випливає, що F — адитивна функція, а з аксіоми S_2 — що

$$\inf_{x\in[\alpha,\beta]} f(x) \cdot (\beta - \alpha) \leq F(\alpha,\beta) \leq \sup_{x\in[\alpha,\beta]} f(x) \cdot (\beta - \alpha).$$

Звідси і з теореми 10.1.1 випливає, що

$$S(\Omega) = S(\Omega_{a,b}) = F(a,b) = \int_a^b f(x)dx. \tag{10.6}$$

На підставі цього та адитивності площі отримаємо такий висновок: якщо $f, g \in C_{[a,b]}$ і $(\forall x \in [a,b]) \ \{g(x) \leq f(x)\}$, $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \leq x \leq b, g(x) \leq x \leq f(x)\}$, то

$$S(\Omega) = \int_a^b (f(x) - g(x))dx. \tag{10.7}$$

Нагадаємо, що довільна точка $M \subset \mathbb{R}^2$ визначена не тільки парою (x,y) її декартових координат, а й парою (ρ,φ) її полярних координат, де ρ — відстань від M до початку координат O, а φ — кут між додатним напрямом осі Ox та вектором $\overrightarrow{OM}$. Отже, $x = r\cos\varphi$, $y = \sin\varphi$ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ (рис. 10.1).

Криволінійним сектором Ω називають множину вигляду

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \quad 0 \leq \rho \leq f(\varphi)\},$$

де $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq 2\pi$, $f \in C_{[\varphi_1,\varphi_2]}$.

Нехай $\varphi_1 \leq \alpha < \beta \leq \varphi_2$. Приймемо

$$\Omega_{\alpha,\beta} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \alpha \leq \varphi \leq \beta, \quad 0 \leq \rho \leq f(\varphi)\};$$

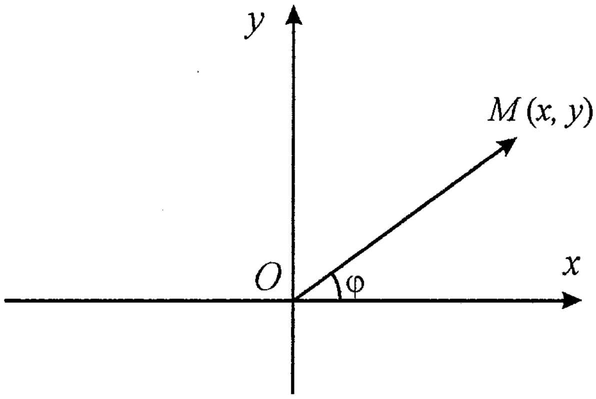


Рис. 10.1

$$F(\alpha,\beta) = S(\Omega_{\alpha,\beta}),\ F(\beta,\alpha) = -S(\Omega_{\alpha,\beta}),\ F(\alpha,\alpha) = 0.$$

З аксіоми S_1 випливає, що F — адитивна функція, а з аксіоми S_2 і формули для площі кругового сектора, — що (рис. 10.2):

$$\frac{1}{2}\inf_{\varphi\in[\alpha,\beta]} f^2(\varphi)(\beta-\alpha) \le F(\alpha,\beta) \le \frac{1}{2}\sup_{\varphi\in[\alpha,\beta]} f^2(\varphi)(\beta-\alpha).$$

Тому з огляду на теорему 10.1.1

$$S(\Omega) = S(\Omega_{\varphi_1,\varphi_2}) = F(\varphi_1,\varphi_2) = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f^2(\varphi)d\varphi. \qquad (10.8)$$

10.3. Об'єм тіла обертання

Тут аналогічно до попереднього, вважатимемо таке:

V_1) якщо площина розбиває тіло $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ на частини Ω_1 та Ω_2, то $V(\Omega) = V(\Omega_1) + V(\Omega_2)$ (адитивність об'єму);

V_2) якщо $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \mathbb{R}^3$, то $V(\Omega_1) \subset V(\Omega_2)$ (невід'ємність об'єму).

Нехай $f \in C_{[a,b]}$ і $(\forall x \in [a,b])\ \{f(x) \ge 0\}$. Знайдемо об'єм $V(G)$ тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції (10.4). Для цього розглянемо тіло $G_{\alpha,\beta}$ $(a \le \alpha < \beta \le b)$, утворене обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції (10.5) і приймемо

$$F(\alpha,\beta) = V(G_{\alpha,\beta}),\ F(\beta,\alpha) = -V(G_{\alpha,\beta}),\ F(\alpha,\alpha) = 0.$$

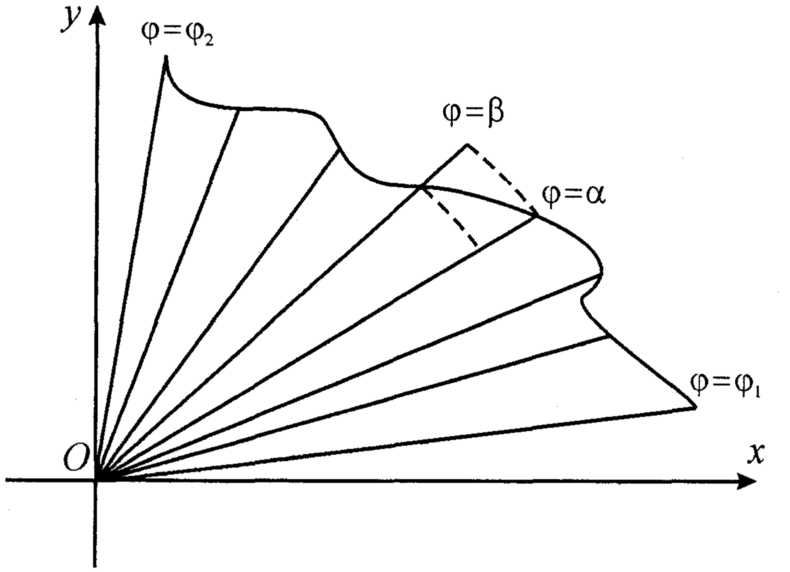


Рис. 10.2

З аксіоми V_1 випливає, що F — адитивна функція, а з аксіоми V_2 і формули для об'єму кругового циліндра, — що:

$$\pi \cdot \inf_{x\in[\alpha,\beta]} f^2(x) \le F(\alpha,\beta) \le \pi \cdot \sup_{x\in[\alpha,\beta]} f^2(x)$$

(ліворуч маємо об'єм циліндра, вписаного в $G_{\alpha,\beta}$, а праворуч — описаного навколо $G_{\alpha,\beta}$). Тому з огляду на теорему 10.1.1

$$V(G) = V(G_{a,b}) = F(a,b) = \pi \int_a^b f^2(x)dx. \tag{10.9}$$

Приклад 10.3.1.

1. Знайдемо площу S фігури, обмеженої лініями $y = x^2$ та $y = x^3$.

Розв'язування. Лінії (рис. 10.3), які обмежують розглядувану фігуру, перетинаються в точках $(0,0)$ та $(1,1)$, тому за формулою (10.7) маємо

$$S = \int_0^1 (x^2 - x^3)dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

2. Знайдемо площу частини круга радіусом R з центром у початку координат, яка лежить між бісектрисами першого та другого координатних кутів.

Розв'язування. Перейшовши до полярних координат, бачимо, що йдеться про відшукання площі S сектора

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{3}{4}\pi, \quad 0 \le \rho \le R\}.$$

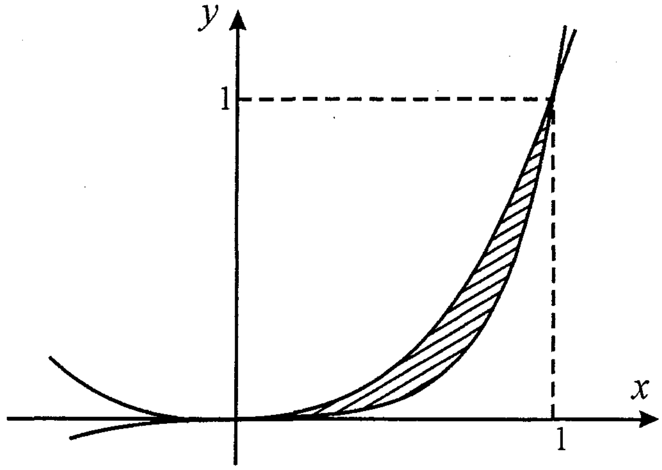


Рис. 10.3

З (10.8) отримуємо

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} R^2\,d\varphi = \frac{R^2}{2}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi R^2}{4}.$$

3. Знайдемо об'єм V тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox частини синусоїди $y = \sin x$ $(0 \le x \le \pi)$.

Розв'язування. Із (10.9) випливає, що

$$V = \pi\int\limits_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^\pi (1 - \cos 2x)dx = \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

10.4. Довжина шляху (дуги кривої)

Означення 10.4.1. *Шляхом* у просторі $\mathbb{R}^3$ називають відображення $t \mapsto r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ відрізка $[a, b]$ в $\mathbb{R}^3$, де $x, y, z \in C_{[a,b]}$.

Точки $A\big(x(a), y(a), z(a)\big)$ та $B\big(x(b), y(b), z(b)\big)$ називають, відповідно, *початком* та *кінцем* шляху. Якщо початок та кінець шляху збігаються, то його називають *замкненим*.

Означення 10.4.2. Якщо $r\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ — шлях, то його образ $r([a, b]) = \{(x(t), y(t), z(t)) : a \le t \le b\}$ називають (неперервною) кривою (точніше, *носієм* шляху r), а змінну t — параметром цієї кривої.

Такий шлях називають *простим шляхом*, а його носій — *простою кривою (або жордановою)*, якщо відображення r є взаємно однозначним.

Замкнений шлях $r\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ називають *простим замкненим шляхом*, а його носія — *простою замкненою (або простою жордановою) кривою*, якщо взаємно однозначним є звуження відображення r на $[a,b)$.

Означення 10.4.3. Шлях $[a,b] \ni t \mapsto r(t) = \big(x(t),y(t),z(t)\big)$ називають *гладким*, якщо $x,y,z \in C^1_{[a,b]}$ та $(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2 \neq 0$ при $t \in [a,b]$, і *кусково-гладким*, якщо $[a,b]$ можна розбити на скінченну кількість відрізків таких, що звуження функцій x,y,z на кожен з них є гладкими.

Позначення. Далі скрізь до кінця підрозділу дотримуватимемось таких позначень:

$[a,b] \ni t \mapsto r(t) = \big(x(t),y(t),z(t)\big) \in \mathbb{R}^3$ — фіксований шлях в $\mathbb{R}^3$, $A = r(a)$, $B = r(b)$;

$\Gamma = \big\{\big(x(t),y(t),z(t)\big) \,:\, a \le t \le b\big\}$ — носій шляху r;

якщо $\tau = \{t_i\}_{i=0}^n$ — розбиття відрізка $[a,b]$, то $A_i = A_i(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} r(t_i)$,

$$\overline{A_{i-1}A_i} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(x(t_i)-x(t_{i-1}))^2+(y(t_i)-y(t_{i-1}))^2+(z(t_i)-z(t_{i-1}))^2}$$

— довжина відрізка $A_{i-1}A_i$ $(i = 1,\dots,n)$, $\sigma_r(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{i=1}^n \overline{A_{i-1}A_i}$ — довжина ламаної $A_0A_1\dots A_n$, вписаної в криву Γ, а $|\tau_r| \stackrel{\text{def}}{=} \max\limits_{1\le i\le n} \overline{A_{i-1}A_i}$ — довжина найбільшої з ланок цієї ламаної;

через $|\tau|$, як звичайно, позначаємо діаметр розбиття τ;

у випадку, коли розглядуваний шлях r є гладким, похідну $r'(t)$ та її модуль $|r'(t)|$ визначають так:

$$(\forall t \in [a,b]) \quad \{r'(t) \stackrel{\text{def}}{=} \big(x'(t),y'(t),z'(t)\big), \quad |r'(t)| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\}.$$

Означення 10.4.4. Нехай $l \in \mathbb{R}$;

$$\lim_{|\tau_r|\to 0} \sigma_r(\tau) = l \;\Big|\stackrel{\text{def}}{=}\Big|\; (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \tau : |\tau_r| < \delta) \quad \{|\sigma_r(\tau) - l| < \varepsilon\}. \tag{10.10}$$

Зауваження 10.4.1. Можна довести, що означення 10.4.4 еквівалентне такому:

$$\lim_{|\tau_r|\to 0} \sigma_r(\tau) = l \Big|\stackrel{\text{def}}{=}\Big| (\forall \{\tau_m\}_{m=1}^\infty : \lim_{m\to\infty} |\tau_{r_m}| = 0) \quad \{\lim_{m\to\infty} \sigma_r(\tau_m) = l\}.$$

Означення 10.4.5. Шлях r називають *спрямним*, якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{|\tau_r|\to 0} \sigma_r(\tau)$. Цю границю, яку позначатимемо $l[a,b] = l(r;[a,b])$, називають *довжиною шляху* r:

$$l[a,b] = \lim_{|\tau_r|\to 0} \sigma_r(\tau). \tag{10.11}$$

Лема 10.4.1. *Нехай* $r\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ *— простий шлях,* $a \le \alpha < \beta \le b$, $M = r(\alpha)$, $N = r(\beta)$. *Тоді*

а) $(\forall\delta > 0)\ (\exists\eta > 0)\ (\forall\alpha,\beta : \beta - \alpha < \eta)\ \{\overline{MN} < \delta\}$;

б) $(\forall\eta > 0)(\exists\delta > 0)\ (\forall M, N : \overline{MN} < \delta)\ \{\beta - \alpha < \eta\}$.

Доведення. Згідно з теоремою Кантора (див. підрозділ 4.9), функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ рівномірно неперервні на $[a,b]$, тобто

$$(\forall\delta > 0)(\exists\eta > 0)\ (\forall\alpha,\beta : \beta - \alpha < \eta)$$

$$\left\{|x(\beta) - x(\alpha)| < \frac{\delta}{\sqrt{3}},\quad |y(\beta) - y(\alpha)| < \frac{\delta}{\sqrt{3}},\quad |z(\beta) - z(\alpha)| < \frac{\delta}{\sqrt{3}}\right\}.$$

З трьох останніх нерівностей випливає, що

$$\overline{MN} = \sqrt{\big(x(\beta) - x(\alpha)\big)^2 + \big(y(\beta) - y(\alpha)\big)^2 + \big(z(\beta) - z(\alpha)\big)^2} < \delta.$$

Припустимо, що твердження б) неправильне, тобто

$$(\exists\eta > 0)(\forall\delta > 0)\ (\exists\alpha,\beta \in [a,b])\ \left\{(\overline{MN} = \overline{r(\alpha)r(\beta)} < \delta) \wedge (\beta - \alpha \ge \eta)\right\}.$$

Приймемо $\delta = \frac{1}{n}(n \in \mathbb{N})$ й отримаємо дві послідовності точок $\{M_n = r(\alpha_n)\}_{n=1}^{\infty}$ та $\{N_n = r(\beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$, для яких

$$\overline{M_nN_n} < \frac{1}{n},\quad \text{але } \beta_n - \alpha_n \ge \eta\ (n \in \mathbb{N}).$$

За теоремою Больцано-Вейєрштрасса (теорема 2.8.2), не зменшуючи загальності, можна вважати, що

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha_0,\ \lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta_0$$

(цього легко досягти, переходячи в разі потреби до підпослідовностей). Очевидно, що $\beta_0 - \alpha_0 \ge \eta$, але $r(\beta_0) = r(\alpha_0)$. Справді, нехай $r(\alpha_0) = M_0$, $r(\beta_0) = N_0$. Тоді

$$\begin{aligned}M_0N_0 &\le M_0M_n + M_nN_n + N_nN_0 \le \\ &\le \sqrt{\big(x(\alpha_n) - x(\alpha_0)\big)^2 + \big(y(\alpha_n) - y(\alpha_0)\big)^2 + \big(z(\alpha_n) - z(\alpha_0)\big)^2} + \frac{1}{n} + \\ &\quad + \sqrt{\big(x(\beta_n) - x(\beta_0)\big)^2 + \big(y(\beta_n) - y(\beta_0)\big)^2 + \big(z(\beta_n) - z(\beta_0)\big)^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

тобто $\overline{M_0N_0} = 0$.

Оскільки r — простий шлях, то звідси випливає, що $\alpha_0 = \beta_0$. Отримана суперечність переконує в правильності леми. $\square$

Наслідок 10.4.1. *Простий шлях r є спрямним тоді і лише тоді, коли існує скінченна границя $\lim\limits_{|\tau|\to 0}\sigma_r(\tau)$. У цьому випадку*

$$l[a,b]=\lim_{|\tau|\to 0}\sigma_r(\tau). \tag{10.12}$$

Доведення. ($\Rightarrow$)Нехай r — спрямний шлях, зокрема, $l[a,b]$ визначено згідно з (10.11), а $\varepsilon>0$. З огляду на (10.10)

$$(\exists\delta>0)\ (\forall\tau:|\tau_r|<\delta)\quad \{|\sigma_r(\tau)-l[a,b]|<\varepsilon\},$$

а згідно з твердженням *a* леми 10.4.1

$$(\exists\eta>0)(\forall\tau:|\tau|<\eta)\quad \{|\tau_r|<\delta\}.$$

Отже, якщо $|\tau|<\eta$, то $|\sigma_r(\tau)-l[a,b]|<\varepsilon$, тобто виконується (10.12).
($\Leftarrow$)Нехай $\lim\limits_{|\tau|\to 0}\sigma_r(\tau)=l\in\mathbb{R}$, тобто

$$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists\eta>0)\ (\forall\tau:|\tau|<\eta)\quad \{|\sigma_r(\tau)-l|<\varepsilon\}.$$

Крім того, з твердження б) леми 10.4.1 випливає, що

$$(\exists\delta>0)\ (\forall\tau:|\tau_r|<\delta)\quad \{|\tau|<\eta\}.$$

Отже, якщо $|\tau_r|<\delta$, то $|\sigma_r(\tau)-l|<\varepsilon$, тобто $\lim\limits_{|\tau_r|\to 0}\sigma_r(\tau)=l$. А це означає, що шлях r спрямний і $l[a,b]=l$, тобто виконується (10.12). □

Теорема 10.4.1. *Будь-який простий гладкий шлях $r\colon [a,b]\to\mathbb{R}^3$ є спрямним, а його довжину $l[a,b]$ обчислюють за формулою*

$$l[a,b]=\int\limits_a^b |r'(t)|dt=\int\limits_a^b \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}dt. \tag{10.13}$$

Доведення. Нехай $\tau=\{t_i\}_{i=0}^n$ — довільне розбиття відрізка $[a,b]$, а $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$ $(i=1,\dots,n)$. Використавши формулу скінченних приростів (див. теорему 6.2.2), отримаємо такий висновок: $(\forall i, i=1,2,\dots,n)$ $(\exists\xi_i,\eta_i,\zeta_i\in[t_{i-1},t_i])$ такі, що

$$\begin{cases} x(t_i)-x(t_{i-1})=x'(\xi_i)\Delta t_i;\\ y(t_i)-y(t_{i-1})=y'(\eta_i)\Delta t_i;\\ z(t_i)-z(t_{i-1})=x'(\zeta_i)\Delta t_i.\end{cases} \tag{10.14}$$

Нехай $O(0,0,0), M_i=r'(\xi_i)=\big(x'(\xi_i),y'(\xi_i),z'(\xi_i)\big), N_i=\big(x'(\xi_i),y'(\eta_i),z'(\zeta_i)\big)$. Зазначимо, що $(i=1,\dots,n)$

$$|\overline{OM}_i-\overline{ON}_i|\le\overline{M_iN}_i=\sqrt{[y'(\eta_i)-y'(\xi_i)]^2+[z'(\zeta_i)-z'(\xi_i)]^2}. \tag{10.15}$$

Це випливає з того, що різниця довжин двох сторін трикутника не перевищує третьої.

Беручи до уваги введені вище позначення і враховуючи (10.14), отримуємо:

$$\sigma_r(\tau) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2 + [z(t_i) - z(t_{i-1})]^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\eta_i)^2 + z'(\zeta_i)^2}\Delta t_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\xi_i)^2 + z'(\xi_i)^2}\Delta t_i +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\eta_i)^2 + z'(\zeta_i)^2} - \sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\xi_i)^2 + z'(\xi_i)^2}\right)\Delta t_i =$$

$$= \sigma\big(|r'|; (\tau, \overline{\xi})\big) + \sum_{i=1}^{n} (\overline{ON}_i - \overline{OM}_i)\Delta t_i,$$

де $\sigma\big(|r'|; (\tau, \overline{\xi})\big)$ — інтегральна сума функції $|r'|$, що відповідає розбиттю $\big(\tau, (\xi_1, \ldots, \xi_n$ з вибраними точками відрізка $[a, b]$.

Стверджуємо, що

$$\lim_{|\tau| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\overline{ON}_i - \overline{OM}_i)\Delta t_i = 0. \tag{10.16}$$

Справді, нехай задано $\varepsilon > 0$. З рівномірної неперервності функцій y' та z' на $[a, b]$ випливає, що існує $\delta > 0$ таке, що

$$(\forall t, \theta \in [a, b] : \ |t - \theta| < \delta)$$
$$\{|y'(t) - y'(\theta))| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}(b-a)} \wedge |z'(t) - z'(\theta))| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}(b-a)}\}. \tag{10.17}$$

Тому якщо $|\tau| < \delta$, то, згідно з (10.15), (10.17),

$$\left|\sum_{i=1}^{n} (\overline{ON}_i - \overline{OM}_i)\Delta t_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |ON_i - OM_i|\Delta t_i \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[y'(\eta_i) - y'(\xi_i)]^2 + [z'(\zeta_i) - z'(\xi_i)]^2}\Delta t_i \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2(b-a)^2} + \frac{\varepsilon^2}{2(b-a)^2}}\Delta t_i = \frac{\varepsilon}{(b-a)} \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i = \varepsilon,$$

тобто виконується (10.16).

Зрозуміло, що

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sigma(|r'|; (\tau, \overline{\xi})) = \int_a^b |r'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt$$

(існування інтеграла випливає з неперервності підінтегральної функції). Для завершення доведення досить використати наслідок 10.4.1. □

Наслідок 10.4.2. *Нехай* $r\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ *— простий гладкий шлях. Тоді*

а) *якщо* $a < c < b$, *то*

$$l[a, b] = l[a, c] + l[c, b] \tag{10.18}$$

(адитивність довжини);

б) *якщо* $a \le \alpha < \beta \le b$, *то*

$$\inf_{t\in[\alpha,\beta]} |r'(t)|(\beta - \alpha) \le l[\alpha, \beta] \le \sup_{t\in[\alpha,\beta]} |r'(t)|(\beta - \alpha). \tag{10.19}$$

Справджуваність цього наслідку випливає з основних властивостей інтеграла Рімана (див. теореми 9.6.1—9.6.3).

Зауваження 10.4.2. Співвідношення (10.18), (10.19) можна отримати на підставі міркувань фізичного характеру, тобто інтерпретуючи $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ як прямокутні декартові координати точки, що рухається в просторі $\mathbb{R}^3$ в момент часу t, а, отже, $|r'(t)|$ — модуль її швидкості в цей момент. З огляду на теорему 10.1.1 формула (10.13) випливає з (10.18) та (10.19).

Означення 10.4.6. Нехай $r\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ — простий замкнений гладкий шлях, $a < c < b$. Довжиною шляху r називають число

$$l[a, b] \overset{\text{def}}{=} l[a, c] + l[c, b].$$

Отже, $l[a, b] = \int_a^c |r'(t)|dt + \int_c^b |r'(t)|dt = \int_a^b |r'(t)|dt$ (зокрема, довжина цього шляху не залежить від вибору точки $c \in (a, b)$).

Зауваження 10.4.3. а) якщо шлях $r\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ є кусково-гладким і/або його носій Γ має скінченну кількість точок самоперетину (точку $M \in \Gamma$ називають *точкою самоперетину*, якщо в неї відображається більше ніж одна точка відрізка $[a, b]$), то довжину цього шляху визначаємо як (скінченну) суму простих або простих замкнених гладких шляхів, на які його розбивають. Зрозуміло, що довжину $l[a, b]$ такого шляху також обчислюють за формулою (10.13), а, отже, вона не залежить від способу розбиття;

б) якщо в означенні 10.4.1 $z(t) \equiv 0$, то носій шляху лежить у площині, а (10.13) набуває вигляду

$$l[a,b] = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt. \tag{10.20}$$

Звідси легко знайти довжину графіка неперервно диференційовної функції $y = f(x)$ визначеної на відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Для цього досить прийняти в (10.20) $t = x$, $y(t) = f(x)$. Тоді отримаємо

$$l[a,b] = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx; \tag{10.21}$$

в) довжина гладкого шляху, а, отже, і шляху, про який ішлося в пункті *а*, не залежить, за деяких припущень, від способу його параметризації (див. означення 10.4.7, теорему 10.4.2), тому її називають ще й *довжиною кривої* Γ, яка є носієм цього шляху:

$$l(\Gamma) \overset{\text{def}}{=\!=} l[a,b].$$

Аналогічно, під *спрямною (гладкою, кусково-гладкою) кривою* розуміють носія спрямного (гладкого, кусково-гладкого) шляху.

Означення 10.4.7. Кажуть, що шлях $\rho\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^3$ отримано зі шляху $r\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ *допустимою зміною параметризації*, якщо існує таке гладке відображення $\rho\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$, що

а) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$;

б) $(\forall\, \theta \in [\alpha,\beta])\quad \{\varphi'(\theta) > 0\}$;

в) $(\forall\, \theta \in [\alpha,\beta])\quad \{\rho(\theta) = r\big(\varphi(\theta)\big)\}$.

Теорема 10.4.2. *Якщо гладкий шлях* $\rho\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^3$ *отримано з гладкого шляху* $r\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ *допустимою зміною параметризації, то довжини цих шляхів однакові.*

Доведення. Нехай ρ та r задані, відповідно, за допомогою трійок

$$\theta \mapsto \big(\xi(\theta), \eta(\theta), \zeta(\theta)\big) \text{ та } t \mapsto \big(x(t), y(t), z(t)\big)$$

гладких функцій, а $t = \varphi(\theta)$ — допустима зміна параметризації, за якої

$$\xi(\theta) = x\big(\varphi(\theta)\big),\ \eta(\theta) = y\big(\varphi(\theta)\big),\ \zeta(\theta) = z\big(\varphi(\theta)\big).$$

Використавши формулу (10.13) для довжини шляху, правило диференціювання складеної функції та правило заміни змінної в інтегралі, отримуємо

$$\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'\big(\varphi(\tau)\big)]^2 + [y'\big(\varphi(\theta)\big)]^2 + [z'\big(\varphi(\theta)\big)]^2}\varphi'(\theta)d\theta =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(\varphi(\theta))\varphi'(\theta)]^2 + [y'(\varphi(\theta))\varphi'(\theta)]^2 + [z'(\varphi(\theta))\varphi'(\theta)]^2} d\theta =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\xi'(\theta)^2 + \eta'(\theta)^2 + \zeta'(\theta)^2} d\theta.$$

□

Приклад 10.4.1.

Знайдемо довжину дуги Γ кола радіусом R з центром у початку координат, яка лежить між бісектрисами першого та другого координатних кутів (рис. 10.4).

Розв'язування. Перший спосіб: оскільки

$$\Gamma = \left\{(R\cos t, R\sin t) \ : \ \frac{\pi}{4} \le t \le \frac{3\pi}{4}\right\},$$

то за формулою (10.20) маємо

$$l(\Gamma) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{(R\sin t)^2 + (R\cos t)^2} dt = R \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} dt = \frac{\pi R}{2}.$$

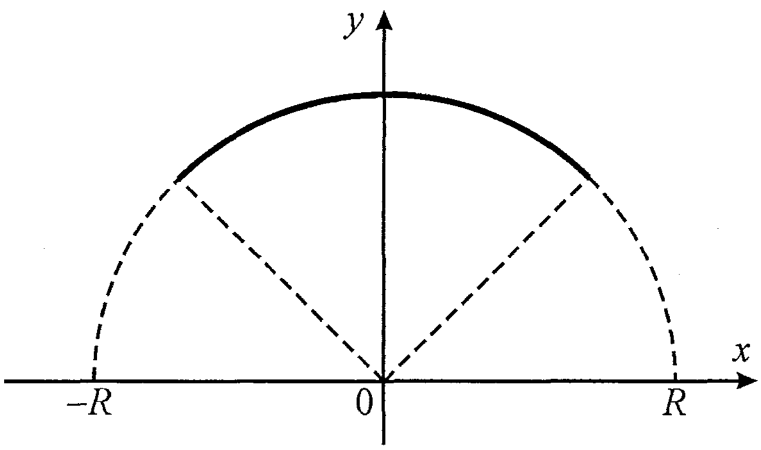


Рис. 10.4

Другий спосіб: Γ є графіком функції

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \ -\frac{R}{\sqrt{2}} \le x \le \frac{R}{\sqrt{2}},$$

тому за формулою (10.21) маємо

$$l(\Gamma) = \int\limits_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = R \int\limits_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} =$$

$$= R \int\limits_{-\frac{R}{\sqrt{2}}}^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \frac{d\frac{x}{R}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}} = R \int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = R \arcsin \xi \Big|_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi R}{2}.$$

Вправа 10.4.1. *Довести такі твердження:*

а) *зміст понять "спрямний шлях" та "довжина шляху" не зміниться, якщо в означенні 10.4.5 скрізь замінити* $\lim\limits_{|\tau_r| \to 0}$ *на* $\sup\limits_{\tau}$*;*

б) *крива, яка є частиною спрямної кривої, також спрямна;*

в) *рівність* (10.20) *правильна, якщо* r *— довільний спрямний шлях.*

Зауваження 10.4.4. Теорема 10.4.2 також справджується, якщо похідна функції $\varphi(r)$ може набувати в скінченній кількості точок проміжку $[a, b]$ значення $+\infty$. Це стане зрозумілим після ознайомлення з невластивими інтегралами.

Розділ 11

Невластиві інтеграли

Інтегровні за Ріманом функції характерні тим, що вони:

а) визначені на скінченному відрізку $[a, b]$;

б) обмежені на цьому відрізку.

Однак багато задач, які виникають у математичному аналізі та його застосуваннях, наводять на думку про побудову загальнішої конструкції інтеграла, яка б дала змогу відмовитися від обидвох або однієї з вимог. Цей розділ присвячено вивченню відповідних узагальнень.

11.1. Означення та приклади невластивих інтегралів

Означення 11.1.1. Нехай $f\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ — функція, інтегровна на будь-якому відрізку $[a, b] \subset [a, +\infty)$. Границю $\lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$, якщо вона існує, називають *невластивим інтегралом від функції f на проміжку $[a, +\infty)$* і позначають $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. У цьому разі кажуть, що невластивий інтеграл *збігається*, і записують

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{11.1}$$

Якщо ж ця границя нескінченна або не існує, то кажуть, що невластивий інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *розбігається.*

Приклад 11.1.1.

Дослідимо на збіжність невластивий інтеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}. \tag{11.2}$$

Оскільки

$$\int\limits_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Big|_b^1, & \text{при } \alpha \neq -1; \\ \ln x\Big|_b^1, & \text{при } \alpha = 1, \end{cases}$$

то

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{при } \alpha > 1; \\ +\infty, & \text{при } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Отже, якщо $\alpha > 1$, то цей інтеграл збігається, а якщо $\alpha \leq 1$, то інтеграл (11.2) розбігається.

Означення 11.1.2. Нехай функція $f\colon [a, B) \to \mathbb{R}$ інтегровна за Ріманом на будь-якому відрізку $[a, b] \subset [a, B)$. Границю $\lim\limits_{b\to B-0} \int\limits_a^b f(x)dx$, якщо вона існує, називають *невластивим інтегралом від функції* f *на проміжку* $[a, B)$ і позначають $\int\limits_a^B f(x)dx$. У цьому разі кажуть, що невластивий інтеграл *збігається*, і пишуть

$$\int\limits_a^B f(x)dx = \lim_{b\to B-0} \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{11.3}$$

Якщо ж ця границя нескінченна або не існує, то кажуть, що невластивий інтеграл $\int\limits_a^B f(x)dx$ *розбігається.*

Зауваження 11.1.1. Нехай $f \in \mathcal{R}_{[a,B]}$. Тоді (див. теорему 9.8.1) величина $F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx$ неперервно залежить від b, тому

$$\int\limits_a^B f(x)dx = \lim_{b\to B-0} \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Іншими словами, означення 11.1.2 є узагальненням означення 9.1.5 інтеграла Рімана на випадок, коли функція f, взагалі кажучи, необмежена в околі точки $B \in \mathbb{R}$.

Зауваження 11.1.2. Якщо $(\forall\, [a, b] \subset (A, b])\ \{f \in \mathcal{R}_{[a,b]}\}$, то

$$\int\limits_A^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{a\to A+0} \int\limits_a^b f(x)dx;$$

якщо ж $(\forall\, [a, b] \subset (-\infty, b])\ \{f \in \mathcal{R}_{[a,b]}\}$, то

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Аналогічно до попередніх означень і в цьому разі використовують терміни *інтеграл збігається* та *інтеграл розбігається.*

Приклад 11.1.2.

Дослідимо на збіжність інтеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}. \tag{11.4}$$

Оскільки

$$\int\limits_b^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\big|_1^b, & \alpha \neq -1; \\ \ln x\big|_1^b, & \alpha = 1, \end{cases}$$

то

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+0} \int\limits_b^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1; \\ +\infty, & \text{при } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

тобто якщо $\alpha < 1$, то інтеграл (11.4) збігається, а якщо $\alpha \geq 1$, то цей інтеграл розбігається.

Позначення. Оскільки питання про збіжність невластивих інтегралів (11.1) та (11.3) вирішують однаково, то будемо розглядати їх одночасно, припустивши попередньо, що

— усі розглядувані функції визначено на деякому проміжку $[a, \omega)$, де $a < \omega \leq +\infty$;

— для будь-якого $b \in (a, \omega)$ ці функції інтегровні на $[a, b]$;

— для кожної такої функції f точка ω є особливою, тобто $f(x)$ необмежена в околі точки ω, або ж $\omega = +\infty$;

— $$\int\limits_a^\omega f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{b\to\omega} \int\limits_a^b f(x)dx, \tag{11.5}$$

якщо ця границя існує;

— запис $f \in \mathcal{R}_{[a,\omega)}$ означає, що інтеграл у лівій частині (11.5) збігається.

Далі скрізь до кінця розділу, якщо не зазначено протилежного, припускаємо, що всі перераховані умови виконуються.

11.2. Основні властивості невластивого інтеграла

Твердження 11.2.1. *Нехай $f, g \in \mathcal{R}_{[a,\omega)}$, $c \in \mathbb{R}$. Тоді*

а) $(f + g) \in \mathcal{R}_{[a,\omega)}$, *причому* $$\int\limits_a^\omega (f(x) + g(x))dx = \int\limits_a^\omega f(x)dx + \int\limits_a^\omega g(x)dx; \tag{11.6}$$

б) $cf \in \mathcal{R}_{[a,\omega)}$, *причому* $$\int\limits_a^\omega cf(x)dx = c\int\limits_a^\omega f(x)dx. \tag{11.7}$$

Доведення. Нехай $a < b < \omega$. Переходячи в рівності

$$\int\limits_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$$

до границі при $b \to \omega$, переконуємось у справджуваності (11.6). Співвідношення (13.15) доводять аналогічно. □

Твердження 11.2.2. *Нехай $a < c < \omega$; $f \in \mathcal{R}_{[a,\omega)}$ тоді і лише тоді, коли $f \in \mathcal{R}_{[c,\omega)}$, причому*

$$\int\limits_a^\omega f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^\omega f(x)dx. \tag{11.8}$$

Справді, переходячи до границі при $b \to \omega$ в рівності

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx \quad (c < b < \omega),$$

отримуємо (11.8).

Твердження 11.2.3. *Нехай $f \in C_{[a,\omega)}$, а F — одна з первісних функції f; $f \in \mathcal{R}_{[a,\omega)}$ тоді і лише тоді, коли існує $\lim\limits_{b\to\omega} F(b) \overset{\text{def}}{=} F(\omega)$, причому*

$$\int\limits_a^\omega f(x)dx = F(\omega) - F(a) = F(x)\Big|_a^\omega. \tag{11.9}$$

Для того, щоб переконатися в справджуваності (11.9), перейдемо в рівності

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b \quad (a < b < \omega)$$

до границі при $b \to \omega$.

Твердження 11.2.4. *Нехай $f \in C_{[a,\omega)}$, $\varphi \in C^1_{[\alpha,\gamma)}$ — строго монотонна функція, причому $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\gamma) = \omega$ (точніше $\lim\limits_{t\to\gamma} \varphi(t) = \omega$). Тоді*

$$\int\limits_a^\omega f(x)dx = \int\limits_a^\gamma f\big(\varphi(t)\varphi'(t)\big)dt, \tag{11.10}$$

причому обидва інтеграли збігаються або розбігаються одночасно.

Доведення. Нехай, наприклад, $\varphi(t)$ — зростаюча функція. Тоді існує обернена функція $t = \varphi^{-1}(x)$, яка є зростаючою і неперервною на $[a,\omega)$, причому $\lim\limits_{x\to\omega} \varphi^{-1}(x) = \gamma$. Використовуючи формулу заміни змінної у визначеному інтегралі, для всіх $\beta \in (\alpha,\gamma)$ маємо

$$\int\limits_{a=\varphi(\alpha)}^{b=\varphi(\beta)} f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)dt.$$

Якщо збігається, наприклад, інтеграл з правого боку співвідношення (11.10), то перейдемо в лівій частині останньої рівності до границі при $b \to \omega$. Тоді $\beta = \varphi^{-1}(b)$ прямуватиме до γ. Звідси випливає існування інтеграла з лівого боку співвідношення (11.10) і справджуваність цієї формули. □

Твердження 11.2.5. *Якщо $u, v \in C^1_{[a,\omega)}$ та існує $\lim\limits_{x\to\omega} u(x)v(x)$, то $u'v \in \mathcal{R}_{[a,\omega)}$ тоді і лише тоді, коли $uv' \in \mathcal{R}_{[a,\omega)}$. У цьому випадку*

$$\int\limits_a^\omega u'(x)v(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^\omega - \int\limits_a^\omega u(x)v'(x)dx, \tag{11.11}$$

де $u(x)v(x)\Big|_a^\omega \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{x\to\omega} u(x)v(x) - u(a)v(a)$.

Для доведення досить у формулі інтегрування частинами

$$\int\limits_a^b u'(x)v(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b u(x)v'(x)dx$$

перейти до границі при $b \to \omega$.

Вправа 11.2.1. *Довести, що інтеграл* $\int\limits_a^{a+\varepsilon} \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ $(\varepsilon > 0)$ *збігається тоді і лише тоді, коли* $\alpha < 1$.

11.3. Критерій Коші. Абсолютна й умовна збіжність невластивого інтеграла

Твердження 11.3.1 (критерій Коші збіжності невластивого інтеграла). *Функція $f \in \mathcal{R}_{[a,\omega)}$ тоді і лише тоді, коли виконується така умова:*

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists B \in [a,\omega)\big)\big(\forall b_1, b_2 \in [a,\omega) : b_1 > B \wedge b_2 > B\big)\Big\{\Big|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx\Big| < \varepsilon\Big\}. \tag{11.12}$$

Доведення. Приймемо

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx, \quad b \in [a, \omega). \tag{11.13}$$

Звідси $f \in \mathcal{R}_{[a,\omega)}$ тоді і лише тоді, коли існує скінченна границя $\lim\limits_{b\to\omega} F(b)$, тобто тоді, коли

$$\begin{gathered}(\forall \varepsilon > 0)\big(\exists B \in [a, \omega)\big)\big(\forall b_1, b_2 \in [a, \omega) : b_1 > B \wedge b_2 > B\big)\\ \{|F(B_2) - F(B_1)| < \varepsilon\}.\end{gathered} \tag{11.14}$$

Однак $F(b_2) - F(b_1) = \int\limits_a^{b_2} f(x)dx - \int\limits_a^{b_1} f(x)dx = \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx$, тому умови (11.12) та (11.14) рівносильні. □

Означення 11.3.1. Кажуть, що інтеграл $\int\limits_a^{\omega} f(x)dx$ *збігається абсолютно*, якщо збігається інтеграл $\int\limits_a^{\omega} |f(x)|dx$.

Зауваження 11.3.1. Якщо $f \colon [a, \omega)$ — невід'ємна функція і, крім цього, $f \in \mathcal{R}_{[a,\omega)}$, то часто пишуть $\int\limits_a^{\omega} f(x)dx < +\infty$.

Твердження 11.3.2. *Якщо* $\int\limits_a^{\omega} f(x)dx$ *збігається абсолютно, то він збігається:*

$$\int_a^{\omega} |f(x)|dx < +\infty \;\Big|\; \Rightarrow \;\Big|\; f \in \mathcal{R}_{[a,\omega)}.$$

Це випливає з твердження 11.3.1 і нерівності

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| \le \int_{b_1}^{b_2} |f(x)|dx.$$

Теорема 11.3.1 (критерій збіжності). *Якщо* $f(x) \ge 0$ *на* $[a, \omega)$, *то* $f \in \mathcal{R}_{[a,\omega)}$ *тоді і лише тоді, коли функція* (11.13) *обмежена на* $[a, \omega)$.

Справді, якщо $f(x) \ge 0$ на $[a, \omega)$, то функція (11.13) неспадна на $[a, \omega)$. Використовуючи теорему 3.7.1, бачимо, що ця функція має скінченну границю тоді і лише тоді, коли вона обмежена на проміжку $[a, \omega)$ (у протилежному разі $\int\limits_a^{\omega} f(x)dx = \lim\limits_{b\to\omega} F(b) = +\infty$).

Наслідок 11.3.1 (перша теорема порівняння). *Якщо* $0 \le f(x) \le g(x)$ *на* $[a,\omega)$ *і* $g \in \mathcal{R}_{[a,\omega)}$, *то* $f \in \mathcal{R}_{[a,\omega)}$ *і виконується нерівність*

$$\int_a^\omega f(x)dx \le \int_a^\omega g(x)dx. \tag{11.15}$$

Доведення. Для будь-якого $b \in [a,\omega)$

$$F(b) \overset{\text{def}}{=} \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \overset{\text{def}}{=} G(b). \tag{11.16}$$

Оскільки $\int\limits_a^\omega g(x)dx < +\infty$, то, згідно з теоремою 11.3.1, функція $G(b)$ обмежена на $[a,\omega)$. Звідси і з (11.16) випливає, що й $F(b)$ обмежена на $[a,\omega)$, тому, згідно з теоремою 11.3.1, $\int\limits_a^\omega f(x)dx < +\infty$. Переходячи в (11.16) до границі при $b \to \omega$, отримуємо (11.15). $\square$

Наслідок 11.3.2 (друга теорема порівняння). *Нехай* $f, g\colon [a,\omega) \to \mathbb{R}$ — *невід'ємні функції та існує границя* $\lim\limits_{x\to\omega} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{def}}{=} k$. *Тоді*

а) *якщо* $0 < k < +\infty$, *то інтеграли* $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ та $\int\limits_a^\omega g(x)dx$ *збігаються або розбігаються одночасно;*

б) *якщо* $k = 0$, $\int\limits_a^\omega g(x)dx < +\infty$, *то* $\int\limits_a^\omega f(x)dx < +\infty$;

в) *якщо* $k = +\infty$, $\int\limits_a^\omega f(x)dx < +\infty$, *то* $\int\limits_a^\omega g(x)dx < +\infty$.

Доведення. Обмежимося доведенням твердження *а*. З умови теореми випливає існування такого $c \in [a,\omega)$, що для будь-якого $x \in (c,\omega)$ виконується співвідношення

$$\frac{k}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < 2k,$$

отже, для всіх $x \in (c,\omega)$ маємо

$$\frac{k}{2}g(x) < f(x) < 2kg(x).$$

Тоді, використавши твердження 11.2.1, 11.2.2, 11.3.1, отримаємо

$$\int_a^\omega g(x)dx < +\infty \Rightarrow \int_c^\omega g(x)dx < +\infty \Rightarrow \int_c^\omega 2kg(x)dx < +\infty \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_c^\omega f(x)dx < +\infty \Rightarrow \int_a^\omega f(x)dx < +\infty;$$
$$\int_a^\omega f(x)dx < +\infty \Rightarrow \int_c^\omega f(x)dx < +\infty \Rightarrow \int_c^\omega \frac{k}{2}g(x)dx < +\infty \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_c^\omega g(x)dx < +\infty \Rightarrow \int_a^\omega g(x)dx < +\infty;$$

□

Приклад 11.3.1.

Доведемо, що

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1+x^4}} < +\infty. \tag{11.17}$$

Нехай $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^4}}$, $g(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$. Оскільки $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ $(x \geq 1)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, а $\int\limits_1^{+\infty} g(x)dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}dx < +\infty$, то за наслідком 11.3.2 виконується (11.17).

Означення 11.3.2. Інтеграл $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ називають *умовно збіжним*, якщо він збігається, але не абсолютно:

$$f \in \mathcal{R}_{[a,\omega)}, \qquad \int_a^\omega |f(x)|dx = +\infty.$$

Приклад 11.3.2.

1. Інтеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$ збігається абсолютно. Справді, $|\frac{\cos x}{x^2}| \leq \frac{1}{x^2}$, а $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty$.

2. Інтеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ збігається умовно. Справді, використовуючи формулу інтегрування частинами (11.11), бачимо, що

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = -\frac{\cos x}{x}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$$

(збіжність розглядуваного інтеграла випливає зі збіжності інтеграла $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$).

З іншого боку, для будь-якого $b \in [\frac{\pi}{2}, +\infty)$ маємо

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{b} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{b} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{b} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{b} \frac{\cos 2x}{x} dx. \tag{11.18}$$

Інтеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$, як можна перевірити інтегруванням частинами, збіжний, тому при $b \to +\infty$ різниця в правій частині співвідношення (11.18) прямує до $+\infty$, отже, з цього співвідношення випливає, що

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = +\infty.$$

Наведемо ще дві ознаки (взагалі кажучи, не абсолютної) збіжності невластивого інтеграла.

Теорема 11.3.2 (ознака Діріхле). *Нехай функції $f, g\colon [a, \omega) \to \mathbb{R}$ задовольняють такі умови:*

$\mathcal{D}_1$) *функція $F(b) = \int\limits_{a}^{b} f(x) dx$ обмежена на $[a, \omega)$:*

$$\big(\exists M > 0\big)\big(\forall b \in [a, \omega)\big) \quad \{|F(b)| \leq M\};$$

$\mathcal{D}_2$) *функція $g(x)$ монотонно прямує до нуля при $x \to \omega$.*

Тоді $\int\limits_{a}^{\omega} f(x) g(x) dx$ збігається.

Доведення (*для випадку $g \in C^1_{[a,\omega)}$*). Нехай, наприклад, $g(x)$ спадна. Тоді

$$\big(\forall x \in [a, \omega)\big) \quad \{(g(x) \geq 0) \wedge (g'(x) \leq 0)\}.$$

Використовуючи формулу інтегрування частинами, для всіх $b \in [a, \omega)$, отримуємо

$$\int\limits_{a}^{b} f(x) g(x) dx = \int\limits_{a}^{b} g(x) dFx = g(x) F(x)\Big|_{a}^{b} - \int\limits_{a}^{b} F(x) g'(x) dx.$$

Інтеграл $\int\limits_{a}^{b} F(x) g'(x) dx$ збігається (навіть абсолютно). Справді,

$$\int\limits_{a}^{b} |F(x) g'(x)| dx \leq M \int\limits_{a}^{\omega} |g'(x)| dx = -M \int\limits_{a}^{\omega} g'(x) dx = M \cdot g(a) < +\infty.$$

З іншого боку, $\lim\limits_{x \to \omega} g(x) F(x) = 0$ (властивість добутку обмеженої та нескінченно малої функцій), тому $g(x) F(x)\Big|_{a}^{\omega} = 0$. Отже, для завершення доведення достатньо використати твердження 11.2.5. □

Наслідок 11.3.3 (ознака Абеля). *Нехай функції* $f, g\colon [a,\omega) \to \mathbb{R}$ *задовольняють такі умови:*

$\mathcal{A}_1$) *інтеграл* $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ *збігається;*

$\mathcal{A}_2$) *функція* $g(x)$ *монотонна й обмежена на* $[a,\omega)$.

Тоді інтеграл $\int\limits_a^\omega f(x)g(x)dx$ *збігається.*

Доведення. З монотонності та обмеженості функції g випливає існування скінченної границі $\lim\limits_{x\to\omega} g(x) \stackrel{\text{def}}{=} g(\omega)$. Маємо

$$\int\limits_a^\omega f(x)g(x)dx = \int\limits_a^\omega f(x)\big(g(x) - g(\omega)\big)dx + g(\omega)\int\limits_a^\omega f(x)dx.$$

Перший інтеграл праворуч збігається за ознакою Діріхле, другий — за умовою. Звідси випливає збіжність інтеграла ліворуч. □

Вправа 11.3.1. *Використовуючи ознаку Діріхле, довести збіжність інтегралів*

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx, \quad \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}dx \quad (\alpha > 0).$$

11.4. Невластиві інтеграли з декількома особливостями

Нагадаємо, що, досліджуючи невластиві інтеграли, під *особливістю* розуміємо або "точку" $+\infty$ $(-\infty)$, якщо вона є однією з меж інтегрування, або ж скінченну точку $\omega \in \mathbb{R}$, в околі якої підінтегральна функція необмежена. Досі ми розглядали інтеграли $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ з однією особливістю — верхньою межею інтегрування. Цілком аналогічно досліджують інтеграли $\int\limits_\omega^b f(x)dx$ з однією особливістю, якою є нижня межа інтегрування. У цьому підрозділі розглянемо загальніший випадок.

Означення 11.4.1. Нехай $f\colon (\omega_1, \omega_2) \to \mathbb{R}$ — деяка функція, інтегровна за Ріманом на будь-якому відрізку $[a,b] \subset (\omega_1,\omega_2)$, ω_1, ω_2 — особливості, $c \in (\omega_1, \omega_2)$. Тоді

$$\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\omega_1}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{\omega_2} f(x)dx, \tag{11.19}$$

причому інтеграл у лівій частині називають *збіжним*, якщо збігаються обидва інтеграли в правій частині цього співвідношення.

Зауваження 11.4.1. Означення 11.4.1 є коректним, тобто не залежить від вибору точки c. Справді, якщо $c_1, c_2 \in (\omega_1, \omega_2)$, то з огляду на адитивність інтеграла

$$\int_{\omega_1}^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{\omega_2} f(x)dx = \int_{\omega_1}^{c_1} f(x)dx +$$

$$+ \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \int_{c_2}^{\omega_2} f(x)dx = \int_{\omega_1}^{c_2} f(x)dx + \int_{c_2}^{\omega_2} f(x)dx.$$

Приклад 11.4.1.

1) Інтеграл $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_{-1}^{0} + \arcsin x\Big|_{0}^{1} = \arcsin x\Big|_{-1}^{1} = \pi$;

2) Інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx = e^{x}\Big|_{-\infty}^{0} - e^{-x}\Big|_{0}^{+\infty} = 2$;

3) Інтеграл $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty$, оскільки при $\alpha \le 1$ $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty$, а при $\alpha \ge 1$ $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty$.

Означення 11.4.2. Нехай $-\infty < a < \omega < b < +\infty$, $f\colon [a,b] \setminus \{\omega\} \to \mathbb{R}$ — деяка функція, необмежена в околі точки ω. Тоді

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_{a}^{\omega} f(x)dx + \int_{\omega}^{b} f(x)dx. \tag{11.20}$$

Приклад 11.4.2.

1) Інтеграл $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 4$;

2) Інтеграл $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ не існує, оскільки $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} = -\infty$, $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x} = +\infty$.

Зауваження 11.4.2. Можна розглянути і складнішу конструкцію. Нехай задано, поки що формально, інтеграл

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \quad (-\infty \le a < b \le +\infty). \tag{11.21}$$

Припустимо, що інтервал (a, b) можна розбити точками $a{=}c_0{<}c_1{<}\ldots{<}c_{n-1}{<}c_n{=}b$ на скінченну кількість інтервалів (c_{i-1}, c_i) таких, що кожний з інтегралів

$$\int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)dx \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{11.22}$$

має тільки одну особливість на одному з кінців (c_{i-1}, c_i).

Тоді, якщо всі невластиві інтеграли (11.22) збігаються, то інтеграл (11.21) називають *збіжним* і приймають

$$\int_a^b f(x)dx \overset{\text{def}}{=\!=} \sum_{i=1}^n \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)dx.$$

Інтеграл (11.21) називають *абсолютно збіжним*, якщо всі інтеграли (11.22) абсолютно збігаються.

Розглянемо одне узагальнення поняття невластивого інтеграла.

Означення 11.4.3. Нехай функція $f(x)$ задовольняє умови означення 11.4.2. Число

$$v.p. \int_a^b f(x)dx \overset{\text{def}}{=\!=} \lim_{\delta\to+0}\Big(\int_a^{\omega-\delta} f(x)dx + \int_{\omega+\delta}^b f(x)dx\Big),$$

якщо границя праворуч існує, називають інтегралом у розумінні *головного значення*.

Якщо функція $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ інтегровна на кожному скінченному відрізку, то

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \overset{\text{def}}{=\!=} \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx.$$

Ці означення запропонував Коші; *v.p.* — початкові букви французьких слів *valeur principal* — головне значення.

Приклад 11.4.3.

1) $v.p. \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\delta\to+0}\Big(\int_{-1}^{-\delta} \frac{dx}{x} + \int_{\delta}^{1} \frac{dx}{x}\Big) = \lim_{\delta\to+0}[(\ln\delta - \ln 1) + (\ln 1 - \ln\delta)] = 0;$

2) $v.p. \int_{-\infty}^{\infty} xdx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} xdx = \lim_{R\to+\infty} \frac{x^2}{2}\Big|_{-R}^{R} = 0.$

Розділ 12

Числові ряди

12.1. Поняття ряду та його основні властивості

Означення 12.1.1. Нехай $\{a_n\}$ — числова послідовність. Вираз

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \tag{12.1}$$

називають *числовим рядом*, а числа a_n та $s_n \stackrel{\text{def}}{=} a_1 + \dots + a_n$ — відповідно, *n-м членом* та *n-ю частковою сумою* цього ряду. Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty} s_n \stackrel{\text{def}}{=} s,$$

то ряд (12.1) називають *збіжним*, а число s — його сумою і пишуть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s. \tag{12.2}$$

Якщо ж ця границя нескінченна або не існує, то ряд (12.1) називають *розбіжним*.

Приклад 12.1.1.

1. Якщо $|q| < 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}$. Справді,

$$s_n = 1 + q + \dots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-q}.$$

2. Сума ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$, оскільки $s_n = \underbrace{1 + \dots + 1}_{n} = n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ розбіжний, оскільки для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ маємо $s_{2k} = 0$, $s_{2k-1} = 1$, отже, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ не існує.

4. Сума ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = e$ (див. наслідок 2.7.1).

Твердження 12.1.1. *Нехай* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *— числові ряди, а* $c \in \mathbb{R}$. *Тоді*

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n; \tag{12.3}$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{12.4}$$

причому зі збіжності рядів праворуч випливає збіжність ряду ліворуч.

Справджуваність цього твердження випливає з означення суми ряду і теореми про границю суми та добутку числових послідовностей.

Означення 12.1.2. Ряд

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots, \tag{12.5}$$

а також його суму, якщо він збігається, називають m-м залишком ряду (12.1).

Твердження 12.1.2. *Числовий ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *збігається тоді й лише тоді, коли збігається будь-який його залишок. У цьому разі для будь-якого* $m \in \mathbb{N}$ *справджується співвідношення*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n. \tag{12.6}$$

Доведення. Справді, для всіх $m \in \mathbb{N}$ та $k > m$ маємо

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = \sum_{n=1}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{k} a_n.$$

Якщо перейдемо в цій рівності до границі при $k \to \infty$ і використаємо теорему про границю суми послідовностей, то переконаємось у справджуваності твердження. □

Зауваження 12.1.1. З твердження 12.1.2 випливає, що *відкидання від ряду або приєднання до нього скінченної кількості початкових членів не впливає на збіжність ряду.* Рівність (12.6) можна записати так:

$$(\forall m \in \mathbb{N}) \quad \{s = s_m + r_m\},$$

де s — сума розглядуваного ряду; s_m та r_m — відповідно, його m-на часткова сума та m-й залишок. Перейдемо в останній рівності до границі при $m \to \infty$ і зробимо такий висновок: *m-й залишок збіжного ряду прямує до нуля при $m \to \infty$.*

12.2. Критерій Коші. Абсолютна збіжність

Теорема 12.2.1 (критерій Коші). *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *збігається тоді і лише тоді, коли*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n, m:\ m > n > N)\quad \{|a_{n+1} + \cdots + a_m| < \varepsilon)\}. \qquad (12.7)$$

Доведення. Збіжність ряду рівносильна збіжності послідовності $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ його часткових сум, яка еквівалентна фундаментальності цієї послідовності (див. підрозділ 2.9), а, отже, виконанню умови (12.7) (порівняйте (12.7) з формулою (2.11)). □

Наслідок 12.2.1 (необхідна умова збіжності). *Якщо ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *збігається, то* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доведення. Прийнявши в (12.7) $m = n + 1$, бачимо, що зі збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ маємо

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n : n > N)\ \{|a_{n+1}| < \varepsilon\},$$

тобто $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = 0$, або, що еквівалентно,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \qquad (12.8)$$

Умова (12.8) є необхідною, проте, як виявляється, не є достатньою умовою збіжності ряду. Переконаємось у цьому на прикладі ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, який називають *гармонійним*. □

Приклад 12.2.1.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбіжний. Справді, в розглядуваній ситуації існує $\varepsilon > 0$ (наприклад, $\varepsilon = \frac{1}{2}$) таке, що для будь-якого $N \in \mathbb{N}$ існують $m, n > N$ (наприклад, $n > N$ — довільне натуральне число, $m = 2n$) такі, що

$$|a_{n+1} + \cdots + a_m| = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

тому умова (12.7) не виконується. Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбіжний.

Означення 12.2.1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ називають *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Теорема 12.2.2. *Будь-який абсолютно збіжний ряд є збіжним.*

Доведення. Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ збігається. Тоді з огляду на критерій Коші

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, m:\ m > n > N) \quad \{|a_{n+1}| + \cdots + |a_m| < \varepsilon\}.$$

Однак

$$|a_{n+1} + \cdots + a_m| \le |a_{n+1}| + \cdots + |a_m|.$$

Звідси, знову ж таки з критерію Коші, випливає збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Означення 12.2.2. Якщо збіжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ не є абсолютно збіжним, то його називають *умовно збіжним*.

12.3. Ряди з невід'ємними членами

Теорема 12.3.1. *Ряд, усі члени якого невід'ємні, збігається тоді і лише тоді, коли послідовність $\{s_n\}$ його часткових сум обмежена. У протилежному разі його сума дорівнює $+\infty$.*

Доведення. Оскільки послідовність часткових сум розглядуваного ряду неспадна, то $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\{s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \ge 0\}$, тому справджуваність цієї теореми випливає з означення суми ряду як границі послідовності $\{s_n\}$ та теореми про границю монотонної послідовності. □

Зауваження 12.3.1. Якщо $a_n \ge 0$ $(n \in \mathbb{N})$, то писатимемо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, якщо цей ряд збіжний, і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, якщо він розбіжний.

Теорема 12.3.2 (перша ознака порівняння). *Якщо для всіх $n \in \mathbb{N}$ (або, принаймні, починаючи з деякого) виконується співвідношення*

$$0 \le a_n \le b_n, \tag{12.9}$$

то зі збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{12.10}$$

випливає збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{12.11}$$

Зауваження 12.3.2. Твердження теореми рівносильне тому, що з розбіжності ряду (12.11) випливає розбіжність ряду (12.10).

Доведення. Оскільки відкидання будь-якої скінченної кількості початкових членів не впливає на збіжність ряду (див. твердження 12.1.2, зауваження 12.1.1), то можна вважати, що (12.9) виконується при всіх $n \in \mathbb{N}$.

Позначимо n-ні часткові суми рядів (12.10), (12.11) через B_n та A_n, відповідно. Зрозуміло, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується $A_n \le B_n$. Крім того, зі збіжності ряду (12.10) та теореми 12.3.1 випливає існування константи $L \in \mathbb{R}$ такої, що $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\{B_n \le L\}$, отже, з огляду на попередню нерівність, $A_n \le L$. Звідси і з теореми 12.3.1 випливає збіжність ряду (12.11). □

Теорема 12.3.3 (друга ознака порівняння). *Нехай $a_n > 0$, $b_n > 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ та існує границя*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \stackrel{\text{def}}{=\!=} k \quad (0 \le k \le +\infty).$$

Тоді:

а) *якщо $0 < k < +\infty$, то ряди* (12.10) *та* (12.11) *збігаються або розбігаються одночасно;*

б) *якщо $k < +\infty$, то зі збіжності ряду* (12.10) *випливає збіжність ряду* (12.11)*;*

в) *якщо $k > 0$, то зі збіжності ряду* (12.11) *випливає збіжність ряду* (12.10).

Доведення. У випадку *б* для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $N \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх $n > N$ виконується нерівність

$$\frac{a_n}{b_n} < k + \varepsilon,$$

отже, для будь-якого $n > N$ маємо

$$a_n < (k+\varepsilon) b_n,$$

тому, використовуючи твердження 12.1.1, 12.1.2, 12.3.2, отримуємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=N+1}^{\infty} (k+\varepsilon) b_n < +\infty \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$$

Справджуваність твердженння *в* випливає з того, що у цьому разі обернене відношення $\frac{b_n}{a_n}$ має скінченну границю.

Твердження *а* є безпосереднім наслідком з двох доведених вище. □

Приклад 12.3.1.

Доведемо, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$. Справді, для будь-якого $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ маємо

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=\!=} \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \stackrel{\text{def}}{=\!=} b_n.$$

Оскільки $b_2 + b_3 + \cdots + b_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1$, то $\sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n < +\infty$, отже, (див. твердження 12.1.2, 12.3.2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.

Теорема 12.3.4 (інтегральна ознака збіжності ряду). *Якщо функція* $f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ *невід'ємна і незростаюча, то*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < +\infty\right) \Leftrightarrow \left(\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx < +\infty\right). \tag{12.12}$$

Доведення. Якщо $k \le x \le k+1$, то, оскільки функція f незростаюча, маємо

$$f(k) \ge f(x) \ge f(k+1).$$

Тому

$$f(k) = \int\limits_{k}^{k+1} f(k)dx \ge \int\limits_{k}^{k+1} f(x)dx \ge \int\limits_{k}^{k+1} f(k+1)dx = f(k+1)$$

(нагадаємо, що обмежена монотонна функція інтегровна на скінченному відрізку), а, отже, для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконуються співвідношення

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \ge \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \ge \sum_{k=1}^{n} f(k+1).$$

Прийнявши $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$, отримуємо

$$S_n \ge \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \ge S_{n+1} - f(1). \tag{12.13}$$

Переконаємось тепер у справджуваності (12.12).

($\Rightarrow$)Якщо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n) \overset{\text{def}}{=\!=} S < +\infty$, то зрозуміло, що $(\forall n \in \mathbb{N})\ \{S_n \le S\}$, отже, з огляду на (12.13) маємо $\int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \le S$. Тому для будь-якого $b \in [1, +\infty)$ виконується

$$F(b) = \int\limits_{1}^{b} f(x)dx \le \int\limits_{1}^{[b]+1} f(x)dx \le S.$$

Звідси і з теореми 3.7.1 випливає, що інтеграл у правій частині (12.12) збігається.

($\Leftarrow$)Навпаки, якщо цей інтеграл збігається, то для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$\int\limits_1^{n+1} f(x)dx \leq \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx,$$

отже, враховуючи (12.13), отримуємо

$$S_{n+1} \leq f(1) + \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx.$$

Звідси і з теореми 12.3.1 випливає, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n) < +\infty$. □

Наслідок 12.3.1 (критерій збіжності узагальненого гармонійного ряду). *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *збігається, якщо* $\alpha > 1$, *і розбігається, якщо* $\alpha \leq 1$.

Доведення. Якщо $\alpha \leq 0$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$, оскільки не виконується необхідна умова збіжності ряду (12.8). Якщо ж $\alpha > 0$, то, використовуючи інтегральну ознаку збіжності з $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, бачимо, що розглядуваний ряд збігається тоді і лише тоді, коли $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} < +\infty$, тобто якщо $\alpha > 1$. □

Теорема 12.3.5. *Нехай* $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$. *У цьому разі ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *збігається тоді і лише тоді, коли збігається ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots .$$

Доведення. Приймемо $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, $\quad t_k = a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k}$. При $n < 2^k$ маємо

$$s_n \leq a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \leq a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k} = t_k,$$

тому

$$s_n \leq t_k. \tag{12.14}$$

З іншого боку, при $n \leq 2^k$ маємо

$$s_n \geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + a_{2^k}) \geq$$
$$\geq \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_3 + \cdots + 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2} t_k,$$

отже,

$$2s_n \geq t_k. \tag{12.15}$$

З огляду на (12.14) і (12.15) послідовності $\{s_n\}$ та $\{t_k\}$ обмежені або необмежені одночасно. Тому для завершення доведення досить використати теорему 12.3.1. $\square$

Вправа 12.3.1. *Довести наслідок 12.3.1 за допомогою теореми 12.3.5.*

12.4. Ознаки збіжності рядів із членами різних знаків

Теорема 12.4.1 (ознака Коші). *Нехай дано ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{12.16}$$

Приймемо $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. *Тоді*

а) *якщо* $\alpha < 1$, *то ряд* (12.16) *збігається;*

б) *якщо* $\alpha > 1$, *то ряд* (12.16) *розбігається.*

Доведення. Доведемо твердження *а*. Нехай $q \in (\alpha, 1)$. Тоді існує $N \in \mathbb{N}$ таке, що для будь-якого $n > N$ виконується нерівність $\sqrt[n]{|a_n|} < q$, а, отже, $|a_n| < q^n$. З огляду на першу теорему порівняння 12.3.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n < +\infty$. Отже, ряд (12.16) є абсолютно збіжним, тому з огляду на теорему 12.2.2 він збігається.

Доведемо твердження *б*. У цьому разі існує підпослідовність $\{a_{n_k}\}$ така, що

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = \alpha.$$

Оскільки $\alpha > 1$, то існує $K \in \mathbb{N}$ таке, що для будь-якого $k > K$ виконується нерівність $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > 1$, а, отже, $|a_{n_k}| > 1$. Зрозуміло, що необхідна умова (12.8) збіжності ряду (12.16) не виконується. $\square$

Зауваження 12.4.1. Існують як збіжні, так і розбіжні ряди (навіть з невід'ємними членами), для яких виконується співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1. \tag{12.17}$$

У цьому можна переконатися на прикладі узагальненого гармонійного ряду (наслідок 12.3.1).

Теорема 12.4.2 (ознака Даламбера). *Ряд* (12.16)

а) *абсолютно збігається, якщо* $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \varlimsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$;

б) *розбігається, якщо* $\varliminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$.

Доведення. Нехай $\beta < q < 1$. Тоді існує $N \in \mathbb{N}$ таке, що для будь-якого $n > N$ виконується $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < q$, а, отже, $|a_{n+1}| < q|a_n|$. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що ця нерівність виконується для всіх $n \in \mathbb{N}$. Використовуючи метод математичної індукції, отримуємо, що $(\forall n \in \mathbb{N})\quad \{|a_n| < |a_1|q^{n-1}\}$. Тому (див. наслідок 12.3.2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_1|q^{n-1} < +\infty$;

У випадку б існує $N \in \mathbb{N}$ таке, що $(\forall n > N)$ $\{|\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1\}$, отже, $|a_n| < |a_{n+1}|$. Зрозуміло, що умова $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ виконуватись не може, тому ряд (12.16) розбігається. □

Зауваження 12.4.2. Існують як збіжні, так і розбіжні ряди (навіть з невід'ємними членами), для яких виконується співвідношення

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1. \tag{12.18}$$

Зауваження 12.4.3. У дослідженні на збіжність рядів, для яких виконується (12.17). часто є корисною *ознака Раабе*: якщо (12.16) — ряд з невід'ємними членами та існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \overset{\text{def}}{=\!=} p$, то при $p > 1$ цей ряд збігається, а при $p < 1$ — розбігається.

Означення 12.4.1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n$, де $c_n > 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, називають *знакопочережним.*

Теорема 12.4.3 (ознака Лейбніца). *Нехай*

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ \{c_n > c_{n+1} > 0\} \quad i \quad \lim_{n\to\infty} c_n = 0.$$

Тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n$ *збігається.*

Доведення. Нехай C_n — n-на часткова сума розглядуваного ряду. Тоді для всіх $m \in \mathbb{N}$ маємо

$$C_{2m} = (c_1 - c_2) + \cdots + (c_{2m-1} - c_{2m}).$$

Отже, $\{C_{2m}\}$ — зростаюча послідовність. З іншого боку,

$$C_{2m} = c_1 - (c_2 - c_3) - \cdots - (c_{2m-2} - c_{2m-1}) - c_{2m} < c_1,$$

тому за теоремою про границю монотонної послідовності існує скінченна границя

$$\lim_{m\to\infty} C_{2m} \overset{\text{def}}{=\!=} C.$$

Оскільки $C_{2m-1} = C_{2m} + c_{2m}$ $(m \in \mathbb{N})$, то й $\lim\limits_{m\to\infty} C_{2m-1} = C$.

Отже, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} C_n = C$. □

12.5. Ознаки Діріхле та Абеля

Розглянемо питання про збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n, \tag{12.19}$$

де $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ — числові послідовності.

Лема 12.5.1. *Приймемо* $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $A_0 \overset{\text{def}}{=} 0$. *Тоді якщо* $0 \le n < m$, *то*

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{m-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_m b_m - A_n b_{n+1}. \tag{12.20}$$

Доведення. Маємо

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{m} (A_k - A_{k-1}) b_k =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{m} A_k b_k - \sum_{k=n+1}^{m} A_{k-1} b_k = \sum_{k=n+1}^{m} A_k b_k - \sum_{l=n}^{m-1} A_l b_{l+1},$$

де $l = k+1$. Виконавши в другій сумі праворуч перепозначення, яке полягає в тому, що писатимемо k замість l, отримаємо

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{m} A_k b_k - \sum_{k=n}^{m-1} A_k b_{k+1} = \sum_{k=n+1}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_m b_m - A_n b_{n+1}.$$

□

Теорема 12.5.1 (ознака Діріхле). *Нехай*

а) *послідовність* $\{A_n\}$ *часткових сум ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *обмежена;*

б) $\{b_n\}$ *— монотонно незростаюча і* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Тоді ряд (12.19) збігається.

Доведення. Виберемо M так, що $(\forall k \in \mathbb{N})\ \{|A_k| \le M\}$. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $N \in \mathbb{N}$ таке, що $b_N < \frac{\varepsilon}{2M}$. Оскільки

$$(\forall k \in \mathbb{N})\ \{(b_k - b_{k+1} \ge 0) \wedge (b_k \ge 0)\},$$

то з (12.20) випливає, що при $N < n < m$

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k\Big| = \Big|\sum_{k=n+1}^{m-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_m b_m - A_n b_{n+1}\Big| \le$$
$$\le \sum_{k=n+1}^{m-1} |A_k||b_k - b_{k+1}| + |A_m||b_m| + |A_n||b_{n+1}| \le$$
$$\le M\Big(\sum_{k=n+1}^{m-1} (b_k - b_{k+1}) + b_m + b_{n+1}\Big) = 2Mb_{n+1} \le 2Mb_N < \varepsilon.$$

Звідси і з критерію Коші (теорема 12.2.1) випливає збіжність ряду (12.19). □

Теорема 12.5.2 (ознака Абеля). *Нехай*

а) *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *збігається;*

б) *послідовність* $\{b_n\}$ *монотонна й обмежена.*

Тоді ряд (12.19) *збігається.*

Доведення. За теоремою про границю монотонної послідовності, існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \overset{\text{def}}{=\!=} b$. Маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b) + b\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Звідси і з теореми 12.5.1 випливає справджуваність твердження. □

Вправа 12.5.1. *Довести, що ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *є умовно збіжним.*

12.6. Властивості збіжних рядів

З'ясуємо, за яких умов основні закони додавання, що справджуються для скінченної кількості доданків, поширюються на ряди.

Теорема 12.6.1. *Нехай*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \dots + a_n + \dots \tag{12.21}$$

— збіжний ряд, $\{n_k\}$ — деяка зростаюча підпослідовність натуральних чисел (тобто $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$, $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$), $n_0 \stackrel{\text{def}}{=\!=} 0$. Тоді ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_{n_{k-1}+1} + \dots + a_{n_k}) = (a_1 + \dots + a_{n_1}) +$$

$$+ (a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}) + \dots + (a_{n_{k-1}+1} + \dots + a_{n_k}) + \dots \quad (12.22)$$

збіжний, а його сума дорівнює сумі ряду (12.21).

Твердження теореми випливає з того, що послідовність часткових сум ряду (12.22) є підпослідовністю часткових сум ряду (12.21).

Зауваження 12.6.1. Обернене твердження неправильне. Справді, перший з рядів

$$(1-1) + (1-1) + \dots + (1-1) + \dots,$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1 + \dots$$

збіжний, а другий — ні.

Означення 12.6.1. Нехай $\mathbb{N} \ni n \mapsto k_n \in \mathbb{N}$ — бієкція. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = a_{k_1} + a_{k_2} + \dots + a_{k_n} + \dots \quad (12.23)$$

називають *перестановкою* ряду (12.21).

Зауваження 12.6.2. Незважаючи на те, що $\{a_n\}$ та $\{a_{k_n}\}$ не відрізняються ні запасом елементів, ні кількістю повторень кожного елемента, це різні послідовності, оскільки вони відрізняються порядком розташування членів. Що ж стосується послідовностей часткових сум рядів (12.21) та (12.23), то вони можуть складатися з різних елементів.

Лема 12.6.1. *Нехай $\{b_k\}$, $\{c_m\}$ — послідовності, утворені, відповідно, невід'ємними та модулями від'ємних членів ряду (12.21) і пронумеровані в такому ж порядку, як у цьому ряді. Ряд (12.21) є абсолютно збіжним тоді і лише тоді, коли збігаються ряди*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k; \quad (12.24)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m. \quad (12.25)$$

У цьому випадку

$$A = B - C, \quad (12.26)$$

де A, B, C — суми рядів (12.21), (12.24), (12.25), відповідно.

Доведення. ($\Rightarrow$) Якщо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \overset{\text{def}}{=} S < +\infty$, то будь-яка часткова сума ряду (12.24) та ряду (12.25) не перевищує числа S, так що ці ряди збіжні.

($\Leftarrow$)Якщо $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \overset{\text{def}}{=} B < +\infty$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_m \overset{\text{def}}{=} C < +\infty$, то будь-яка часткова сума ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ не перевищує числа $B + C$, тому $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq B + C < +\infty$. Далі в цьому разі

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists K \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N}: \ k \geq K) \quad \{|(b_1 + \cdots + b_k) - B| < \frac{\varepsilon}{2}\},$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}: \ m \geq M) \quad \{|(c_1 + \cdots + c_m) - C| < \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

Крім того, існують (єдині) $N_b, N_c \in \mathbb{N}$ такі, що

$$a_{N_b} = b_K, \ a_{N_c} = c_M.$$

Тому якщо $n_0 \geq \max\{N_b, N_c\}$, то для деяких натуральних $k_0 \geq K$, $m_0 \geq M$ виконується рівність

$$\sum_{n=1}^{n_0} a_n = \sum_{k=1}^{k_0} b_k - \sum_{m=1}^{m_0} c_m,$$

отже,

$$\left|\sum_{n=1}^{n_0} a_n - (B - C)\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{k_0} b_k - B\right| + \left|\sum_{m=1}^{m_0} c_n - C)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Звідси і з довільності числа $\varepsilon > 0$ випливає (12.26). □

Теорема 12.6.2 (теорема Діріхле). *Якщо ряд (12.21) абсолютно збіжний, то будь-яка його перестановка (12.23) також абсолютно збігається і має таку ж суму.*

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли всі a_n ($n \in \mathbb{N}$) невід'ємні. Нехай A, A' — суми рядів (12.21) та (12.23), відповідно, а $m \in \mathbb{N}$. Оскільки для будь-якого $n' \geq \max\{k_1, \ldots, k_m\}$

$$a_{k_1} + \cdots + a_{k_m} \leq a_1 + \cdots + a_{n'} \leq A,$$

то $A' \leq A$. Однак (12.21) також є перестановкою ряду (12.23), тому $A \leq A'$. Отже, $A' = A$.

У загальному випадку за доведеним вище $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{k_n}|$, тому ряди (12.21) та (12.23) абсолютно збіжні або розбіжні одночасно.

Далі, нехай B' (C') — сума ряду, членами якого є невід'ємні члени (модулі від'ємних членів) ряду (12.23). З доведеного вище випливає, що ці суми не залежать від способу нумерації введених рядів і що $B' = B$, $C' = C$, де B та C такі, як в умові леми 12.6.1. Використовуючи цю лему, переконуємось, що $A' = B' - C' = B - C = A$. □

Теорема 12.6.3 (теорема Рімана). *Нехай ряд* (12.21) *умовно збіжний,* $-\infty \leq L \leq +\infty$. *Тоді існує така перестановка* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *ряду* (12.21), *що* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = L$.

Доведення. Нехай $\{b_k\}$, $\{c_m\}$ такі, як у лемі 12.6.1. Зрозуміло, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = +\infty, \quad \sum_{m=1}^{\infty} c_m = +\infty.$$

Справді, якщо ці дві суми скінченні, то (12.21) збігається абсолютно, а якщо одна з них скінченна, а інша — ні, то він розбігається. Тому якщо $-\infty < L < +\infty$, то існують натуральні числа $k_1, \dots, k_i, \dots, m_1, \dots, m_i, \dots$ ($k_1 < k_2 < \dots$, $m_1 < m_2 < \dots$) такі, що

$$\begin{cases} d_1 \stackrel{\text{def}}{=} b_1 + \dots + b_{k_1} > L; \\ d_2 \stackrel{\text{def}}{=} d_1 - c_1 - \dots - c_m < L; \\ d_3 \stackrel{\text{def}}{=} d_2 + b_{k_1+1} + \dots + b_{k_2} > L; \\ d_4 \stackrel{\text{def}}{=} d_3 - c_{m_1+1} - \dots - c_{m_2} < L; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ d_{2i-1} \stackrel{\text{def}}{=} d_{2i-2} + b_{k_{i-1}+1} + \dots + b_{k_i} > L; \\ d_{2i} \stackrel{\text{def}}{=} d_{2i-1} - c_{m_{2i-1}+1} - \dots - c_{m_i} < L; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{12.27}$$

Якщо кожного разу, виписуючи члени b_k та c_m, брати їх не більше, ніж необхідно для того, щоб справджувалися нерівності (12.27), то

$$|d_{2i-1} - L| \leq b_{k_i}, \quad |d_{2i} - L| \leq c_{m_i}, \ i = 1, 2, \dots \ . \tag{12.28}$$

Оскільки (12.21) — збіжний ряд, то $\lim\limits_{i\to\infty} b_{k_i} = \lim\limits_{i\to\infty} c_{m_i} = 0$. Звідси і з (12.28) випливає, що $\lim\limits_{j\to\infty} d_j = L$, тобто L є сумою ряду

$$\begin{aligned} &(b_1 + \dots + b_{k_1}) - (c_1 + \dots + c_{m_1}) + (b_{k_1+1} + \dots + b_{k_2}) - \\ &\quad - (c_{m_1+1} + \dots + c_{m_2}) + \dots + (b_{k_{i-1}+1} + \dots + b_{k_i}) - \\ &\qquad - (c_{m_{i-1}+1} + \dots + c_{m_i}) + \dots \ . \end{aligned} \tag{12.29}$$

Позначимо через $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ перестановку ряду (12.21), яку отримано з (12.29) унаслідок розкриття дужок, через $\{F_n\}$ — послідовність часткових сум отриманого ряду і задамо довільне $\varepsilon > 0$. З означення границі послідовності випливає, що існує $j_0 \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх $j \geq j_0$ маємо $|d_j - L| < \varepsilon$.

Тому якщо j_0 непарне ($j_0 = 2i_0 - 1$), то нерівність $|F_n - L|$ справджується при $n \geq k_{i_0} + m_{i_0-1}$, а якщо j_0 парне ($j_0 = 2i_0$) — то при $n \geq k_{i_0} + m_{i_0}$. Отже, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n = L$.

Випадок $L = \pm\infty$ розглядають аналогічно. Зокрема, якщо $L = +\infty$, то починаємо з побудови послідовності $\{d_j\}$, яка задовольняє умови

$$\begin{cases} d_1 \stackrel{\text{def}}{=} b_1 + \dots + b_{k_1} > 1, & d_2 \stackrel{\text{def}}{=} d_1 - c_1; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ d_{2i-1} \stackrel{\text{def}}{=} d_{2i-2} + b_{k_{i-1}+1} + \dots + b_{k_i} > i, & d_{2i} \stackrel{\text{def}}{=} d_{2i-1} - c_i; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

□

Теорема 12.6.4 (теорема Коші). *Сума добутку абсолютно збіжних рядів дорівнює добутку сум цих рядів:*

$$\left.\begin{array}{r} \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = A^* < +\infty, \ \sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n| = B^* < +\infty, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A, \ \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B, \\ \forall n \in \mathbb{N} \ \ c_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k} \end{array}\right| \Rightarrow \left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n = AB. \right.$$

Доведення. Нехай $\sum a_i b_j$, $\sum |a_i| \cdot |b_j|$ — довільні ряди, членами яких є всеможливі добутки $a_i b_j$ та, відповідно, $|a_i| \cdot |b_j|$, а s — довільна часткова сума ряду $\sum |a_i| \cdot |b_j|$.

Позначимо через i_0 (j_0) найбільший з індексів i (j), які фігурують у цій сумі, і приймемо $n = \max\{i_0, j_0\}$. Маємо

$$s \leq \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |a_i| \cdot |b_j| = \sum_{i=1}^{n} |a_i| \cdot \sum_{j=1}^{n} |b_j| \leq A^* B^*.$$

Тому ряд $\sum a_i b_j$ абсолютно збіжний, отже, його сума s, з огляду на теорему 12.6.2, не залежить від способу нумерації його членів. Звідси і з теореми 12.6.1 випливає, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + \dots + (a_1 b_n + \dots + a_n b_1) + \dots$$

збіжний і його сума

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = s = \lim_{n\to\infty} (a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_2 b_1) + \dots +$$

$$+ (a_1 b_n + \dots + a_n b_n + \dots + a_n b_1) + \dots) = \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} b_j \Big) = A \cdot B.$$

□

Вправа 12.6.1. *Довести справджуваність таких тверджень:*

а) *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *де* $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, *збіжний, а ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, *де* $c_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k a_{n+1-k} =$ $= (-1)^{n-1} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n+1-k}}$, *— розбіжний;*

б) *ряд* $E(x) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *абсолютно збігається при всіх* $x \in \mathbb{R}$ *і виконується*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \; E(x+y) = E(x)E(y);$$

в) *теорема про добуток збіжних рядів справджується, якщо абсолютно збіжним є тільки один з них.*

Розділ 13

Функціональні послідовності та ряди

13.1. Поточкова та рівномірна збіжність функціональних послідовностей

Означення 13.1.1. Нехай E — довільна множина, а $f, f_1, f_2, \ldots : E \to \mathbb{R}$ — деякі функції. Кажуть, що функціональна послідовність $\{f_n\}$ збігається до функції f *поточково* на множині E, або що f є (поточковою) границею функціональної послідовності $\{f_n\}$ (і пишуть: $f_n \xrightarrow[E]{} f$), якщо

$$(\forall x \in E) \quad \{\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\}, \tag{13.1}$$

тобто

$$(\forall x \in E)\ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n > N) \quad \{|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}. \tag{13.2}$$

Означення 13.1.2. Функціональну послідовність $\{f_n\}$ називають *рівномірно* збіжною на множині E до функції f, якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n > N)\ (\forall x \in E) \quad \{|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}. \tag{13.3}$$

Це коротко записують так:

$$f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f.$$

Зауваження 13.1.1. Формально два означення відрізняються перестановкою символів $(\forall x \in E)$ та $(\exists N \in \mathbb{N})$ (порівняйте (13.2) та (13.3)). Проте в (13.2) N залежить від x, а в (13.3) — не залежить.

Приклад 13.1.1.

1. Нехай $E = [0,1)$, $f_n(x) = x^n$, $f(x) = 0$, $x \in E$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, що $f_n \underset{E}{\longrightarrow} f$. Доведемо, що ця збіжність не є рівномірною. Для цього з'ясуємо зміст поняття "послідовність $\{f_n\}$ не є рівномірно збіжною до функції f на E", тобто побудуємо заперечення висловлювання (13.3):

$$(\exists \varepsilon > 0)\ (\forall N \in \mathbb{N})\ (\exists n > N)\ (\exists x \in E) \quad \{|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}, \tag{13.4}$$

де x, взагалі кажучи, залежить від n: $x = x_n$.

Приймемо $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Маємо

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}.$$

Отже, (13.4) справджується, наприклад, при $\varepsilon = \frac{1}{3}$ та довільних $n > N$ і $x = 1 - \frac{1}{n}$ таких, що $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \geq \frac{1}{3}$.

2. Нехай $E = [0,1]$, $f_n(x) = \frac{x}{n}$, $f(x) = 0$ ($x \in E$, $n \in \mathbb{N}$). Зрозуміло, що

$$(\forall x \in [0,1])\ (\exists n \in \mathbb{N}) \quad \{|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}\}.$$

Тому для довільних $\varepsilon > 0$, $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ та $n > N$ маємо

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N+1} = \frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1} < \varepsilon.$$

Звідси і з (13.3) випливає, що $f_n \underset{[0,1]}{\rightrightarrows} f$.

Теорема 13.1.1. *Функціональна послідовність* $\{f_n\}$ *є рівномірно збіжною на множині* E *до функції* f *тоді й лише тоді, коли*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0. \tag{13.5}$$

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$. Тоді

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n > N)\ (\forall x \in E) \quad \{|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

Взявши зазначене N, для всіх $n > N$ матимемо

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

а це, згідно з означенням границі числової послідовності, рівносильне умові (13.5).

($\Leftarrow$) З (13.5) випливає, що

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n > N) \quad \{\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}.$$

Тому для всіх $n > N$ та всіх $x \in E$ виконується нерівність $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. А це означає, що $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$. □

Приклад 13.1.2.

1. Нехай $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$, $f(x) = 0$, $x \in [0,1]$. Оскільки $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x)$, а $f_n \in C_{[0,1]}$, то

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{0\le x\le 1} f_n(x).$$

Крім того,

$$f_n'(x) = \frac{1 + n^2x^2 - x\cdot 2n^2x}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2},$$

тому

$$\max_{0\le x\le 1} f_n(x) = \max\{f_n(0), f_n\Big(\frac{1}{n}\Big), f_n(1)\} = \max\{0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{1+n^2}\} = \frac{1}{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Звідси і з теореми 13.1.1 випливає, що $f_n \underset{[0,1]}{\rightrightarrows} f$.

2. Нехай $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $f(x) = 0$, $x \in [0,1]$. Зрозуміло, що $f_n \underset{[0,1]}{\longrightarrow} f$. З іншого боку, міркуючи так само, як під час розгляду попереднього прикладу і враховуючи, що

$$f_n'(x) = \frac{n(1+n^2x^2) - nx\cdot 2n^2x^2}{(2+n^2x^2)^2} = \frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2},$$

отримуємо

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = f_n\Big(\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{2}.$$

Отже, з огляду на теорему 13.1.1 збіжність не є рівномірною.

Теорема 13.1.2. (критерій Коші рівномірної збіжності функціональної послідовності). *Функціональна послідовність $\{f_n\}$ є рівномірно збіжною на множині E тоді і лише тоді, коли*

$$(\forall\varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall x \in E)\ (\forall m,n : m,n > N)\{|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\}. \quad (13.6)$$

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай $f\colon E \to \mathbb{R}$ — деяка функція, $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$, а $\varepsilon > 0$. Тоді, згідно з означенням рівномірної збіжності,

$$(\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n > N)\ (\forall x \in E) \quad \{|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

Тому якщо $m,n > N$, то $\forall x \in E$ маємо

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Якщо виконується умова (13.6), то для будь-якого фіксованого $x \in E$ послідовність $\{f_n(x)\}$ є фундаментальною, а, отже, існує скінченна границя послідовності $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \overset{\text{def}}{=\!=} f(x)$. Доведемо, що $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$. Справді, з огляду на (13.6) для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $N \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх натуральних $m,n > N$ і всіх $x \in E$ виконується нерівність

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Перейшовши у цій нерівності до границі при $m \to \infty$, бачимо, що

$$(\forall n > N)\ (\forall x \in E) \quad \{|f_n(x) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\},$$

тобто $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$. □

Вправа 13.1.1. *Довести справджуваність таких тверджень:*
а) *якщо* $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$, $g_n \underset{E}{\rightrightarrows} g$, *то* $(f_n \pm g_n) \underset{E}{\rightrightarrows} (f \pm g)$;
б) *якщо* $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$, *а* $g\colon E \to \mathbb{R}$ — *обмежена функція, то* $gf_n \underset{E}{\rightrightarrows} gf$.

13.2. Рівномірно збіжні функціональні ряди

Означення 13.2.1. Нехай E — довільна множина, а $f, u_1, u_2, \dots : E \to \mathbb{R}$ — деякі функції. Кажуть, що функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{13.7}$$

поточково (рівномірно) збігається до функції f на множині E, якщо послідовність його часткових сум $\{S_n\}$, де $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$, поточково (рівномірно) збігається до функції f на цій множині.

Зауваження 13.2.1. Маємо: а) поточково збіжний функціональний ряд (13.7) є рівномірно збіжним на E тоді і лише тоді, коли

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n > N)\ (\forall x \in E) \quad \left\{\Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_n(x)\Big| < \varepsilon\right\}; \tag{13.8}$$

б) на підставі теореми 13.1.2 неважко сформулювати і довести критерій Коші рівномірної збіжності функціонального ряду:

ряд (13.7) *є рівномірно збіжним на E тоді і лише тоді, коли*

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n > N)\ (\forall p \in \mathbb{N})\ (\forall x \in E)\ \left\{\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_n(x)\Big| < \varepsilon\right\}. \tag{13.9}$$

Теорема 13.2.1. (ознака Вейєрштрасса рівномірної збіжності функціонального ряду). *Якщо члени функціонального ряду* (13.7) *задовольняють умову*

$$(\forall x \in E)\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \{|u_n(x)| \le c_n\}, \tag{13.10}$$

причому

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty, \tag{13.11}$$

то цей функціональний ряд є рівномірно збіжним на множині E.

Доведення. Із (13.11) і критерію Коші збіжності числового ряду випливає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $N \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх натуральних $n > N$ та всіх $p \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} c_n < \varepsilon$, а, отже, з огляду на (13.10) для всіх $x \in E$ маємо

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_n(x)\Big| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_n(x)| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} c_n < \varepsilon. \tag{13.12}$$

Як бачимо, виконується умова (13.9), отже, розглядуваний ряд рівномірно збігається на множині E. □

Зауваження 13.2.2. В умовах теореми 13.2.1 ряд (13.7) є абсолютно збіжним.

Приклад 13.2.1.

1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ збігається на $\mathbb{R}$ абсолютно і рівномірно, оскільки для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}, \quad \text{і} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ поточково збігається на множині $[0,1)$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$. Однак, згідно з теоремою 13.5, ця збіжність рівномірною не є, тому що

$$\sup_{x\in[0,1)} \left|\frac{1}{1-x} - \sum_{k=1}^{n} x^{k-1}\right| = \sup_{x\in[0,1)} \sum_{k=n+1} x^{k-1} =$$

$$= \sup_{x\in[0,1)} \frac{x^n}{1-x} \ge \frac{x^n}{1-x}\Big|_{x=1-\frac{1}{n}} = n\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

З іншого боку, на будь-якому відрізку $[0, 1-\varepsilon]$, де $0 < \varepsilon < 1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ рівномірно збігається. Це випливає з теореми 13.2.1 і того, що

$$(\forall x \in [0, 1-\varepsilon])\ \{x^{n-1} \le (1-\varepsilon)^{n-1}\}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (1-\varepsilon)^{n-1} = \frac{1}{\varepsilon} < +\infty.$$

Сформулюємо ще дві ознаки рівномірної збіжності функціональних рядів, які у випадку рядів зі сталими членами зводяться до тверджень 12.5.1, 12.5.2.

Теорема 13.2.2 (ознака Діріхле). *Нехай функції $a_n(x)$ та $b_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, визначені на множині E, причому*

а) *послідовність часткових сум ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ обмежена, тобто*

$$(\exists M > 0)\ (\forall k \in \mathbb{N})\ (\forall x \in E) \quad \left\{ \left| \sum_{n=1}^{k} a_n(x) \right| \le M \right\};$$

б) $(\forall x \in E)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \{b_n(x) \ge b_{n+1}(x)\}$ *і* $b_n \underset{E}{\rightrightarrows} 0.$

Тоді ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \tag{13.13}$$

рівномірно збіжний на множині E.

Теорема 13.2.3 (ознака Абеля). *Нехай*

а) *ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ рівномірно збігається на множині E;*

б) $(\forall x \in E)\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \{b_n(x) \ge b_{n+1}(x)\}$ *і послідовність $\{b_n(x)\}$ обмежена на E, тобто*

$$(\exists M > 0)\ (\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall x \in E) \quad \{|b_n(x)| \le M\}.$$

Тоді ряд (13.13) *є рівномірно збіжним на множині E.*

У справджуваності цих ознак неважко переконатися шляхом модифікації міркувань, використаних для доведення тверджень 12.5.1, 12.5.2.

13.3. Властивості функціональних послідовностей

Розглянемо функції, визначені на певному проміжку $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$, і з'ясуємо умови, які повинна задовольняти функціональна послідовність $\{f_n\}$, щоб символ $\lim\limits_{n\to\infty}$ її границі комутував із символами

$$\lim_{x\to c}, \quad \int_a^b, \quad \frac{d}{dx}.$$

Нехай $f_n \underset{\mathcal{I}}{\longrightarrow} f$. Отже, нас цікавить, за яких умов справджуватимуться такі твердження:

а)

$$\lim_{n\to\infty} \bigl(\lim_{x\to c} f_n(x)\bigr) = \lim_{x\to c} \bigl(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\bigr) = \lim_{x\to c} f(x); \tag{13.14}$$

б) $(\forall n \in \mathbb{N})\quad \big(f_n \in C_{\mathcal{I}}\big) \Rightarrow \{f \in C_{\mathcal{I}}\}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b \big(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\big)dx$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x) = \big(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\big)'$.

Покажемо на прикладах, що ці твердження справджуються не завжди.

Приклад 13.3.1.

Нехай $f_n(x) = x^n$ $(x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N})$. Зрозуміло, що $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, де

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1; \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Маємо

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 1} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1;$$

$$\lim_{x\to 1}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = 0.$$

Крім того, $f_n \in C_{[0,1]}$, $n \in \mathbb{N}$, але $f \notin C_{[0,1]}$.

Приклад 13.3.2.

Нехай $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, отже, $f(x) \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Тоді $f'(x) = 0$, $f_n'(x) = \cos nx$, отже, $\{f_n'\}$ не збігається до f'. Наприклад, $f'(0) = 0$, а $f_n'(0) = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

Приклад 13.3.3.

Нехай $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$, $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$. Маємо $f(x) \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $0 \le x \le 1$, $\int\limits_0^1 f_n(x)dx = n\int\limits_0^1 (1-x^2)^n dx = -\frac{n}{2}\int\limits_0^1 (1-x^2)^n d(1-x^2) = \frac{n}{2}\int\limits_0^1 t^n dt = \frac{n}{2(n+1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$, тоді як $\int\limits_0^1 f(x)dx = 0$.

Теорема 13.3.1. *Нехай $f_n \underset{\mathcal{I}}{\rightrightarrows} f$ та існує скінченна границя*

$$\lim_{x\to c} f_n(x) = C_n, \quad n = 1, 2, \dots\ . \tag{13.15}$$

Тоді послідовність $\{C_n\}$ збіжна і наступні границі співпадають

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{n\to\infty} C_n. \tag{13.16}$$

Іншими словами, у цьому випадку виконуються рівності (13.14).

Перш ніж переходити до доведення, зазначимо, що точка c, яка фігурує в умові, може не належати проміжку $\mathcal{I}$. Важливо, щоб вона була його *граничною точкою*. Отже, можливий випадок, коли $\mathcal{I} = (a,b)$, $c = a$ або $\mathcal{I} = \mathbb{R}$, $c = +\infty$.

Далі, якщо c є верхньою (нижньою) межею множини $\mathcal{I}$, то під $\lim\limits_{x\to c}$ розуміємо лівосторонню (правосторонню) границю.

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$. За критерієм Коші, існує $N \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх натуральних $m, n > N$ і всіх $x \in \mathcal{I}$ виконується нерівність

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{13.17}$$

Переходячи в (13.17) до границі при $x \to c$ і враховуючи (13.15), отримуємо

$$(\forall n > N)\ (\forall m > N)\quad \{|C_n - C_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\},$$

тобто $\{C_n\}$ — фундаментальна послідовність, отже, існує $\lim\limits_{n\to\infty} C_n \stackrel{\text{def}}{=} C \in \mathbb{R}$. Маємо

$$(\forall x \in \mathcal{I})\quad \{|f(x) - C| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - C_n| + |C_n - C|\}. \tag{13.18}$$

Виберемо $n \in \mathbb{N}$ так, що

$$(\forall x \in \mathcal{I})\quad \{|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}\}; \tag{13.19}$$

$$|C_n - C| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{13.20}$$

(таке n існує, оскільки $f_n \underset{\mathcal{I}}{\rightrightarrows} f$, $C_n \xrightarrow[n\to\infty]{} C$). З (13.15) випливає існування проколеного околу $\overset{\circ}{\mathcal{U}}(c)$ точки c такого, що для всіх $x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}(c) \cap \mathcal{I}$

$$|f_n(x) - C_n| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{13.21}$$

Підставимо (13.19), (13.20), (13.21) в (13.18) й отримаємо

$$(\forall x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}(c) \cap \mathcal{I})\{|f(x) - C| \leq \varepsilon\}.$$

Співвідношення (13.16) доведено. □

Наслідок 13.3.1. *Границя рівномірно збіжної послідовності неперевних функцій є неперервною функцією.*

Доведення. Нехай $c \in \mathcal{I}$. З огляду на теорему 13.3.1

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c}\big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\big) = \lim_{n\to\infty}\big(\lim_{x\to c} f_n(x)\big) = \lim_{n\to\infty} f_n(c) = f(c),$$

тобто f неперервна в точці $x = c$, а, отже, і на всьому проміжку $\mathcal{I}$. □

Вправа 13.3.1. *Довести таке: якщо функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ рівномірно на множині E збігається до функції $S(x)$, а його члени $u_n(x)$ — неперервні на цій множині функції, то його сума $S(x)$ є неперервною на множині E функцією, тобто*

$$\lim_{x\to x_0}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\Big) \equiv \lim_{x\to x_0} S(x) \equiv S(x_0) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\lim_{x\to x_0} u_n(x)\Big).$$

Теорема 13.3.2 (теорема Діні). *Нехай* $-\infty < a < b < +\infty$. *Якщо послідовність* $\{f_n\}$ *неперевних на* $[a,b]$ *функцій при кожному* $x \in [a,b]$ *незростаюча (або неспадна і збігається до* f, *де функція* f *неперервна на* $[a,b]$, *то така збіжність є рівномірною.*

Доведення. Нехай (для визначеності) послідовність $\{f_n(x)\}$, $x \in [a,b]$, є незростаючою. Для довільних $x \in [a,b]$, $n \in \mathbb{N}$ приймемо $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$. Маємо

$$g_n \in C_{[a,b]}; \tag{13.22}$$

$$g_n \underset{[a,b]}{\longrightarrow} 0; \tag{13.23}$$

$$g_n(x) \geq g_{n+1}(x); \tag{13.24}$$

$$g_n(x) \geq 0. \tag{13.25}$$

Доведемо, що

$$g_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} 0. \tag{13.26}$$

Для цього зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. З (13.23), (13.25) випливає, що для будь-якого $x \in [a,b]$ існує $n_x \in \mathbb{N}$ таке, що

$$0 \leq g_{n_x}(x) < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{13.27}$$

а з (13.22), — що існує $\delta_x > 0$ таке, що для всіх $t \in [a,b]$, які задовольняють умову $|x-t| < \delta_x$, справджується нерівність

$$|g_{n_x}(x) - g_{n_x}(t)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

отже, з огляду на (13.25), (13.27) $0 \leq g_{n_x}(t) < \varepsilon$. З урахуванням (13.24) маємо

$$(\forall x \in [a,b])\ (\exists n_x \in \mathbb{N})\ (\exists \delta_x > 0)$$

$$(\forall t \in [a,b] \cap \mathcal{U}_{\delta_x}(x))\ (\forall n \geq n_x) \quad \{0 \leq g_n(t) < \varepsilon\}. \tag{13.28}$$

Зрозуміло, що $[a,b] \subset \bigcup\limits_{x\in[a,b]} \mathcal{U}_{\delta_x}(x)$, тому за лемою 4.10.1 (лема Бореля-Лебега) існують такі $x_1, \ldots, x_m \in [a,b]$, що

$$[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{U}_{\delta_{x_i}}(x_i).$$

Звідси і з (13.28) випливає, що для $n > \max\{n_{x_1}, \ldots, n_{x_m}\}$ нерівність $0 \leq g_n(t) < \varepsilon$ виконується при всіх $t \in [a,b]$. Отже, (13.26) доведено. □

Приклад 13.3.4.

Нехай $f_n(x) = \frac{1}{nx+1}$ ($x \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$). Зрозуміло, що $\{f_n\}$ — послідовність неперервних функцій, причому для кожного $x \in (0,1)$ послідовність $\{f_n(x)\}$ незростаюча і збігається до нуля. Однак $\sup\limits_{x\in(0,1)} f_n(x) = 1$, тому ця збіжність нерівномірна (отже, в умові теореми 13.3.2 замінити відрізок $[a,b]$ інтервалом (a,b) не можна).

Теорема 13.3.3. *Нехай $-\infty < a < b < +\infty$. Якщо послідовність $\{f_n\}$ неперевних на $[a,b]$ функцій $f_n(x)$ рівномірно збігається на $[a,b]$ до функції f, то*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx. \tag{13.29}$$

Доведення. Оскільки функція f є неперервною, отже, й інтегровною на $[a,b]$, то всі інтеграли, які розглядають у (13.29), визначені коректно. Далі, з теорем 9.6.2, 9.6.3 та зауваження 9.6.1 випливає, що

$$0 \le \left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))dx\right| \le$$

$$\le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \le \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \cdot (b-a).$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0$, то для завершення доведення досить використати теорему 2.2.8 "про двох міліціонерів". □

Зауваження 13.3.1. Насправді виконується сильніше твердження, а саме:

$$\left.\begin{array}{c} \forall n \in \mathbb{N} \quad f_n \in \mathcal{R}_{[a,b]}, \\ f_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f \end{array}\right| \Rightarrow \left| \begin{array}{c} f \in \mathcal{R}_{[a,b]}, \\ \int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx. \end{array}\right.$$

Вправа 13.3.2. *Довести таке: якщо функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається рівномірно на відрізку $[a,b]$ до функції $S(x)$, а його члени $u_n(x)$ — неперервні на цьому відрізку функції, то*

$$\int_a^b \Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\Big)\, dx \equiv \int_a^b S(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\int_a^b u_n(x)\, dx\Big).$$

Теорема 13.3.4. *Якщо на відрізку $[a,b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, послідовність неперервно диференційовних функцій є поточково збіжною, а послідовність їхніх похідних — рівномірно збіжною, то гранична функція неперервно диференційовна, а її похідна дорівнює границі послідовності похідних:*

$$\left.\begin{array}{c} (\forall n \in \mathbb{N}) \quad \{f_n \in C^1_{[a,b]}\}, \\ f_n \underset{[a,b]}{\longrightarrow} f, \quad f'_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} g \end{array}\right| \Rightarrow \left| \begin{array}{c} f \in C^1_{[a,b]}, \\ (\forall x \in [a,b]) \quad \{f'(x) = g(x)\}. \end{array}\right.$$

Доведення. З теорем 13.3.1, 13.3.3 випливає, що $g \in C_{[a,b]}$ і для будь-якого $x \in [a,b]$ маємо

$$\int_a^x g(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)dt = \lim_{n\to\infty} [f_n(x) - f_n(a)] = f(x) - f(a).$$

А це означає, що $f \in C^1_{[a,b]}$ і $f'(x) = g(x)$, якщо $x \in [a,b]$. □

Вправа 13.3.3. *Довести таке: якщо функціональний ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *збігається на відрізку* $[a,b]$ *до функції* $S(x)$, *функції* $u_n(x)$ *— неперервно диференційовні на цьому відрізку і ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ *рівномірно збігається на* $[a,b]$, *то сума ряду* $S(x)$ *є неперервно диференційовною функцією, причому*

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\Big)' \equiv S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n{}'(x).$$

13.4. Степеневі ряди

Означення 13.4.1. Нехай $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ — послідовність дійсних чисел, $x_0 \in \mathbb{R}$. Функціональний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{13.30}$$

називають *степеневим рядом*, а числа a_n — *коефіцієнтами* цього ряду.

Зауваження 13.4.1. Зрозуміло, що заміною $x - x_0 = t$ ряд (13.30) зводиться до ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{13.31}$$

тому часто вважатимемо, що в (13.30) $x_0 = 0$.

Означення 13.4.2. Число

$$R = \frac{1}{\alpha}, \qquad \text{де} \qquad \alpha = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \tag{13.32}$$

називають *радіусом збіжності* ряду (13.31) (якщо $\alpha = 0$, то $R = +\infty$, а якщо $\alpha = \infty$, то $R = 0$).

Теорема 13.4.1. *Ряд* (13.31) *з радіусом збіжності* R *абсолютно збігається, якщо* $|x| < R$, *і розбігається, якщо* $|x| > R$.

Доведення. Оскільки

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x|\cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{R},$$

то справджуваність теореми випливає з ознаки Коші збіжності числового ряду. □

Зауваження 13.4.2. З теореми 13.4.1 випливає, що областю збіжності ряду (13.31) є один із проміжків

$$[-R, R],\quad (-R, R),\quad [-R, R),\quad (-R, R],$$

отже, областю збіжності ряду (13.30) — один із проміжків

$$[x_0 - R, x_0 + R],\quad (x_0 - R, x_0 + R),\quad [x_0 - R, x_0 + R),\quad (x_0 - R, x_0 + R].$$

Тому множину тих $x \in R$, для яких степеневий ряд збігається, часто називають ***проміжком збіжності ряду.***

Зауваження 13.4.3. Припустимо, що існує (не обов'язково скінченна) границя

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \beta, \tag{13.33}$$

де $\{a_n\}$ — послідовність коефіцієнтів ряду (13.31). Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \beta\cdot|x|,$$

то за ознакою Даламбера ряд (13.31) збігається, якщо $|x| < \frac{1}{\beta}$, і розбігається, якщо $|x| > \frac{1}{\beta}$. Звідси і з теореми 13.4.1 робимо висновок, що в розглядуваній ситуації

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{13.34}$$

Зрештою, можна довести і безпосередньо таке: якщо виконується (13.33), то послідовність $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ збіжна і $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \beta$.

Приклад 13.4.1.

1. Для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!x^n$ з огляду на (13.34) $R = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = 0$, тому проміжок збіжності тут вироджується в точку $x = 0$.

2. Аналогічно, для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$: $R = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim\limits_{n\to\infty}(n+1) = +\infty$, тому проміжком збіжності є вся числова пряма.

3. Для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ маємо $R = 1$, проміжок збіжності $(-1, 1)$.

4. Для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ знаходимо $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}\frac{1}{n}}{(-1)^n\frac{1}{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$, проміжок збіжності $(-1, 1]$.

Теорема 13.4.2. *Нехай ряд* (13.31) *має радіус збіжності* $R > 0$ *і функція*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (|x| < R). \tag{13.35}$$

Тоді для будь-якого додатного числа $r < R$ *ряд* (13.31) *рівномірно збіжний на* $[-r, r]$, *а функція* f *неперервна на* $(-R, R)$.

Доведення. Нехай $|x| \le r$. Тоді

$$|a_n x^n| \le |a_n r^n| \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Крім того, з огляду на теорему 13.4.1 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n r^n| < +\infty$. Звідси і з ознаки Вейєрштрасса (теорема 13.2.1) випливає рівномірна збіжність ряду (13.31) на $[-r, r]$.

Тому, з урахуванням наслідку 13.3.1 бачимо, що f неперервна на $[-r, r]$. Оскільки для будь-якого $x \in (-R, R)$ існує число $r \in \big(|x|, R\big)$, то зрозуміло, що $f \in C_{(-R,R)}$. □

Наслідок 13.4.1. *Нехай виконуються умови теореми 13.4.2. Тоді функція* f *має похідні всіх порядків на* $(-R, R)$, *причому*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k}. \tag{13.36}$$

Зокрема,

$$f^{(k)}(0) = k! a_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \tag{13.37}$$

Доведення. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, то

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

тобто ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \tag{13.38}$$

утворений з (13.31) унаслідок почленного диференціювання, також має радіус збіжності R. Застосовуючи теорему 13.4.1 до ряду (13.38), бачимо, що для будь-якого $r \in (0, R)$ він рівномірно збіжний на $[-r, r]$, а його сума (позначимо її тимчасово через $f_1(x)$) неперервно залежить від x на $(-R, R)$: $f_1 \in C_{(-R,R)}$. Звідси і з теореми 13.3.4 випливає, що функція f неперервно диференційовна на $[-r, r]$ (а, отже, й на $(-R, R)$) і для всіх $x \in [-r, r]$ (отже, і для всіх $x \in (-R, R)$) $f'(x) = f_1(x)$. Тому для всіх $x \in (-R, R)$ маємо

$$f'(x) = \sum n a_n x^{n-1}. \tag{13.39}$$

Застосовуючи принцип математичної індукції, тобто послідовно використовуючи імплікацію (13.35)$\Rightarrow$(13.39) до функцій f', f'' і так далі, переконуємось, що (13.36) справджується при довільному $k \in \mathbb{N}$.

Прийнявши в (13.36) $x = 0$, отримаємо (13.37). □

Наслідок 13.4.2. *За умов теореми 13.4.2 ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \tag{13.40}$$

отриманий з (13.31) *унаслідок почленного інтегрування, має радіус збіжності R і для всіх $x \in (-R, R)$ виконується*

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}. \tag{13.41}$$

Доведення. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$, то

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{a_n}{n+1}\right|} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}.$$

Звідси випливає справджуваність першого твердження.

Далі з огляду на терему 13.4.2 для будь-якого $r \in (0, R)$ послідовність $\{s_k\}$ часткових сум ряду (13.31) рівномірно збігається на $[-r, r]$ до функції f. Тому, використовуючи теорему 13.3.3 про граничний перехід під знаком інтеграла, бачимо, що для будь-якого $x \in [-r, r]$, отже, з огляду на довільність числа r для будь-якого $x \in (-R, R)$

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \lim_{k\to\infty} s_k(t)dt = \lim_{k\to\infty} \int_0^x \sum_{n=0}^{k} a_n t^n dt =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

□

Зауваження 13.4.4. Результати, викладені в наслідках 13.4.1, 13.4.2, коротко можна сформулювати так: степеневий ряд усередині його проміжку збіжності можна диференціювати та інтегрувати почленно (будь-яку кількість разів).

Теорема 13.4.3 (теорема Абеля). *Якщо R — радіус збіжності ряду* (13.31) *($R < +\infty$), і цей ряд збігається при $x = R$, то він збігається рівномірно на $[0, R]$, а його сума неперервна на $[0, R]$:*

$$\lim_{x\to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Доведення. Нехай $0 \le x \le R$. Маємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n.$$

Оскільки за умовою ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ збігається, а його члени не залежать від x, то він збігається рівномірно на $[0, R]$. Далі, послідовність $\left\{\left(\frac{x}{R}\right)^n\right\}$ обмежена на $[0, R]$:

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ (\forall x \in [0, R]) \quad \left\{0 \le \left(\frac{x}{R}\right)^n \le 1\right\}$$

і незростаюча при кожному $x \in [0, R]$. Тому з огляду на ознаку Абеля рівномірної збіжності рядів ряд (13.31) рівномірно збігається на $[0, R]$. Звідси і з наслідку 13.3.1 про границю рівномірно збіжної послідовності неперервних функцій випливає справджуваність другого твердження теореми. □

Приклад 13.4.2.

Доведемо, що

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \tag{13.42}$$

якщо $|x| \le 1$. Зокрема,

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}. \tag{13.43}$$

Для цього використаємо формулу суми нескінченної спадної геометричної прогресії. Маємо

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \quad (-1 < t < 1).$$

Оскільки степеневий ряд можна почленно інтегрувати всередині його проміжку збіжності, то

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \Big(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}\Big) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

якщо $|x|<1$. Однак за ознакою Лейбніца отриманий ряд збігається також при $x = \pm 1$. Звідси, з теореми Абеля і неперервності функції $\operatorname{arctg} x$ при $x = \pm 1$ випливає, що (13.42) справджується при всіх $x \in [-1, 1]$. Підставимо в цю формулу $x = 1$ і отримаємо (13.43) (нагадаємо, що $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$).

Вправа 13.4.1. *Довести, що*

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| \le 1).$$

Вказівка: використати ознаку Раабе.

13.5. Ряд Тейлора

Означення 13.5.1. Нехай функція f визначена в деякому околі точки x_0 і має у цій точці похідні всіх порядків. Тоді степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{13.44}$$

називають *рядом Тейлора* функції f в точці x_0.

Теорема 13.5.1. *Якщо функцію f можна зобразити в околі точки x_0 сумою степеневого ряду, то цей ряд єдиний і є рядом Тейлора функції f в точці x_0.*

Доведення. Нехай для всіх $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ виконується співвідношення

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n. \tag{13.45}$$

Отже, f задовольняє умови теореми 13.4.2, тому з урахуванням співвідношень (13.37) наслідку 13.4.1 набуває вигляду

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{13.46}$$

□

Зауваження 13.5.1. Функцію, що задовольняє умови теореми 13.5.1, називають *аналітичною* в точці x_0. З наслідку 13.4.1 випливає, що аналітична в точці x_0 функція має в деякому околі цієї точки похідні всіх порядків. Обернене твердження неправильне, тобто ряд Тейлора функції f не завжди збігається до цієї ж функції f. У цьому переконує наведений нижче приклад.

Приклад 13.5.1.

Нехай

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{якщо } x \neq 0; \\ 0, & \text{якщо } x = 0. \end{cases} \tag{13.47}$$

Доведемо, що ця функція є нескінченно диференційовною в околі точки $x = 0$. При $x \neq 0$ маємо

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}, \quad f''(x) = \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right)e^{-1/x^2},$$

і, взагалі кажучи, $f^{(n)}(x) = P_{3n}(1/x)e^{-1/x^2}$, де $P_{3n}(1/x)$ — многочлен степеня $3n$ відносно $1/x$.

Зазначимо, що

$$\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = \lim_{x\to 0} P_{3n}(1/x)e^{-1/x^2} = \lim_{t\to 0} \frac{P_{3n}(t)}{e^{t^2}} = 0.$$

Застосовуючи метод математичної індукції, доведемо, що $f^{(n)}(0) = 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Справді,

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{t^2}} = 0.$$

Припустимо, що $f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0$. Тоді

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}P_{3n}(\frac{1}{x})}{e^{1/x^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{tP_{3n}(t)}{e^{t^2}} = 0.$$

Отже, функція $y = f(x)$, задана співвідношенням (13.47), є нескінченно диференційовною, а її ряд Тейлора в точці $x_0 = 0$ має вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 0 + \frac{0}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \dots + \frac{0}{n!}x^n + \dots$$

і збігається до функції $S(x) = 0$ на всій числовій осі. Тому $S(x) \neq f(x)$ для всіх $x \neq 0$. Отже, для цієї функції співвідношення (13.46) не виконується на жодному інтервалі $(-R, R)$.

З'ясуємо тепер, які умови повинна задовольняти функція f для того, щоб її можна було зобразити її ж рядом Тейлора, тобто щоб виконувалось співвідношення (13.46). Нагадаємо для цього формулу Тейлора для функції f:

$$f(x) = P_n(x; x_0) + R_{n+1}(x; x_0), \tag{13.48}$$

де $P_n(x;x_0) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ — многочлен Тейлора, а $R_{n+1}(x;x_0)$ — залишковий член формули Тейлора, який можна записати у загальній формі (6.16), формі Лагранжа (6.18) чи формі Коші (6.19).

Перейшовши в (13.48) до границі при $n \to \infty$, отримаємо

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x; x_0).$$

Тому для того, щоб виконувалось (13.46), необхідно і досить, щоб

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x; x_0) = 0$$

для всіх $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

Отже, зважаючи на результати підрозділу 6.7, наведемо зображення деяких елементарних функцій їхніми рядами Тейлора:

1) $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,\ x \in R;$

2) $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots,\ x \in R;$

3) $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} =$

$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots,\ x \in R;$

4) $\ln(1 + x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} =$

$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots,\ x \in (-1; 1];$

5) $(1 + x)^\alpha = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n =$

$= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots,\ x \in (-1; 1).$

Розділ 14

Ряди Фур'є

Проблема зображення функції рядом Фур'є є узагальненням і розвитком ідеї розкладу вектора за базою. З лінійної алгебри відомо таке: якщо в лінійному просторі скінченної розмірності вибрати деяку базу, то довільний вектор цього простору можна зобразити у вигляді лінійної комбінації векторів бази. Набагато складнішим є питання про вибір бази і розвинення за базою у випадку нескінченновимірного простору. У цьому розділі такі питання вивчено для евклідових нескінченновимірних просторів і для ортонормованих баз. Особливу увагу приділено базі у просторі кусково-неперервних на деякому проміжку функцій, так званій тригонометричній системі.

14.1. Ортонормовані системи в нескінченновимірних евклідових просторах

Нехай L — лінійний нескінченновимірний простір, тобто простір, у якому існує довільна кількість лінійно незалежних векторів.

Означення 14.1.1. Відображення $(\ ,\ ) : L^2 \to \mathbb{R}$ називають *скалярним добутком*, якщо для довільних елементів $g, f, h \in L$ і числа $\lambda \in \mathbb{R}$ виконуються такі умови:

1) $(f,g) = (g,f)$ (комутативність);

2) $(f+g,h) = (f,h) + (g,h)$ (дистрибутивність);

3) $(\lambda f, g) = \lambda(f,g)$ (однорідність);

4) $(f,f) \geq 0$, причому $(f,f) = 0 \iff f$ — нульовий елемент.

Означення 14.1.2. Простір із заданим на ньому скалярним добутком називають *евклідовим простором.*

Приклад 14.1.1.

Класичним прикладом евклідового простору нескінченної розмірності є лінійний простір кусково-неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій, тобто функцій f, неперервних на $[a,b]$ за винятком скінченної кількості точок, у яких f має розриви першого роду. Скалярний добуток визначимо рівністю

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx\,. \tag{14.1}$$

Легко перевірити, що за такого означення справджуються перші три аксіоми скалярного добутку. Для того, щоб справджувалася і четверта аксіома, приймемо

$$f(x_i) = \frac{f(x_i + 0) + f(x_i - 0)}{2}\,, \tag{14.2}$$

де x_i — точка розриву першого порядку функції f; $f(x_i + 0)$, $f(x_i - 0)$ — односторонні границі f у точці x_i. Цей евклідовий простір позначатимемо $\widetilde{C}_{[a,b]}$. Через $C_{[a,b]}$, як звичайно, позначимо евклідовий простір неперервних на $[a, b]$ функцій, що є підпростором $\widetilde{C}_{[a,b]}$.

Нагадаємо дві загальні властивості довільного евклідового простору, які матиме і простір $\widetilde{C}_{[a,b]}$.

Теорема 14.1.1. *Для довільних елементів f, g евклідового простору L виконується нерівність*

$$(f, g)^2 \leq (f, f) \cdot (g, g), \tag{14.3}$$

яку називають нерівністю Коші-Буняковського.

Доведення. Маємо $(\lambda f + g,\ \lambda f + g) = \lambda^2(f, f) + 2\lambda(f, g) + \lambda^2(g, g) \geq 0$ для довільних $f, g \in L$ та $\lambda \in \mathbb{R}$. Отже, дискримінант квадратного відносно λ тричлена повинен бути недодатний, а це дає нерівність (14.3). □

Для довільного елемента $f \in L$ приймемо

$$||f|| = \sqrt{(f, f)}. \tag{14.4}$$

Число $||f||$ називають *нормою* елемента f.

Теорема 14.1.2. *Правильні такі властивості норми:*

1) $(\forall f \in L)\, \{||f|| \geq 0\}$, *причому* $||f|| = 0 \iff f$ *— нульовий елемент;*

2) $(\forall \lambda \in \mathbb{R})\ (\forall f \in L)\ \{||\lambda f|| = |\lambda| \cdot ||f||\}$;

3) *виконується нерівність*

$$(\forall f, g \in L)\, \{||f + g|| \leq ||f|| + ||g||\}\,, \tag{14.5}$$

яку називають нерівністю трикутника.

Доведення. Властивості 1 та 2 відразу випливають з (14.4) та з аксіом скалярного добутку. Справджуваність властивості 3 випливає з аксіом скалярного добутку та з нерівності Коші-Буняковського (14.3). Справді,

$$\|f+g\| = \sqrt{(f+g, f+g)} = \sqrt{(f,f)+2(f,g)+(g,g)} \le$$
$$\le \sqrt{(f,f)+2\sqrt{(f,f)}\sqrt{(g,g)}+(g,g)} = \sqrt{\left(\sqrt{(f,f)}+\sqrt{(g,g)}\right)^2} =$$
$$= \sqrt{(f,f)}+\sqrt{(g,g)} = \|f\|+\|g\|.$$

□

Зокрема, у просторі $\widetilde{C}_{[a,b]}$ норма (14.4) елемента f визначена рівністю

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}, \tag{14.6}$$

а нерівності Коші-Буняковського (14.3) і трикутника (14.5) мають вигляд

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx;$$

$$\sqrt{\int_a^b (f(x)+g(x))^2dx} \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}.$$

Означення 14.1.3. Два елементи f, g евклідового простору L називають *ортогональними*, якщо $(f,g)=0$.

Розглянемо в довільному нескінченновимірному евклідовому просторі L деяку послідовність елементів

$$\psi_1, \psi_2, ...\psi_n, ... \tag{14.7}$$

Означення 14.1.4. Послідовність (14.7) називають *ортонормованою системою*, якщо

$$(\psi_j, \psi_k) = \begin{cases} 0, & j \ne k; \\ 1, & j = k. \end{cases}$$

Класичним прикладом ортонормованої системи в просторі $\widetilde{C}_{[-\pi,\pi]}$ є тригонометрична система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots . \tag{14.8}$$

Вправа 14.1.1. *Довести, що функції* (14.8) *попарно ортогональні (у розумінні скалярного добутку* (14.1), *узятого при* $a = -\pi$, $b = \pi$) *і що норма кожної з цих функцій (яка визначена рівністю* (14.6) *при* $a = -\pi$, $b = \pi$) *дорівнює одиниці.*

14.2. Загальні ряди Фур'є та тригонометричний ряд Фур'є

Нехай надалі L — нескінченновимірний евклідовий простір, $\{\psi_k\}$ — довільна ортонормована система простору L.

Означення 14.2.1. *Рядом Фур'є* елемента $f \in L$ за ортонормованою системою $\{\psi_k\}$ називають ряд вигляду

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k \psi_k, \tag{14.9}$$

де числа $f_k = (f, \psi_k)$ називають *коефіцієнтами Фур'є* елемента f.

Природно назвати скінченну суму

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k \tag{14.10}$$

n-ою частковою сумою ряду Фур'є (14.9).

Розглянемо поряд з сумою (14.10) довільну лінійну комбінацію перших n елементів системи $\{\psi_k\}$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k \tag{14.11}$$

з довільними сталими числами $c_1,\ c_2, \ldots c_n$.

Означення 14.2.2. Величину $\|f - g\|$ називають *відхиленням* f *від* g (за нормою заданого евклідового простору).

Теорема 14.2.1. *Серед усіх сум вигляду* (14.11) *найменше відхилення від елемента* f *має* n*–а часткова сума* (14.10) *ряду Фур'є елемента* f.

Доведення. Враховуючи ортонормованість системи $\{\psi_k\}$ і використовуючи аксіоми скалярного добутку, отримаємо

$$\|\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k - f\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k - f,\ \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k - f\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k^2 (\psi_k, \psi_k) - 2\sum_{k=1}^{n} c_k (f, \psi_k) + (f, f) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} c_k f_k + \|f\|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(c_k - f_k)^2 + \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2. \tag{14.12}$$

Отже, з правої частини (14.12) випливає, що квадрат відхилення суми (14.11) від елемента f є найменшим при $c_k = f_k$. □

Наслідок 14.2.1. *Для довільних $f \in L$, $n \in \mathbb{N}$ і ортонормованої системи $\{\psi_k\} \subset L$ виконується*

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \le \|\sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k - f\|^2, \tag{14.13}$$

де c_k — довільні сталі.

Нерівність (14.13) є безпосереднім наслідком тотожності (14.12).

Наслідок 14.2.2. *Для довільних $f \in L$, $n \in \mathbb{N}$ і ортонормованої системи $\{\psi_k\} \subset L$ справджується рівність*

$$\|\sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k - f\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2, \tag{14.14}$$

яку називають тотожністю Бесселя.

Для доведення (14.14) достатньо в (14.12) прийняти $c_k = f_k$.

Теорема 14.2.2. *Нехай $f \in L$, $\{\psi_k\} \subset L$ — ортонормована система. Тоді*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \le \|f\|^2. \tag{14.15}$$

Нерівність (14.15) *називають нерівністю Бесселя.*

Доведення. З невід'ємності лівої частини (14.14) випливає, що для довільного $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} f_k^2 \le \|f\|^2 \tag{14.16}$$

Це означає, що ряд з невід'ємними членами з (14.15) має обмежену послідовність часткових сум, а, отже, є збіжним. Перейшовши до границі при $n \to +\infty$, отримаємо нерівність (14.15). □

Розглянемо простір $\widetilde{C}_{[-\pi,\pi]}$ і в цьому просторі ряд Фур'є за тригонометричною системою (14.8). Цей ряд називають *тригонометричним рядом Фур'є*. Для довільної кусково-неперервної функції на $[-\pi, \pi]$ тригонометричний ряд Фур'є має вигляд

$$\bar{f}_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\bar{f}_k \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + \bar{\bar{f}}_k \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right), \tag{14.17}$$

де тригонометричні коефіцієнти Фур'є $\bar{f}_k$, $\bar{\bar{f}}_k$ визначені формулами ($k = 1, 2...$)

$$\bar{f}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx; \quad \bar{f}_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx; \quad \bar{\bar{f}}_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx.$$

Нерівність Бесселя має вигляд

$$\bar{f}_0^{\,2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\bar{f}_k^{\,2} + \bar{\bar{f}}_k^2 \right) \leq \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \,, \tag{14.18}$$

а відхилення f від g в цьому випадку називають *середнім квадратичним* відхиленням і обчислюють за формулою

$$||f - g|| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x))^2 \, dx} \,. \tag{14.19}$$

Зазначимо, що в теорії тригонометричних рядів Фур'є прийнята дещо інша форма запису як самого ряду Фур'є (14.17), так і нерівності Бесселя (14.18), а саме: тригонометричний ряд Фур'є (14.17), зазвичай, записують у вигляді

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{14.17'}$$

де $a_0 = \dfrac{2\bar{f}_0}{\sqrt{2\pi}} = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx;$

$$a_k = \frac{\bar{f}_k}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \qquad b_k = \frac{\bar{\bar{f}}_k}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx. \tag{14.20}$$

За такої форми запису нерівність Бесселя (14.18) набуде вигляду

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx. \tag{14.18'}$$

Наслідок 14.2.3. *Тригонометричні коефіцієнти Фур'є a_k, b_k функції $f \in \widetilde{C}_{[-\pi,\pi]}$ прямують до нуля при $k \to +\infty$.*

Твердження наслідку випливає з (14.18′) завдяки необхідній умові збіжності числового ряду.

14.3. Властивості рядів Фур'є за замкненими ортонормованими системами

Нехай, як вище, L — довільний нескінченновимірний евклідовий простір, $\{\psi_k\}$ — ортонормована система з L.

Означення 14.3.1. Ортонормовану систему $\{\psi_k\}$ називають *замкненою* в L, якщо

$$(\forall\,\varepsilon > 0)\ (\forall\, f \in L)\ (\exists\, c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R})\ \left\{ ||f - \sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k|| < \varepsilon \right\}. \tag{14.21}$$

Теорема 14.3.1. *Нехай $\{\psi_k\}$ — замкнена система в L. Тоді*

$$(\forall f \in L) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = ||f|| \right\}, \tag{14.22}$$

тобто нерівність Бесселя (14.15) *переходить у рівність* (14.22), *яку називають рівністю Парсеваля.*

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$ — довільне фіксоване число, $f \in L$. Із співвідношень (14.21) та (14.13) отримуємо, що для деякого $n_0 \in \mathbb{N}$

$$||f||^2 - \sum_{k=1}^{n_0} f_k^2 < \varepsilon^2. \tag{14.23}$$

Для всіх $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, нерівність (14.23) справджується, оскільки зі збільшенням n сума, яка стоїть у лівій частині (14.23), може тільки збільшитись. Разом з нерівністю Бесселя (14.15) це означає, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2$ збігається до суми $||f||^2$.

□

Теорема 14.3.2. *Якщо система $\{\psi_k\}$ замкнена в L, то*

$$(\forall f \in L)\ \left\{ \lim_{n\to\infty} ||\sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k - f|| = 0 \right\},$$

тобто ряд Фур'є елемента f збігається до нього за нормою простору L.

Доведення. Твердження цієї теореми безпосередньо випливає з рівності (14.14) і попередньої теореми. □

Означення 14.3.2. Ортонормовану систему $\{\psi_k\}$ називають *повною в* L, якщо

$$(\forall f \in L)\ \{\forall k \in \mathbb{N} :\ (f, \psi_k) = 0 \Longrightarrow f = 0\},$$

тобто в просторі L не існує жодного іншого елемента f, окрім нульового, який був би ортогональним до всіх елементів ψ_k системи $\{\psi_k\}$.

Теорема 14.3.3. *Якщо система $\{\psi_k\}$ замкнена в просторі L, то $\{\psi_k\}$ повна в L.*

Доведення. Нехай f — довільний елемент простору L, ортогональний до всіх елементів ψ_k замкненої системи $\{\psi_k\}$. Тоді всі коефіцієнти Фур'є f_k елемента f дорівнюють нулю, і завдяки рівності Парсеваля (14.22), маємо $||f|| = 0$. За властивістю 1 норми це означає, що f — нульовий елемент. □

Теорема 14.3.4. *За довільною повною, а, отже, і замкненою в L системою $\{\psi_k\}$ два різні елементи f, $g \in L$ не можуть мати однакових рядів Фур'є, тобто*

$$(\forall k \in \mathbb{N})\,\{f_k = g_k\} \iff \{f = g\}.$$

Доведення. Якщо $f_k = g_k$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, то коефіцієнти Фур'є різниці $(f - g)$ дорівнюють нулю, тобто різниця $(f - g)$ ортогональна до всіх елементів ψ_k повної системи $\{\psi_k\}$. Однак це означає, що $(f - g)$ є нульовим елементом, а, отже, $f = g$. □

14.4. Замкненість тригонометричної системи

Основною в цьому підрозділі є теорема, яку наведено нижче без доведення (його можна знайти у підручниках зі списку літератури).

Теорема 14.4.1. *Тригонометрична система (14.8) є замкненою в $\widetilde{C}_{[-\pi,\pi]}$, тобто*

$$\left(\forall f \in \widetilde{C}_{[-\pi,\pi]}\right)\,(\forall \varepsilon > 0)\,\left(\exists\, c_0,\, c_1^1,\, c_1^2,\, \ldots,\, c_n^1,\, c_n^2 \in \mathbb{R}\right)$$
$$\left\{ ||f(x) - T(x)|| = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T(x))^2 dx} < \varepsilon \right\}, \tag{14.24}$$

де $T(x) = \dfrac{c_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \left(c_k^1 \cos kx + c_k^2 \sin kx\right)$.

Наслідок 14.4.1. *Система функцій (14.8) є повною в $\widetilde{C}_{[-\pi,\pi]}$.*

Доведення наслідку випливає з теорем 14.3.3 та 14.4.1.

Вправа 14.4.1. *Довести, що:*

а) *система функцій $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx\right\}$, $n \in \mathbb{N}$, є повною в просторах $\widetilde{C}_{[0,\pi]}$ та $\widetilde{C}_{[-\pi,0]}$;*

б) *система функцій $\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}};\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx\right\}$, $n \in \mathbb{N}$, є повною в $\widetilde{C}_{[0,\pi]}$ та $\widetilde{C}_{[-\pi,0]}$.*

Наслідок 14.4.2. *Для довільної функції $f \in \widetilde{C}_{[-\pi,\pi]}$ справджується рівність Парсеваля*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$

Твердження наслідку випливає з теореми 14.3.1 (див. також (14.18′)).

Наслідок 14.4.3. *Якщо функції $f, g \in \widetilde{C}_{[-\pi,\pi]}$ мають однакові тригонометричн. ряди Фур'є, то $f(x) = g(x)$ для $x \in [-\pi, \pi]$.*

Доведення наслідку випливає з теореми 14.3.4.

Наслідок 14.4.4. *Тригонометричний ряд Фур'є функції $f \in \widetilde{C}_{[-\pi,\pi]}$ збігається дс f за нормою $\widetilde{C}_{[-\pi,\pi]}$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} ||S_n(f) - f|| = 0$, де $S_n(f)$ часткова сума тригонометричного ряду Фур'є.*

Твердження наслідку випливає з теорем 14.4.1 та 14.3.2.

Постає природне запитання: як збіжність тригонометричного ряду Фур'є зε нормою простору $\widetilde{C}_{[-\pi,\pi]}$ пов'язана зі збіжністю чи з рівномірною збіжністю ряд} Фур'є на відрізку $[-\pi, \pi]$. Відповідь на це запитання дано нижче.

14.5. Збіжність у середньому. Інтегрування тригонометричного ряду Фур'є

Нехай кожна функція $f_n(x)$ функціональної послідовності $\{f_n(x)\}$ і функція $f(x)$ інтегровні за Ріманом на відрізку $[a, b]$.

Означення 14.5.1. Кажуть, що функціональна послідовність $\{f_n(x)\}$ *збігаєтьсл в середньому* на $[a, b]$ до функції $f(x)$, якщо

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx = 0. \qquad (14.25)$$

Очевидно, що в просторі $\widetilde{C}_{[a,b]}$ збіжність у середньому рівносильна збіжності зε нормою цього простору.

Означення 14.5.2. Кажуть, що функціональний ряд $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ *збігається в середньому* на $[a, b]$ до суми $S(x)$, якщо послідовність його часткових сум збігаєтьсл в середньому на $[a, b]$ до граничної функції $S(x)$.

Зауваження 14.5.1. З цих означень безпосередньо випливає таке: якщо послідовність (ряд) збігається в середньому на $[a, b]$ до $f(x)$, то ця послідовність (цей ряд) збігається в середньому до $f(x)$ і на довільному відрізку $[c, d]$, який міститься в $[a, b]$.

Теорема 14.5.1. *Якщо послідовність $\{f_n(x)\}$ рівномірно збігається на $[a, b]$ до функції $f(x)$, то ця послідовність збігається в середньому на $[a, b]$ до $f(x)$.*

Доведення. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Завдяки рівномірній збіжності знайдеться номер n_0 такий, що

$$|f_n(x) - f(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2(b-a)}},$$

для всіх $n \geq n_0$ і всіх $x \in [a, b]$. Тоді для всіх $n \geq n_0$

$$\int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int_a^b dx = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

а це означає збіжність у середньому $\{f_n(x)\}$ до $f(x)$ на $[a, b]$. □

Приклад 14.5.1.

Розглянемо послідовність відрізків $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ такого вигляду: $I_1 = [0, 1]$; $I_2 = [0, \frac{1}{2}]$, $I_3 = [\frac{1}{2}, 1]$; $I_4 = [0, \frac{1}{4}]$, $I_5 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $I_6 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$; $I_7 = [\frac{3}{4}, 1]$,..., $I_{2^n} = [0, \frac{1}{2^n}]$, $I_{2^n+1} = [\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}]$, ..., $I_{2^{n+1}-1} = [1 - \frac{1}{2^n}; 1]$,..., і приймемо

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in I_n; \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus I_n. \end{cases}$$

Оскільки $\int\limits_0^1 (f_n(x) - 0)^2 dx = \int\limits_{I_n} dx = |I_n| \to 0$ при $n \to \infty$, то послідовність $f_n(x)$ збігається в середньому до $f(x) = 0$ на відрізку $[0, 1]$. З іншого боку, для довільної точки $x_0 \in [0, 1]$ послідовність $\{f_n(x_0)\}$ розбіжна, оскільки вона містить нескінченно багато членів, які дорівнюють одиниці, і нескінченно багато членів, які дорівнюють нулю. Отже, зі збіжності в середньому на $[a, b]$ не випливає не тільки рівномірна збіжність, а й збіжність хоча б в одній точці відрізка $[a, b]$.

Теорема 14.5.2. *Якщо послідовність $\{f_n(x)\}$ збіжна в середньому на $[a, b]$ до $f(x)$, то послідовність $\left\{\int\limits_a^x f_n(t)dt\right\}$ рівномірно збіжна на $[a, b]$ до функції $\int\limits_a^x f(t)dt$, отже,*

$$(\forall x \in [a, b]) \left\{ \lim_{n \to \infty} \int_a^x f_n(t)dt = \int_a^x f(t)dt \right\}.$$

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$ — довільне фіксоване число. Завдяки збіжності в середньому на $[a, b]$ знайдеться номер n_0 такий, що для всіх $n \geq n_0$

$$\int_a^b (f_n(t) - f(t))^2 dt < \frac{\varepsilon^2}{b-a}. \tag{14.26}$$

Запишемо очевидну нерівність $|A|\cdot|B| \le \frac{A^2}{2}+\frac{B^2}{2}$ для величин $A=(f_n(x)-$ $-f(x))\cdot\sqrt{\frac{b-a}{\varepsilon}}$ і $B=\sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}}$, отримаємо $|f_n(x)-f(x)| \le (f_n(x)-f(x))^2\cdot\frac{b-a}{2\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Звідси і з (14.26) для всіх $n \ge n_0$ маємо

$$\int_a^b |f_n(x)-f(x)|dt \le \frac{b-a}{2\varepsilon}\int_a^b (f_n(x)-f(x))^2\,dt + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x-a) <$$

$$< \frac{b-a}{2\varepsilon}\cdot\frac{\varepsilon^2}{(b-a)}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \tag{14.27}$$

Оскільки

$$\sup_{x\in[a,b]}\left|\int_a^x f_n(x)dt-\int_a^x f(x)dt\right| \le \sup_{x\in[a,b]}\int_a^x |f_n(x)-f(x)|dt \le \int_a^b |f_n(x)-f(x)|dt,$$

то з (14.27) отримуємо, що для всіх $n \ge n_0$ і $x\in[a,b]$

$$\sup_{x\in[a,b]}\left|\int_a^x f_n(x)dt-\int_a^x f(x)dt\right| < \varepsilon.$$

Остання нерівність означає рівномірну збіжність послідовності $\left\{\int_a^x f_n(t)dt\right\}$ до функції $\int_a^x f(t)dt$ на $[a,b]$. □

Наслідок 14.5.1. *Нехай $f\in\widetilde{C}_{[-\pi,\pi]}$. Тоді тригонометричний ряд Фур'є функції f можна почленно інтегрувати на $[-\pi,\pi]$, тобто*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} S_n(x;f)dx=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

де $S_n(x;f)$ n–на часткова сума тригонометричного ряду Фур'є f.

Доведення наслідку випливає з теореми 14.5.2 та наслідку 14.4.4.

Наслідок 14.5.2. *Якщо тригонометричний ряд Фур'є функції $f\in\widetilde{C}_{[-\pi,\pi]}$ рівномірно збігається на відрізку $[a,b]\subset[-\pi,\pi]$, то він збігається на $[a,b]$ саме до функції $f(x)$.*

Доведення. Нехай $g(x)$ — функція, до якої рівномірно на $[a, b]$ збігається тригонометричний ряд Фур'є функції $f(x)$. За теоремою 14.5.1, тригонометричний ряд Фур'є функції $f(x)$ збігається в середньому на $[a, b]$ до $g(x)$. Отже,

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_1 \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq n_1)\left\{ ||g(x) - S_n(x; f)|| = \sqrt{\int_a^b (g(x) - S_n(x; f))^2\, dx} < \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

З іншого боку, завдяки наслідку 14.4.4 послідовність часткових сум $\{S_n(x; f)\}$ ряду Фур'є функції f збігається в середньому на $[-\pi, \pi]$ до $f(x)$, отже, і на відрізку $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ (див. зауваження 14.5.1). Тому

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_2 \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq n_2)\left\{ ||S_n(x; f) - f(x)|| = \sqrt{\int_a^b (S_n(x; f) - f(x))^2\, dx} < \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

З останніх двох нерівностей та з нерівності трикутника

$$||g(x) - f(x)|| \leq ||g(x) - S_n(x; f)|| + ||S_n(x; f) - f(x)||$$

випливає, що

$$||g(x) - f(x)|| < \varepsilon$$

для всіх $n \geq \max\{n_0, n_1\}$. Оскільки $\varepsilon > 0$ — довільне число, то $||f - g|| = 0$, а, отже, $f = g$ на $[a, b]$. □

14.6. Найпростіші умови рівномірної збіжності та почленного диференціювання тригонометричного ряду Фур'є

Виявляється, що неперервність функції $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$ не забезпечує не тільки рівномірної збіжності тригонометричного ряду Фур'є цієї функції, а й навіть збіжності цього ряду в наперед заданій точці відрізка $[-\pi, \pi]$. Далі з'ясуємо, які вимоги треба додати до неперервності функції f для забезпечення рівномірної збіжності або збіжності тригонометричного ряду Фур'є f на відрізку $[-\pi, \pi]$.

Теорема 14.6.1. *Нехай $f \in C_{[-\pi,\pi]}$, $f(-\pi) = f(\pi)$ і функція f' — кусково-неперервна на $[-\pi, \pi]$. Тоді тригонометричний ряд Фур'є функції f рівномірно на $[-\pi, \pi]$ збігається до цієї функції.*

Доведення. Достатньо довести, що ряд, складений з модулів членів тригонометричного ряду Фур'є функції $f(x)$

$$\frac{|a_0|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(|a_k\cos kx|+|b_k\sin kx|\right), \tag{14.28}$$

збігається рівномірно на $[-\pi,\pi]$. Справді, завдяки наслідку 14.5.2 звідси буде випливати рівномірна збіжність на $[-\pi,\pi]$ тригонометричного ряду Фур'є f саме до функції f. За ознакою Вейєрштрасса (див. теорему 13.2.1), для доведення рівномірної збіжності на $[-\pi,\pi]$ ряду (14.28) достатньо довести збіжність його мажоруючого числового ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(|a_k|+|b_k|\right). \tag{14.29}$$

Позначимо через α_k і β_k тригонометричні коефіцієнти Фур'є функції $f'(x)$. Інтегруючи частинами і враховуючи, що $f\in C_{[-\pi,\pi]}$, $f(-\pi)=f(\pi)$, отримуємо

$$\alpha_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos kx dx=\frac{1}{\pi}\left(f(x)\cos kx\Big|_{-\pi}^{\pi}+k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx dx\right)=kb_k;$$

$$\beta_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin kx dx=\frac{1}{\pi}\left(f(x)\sin kx\Big|_{-\pi}^{\pi}-k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx dx\right)=-ka_k,$$

де a_k, b_k — коефіцієнти тригонометричного ряду Фур'є f.
Отже,

$$|a_k|+|b_k|=\frac{|\alpha_k|}{k}+\frac{|\beta_k|}{k},$$

і для доведення збіжності ряду (14.29) достатньо довести збіжність ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{|\alpha_k|}{k}+\frac{|\beta_k|}{k}\right).$$

Збіжність цього ряду випливає з елементарних нерівностей

$$\frac{\alpha_k}{k}\le\frac{1}{2}\left(\alpha_k^2+\frac{1}{k^2}\right);\quad \frac{\beta_k}{k}\le\frac{1}{2}\left(\beta_k^2+\frac{1}{k^2}\right) \tag{14.30}$$

та зі збіжності ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k^2+\beta_k^2\right)$ (див. наслідок 14.4.2 для кусково-неперервної на $[-\pi,\pi]$ функції f') і ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$. □

Зауваження 14.6.1. Якщо функцію f, яка задовольняє умови теореми 14.6.1, періодично продовжити з $[-\pi, \pi]$ на всю дійсну вісь $\mathbb{R}$, то тригонометричний ряд Фур'є функції f збігається до таким способом продовженої функції рівномірно на $\mathbb{R}$:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \left\{ \widehat{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right\},$$

де $\widehat{f}(x)$ — періодичне продовження f з $[-\pi, \pi]$ на $\mathbb{R}$.

Теорема 14.6.2. *Нехай f, f', ...$f^{(m)} \in C_{[-\pi,\pi]}$, $f(-\pi) = f(\pi)$, $f'(-\pi) = f'(\pi)$, ..., $f^{(m)}(-\pi) = f^{(m)}(\pi)$ і функція $f^{(m+1)}$ — кусково-неперервна на $[-\pi, \pi]$. Тоді тригонометричний ряд Фур'є функції f можна m разів почленно диференціювати на $[-\pi, \pi]$:*

$$(\forall x \in [-\pi, \pi]) \ (\forall s \in \{1, 2, ..., m\})$$

$$\left\{ f^{(s)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^s \left(a_k \cos(kx + \frac{\pi s}{2}) + b_k \sin(kx + \frac{\pi s}{2}) \right) \right\}. \tag{14.31}$$

Доведення. Нехай s — довільне з чисел $1, 2, ..., m$. У результаті s-разового почленного диференціювання тригонометричного ряду Фур'є функції $f(x)$ отримаємо ряд з рівності (14.31). Цей ряд мажорують числовим рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^m (|a_k| + |b_k|), \tag{14.32}$$

збіжність якого доводять аналогічно, як і збіжність ряду (14.29). Справді, якщо α_k і β_k — тригонометричні коефіцієнти ряду Фур'є функції $f^{(m+1)}(x)$, то, проінтегрувавши вирази для α_k і β_k частинами $(m+1)$ разів, отримаємо

$$|\alpha_k| + |\beta_k| \leq k^{m+1}(|a_k| + |b_k|),$$

отже,

$$k^m(|a_k| + |b_k|) = \frac{|\alpha_k|}{k} + \frac{|\beta_k|}{k}.$$

З рівності Парсеваля (див. наслідок 14.4.2) для функції $f^{(m+1)}(x)$, збіжності ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ та з (14.30) випливає збіжність ряду (14.32). За ознакою Вейєрштрасса (див. теорему 13.2.1), тригонометричні ряди Фур'є функцій $f^{(s)}(x)$, $s = 0, 1, 2, ..., m$, збігаються рівномірно на $[-\pi, \pi]$, а це, за аналогічною теоремою 13.3.5 для функціональних рядів забезпечує можливість m-разового почленного диференціювання вихідного ряду Фур'є функції f. $\square$

Наведена нижче теорема дає достатні умови збіжності тригонометричного ряду Фур'є функції $f \in \widetilde{C}_{[-\pi,\pi]}$.

Теорема 14.6.3. *Нехай $f \in \widetilde{C}_{[-\pi,\pi]}$, функція f' — кусково-неперервна на $[-\pi,\pi]$, $\widehat{f}$ — періодичне продовження f з $[-\pi,\pi]$ на $\mathbb{R}$ таке, що $f(\pi) = f(-\pi) = \frac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2}$. Тоді*

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \left\{ \widehat{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right\}.$$

Приклад 14.6.1.

Розвинемо в тригонометричний ряд Фур'є функцію $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi,\pi]$.
Маємо

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} x^2 \bigg|_0^{\pi} = \pi,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx dx == \frac{2}{\pi} \left(x \frac{\sin kx}{k} \bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \sin kx dx \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{1}{k^2} \cos kx \bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k^2} ((-1)^k - 1),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} x \sin kx dx - \int_{-\pi}^{0} x \sin kx dx \right) = 0.$$

Отже, $a_{2m} = 0$, $a_{2m-1} = \dfrac{-4}{\pi(2m-1)^2}$, $m \in \mathbb{N}$, і

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2}, \quad x \in [-\pi,\pi].$$

Звідси при $x = 0$ отримаємо

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Зауваження 14.6.2. Якщо функція $f \in \widetilde{C}_{[-l,l]}$, то її тригонометричний ряд Фур'є має вигляд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right), \tag{14.33}$$

де

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx, \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \tag{14.34}$$

Справді, заміною $t = \frac{\pi x}{l}$ відрізок $[-l, l]$ переведемо у відрізок $[-\pi, \pi]$. Тоді функція $F(t) = f(\frac{lt}{\pi})$ визначена на $[-\pi, \pi]$ і її тригонометричний ряд Фур'є має вигляд (14.17′), а коефіцієнти a_k та b_k визначені рівностями (14.20). У випадку старої змінної x, тобто з урахуванням співвідношення $f(x) = F(\frac{\pi x}{l})$ з (14.17′) отримаємо (14.33), причому

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos ktdt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right)\cos ktdt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx,$$

й аналогічно

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,$$

тобто рівності (14.34).

Зауваження 14.6.3. Якщо $f \in \widetilde{C}_{[-l,l]}$ і f — парна функція, то $b_k = 0$ і тригонометричний ряд Фур'є функції має вигляд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l},$$

де a_k визначені рівностями

$$a_k = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx.$$

Зауваження 14.6.4. Якщо $f \in \widetilde{C}_{[-l,l]}$ і f — непарна функція, то $a_k = 0$ і тригонометричний ряд Фур'є функції такий:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l},$$

де b_k визначені рівностями

$$b_k = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx.$$

Приклад 14.6.2.

Розвинемо функцію $f(x) = 1$, $x \in (0; 2)$ в тригонометричний ряд Фур'є за синусами.

Продовжимо нашу функцію непарно на інтервал $(-2, 0)$. Тоді $f(0) = \frac{f(+0)+f(-0)}{2} = \frac{1+(-1)}{2} = 0$, $l = 2$, $a_k = 0$,

$$b_k = \frac{2}{2}\int\limits_0^2 1 \cdot \sin\frac{k\pi x}{2}dx = \frac{-2}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{2}\Big|_0^2 = \frac{-2}{k\pi}(1 - (-1)^k) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } k = 2m; \\ \dfrac{4}{\pi(2m+1)}, & \text{якщо } k = 2m+1 \ . \end{cases}$$

Отже,

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin\left((m+\frac{1}{2})\pi x\right)}{2m+1}, \ x \in (0; 2).$$

Приймемо $x = 1$, з останньої рівності отримаємо

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}.$$

Вправа 14.6.1. *Навести розвинення функції з прикладу 14.6.2:*

а) *за косинусами;*

б) *за косинусами та синусами.*

Розділ 15

Функції багатьох змінних

Нагадаємо (див. означення 1.3.1), що *функцією*, або *відображенням*, множини X у множину Y називають правило, яке кожному елементу $x \in X$ ставить у відповідність один і лише один елемент $y \in Y$. У цьому разі множину X називають *областю* визначення функції f і позначають $\mathcal{D}(f)$, а множину

$$f(\mathcal{D}(f)) \equiv \{y \in Y | \exists\, x \in \mathcal{D}(f) : f(x) = y\}$$

— *множиною значень* функції f і позначають $R(f)$.

У попередніх розділах розглянуто, як звичайно, дійсні функції однієї дійсної змінної, тобто такі відображення f, для яких $\mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R}$, $R(f) \subset \mathbb{R}$. Однак у математиці та її застосуваннях часто трапляються функції, значення яких залежать від декількох дійсних аргументів. Наведемо два приклади.

1. Об'єм V прямого циліндра залежить від його радіуса R та висоти h: $V(R, h) = \pi R^2 h$.

2. Згідно з законом всесвітнього тяжіння, сила F, з якою притягуються дві матеріальні точки, залежить від їхніх мас M та m і відстані r між ними ($\gamma = \text{const}$):

$$F(M, m, r) = \gamma \frac{Mm}{r^2}.$$

Зрозуміло, що можна навести багато інших прикладів, однак розпочнемо формальний виклад теорії, зауваживши попередньо, що значення функції $u = f(x_1, ..., x_m)$ залежать не тільки від значень, яких набувають незалежні змінні $x_1, ..., x_m$, а й від того, у якому порядку вони занумеровані. Зокрема, у першому прикладі $V(R, h) \neq V(h, R)$, а в другому — $F(M, m, r) \neq F(r, m, M)$. Отже, функція від m дійсних змінних — це функція від *упорядкованого* набору з m дійсних чисел. Два такі набори $(x_1, \ldots, x_m)$ та $(y_1, \ldots, y_m)$ уважають рівними тоді й тільки тоді, коли $x_1 = y_1, \ldots, x_m = y_m$. Зокрема, $(1, 2, 3) \neq (3, 2, 1)$.

15.1. Простір $\mathbb{R}^m$

Означення 15.1.1. Нехай $m \in \mathbb{N}$. Множину всіх можливих упорядкованих наборів з m дійсних чисел називають *дійсним m-вимірним простором* і позначають $\mathbb{R}^m$.

Отже,

$$\mathbb{R}^m \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{m} = \{x = (x_1, ..., x_m) : x_j \in \mathbb{R}, j = 1, ..., m\}.$$

Числа $x_1, ..., x_m$ називають *координатами*, або *компонентами*, елемента x, а самі елементи постору $\mathbb{R}^m$ — *точками*, або *векторами*.

Зауваження 15.1.1. Простір $\mathbb{R}^1 \stackrel{def}{=} \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, тобто $\mathbb{R}^1$ ототожнюємо з числовою прямою, простір $\mathbb{R}^2$ — з площиною, а простір $\mathbb{R}^3$ — з "реальним" простором. У випадку довільного $m > 3$ говорити про геометричну інтерпретацію простору $\mathbb{R}^m$ немає сенсу, оскільки це виходить за межі нашої інтуїції.

Поняття простору $\mathbb{R}^m$ відоме з курсу алгебри та геометрії, де його розглядають як *евклідовий простір*, тобто як лінійний простір разом з визначеним на ньому скалярним добутком (див. 14.1). Крім того, на $\mathbb{R}^m$ можна ввести структуру *метричного простору*.

Лема 15.1.1 (нерівність Коші-Буняковського). *Якщо $x_1, ..., x_m$, $y_1, ..., y_m$ — дійсні числа, то*

$$\left|\sum_{j=1}^m x_j y_j\right| \le \left(\sum_{j=1}^m x_j^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{j=1}^m y_j^2\right)^{1/2}. \tag{15.1}$$

Доведення. Для будь-якого $j \in \{1, ..., m\}$ виконується $(x_j - \lambda y_j)^2 \ge 0$, тобто

$$y_j^2 \lambda^2 - 2x_j y_j \lambda + x_j^2 \ge 0,$$

отже, для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ маємо

$$\left(\sum_{j=1}^m y_j^2\right)\lambda^2 - 2\left(\sum_{j=1}^m x_j y_j\right)\lambda + \sum_{j=1}^m x_j^2 \ge 0\ . \tag{15.2}$$

Тому дискримінант D тричлена (15.2) недодатний, так що

$$\frac{D}{4} = \left(\sum_{j=1}^m x_j y_j\right)^2 - \left(\sum_{j=1}^m x_j^2\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^m y_j^2\right) \le 0. \tag{15.3}$$

Зрозуміло, що нерівності (15.1) та (15.3) рівносильні. □

Наслідок 15.1.1. *За умов леми 15.1.1*

$$\left(\sum_{j=1}^{m}(x_j+y_j)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{j=1}^{m}x_j^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{j=1}^{m}y_j^2\right)^{1/2} \tag{15.4}$$

Доведення. З (15.1) випливає, що

$$\sum_{j=1}^{m}(x_j+y_j)^2 = \sum_{j=1}^{m}x_j^2 + 2\sum_{j=1}^{m}x_jy_j + \sum_{j=1}^{m}y_j^2 \leq \sum_{j=1}^{m}x_j^2 +$$

$$+2\left(\sum_{j=1}^{m}x_j^2\right)^{1/2}\cdot\left(\sum_{j=1}^{m}y_j^2\right)^{1/2} + \sum_{j=1}^{m}y_j^2 = \left[\left(\sum_{j=1}^{m}x_j^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{j=1}^{m}y_j^2\right)^{1/2}\right]^2,$$

отже, справджується нерівність (15.4).

□

Теорема 15.1.1. *Для будь-яких* $x=(x_1,...,x_m), y=(y_1,...,y_m)\in\mathbb{R}^m$ *приймемо*

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{m}(x_j-y_j)^2\right)^{1/2}. \tag{15.5}$$

Тоді для будь-яких $x,y,z\in\mathbb{R}^m$ *виконується:*

$$\rho(x,y)\geq 0; \tag{15.6}$$

$$(\rho(x,y)=0)\iff(x=y); \tag{15.7}$$

$$\rho(x,y)=\rho(y,x); \tag{15.8}$$

$$\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(z,y). \tag{15.9}$$

Доведення. Твердження (15.6)—(15.8) очевидні, а (15.9) випливає безпосередньо з (15.4), оскільки

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{m}(x_j-y_j)^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{m}[(x_j-z_j)+(z_j-y_j)]^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{m}(x_j-z_j)^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{j=1}^{m}(z_j-y_j)^2\right)^{1/2} = \rho(x,z)+\rho(z,y).$$

□

Зауваження 15.1.2. У випадку, коли $m \le 3$, нерівності (15.1), (15.4) та (15.9) мають наочний геометричний зміст. Перша з них стверджує, що модуль скалярного добутку двох векторів не перевищує добутку їхніх довжин (тобто, що модуль косинуса кута між двома векторами не перевищує одиниці), друга — що довжина суми векторів не перевищує суму їхніх довжин, а третя — що довжина сторони трикутника не перевищує суми двох інших сторін.

Нерівність (15.9) називають *нерівністю трикутника.*

Виявляється, що теорію дійсних m-вимірних просторів і визначених на них відображень доцільно розглядати з погляду загальнішої теорії *метричних просторів.*

Означення 15.1.2. Множину X називають *метричним простором*, якщо будь-яким двом елементам $x, y \in X$ відповідає дійсне число $\rho(x,y)$, яке називають *відстанню* від x до y, таке, що справджуються умови (15.6)—(15.9), які називають *аксіомами відстані.*

Приклад 15.1.1.

А. З теореми 15.1.1 випливає, що $\mathbb{R}^m$ з відстанню (15.5) є метричним простором.

Б. Нехай $X = \mathbb{R}^m$ і для будь-яких $x = (x_1, ..., x_m), y = (y_1, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$

$$d(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1\le j\le m} |x_j - y_j|. \tag{15.10}$$

Легко бачити, що величина $d(x,y)$ задовольняє аксіоми відстані.

Надалі писатимемо $(\mathbb{R}^m, \rho)$ або $(\mathbb{R}^m, d)$ замість $\mathbb{R}^m$, якщо потрібно зазначити, яку відстань на цій множині розглядають: (15.5) чи (15.10).

15.2. Топологічні поняття в просторі $\mathbb{R}^m$

Означення 15.2.1. Нехай X — метричний простір, $x \in X$, $\varepsilon > 0$.

А. Множину $B(x,\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : \rho(x,y) < \varepsilon\}$ називають *ε-околом точки x*, або *відкритою кулею радіуса ε з центром у точці x.*

Б. Множину $\overset{\circ}{B}(x,\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}$ називають *проколеним ε-околом точки x.*

В. Множину $\overline{B}(x,\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X : \rho(x,y) \le \varepsilon\}$ називають *замкненою кулею радіуса ε* з *центром в точці x.*

Зауваження 15.2.1. Писатимемо $\mathcal{U}(x,\varepsilon)$, $\overset{\circ}{\mathcal{U}}(x,\varepsilon)$, $\overline{\mathcal{U}}(x,\varepsilon)$ замість $B(x,\varepsilon)$, $\overset{\circ}{B}(x,\varepsilon)$, $\overline{B}(x,\varepsilon)$ у випадку, коли $X = (\mathbb{R}^m, \rho)$, та $Q(x,\varepsilon), \overset{\circ}{Q}(x,\varepsilon), \overline{Q}(x,\varepsilon)$ у випадку, коли $X = (\mathbb{R}^m, d)$.

Множину вигляду $\mathcal{U}(x,\varepsilon)$ називатимемо *сферичним ε-околом* точки x, а множину вигляду $Q(x,\varepsilon)$ — *кубічним ε-околом* цієї точки.

Природність цих означень зрозуміла з геометричних міркувань. На рис. 15.1 зображені сферичний та кубічний ε-околи початку координат у $\mathbb{R}^2$.

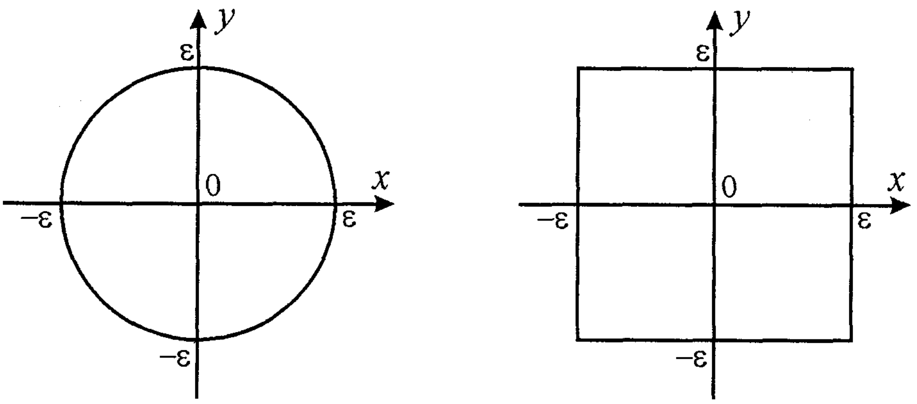


Рис. 15.1

Сферичний та кубічний ε-околи початку координат в $\mathbb{R}^3$ (Тут $A(\varepsilon,-\varepsilon,-\varepsilon)$, $B(-\varepsilon,-\varepsilon,-\varepsilon)$, $C(-\varepsilon,\varepsilon,-\varepsilon)$, $D(\varepsilon,\varepsilon,-\varepsilon)$, $A_1(\varepsilon,-\varepsilon,\varepsilon)$, $B_1(-\varepsilon,-\varepsilon,\varepsilon)$, $C_1(-\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon)$, $D_1(\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon)$) зображено на рис 15.2.

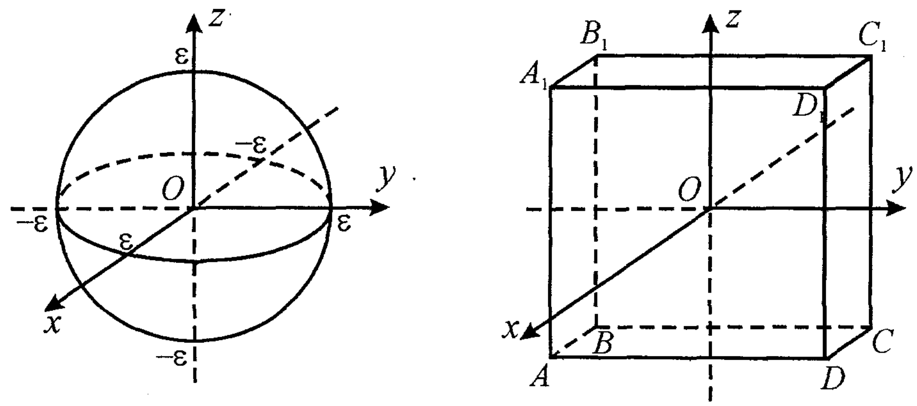


Рис. 15.2

Неважко довести, що в будь-якому сферичному околі точки міститься деякий її кубічний окіл, і навпаки: в будь-якому кубічному околі точки міститься деякий її сферичний окіл (у випадку, коли $m = 2$ або $m = 3$, це очевидно). Тому типовою є така ситуація: будь-який (деякий) сферичний окіл точки x має певну властивість P тоді й тільки тоді, коли цю властивість має будь-який (деякий) її кубічний окіл. Якщо така ситуація настане, то говоритимемо, що властивість P має будь-який (деякий) її окіл $B(x,\varepsilon)$. Це ж стосується проколених околів і замкнених куль.

Означення 15.2.2. (Усі згадані тут точки і множини є елементами і підмножинами метричного простору X.)

А. Точку x називають *внутрішньою* точкою множини M, якщо деякий її окіл міститься в M. Сукупність таких точок множини M позначатимемо $int\, M$. Отже,

$$x \in int\, M \overset{\text{def}}{\equiv} (\exists\, \varepsilon > 0)\{B(x, \varepsilon) \subset M\}.$$

Б. Множину M називають *відкритою*, якщо будь-яка її точка є внутрішньою:

$$M \text{ — відкрита} \overset{\text{def}}{\equiv} (\forall\, x \in M)(\exists\, \varepsilon > 0)\{B(x, \varepsilon) \subset M\} \Leftrightarrow M = int\, M.$$

В. Точку x називають *граничною точкою*, або *точкою скупчення*, множини M, якщо будь-який її проколений окіл містить хоча б одну точку цієї множини. Сукупність таких точок позначатимемо M'. Отже,

$$x \in M' \overset{\text{def}}{\equiv} (\forall\, \varepsilon > 0)\{\overset{\circ}{B}(x, \varepsilon) \cap M \neq \oslash\}.$$

Г. Точку x називають *точкою дотику* множини M, якщо будь-який її окіл містить хоча б одну точку цієї множини. Сукупність таких точок називають *замиканням* множини M і позначають $\overline{M}$:

$$x \in \overline{M} \overset{\text{def}}{\equiv} (\forall\, \varepsilon > 0)\{B(x, \varepsilon) \cap M \neq \oslash\}.$$

Іншими словами, $\overline{M} = M \cup M'$.

Д. Множину M називають *замкненою*, якщо вона збігається зі своїм замиканням:

$$M \text{ — замкнена} \overset{\text{def}}{\equiv} \overline{M} = M.$$

Е. Якщо $x \in M$ і x не є точкою скупчення множини M, то x називають *ізольованою точкою* множини M:

$$x \text{ — ізольована точка множини } M \overset{\text{def}}{\equiv} x \in (M \setminus M').$$

Є. Множину M називають *обмеженою*, якщо вона міститься в деякій відкритій кулі:

$$M \text{ — обмежена} \overset{\text{def}}{\equiv} (\exists\, x \in \mathbb{R}^m)(\exists\, r > 0)\{M \subset B(x, r)\}.$$

І. Точку x називають *межовою*, або *крайовою*, точкою множини M, якщо будь-який її окіл містить як точки множини M, так і точки доповнення до M:

x — *межова точка* $M \overset{\text{def}}{\equiv} (\forall\, \varepsilon > 0)\{(B(x, \varepsilon) \cap M \neq \oslash) \wedge (B(x, \varepsilon) \cap (X \setminus M) \neq \oslash)\}$.

Сукупність таких точок називають *межею*, або *краєм*, M і позначають ∂M.

Зауваження 15.2.2. На підставі зазначеного у зауваженні 15.2.1, неважко переконатись у коректності наведених вище означень, тобто показати, що зміст перерахованих понять не залежить від того, які околи розглядають: сферичні чи кубічні.

Вправа 15.2.1. *Довести такі твердження:*

а) $(\forall x \in \mathbb{R}^m)$ $(\forall \varepsilon > 0) : \mathcal{U}(x,\varepsilon)$, $Q(x,\varepsilon)$ — *відкриті множини,* $\overline{\mathcal{U}}(x,\varepsilon)$, $\overline{Q}(x,\varepsilon)$ — *замкнені множини,* $\overline{\mathcal{U}(x,\varepsilon)} = \overline{\mathcal{U}}(x,\varepsilon)$, $\overline{Q(x,\varepsilon)} = \overline{Q}(x,\varepsilon)$;

б) F — *замкнена множина тоді і тільки тоді, коли* $X \setminus F$ — *відкрита множина;*

в) *якщо* $x \in M'$, *то будь-який окіл точки* x *містить нескінченну кількість елементів множини* M;

г) *для будь-якої сім'ї* $\{G_\alpha\}$ *відкритих множин множина* $\bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha$ *відкрита;*

д) *для будь-якої скінченної сім'ї* $G_1, ..., G_n$ *відкритих множин множина* $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$ *відкрита.*

15.3. Збіжні послідовності в $\mathbb{R}^m$

Означення 15.3.1. Нехай X — метричний простір і $x_n \in X$ $(n \in \mathbb{N})$. Елемент $a \in X$ називають *границею* послідовності $\{x_n\}$, якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)\{\rho(x_n, a) < \varepsilon\}.$$

Тоді пишуть $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ або $x_n \to a, n \to \infty$, і кажуть, що послідовність $\{x_n\}$ *збігається до* a, або *має границю* a.

Послідовність, що має границю, називають *збіжною*, а послідовність, що не має границі, — *розбіжною.*

Зауваження 15.3.1. Елемент a є границею послідовності $\{x_n\}$ тоді й тільки тоді, коли в будь-якому його ε-околі містяться всі елементи послідовності $\{x_n\}$, починаючи з деякого номера.

Вправа 15.3.1. *Нехай* X — *метричний простір,* $M \subset X, a \in X$. *Довести правильність таких тверджень:*

а) $a \in \overline{M}$ *тоді і тільки тоді, коли існує послідовність* $\{x_n\} \subset M$ *така, що* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

б) $a \in M'$ *тоді і тільки тоді, коли існує послідовність* $\{x_n\} \subset M \setminus \{a\}$ *така, що* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

в) M *є замкненою тоді і тільки тоді, коли для будь-якої збіжної в* X *послідовності елементів множини* M *її границя належить* M.

Означення 15.3.2. Нехай $\{x_n\}$ — деяка послідовність, а $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$ — зростаюча послідовність натуральних чисел. Тоді послідовність $\{x_{n_k}\}$ називають *підпослідовністю* послідовності $\{x_n\}$.

Означення 15.3.3. Послідовність елементів метричного простору $\{x_n\}$ називають *фундаментальною* (або такою, що задовольняє умову Коші), якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m, n > N)\{\rho(x_n, x_m) < \varepsilon\}, \tag{15.11}$$

або, що еквівалентно,

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, N \in \mathbb{N})(\forall\, n > N)(\forall\, p \in \mathbb{N})\{\rho(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon\}.$$

Теорема 15.3.1. *Правильні такі твердження.*
А. Послідовність не може мати двох різних границь.
Б. Збіжна послідовність обмежена.
В. Нехай $\{x_n\}$ — збіжна в X послідовність, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ $(a \in X)$. Тоді будь-яка підпослідовність $\{x_{n_k}\}$ збіжна, причому $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.
Г. Будь-яка збіжна послідовність є фундаментальною.

Доведення цих тверджень аналогічні до доведень теорем 2.2.1, 2.2.2, 2.8.1, 2.9.1.
Нижче скрізь до кінця підрозділу маємо на увазі, що $\{x_n\}$, де

$$x_n = (x_{n,1}, ..., x_{n,m}) \ \ (n \in \mathbb{N})$$

— деяка послідовність елементів простору $\mathbb{R}^m$.

Теорема 15.3.2. *Нехай $x_n = (x_{n,1}, ..., x_{n,m})$ $(n \in \mathbb{N})$ і $a = (a_1, ..., a_m) \in \mathbb{R}^m$. Такі твердження еквівалентні:*

а) *послідовність $\{x_n\}$ збігається до a в просторі $(\mathbb{R}^m, \rho)$;*
б) *послідовність $\{x_n\}$ збігається до a в просторі $(\mathbb{R}^m, d)$;*
в) *правильні рівності*

$$\lim_{n\to\infty} x_{n,j} = a_j \ \ (1 \le j \le m). \tag{15.12}$$

Доведення. а$\Rightarrow$б. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ в $(\mathbb{R}^m, \rho)$ і $\varepsilon > 0$. Згідно з означенням 14.3.1,

$$(\exists\, N \in \mathbb{N})(\forall\, n > N)\{(\rho(x_n, a))^2 = \sum_{j=1}^{m}(x_{n,j} - a_j)^2 < \varepsilon^2\}.$$

Тому для будь-якого $n > N$

$$|x_{n,j} - a_j| < \varepsilon \ \ (j = 1, ..., m) \tag{15.13}$$

отже, й

$$d(x_n, a) = \max_{1\le j\le m} |x_{n,j} - a_j| < \varepsilon. \tag{15.14}$$

Звідси $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ в $(\mathbb{R}^m, d)$.

б$\Rightarrow$в. Нехай $\{x_n\}$ збігається до a в $(\mathbb{R}^m, d)$ і $\varepsilon > 0$. Згідно з означенням (15.3.1), існує $N \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх $n > N$ справджується (15.14), отже, й (15.13). Тому правильні співвідношення (15.12).

в⇒а. Нехай справджуються співвідношення (15.12). Згідно з означенням 2.1.1 границі числової послідовності,

$$(\forall\,\varepsilon > 0)(\exists\,N_j \in \mathbb{N})(\forall\,n > N_j)\left\{|x_{n,j} - a_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\right\},\ (j = 1, ..., m),$$

отже,

$$(\forall\,n > \max\{N_1, ..., N_m\})\left\{\rho(x_n, a) = \left(\sum_{j=1}^{m}(x_{n,j} - a_j)^2\right)^{1/2} < \varepsilon\right\}.$$

А це означає, що $\{x_n\}$ збігається до a в $(\mathbb{R}^m, \rho)$. □

Надалі, якщо справджується одне, а, отже, й два інших, з тверджень а–в, говоритимемо, що $\{x_n\}$ збігається до a в $\mathbb{R}^m$.

Як уже зазначено, на $\mathbb{R}^m$ можна ввести структуру евклідового простору. Справді, досить прийняти для будь-яких $x = (x_1, ..., x_m), y = (y_1, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$x + y = (x_1 + y_1, ..., x_m + y_m),\ \alpha x = (\alpha x_1, ..., \alpha x_m),\ (x, y) = \sum_{j=1}^{m} x_j y_j.$$

Наслідок 15.3.1. *Припустимо, що $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — послідовності в $\mathbb{R}^m$, $\{\alpha_n\}$ — послідовність дійсних чисел і $x_n \to x$, $y_n \to y$, $\alpha_n \to \alpha$ при $n \to \infty$. Тоді*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y,\ \lim_{n\to\infty}(\alpha_n x_n) = \alpha x.$$

Правильність цього твердження випливає з теорем 15.3.2, 2.4.1, 2.4.2 (про границю суми та добутку числових послідовностей).

Теорема 15.3.3 (теорема Больцано-Вейєрштраса). *Із будь-якої обмеженої в $\mathbb{R}^m$ послідовності можна виділити збіжну підпослідовність.*

Доведення. Розглянемо випадок $m = 2$. Нехай $\{(x_n, y_n)\}$ $(n \in \mathbb{N})$ — обмежена в $\mathbb{R}^2$ послідовність. Тоді існують дійсні числа a, b, c, d такі, що $(\forall n \in \mathbb{N})\{a \le x_n \le b,$ $c \le y_n \le d\}$, отже, послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ обмежені в $\mathbb{R}$. Застосувавши теорему 2.8.2 до послідовності $\{x_n\}$, виділимо підпослідовність $\{x_{n_k}\}$, що збігається до деякої границі $a_0 \in \mathbb{R}$.

Застосуємо тепер цю теорему до послідовності $\{y_{n_k}\}$ і виділимо підпослідовність $\{y_{n_{k_l}}\}$, яка збігається до деякої границі $b_0 \in \mathbb{R}$. Зрозуміло, що $\lim\limits_{l\to\infty}(x_{n_{k_l}}, y_{n_{k_l}}) = (a_0, b_0)$. □

Означення 15.3.4. Метричний простір називають *повним*, якщо в ньому будь-яка фундаментальна послідовність є збіжною.

Приклад 15.3.1.

З теореми 2.9.1 випливає, що простір $\mathbb{R}$ з відстанню

$$\rho(x,y) = |x - y| \tag{15.15}$$

є повним.

Теорема 15.3.4. *Простір $\mathbb{R}^m$ є повним метричним простором.*

Доведення. Неважко переконатися, що послідовність $\{x_n\}$ фундаментальна в $(\mathbb{R}^m, \rho)$ тоді і тільки тоді, коли вона фундаментальна в $(\mathbb{R}^m, d)$, отже, висловлювання "послідовність $\{x_n\}$ фундаментальна в $\mathbb{R}^m$" є коректним.

Припустимо, що $\{x_n\}$, де $x_n = (x_{n,1}, ..., x_{n,m})$ фундаментальна в $\mathbb{R}^m$. Знову ж таки, міркуючи, як під час доведення теореми 15.3.2, бачимо, що послідовності $\{x_{n,1}\}, ..., \{x_{n,m}\}$ фундаментальні в $\mathbb{R}$. Звідси і з теореми 2.9.1 випливає, що існують $a_1, ..., a_m \in \mathbb{R}$ такі, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n,j} = a_j (j = 1, ..., m)$. Зрозуміло, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = (a_1, ..., a_m)$.

□

Вправа 15.3.2. *Довести такі твердження:*

а) *множина раціональних чисел з відстанню (15.15) є неповним метричним простором;*

б) *множина $C_{[a,b]}$ з відстанню*

$$(\forall f, g \in C_{[a,b]}) \quad \{d(f,g) = \max_{a\le x\le b} |f(x) - g(x)|\}$$

є повним метричним простором;

в) *множина $C^1_{[a,b]}$ з відстанню*

$$(\forall f, g \in C^1_{[a,b]}) \ \{d(f,g) = \max_{a\le x\le b} |f(x) - g(x)| + \max_{a\le x\le b} |f'(x) - g'(x)|\}$$

є повним метричним простором.

Вправа 15.3.3. *Нехай X — повний метричний простір, $\overline{B}_n = \overline{B}(x_n, r_n)$ — послідовність вкладених замкнених куль цього простору, радіуси яких r_n прямують до нуля при $n \to +\infty$. Довести, що існує єдина точка простору $\xi \in X$, яка належить усім замкненим кулям $\overline{B}_n$.*

15.4. Границя функції багатьох змінних

Означення 15.4.1. Нехай X — метричний простір, $D \subset X$, $f : D \to \mathbb{R}$ — деяка функція, a — гранична точка множини D. Число A називають *границею функції $f(x)$ в точці a*, якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D, x \in \overset{\circ}{B}(a,\delta)) \ \{|f(x) - A| < \varepsilon\}. \tag{15.16}$$

Тоді пишуть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ або $f(x) \to A$, $x \to a$.

Проаналізуємо це означення у випадку, коли простір $X = \mathbb{R}^m$, $a = (a_1, ..., a_m)$. $x = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$. Якщо трактувати $\mathbb{R}^m$ як метричний простір з відстанню (15.5), то (15.16) набуде такого вигляду:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D, x \in \overset{\circ}{\mathcal{U}}(a, \delta)) \{|f(x) - A| < \varepsilon\}, \tag{15.17}$$

або, що еквівалентно,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D, 0 < (\sum_{j=1}^{m}(x_j - a_j)^2)^{1/2} < \delta) \{|f(x) - A| < \varepsilon\}. \tag{15.18}$$

Якщо ж трактувати $\mathbb{R}^m$ як метричний простір з відстанню (15.10), то (15.16) набуде такого вигляду:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D, x \in \overset{\circ}{Q}(a, \delta)) \{|f(x) - A| < \varepsilon\} \tag{15.19}$$

або, що еквівалентно,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D, 0 < |x_1 - a_1| < \delta, ..., 0 < |x_m - a_m| < \delta)$$

$$\{|f(x) - A| < \varepsilon\}. \tag{15.20}$$

Однак висловлювання (15.17) та (15.19) (а отже, й (15.18) та (15.20)) рівносильні (див. зауваження 15.2.1), а запис

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \tag{15.21}$$

або детальніше

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \cdots \\ x_m \to a_m}} f(x) = A, \tag{15.22}$$

означає в розглядуваній ситуації, що справджується хоча б одна, а, отже, й інша з умов (15.18), (15.20).

Теорема 15.4.1. *Нехай $D \subset \mathbb{R}^m$, a — гранична точка множини D, $f : D \to \mathbb{R}$ — деяка функція. Умова (15.21) виконується тоді і тільки тоді, коли для будь-якої послідовності $\{x_n\}$ такої, що*

$$(\forall n \in \mathbb{N})\{(x_n \in D \setminus \{a\}) \wedge (\lim_{n \to \infty} x_n = a)\} \tag{15.23}$$

справджується рівність

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A. \tag{15.24}$$

Доведення. Припустимо, що справджується рівність (15.21). Виберемо будь-яку послідовність $\{x_n\}$, що задовольняє умову (15.23), і нехай $\varepsilon > 0$. Тоді

$$(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x \in D, 0 < \rho(x, a) < \delta)\ \{|f(x) - A| < \varepsilon\}.$$

Крім того, існує $N \in \mathbb{N}$ таке, що

$$(\forall\, n > N)\{0 < \rho(x_n, a) < \delta\}.$$

Отже, якщо $n > N$, то $|f(x) - A| < \varepsilon$, звідки випливає, що справджується (15.24).

Навпаки, припустимо, що (15.24) не справджується. Тоді

$$(\exists\, \varepsilon > 0)(\forall\, \delta > 0)(\exists\, x \in D)\{(0 < \rho(x, a) < \delta) \wedge (|f(x) - A| \geq \varepsilon)\}. \qquad (15.25)$$

Зрозуміло, що x залежить від δ. Приймемо $\delta = \dfrac{1}{n}$ і позначимо відповідне x через x_n. З (15.25) випливає, що $(\forall\, n \in \mathbb{N})\{0 < \rho(x_n, a) < \dfrac{1}{n}\}$, а звідси, — що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, тобто справджується (15.23). Водночас із (15.25) отримуємо, що $(\forall\, n \in \mathbb{N})\{|f(x_n) - A| \geq \varepsilon\}$, а це суперечить припущенню (15.24).

□

Наслідок 15.4.1. *Нехай $D \subset \mathbb{R}^m$, a — гранична точка множини D, f і g — визначені на D дійсні функції, причому $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. Тоді*

а) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B$;

б) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = AB$;

в) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, *якщо* $B \neq 0$.

Доведення. Ці твердження, завдяки теоремі 15.4.1, випливають з аналогічних властивостей послідовностей. □

Зауваження 15.4.1. Означення границі (15.2.2) легко поширити і на випадок, коли деякі з чисел $A, a_1, ..., a_m$ або всі вони нескінченні.

Крім розглянутої вище границі (15.22), яку називають *m-кратною* (або *подвійною, потрійною* і так далі — при $m = 2, 3, ...$), доводиться стикатися з границями іншого роду, які отримують у результаті серії послідовних граничних переходів окремо за кожним аргументом у тому чи іншому порядку. Такі границі називають *повторними.*

Обмежимося для простоти випадком функції f двох змінних, визначеної на множині

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a - h < x < a + h, b - k < y < b + k\},$$

де $a, b \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $k > 0$.

Теорема 15.4.2. *Нехай:*

1) *існує (скінченна або ні) подвійна границя*

$$A = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y);$$

2) *для довільного* $y \in (b-k, b+k)$, $y \neq b$, *існує скінченна границя*

$$\lim_{x\to a} f(x,y) \overset{\text{def}}{=\!=} \varphi(y).$$

Тоді існує повторна границя $\lim\limits_{y\to b}\varphi(y) = \lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$, *яка дорівнює подвійній.*

Доведення (для випадку скінченних A, a та b). Згідно з означенням границі функції (див. (15.20)), для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що

$$(\forall\,(x,y)\in D,\ 0<|x-a|<\delta,\ 0<|y-b|<\delta)\ \{|f(x,y)-A|<\varepsilon\}. \tag{15.26}$$

Зафіксуємо тепер $y \in (b-\delta, b+\delta)$, $y \neq b$, і перейдемо в нерівності, яка фігурує в (15.26), до границі при $x \to a$. На підставі умови 2 теореми отримаємо

$$(\forall y\in(b-\delta,b+\delta),\ y\neq b)\ \ \{|\varphi(y)-A|\le\varepsilon\},$$

тобто $A = \lim\limits_{y\to b}\varphi(y) = \lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$.

□

Зауваження 15.4.2. Якщо виконуються всі умови теореми 15.4.2 і, крім того, для будь-якого $x \in (a-h, a+h)$, $x \neq a$, існує скінченна границя

$$\psi(x) \overset{\text{def}}{=\!=} \lim_{y\to b} f(x,y),$$

то, як випливає з цієї теореми, існує й інша повторна границя

$$\lim_{x\to a}\psi(x) = \lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y),$$

яка також дорівнює A, так що в цьому випадку обидві повторні границі дорівнюють одна одній.

У загальній ситуації це не так, у чому переконують наведені нижче приклади.

Приклад 15.4.1.

Нехай $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$, $x^2+y^2 \neq 0$.

Маємо

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0,\ \lim_{y\to 0} f(x,y) = 0,$$

отже,

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0.$$

Далі, перейшовши до полярних координат (r,φ), бачимо, що

$$|f(x,y)| \le \left|\frac{r^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{r^2}\right| \le \sqrt{x^2+y^2},$$

тобто

$$|f(x,y) - 0| \le d((x,y),(0,0)),$$

отже, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$.

Приклад 15.4.2.

Нехай $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $x^2+y^2 \ne 0$.

Легко бачити, що й тут

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0.$$

З іншого боку, якщо $(x_n,y_n) = (1/n, 1/n)$, то

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1/n^2}{2\cdot 1/n^2} = \frac{1}{2}.$$

За теоремою 15.4.1 переконуємось, що $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ не існує.

Отже, з існування та рівності обох повторних границь, взагалі кажучи, не випливає існування подвійної границі.

Приклад 15.4.3.

Нехай $f(x,y) = \dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$, $x \ne -y$.

Зрозуміло, що

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = y-1,\ \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = -1,$$

тоді як

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = x+1,\ \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = 1.$$

Отже, повторні границі не обов'язково дорівнюють одна одній.

Приклад 15.4.4.

Нехай $f(x,y) = \dfrac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y}$, $x \ne -y$.

Маємо

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\frac{y}{y} = 1, \quad \lim_{y\to 0} f(x,y) = \sin\frac{1}{x},$$

а тому, $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ не існує.

Отже, з існування однієї з повторних границь не випливає існування іншої.

Приклад 15.4.5.

Нехай $f(x,y) = x\sin\dfrac{1}{y}$, $y \ne 0$.

З нерівності $|x\sin\dfrac{1}{y}| \le |x|$ випливає, що $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$.

Далі,

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0,$$

але $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ не існує, бо не існує границі $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$.

Отже:

а) з існування подвійної границі не випливає існування повторної границі;

б) з умови 1 теореми 15.4.2 не випливає умова 2.

15.5. Неперервні функції багатьох змінних

Означення 15.5.1. Нехай $D \subset \mathbb{R}^m$, $x_0 \in D$. Функцію $f : D \to \mathbb{R}$ називають *неперервною* в точці x_0, якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D,\ \rho(x,x_0) < \delta)\ \{|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\}. \tag{15.27}$$

Зауваження 15.5.1. На підставі цього означення і з використанням сказаного в підрозділі 15.4 (або міркуючи так, як під час доведення відповідних тверджень цього підрозділу), доходимо таких висновків.

1. Функція f неперервна в точці $x_0 \in D$ тоді і тільки тоді, коли

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D,\ d(x,x_0) < \delta)\{|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\}. \tag{15.28}$$

2. Якщо x_0 — ізольована точка множини D, то функція f неперервна в цій точці.

3. Якщо x_0 — гранична точка множини D і $x_0 \in D$, то f неперервна в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{15.29}$$

4. Якщо функції f та g неперевні в точці x_0, то функції $f \pm g$, fg, а також $\dfrac{f}{g}$ за умови, що $g(x_0) \neq 0$, є неперервними в точці x_0.

Теорема 15.5.1 (теорема про неперервність складеної функції). *Нехай:*

а) *область* $\Delta \subset \mathbb{R}^k$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k) \in \Delta$, *функції* $\varphi_i : \Delta \to \mathbb{R}$ $(i = 1, ..., m)$ *неперервні в точці* α;

б) *функція* $f : D \to \mathbb{R}$ *неперервна в точці* a, *де* $D = \{(\varphi_1(t), ..., \varphi_m(t)): t = (t_1, ..., t_k) \in \Delta\}$, $a = (a_1, ..., a_m) = (\varphi_1(\alpha), ..., \varphi_m(\alpha))$.

Тоді функція $u = f(\varphi_1(t), ..., \varphi_m(t))$ *визначена на* Δ *і є неперервною в точці* α.

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$. Тоді (див. (15.28)) існує $\delta > 0$ таке, що

$$(\forall x = (x_1, ..., x_m) \in D,\ |x_1 - a_1| < \delta, ..., |x_m - a_m| < \delta)\ \{|f(x) - f(a)| < \varepsilon\}.$$

Далі з огляду на неперервність функцій $\varphi_1, ..., \varphi_m$ у точці α існують такі додатні числа $\eta_1, ..., \eta_k$, що $(\forall t \in \Delta,\ |t_1 - \alpha_1| < \eta_1, ..., |t_k - \alpha_k| < \eta_k)\ \{|\varphi_i(t) - \varphi_i(\alpha)| < \delta\}$. Тому якщо $|t_j - \alpha_j| < \min\{\eta_1, ..., \eta_k\}$ $(j = 1, ..., k)$, то

$$|f(x) - f(a)| = |f(\varphi_1(t), ..., \varphi_m(t)) - f(\varphi_1(\alpha), ..., \varphi_m(\alpha))| < \varepsilon.$$

□

Досі йшлося про *локальні* властивості функцій, неперервних у точці, тобто про властивості, визначені значеннями цих функцій у як завгодно малому околі розглядуваної точки (або точок).

Далі розглядатимемо так звані *глобальні* властивості неперервних функцій.

Означення 15.5.2. Функцію f називають *неперервною на множині* E, якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини.

Означення 15.5.3. Нехай $a = (a_1, ..., a_m)$, $b = (b_1, ..., b_m) \in \mathbb{R}^m$. Множину

$$\{x = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m : x_i = a_i + t(b_i - a_i),\ i = 1, ..., m,\ 0 \le t \le 1\}$$

називають *відрізком*, що з'єднує точки a та b. Об'єднання скінченної кількості відрізків таких, що початок кожного наступного збігається з кінцем попереднього, називатимемо *ламаною*.

Означення 15.5.4. Множину $E \subset \mathbb{R}^m$ називають *лінійно зв'язною*, якщо будь-які дві її точки можна з'єднати ламаною, яка цілком міститься в E. Відкриту лінійно зв'язну множину називають *областю*.

Теорема 15.5.2 (теорема Больцано-Коші). *Нехай функція f неперервна в області $D \subset \mathbb{R}^m$. Якщо в двох точках цієї області функція набуває значень різних знаків, то в D існує точка, в якій функція дорівнює нулю.*

Доведення (для випадку $m = 2$). Нехай функція f неперервна в області $D \subset \mathbb{R}^2$, $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2) \in D$, $f(M_1) < 0$, $f(M_2) > 0$ (рис. 15.3).

Побудуємо ламану, яка лежить у D і з'єднує точки M_1 та M_2. Якщо для якоїсь вершини N цієї ламаної справджується рівність $f(N) = 0$, то теорему доведено. В протилежному випадку існує прямолінійний відрізок, що з'єднує точки $N_j(\xi_j, \eta_j)$, $N_{j+1}(\xi_{j+1}, \eta_{j+1}) \in D$, який цілком міститься в D, причому

$$f(N_j) = f(\xi_j, \eta_j) < 0,\ \ f(N_{j+1}) = f(\xi_{j+1}, \eta_{j+1}) > 0.$$

Нехай $N_jN_{j+1} = \{(\xi_j + t(\xi_{j+1} - \xi_j), \eta_j + t(\eta_{j+1} - \eta_j)) : 0 \le t \le 1\}$. Розглянемо функцію $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ таку, що

$$(\forall\, t \in [0, 1])\{F(t) = F(\xi_j + t(\xi_{j+1} - \xi_j), \eta_j + t(\eta_{j+1} - \eta_j)).$$

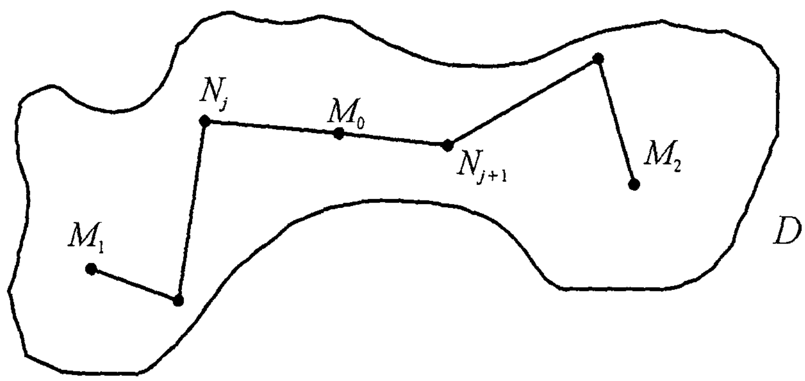


Рис. 15.3

З теореми 15.5.1 випливає, що F неперервна на $[0,1]$. Використовуючи теорему Больцано-Коші для функцій однієї змінної переконуємось, що існує $t_0 \in (0,1)$ таке, що $F(t_0) = 0$.

Зрозуміло, що $M_0(\xi_j + t_0(\xi_{j+1} - \xi_j), \eta_j + t_0(\eta_{j+1} - \eta_j)) \in N_1N_2 \subset D$ і $f(M_0) = F(t_0) = 0$.

□

Наслідок 15.5.1. *Нехай f і D такі, як в теоремі 15.5.2, і для деяких $M_1, M_2 \in D$ виконується $f(M_1) = A$, $f(M_2) = B$. Тоді для будь-якого числа C, що лежить між A і B, знайдеться точка $M_0 \in D$ така, що $f(M_0) = C$.*

Теорема 15.5.3 (теорема Вейєрштрасса). *Якщо функція f визначена і неперервна на замкненій обмеженій множині $D \subset \mathbb{R}^m$, то вона обмежена і досягає на D своїх верхньої та нижньої точних меж, тобто*

$$(\exists\, M^* \in D : f(M^*) = \sup_{M \in D} f(M)) \wedge (\exists\, M_* \in D : f(M_*) = \inf_{M \in D} f(M)).$$

Доведення (для випадку $m = 2$). Нехай функція f є необмеженою, скажімо зверху. Тоді

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists\, (x_n, y_n) \in D)\{f(x_n, y_n) > n\}. \tag{15.30}$$

З теореми Больцано-Вейєрштрасса випливає, що послідовність $\{(x_n, y_n)\}$ містить збіжну підпослідовність $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}$. Нехай $\lim\limits_{k\to\infty}(x_{n_k}, y_{n_k}) = (a, b)$. Оскільки D замкнена, а f неперервна на D, то $(a, b) \in D$ і $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}, y_{n_k}) = f(a, b)$. Отже, $\{f(x_{n_k}, y_{n_k})\}$ — обмежена послідовність , що суперечить (15.30). Отримана суперечність переконує в тому, що f обмежена зверху.

Нехай

$$A = \sup_D f(x,y), \;\; \varphi(x,y) = \frac{1}{A - f(x,y)}.$$

Якщо для будь-яких $(x, y) \in D$ виконується $f(x, y) < A$, то функція φ є неперервною на D, а, отже, за доведеним, $\sup\limits_D \varphi(x, y) < +\infty$. Проте з означення числа A випливає, що $\sup\limits_D \varphi(x, y) = +\infty$. Отримана суперечність доводить, що функція f досягає своєї точної верхньої межі.

Аналогічно доводимо, що f обмежена знизу і досягає своєї точної нижньої межі.

□

Означення 15.5.5. Функцію $f : E \to \mathbb{R}$ називають *рівномірно неперервною* на множині $E \subset \mathbb{R}^m$, якщо

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x', x'' \in E,\ \rho(x', x'') < \delta)\ \{|f(x') - f(x'')| < \varepsilon\}. \tag{15.31}$$

Вправа 15.5.1. *Довести твердження:*

а) *якщо f рівномірно неперервна на E, то вона неперервна на E;*

б) *умова (15.31) рівносильна такій:*

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x', x'' \in E,\ d(x', x'') < \delta)\{|f(x') - f(x'') < \varepsilon\}.$$

Теорема 15.5.4 (теорема Кантора). *Якщо функція $f : E \to \mathbb{R}$ неперервна на замкненій обмеженій множині $E \subset \mathbb{R}^m$, то вона є рівномірно неперервною на E.*

Доведення. Припустимо супротивне, тобто нехай функція f неперервна на E, але не є рівномірно неперервною на цій множині. Тоді $(\exists\, \varepsilon > 0)(\forall\, \delta > 0)(\exists\, x', x'' \in E)\{(\rho(x', x'') < \delta) \wedge |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon\}$. Приймемо в цьому висловлюванні $\delta = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Отримаємо дві послідовності $\{x'_n\}$, $\{x''_n\} \subset E$ такі, що

$$\rho(x'_n, x''_n) < 1/n, \tag{15.32}$$

$$|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon. \tag{15.33}$$

Згідно з теоремою Больцано-Вейєрштрасса (теорема 15.3.3), можна, не зменшуючи загальності, вважати, що $\{x'_n\}$ — збіжна послідовність (у протилежному випадку треба перейти до збіжної підпослідовності). Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = a$. З (15.32) випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} x''_n = a$. Зрозуміло, що $a \in E$, оскільки множина E замкнена. Тому, переходячи в (15.33) до границі і враховуючи неперервність функції f на E і, зокрема, в точці a, маємо $0 = |f(a) - f(a)| \geq \varepsilon$.

Отримана суперечність переконує у правильності теореми.

□

Часто при дослідженні функцій на рівномірну неперервність використовують поняття модуля неперервності.

Означення 15.5.6. *Модулем неперервності* функції f на множині $E \subset \mathbb{R}^m$ називають функцію $\omega(\delta; f, E) = \sup\{|f(M) - f(N)| : M, N \in E, \rho(M, N) < \delta\}$.

Вправа 15.5.2. *Довести, що функція f рівномірно неперервна на E тоді і лише тоді, коли* $\lim\limits_{\delta\to 0+} \omega(\delta; f, E) = 0$.

Вправа 15.5.3. *Знайти модуль неперервності функції f на множині E, якщо:*

а) $f(x) = x^2, \quad E = \mathbb{R}$;

б) $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad E = [-1, 1]$;

в) $f(x, y) = x + y, \quad E = \mathbb{R}^2$.

15.6. Компактні множини. Неперервність і компактність

Означення 15.6.1. Нехай X — метричний простір. Множину $K \subset X$ називають *компактною*, або *компактом*, якщо з будь-якої системи відкритих множин $\{G_\alpha : \alpha \in I\}$, яка покриває множину K, можна виділити її скінченну підсистему, яка також покриває множину K (див. означення 4.10.1).

Теорема 15.6.1. *Нехай множина $K \subset \mathbb{R}^m$. Такі твердження рівносильні:*

а) *K обмежена і замкнена;*

б) *K компактна;*

в) *з будь-якої послідовності елементів множини K можна виділити збіжну підпослідовність, границя якої належить K.*

Зауваження 15.6.1. Нагадаємо (див. зауваження 15.2.1, 15.2.2), що множина $G \subset \mathbb{R}^m$ є відкритою в $(\mathbb{R}^m, \rho)$ тоді і тільки тоді, коли вона відкрита в $(\mathbb{R}^m, d)$, тому тут несуттєво, який саме з цих просторів ми маємо на увазі.

Доведення (для випадку $m = 2$). а$\Rightarrow$ б. Припустимо, що множина K не є компактом. Тоді існує система $\Omega = \{G_\alpha\}$, $\alpha \in I$, відкритих множин G_α, яка покриває K і з цього покриття не можна виділити скінченного покриття множини K. Оскільки K — обмежена множина, то існує замкнений квадрат Δ_0, який містить множину K. Нехай $\Delta_0 = \{(x, y) : a \leq x \leq b; a \leq y \leq b\}$. Розіб'ємо квадрат Δ_0 на чотири однакові замкнені квадрати $\Delta_0^{(j)}$, $j = 1, 2, 3, 4$, сторона кожного з яких дорівнює $\dfrac{b-a}{2}$. Система Ω утворює відкрите покриття кожної з множин $K \cap \Delta_0^{(j)}$, $j = 1, ..., 4$. Серед цих множин існує така непорожня множина, позначимо її через $K \cap \Delta_1$, що з покриття Ω не можна виділити скінченного покриття цієї множини. У протилежному випадку завдяки рівності $\Delta_0 = \bigcup\limits_{j=1}^{n} \Delta_0^{(j)}$ з системи Ω можна було б виділити скінченне покриття всієї множини K, що суперечить нашому припущенню.

Розіб'ємо квадрат Δ_1 знову на чотири однакові замкнені квадрати і позначимо через Δ_2 той з них, перетин якого з множиною K не можна покрити скінченною кількістю множин системи Ω тощо. У результаті отримаємо послідовність замкнених квадратів $\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots \supset \Delta_n \supset \dots$, довжини сторін яких дорівнюють, відповідно, $b-a, \frac{b-a}{2}, \dots, \frac{b-a}{2^n}, \dots$, отже, прямують до нуля при $n \to \infty$. Кожен із квадратів Δ_i послідовності $\{\Delta_n\}$ має властивість, що з системи Ω не можна виділити скінченного покриття непорожньої множини $K \cap \Delta_i$.

Згідно з вправою 15.3.3, оскільки метричний простір $\mathbb{R}^2$ є повним, то існує єдина точка ξ, яка належить усім квадратам послідовності $\{\Delta_n\}$. Довжини сторін квадратів прямують до нуля, то в будь-якому ε-околі $\mathcal{U}(\xi, \varepsilon)$ точки ξ лежать усі квадрати Δ_n, починаючи з деякого номера $N = N(\varepsilon)$. Тому в будь-якому ε-околі $\mathcal{U}(\xi, \varepsilon)$ містяться точки множини K, бо перетин K з Δ_n непорожній. Отже, точка ξ є граничною точкою множини K і $\xi \in K$, бо K — замкнена множина. Оскільки система Ω є покриттям множини K, то існує такий індекс $i_0 \in I$, що $\xi \in G_{i_0}$. Множина G_{i_0} відкрита, а, отже, знайдеться $\varepsilon_0 > 0$ таке, що $\mathcal{U}(\xi, \varepsilon_0) \subset G_{i_0}$. Тому, знайдеться номер $N_0 = N_0(\varepsilon)$, що буде виконуватись включення $\Delta_{N_0} \subset \mathcal{U}(\xi, \varepsilon_0)$. Звідси отримаємо, що $K \cap \Delta_{N_0} \subset \mathcal{U}(\xi, \varepsilon))$, отже, з системи Ω можна виділити скінченне покриття множини $K \cap \Delta_{N_0}$, а саме: покриття, що складається з однієї множини G_{α_0}. Отримана суперечність доводить, що K — компактна множина.

б$\Rightarrow$в. Нехай $\{x_n\}$ — послідовність точок множини K, з якої не можна вибрати збіжну до деякої точки з K підпослідовність. Тоді довільна точка $x \in K$ не є частковою границею послідовності $\{x_n\}$. Тому в кожної точки $x \in K$ існує окіл G_x, який містить лише скінченну кількість елементів послідовності $\{x_n\}$. Система $\Omega = \{G_x\}$, $x \in K$, всіх таких околів утворює відкрите покриття компакту K, а тому з неї можна виділити скінченне підпокриття $\Omega_0 = \{G_{x^{(1)}}, G_{x^{(2)}}, \dots, G_{x^{(k)}}\}$. Отже, елементи покриття Ω_0 містять лише скінченну кількість елементів послідовності $\{x_n\}$. Однак це неможливо, оскільки Ω_0 покриває всю множину K, а тому повинно містити всі елементи послідовності $\{x_n\}$. Отримана суперечність доводить твердження б$\Rightarrow$ в.

в$\Rightarrow$ а. Припустимо, що множина K є необмеженою. Тоді для довільного числа $n \in \mathbb{N}$ знайдеться точка $x_n \in K$ така, що $\rho(O, x_n) > n$ $(n = 1, 2, \dots)$. Тут як завжди $O = (0, 0)$. Очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Тому будь-яка підпослідовність послідовності $\{x_n\}$ має також границею ∞, отже, з $\{x_n\}$ не можна вибрати збіжну в K підпослідовність. З огляду на це K — обмежена множина.

Якщо множина K не є замкненою, то існує її точка дотику $\xi \notin K$. Для цієї точки знайдемо таку послідовність $\{x_n\} \subset K$, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$. Тому границею її підпослідовності є точка $\xi \notin K$, що суперечить умові в. Отже, K — замкнена множина.

□

Вправа 15.6.1. *З використанням теореми 15.6.1 навести нові доведення теорем 15.5.3 та 15.5.4.*

Розділ 16

Диференціювання функцій багатьох змінних

16.1. Часткові похідні та повний диференціал

Нехай D — деяка відкрита множина в просторі $\mathbb{R}^m$, $M_0(x_1^0,\ldots,x_m^0) \in D$. Якщо $M(x_1,\ldots,x_m) \in D$, то приймемо $\Delta x_i = x_i - x_i^0$ $(i = 1,\ldots,m)$, $\Delta\rho = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} \Delta x_i^2}$ (у випадку, коли $m \leq 3$, писатимемо x, y, z замість x_1, x_2, x_3). Припустимо, що $u = f(x_1,\ldots,x_m)$ — дійсна функція m змінних визначена на D.

Означення 16.1.1. Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1^0,...,x_{i-1}^0,x_i^0+\Delta x_i,x_{i+1}^0,...,x_m^0) - f(x_1^0,...,x_m^0)}{\Delta x_i},$$

то її називають *частковою похідною функції* $f(x_1\ldots x_m)$ *за змінною* x_i *в точці* $M_0(x_1^0\ldots,x_m^0)$ і позначають одним із символів

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial f(x_1^0,...,x_m^0)}{\partial x_i}, \qquad u'_{x_i}, \qquad f'_{x_i}(x_1^0,...,x_m^0).$$

Нехай $\varphi_i(x_i) = f(x_1^0,...,x_{i-1}^0,x_i,x_{i+1}^0,...,x_m^0)$. Тоді

$$\frac{\partial f(x_1^0,...,x_m^0)}{\partial x_i} = \frac{d\varphi_i(x_i^0)}{dx_i}.$$

Приклад 16.1.1.

Нехай $u = x^y$ $(x > 0)$. Часткові похідні цієї функції мають такий вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Першу з них обчислюють як похідну степеневої функції від x при $y = \text{const}$, а другу — як похідну показникової функції від y при $x = \text{const}$.

Приклад 16.1.2.
Нехай

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & xy = 0, \\ 1, & xy \neq 0. \end{cases}$$

Тоді

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0, \qquad \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0.$$

Отже, функція f в точці $(0,0)$ має всеможливі часткові похідні, хоч і не є неперервною в цій точці. У випадку, коли $m = 1$, така ситуація неможлива (див. теореми 5.3.1, 5.3.2).

Означення 16.1.2. Величину

$$\Delta u = \Delta f(x_1^0, ..., x_m^0) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_1, ..., x_m) - f(x_1^0, ..., x_m^0)$$

називають *повним приростом функції* f в точці $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$.

Означення 16.1.3. Функцію $u = f(M) = f(x_1, \ldots, x_m)$ називають *диференційовною в точці* $M_0(x_1^0, \ldots, x_m^0)$, якщо існують $A_1, \ldots, A_m \in \mathbb{R}$ такі, що

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{m} A_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(\Delta x_1, .., \Delta x_m) \Delta x_i, \tag{16.1}$$

де $\lim\limits_{M \to M_0} \alpha_i(\Delta x_1, .., \Delta x_m) = 0$. Вираз

$$du = df(x_1^0, ..., x_m^0) = \sum_{i=1}^{m} A_i \Delta x_i \tag{16.2}$$

у цьому випадку називають *повним диференціалом функції* $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ в точці $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$.

Зауваження 16.1.1. Зрозуміло, що функція $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ диференційовна в точці M_0 тоді і тільки тоді, коли її повний приріст Δu можна подати в такому вигляді:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{m} A_i \Delta x_i + \varepsilon(\Delta x_1, .., \Delta x_m) \Delta \rho, \tag{16.3}$$

де $\lim\limits_{\Delta\rho \to 0} \varepsilon(\Delta x_1, .., \Delta x_m) = 0$.

Теорема 16.1.1. *Якщо функція $u = f(M) = f(x_1, \ldots, x_m)$ є диференційовною в точці M_0, то вона в цій точці неперервна і має всеможливі часткові похідні, причому*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = A_i, \ i = 1, ..., m,$$

де $A_1, \ldots, A_m$ *ті самі, що в (16.2), так що*

$$du = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i} \Delta x_i.$$

Доведення. Неперервність випливає з рівності (16.1), оскільки $\lim\limits_{M \to M_0} \Delta u = 0$. Далі, якщо $\Delta x_1 = \ldots = \Delta x_{i-1} = \Delta x_{i+1} = \ldots = \Delta x_m = 0$, то згадана рівність набуває такого вигляду:

$$f(x_1^0, ..., x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, ...x_m) - f(x_1^0, ..., x_m^0) = A_i \Delta x_i + \alpha_i(\Delta x_1, .., \Delta x_m)\Delta x_i.$$

Поділивши цю рівність на Δx_i та перейшовши до границі при $\Delta x_i \to 0$, отримуємо $\frac{\partial u}{\partial x_i} = A_i$, $i = 1, ..., m$. □

Зауваження 16.1.2. Розглянемо функції $\varphi_i(x_1, ..., x_m) = x_i$ $(i = 1, \ldots, m)$. З теореми 16.1.1 випливає, що $dx_i = d\varphi_i = \Delta x_i$, отже,

$$du = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i. \tag{16.4}$$

Зауваження 16.1.3. З існування часткових похідних функції в деякій точці не випливає її диференційовність у цій точці. У цьому переконує приклад 16.1.2: функція, про яку йдеться, не будучи неперервною в точці (0,0), не може, з огляду на теорему 16.1.1, бути в ній диференційовною.

Більше того, існують неперервні функції, які мають всеможливі часткові похідні, але не є диференційовними. Справді, нехай

$$u = f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

Легко бачити, що f є неперервною в точці $(0,0)$ (досить виконати заміну: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$) і $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$.

З іншого боку,

$$\Delta f(0,0) = f(x, y) = \varepsilon(x, y)\Delta\rho,$$

де $\varepsilon(x, y) = \dfrac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$ (тут $\Delta x = x$, $\Delta y = y$). Оскільки $\varepsilon(x, x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, то розглядувана функція не є диференційовною в точці $(0,0)$ (див. зауваження 16.1.1).

Означення 16.1.4. Функцію $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ називають *неперервно диференційовною* в точці $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$, якщо її часткові похідні $u'_{x_1}, ..., u'_{x_m}$ існують у деякому околі цієї точки і неперервні (як функції від $x_1, \ldots, x_m$) в цій точці.

Теорема 16.1.2. *Функція, неперервно диференційовна в деякій точці, є диференційовною в цій точці.*

Доведення (для випадку m=2). Нехай функція $u = f(x,y)$ неперервно диференційовна в точці $M_0(x_0,y_0) \in D$ і $M(x,y) \in D$. Оскільки D відкрита, то для достатньо малих Δx, Δy ламана M_0M_1M, де M_1 — точка з координатами (x_0,y), міститься в D і, з огляду на формулу Лагранжа скінченних приростів (див. теорему 6.2.2),

$$\Delta u = f(x,y) - f(x_0,y_0) = \Big(f(x,y) - f(x_0,y)\Big) +$$
$$+\Big(f(x_0,y) - f(x_0,y_0)\Big) = f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y)\Delta x + f'_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y,$$

де $0 < \theta_i < 1$ $(i = 1,2)$. Нехай

$$\alpha_1(\Delta x, \Delta y) = f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y) - f'_x(x_0,y_0),$$

$$\alpha_2(\Delta x, \Delta y) = f'_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y) - f'_y(x_0,y_0).$$

Тоді

$$\Delta u = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + \alpha_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \alpha_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y. \tag{16.5}$$

Оскільки розглядувана функція неперервно диференційовна в точці (x_0,y_0), то $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha_i(\Delta x,\Delta y) = 0$ $(i = 1,2)$, отже, ця функція диференційовна в зазначеній точці. □

16.2. Похідні та диференціал складеної функції

Для спрощення запису обмежимося випадком функцій трьох змінних, хоч викладені нижче твердження легко узагальнити на випадок функцій довільної кількості змінних.

Отже, нехай $G \subset \mathbb{R}^3$ — відкрита множина, $M_0(x_0,y_0,z_0) \in G$, а $u = f(x,y,z)$ — визначена на G функція.

Теорема 16.2.1. *Нехай функції $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ визначені на інтервалі $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ і диференційовні в точці $t_0 \in \mathcal{I}$, $\varphi(t_0) = x_0$, $\psi(t_0) = y_0$, $\chi(t_0) = z_0$. Якщо $(x_0,y_0,z_0) \in G$, а функція $u = f(x,y,z)$ диференційовна в цій точці, то функція $u = f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))$ диференційовна в точці t_0 і*

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \tag{16.6}$$

Доведення. Нехай $t \in \mathcal{I}$, $\Delta t = t - t_0$, $\Delta x = \varphi(t) - \varphi(t_0)$, $\Delta y = \psi(t) - \psi(t_0)$, $\Delta z = \chi(t) - \chi(t_0)$.

З диференційовності функції $u = f(x, y, z)$ випливає, що

$$\Delta u = u'_x \Delta x + u'_y \Delta y + u'_z \Delta z + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y + \alpha_3 \Delta z, \qquad (16.7)$$

де похідні взято в точці M_0, а величини $\alpha_i = \alpha_i(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ прямують до нуля, якщо $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ прямують до нуля. Для завершення доведення досить поділити цю рівність на Δt і перейти до границі при $\Delta t \to 0$. □

Наслідок 16.2.1. *Нехай функції $x = \varphi(t, v)$, $y = \psi(t, v)$, $z = \chi(t, v)$ визначені на відкритій множині $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ і мають обидві часткові похідні в точці $(t_0, v_0) \in \Delta$, $\varphi(t_0, v_0) = x_0$, $\psi(t_0, v_0) = y_0$, $\chi(t_0, v_0) = z_0$. Якщо $(x_0, y_0, z_0) \in G$, а функція $u = f(x, y, z)$ диференційовна в цій точці, то функція $u = f(\varphi(t, v), \psi(t, v), \chi(t, v))$ має обидві часткові похідні в точці (t_0, v_0) і*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial v} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial v}. \end{cases} \qquad (16.8)$$

Доведення. Оскільки за фіксованого $v = v_0$ функція $t \mapsto u$ задовольняє умови теореми 16.2.1, то виконується перше зі співвідношень (16.8). Друге доводять аналогічно. □

Зауваження 16.2.1. Припустимо, що функції f, φ, ψ, χ задовольняють усі умови наслідку 16.2.1 і, крім того, похідні u'_x, u'_y, u'_z неперервні в точці (x_0, y_0, z_0), а похідні x'_t, y'_t, z'_t, x'_v, y'_v, z'_v неперервні в точці (t_0, v_0). Тоді, як випливає з (16.8), похідні u'_t, u'_v не тільки існують, а й неперервні в точці (t_0, v_0).

Якщо x, y, z є незалежними змінними, то повний диференціал функції дорівнює

$$du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz. \qquad (16.9)$$

Диференціал функції $(t, v) \mapsto u$ має такий вигляд:

$$du = u'_t dt + u'_v dv. \qquad (16.10)$$

Існування диференціалів, які фігурують у формулах (16.9), (16.10), і правильність цих формул випливає з (16.4) і теореми 16.1.2 Однак постає питання, чи не суперечать одне одному наведені співвідношення, тобто чи не позначено тут символом du дві різні величини. Виявляється, що ні. Справді, з огляду на (16.8)

$$\begin{aligned} u'_t dt + u'_v dv &= (u'_x x'_t + u'_y y'_t + u'_z z'_t)dt + (u'_x x'_v + u'_y y'_v + u'_z z'_v)dv = \\ &= u'_x(x'_t dt + x'_v dv) + u'_y(y'_t dt + y'_v dv) + u'_z(z'_t dt + z'_v dv) = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz. \end{aligned}$$

Цю властивість називають *інваріантністю форми першого диференціала.* Її коротко можна сформулювати так. Якщо $r(t,v) = (x(t,v), y(t,v), z(t,v))$,

$$(f \circ r)(t,v) = f(r(t,v)), \tag{16.11}$$

то

$$(d(f \circ r))(t,v) = (df)(r(t,v)). \tag{16.12}$$

Вправа 16.2.1. *Нехай $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ — неперервно диференційовні функції. Довести, що*

$$d(x \pm y) = dx \pm dy; \tag{16.13}$$

$$d(xy) = ydx + xdy; \tag{16.14}$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}. \tag{16.15}$$

16.3. Геометричний зміст часткових похідних і повного диференціала

Означення 16.3.1. *Дотичною площиною* до графіка функції $z = f(x,y)$ в точці M_0 $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ називають таку площину, що різниця її аплікати $z(x,y)$ і значення функції $f(x,y)$ є величиною, нескінченно малою порівняно з $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ при $\Delta\rho \to 0$.

Зауваження 16.3.1. Зміст означення 16.3.1 не зміниться, якщо в ньому різницю $z(x,y) - f(x,y)$ замінити на відстань від точки $M(x,y,f(x,y))$ до розглядуваної площини (за умови, що вона не є вертикальною).

Справді, якщо P — основа перпендикуляра, опущеного з точки M на цю площину, то

$$MP = |z(x,y) - f(x,y)| \cos\varphi,$$

де φ — кут, який утворює площина $z = 0$ з розглядуваною площиною.

Теорема 16.3.1. *Нехай функція $z = f(x,y)$ визначена в області $D \subset \mathbb{R}^2$ і диференційовна в точці $(x_0,y_0) \in D$. Тоді графік цієї функції в точці $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ має єдину дотичну площину, рівняння якої*

$$z - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y - y_0). \tag{16.16}$$

Доведення. Запишемо рівняння довільної площини, яка проходить через точку M_0:

$$z(x,y) = f(x_0,y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0).$$

Згідно з означенням, ця площина є дотичною тоді і тільки тоді, коли

$$f(x,y) - z(x,y) = f(x,y) - f(x_0,y_0) - A(x - x_0) - B(y - y_0) = o(\Delta\rho),$$

тобто

$$\Delta f(x_0,y_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + o(\Delta\rho),\ \Delta\rho \to 0. \tag{16.17}$$

Для завершення доведення достатньо використати зауваження 16.1.1 і теорему 16.1.1 при $m = 2$. □

Зауваження 16.3.2. Сформулюємо деякі очевидні висновки з теореми 16.3.1. Перш за все зазначимо, що диференційовність функції f є умовою не тільки достатньою. а й необхідною для існування відповідної дотичної площини. Щоб переконатися в цьому, достатньо порівняти (16.17) і (16.3) при $m = 2$.

З (16.16) і відомої теореми з аналітичної геометрії випливає, що нормаль до поверхні $z = f(x,y)$ (тобто нормаль до її дотичної площини), яка проходить через точку (x_0,y_0,z_0), має такий вигляд:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0,y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0,y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \tag{16.18}$$

Крім того, з (16.16) зрозуміло, що $df(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)dx + f'_y(x_0,y_0)dy$ — це різниця аплікат точки дотику $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ та точки дотичної площини, абсциса й ордината якої дорівнюють, відповідно, $x_0 + dx$ та $y_0 + dy$. У цьому полягає геометричний зміст повного диференціала.

Зауваження 16.3.3. З'ясуємо геометричний зміст часткових похідних функції $z = f(x,y)$, визначеної в області $D \subset \mathbb{R}^2$. Нехай $(x_0,y_0) \in D$ і в цій точці існує часткова похідна $\dfrac{\partial z}{\partial x}$. Візьмемо замкнений круг Q радіуса r з центром у точці (x_0,y_0), який повністю міститься в D (існування такого круга випливає з того, що D — відкрита множина). Нехай γ — крива, що виникає унаслідок перерізу графіка функції $z = f(x,y)$ $((x,y) \in Q)$ площиною $y = y_0$:

$$z = f(x,y_0),\quad y = y_0,\quad x_0 - r \le x \le x_0 + r.$$

Оскільки (див. теорему 5.2.1)

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \left.\frac{\partial f(x,y_0)}{\partial x}\right|_{x=x_0} = \operatorname{tg}\alpha,$$

де α — кут, утворений дотичною до графіка функції $f(x,y_0)$ в точці $(x_0,f(x_0,y_0))$ з віссю OX, то

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Аналогічно, $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ — це тангенс кута, утвореного дотичною в точці (x_0, y_0,$f(x_0, y_0)$) до кривої, отриманої внаслідок перерізу графіка функції $z = f(x, y)$ площиною $x = x_0$ з віссю OY.

16.4. Похідні вищих порядків

Означення 16.4.1. Якщо функція $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ має в деякій області $D \subset \mathbb{R}^m$ часткову похідну за змінною x_i , яка, відповідно, в деякій точці $M_0(x_1^0, \ldots, x_m^0) \subset D$ має похідну за змінною x_j, то цю похідну називають *частковою похідною другого порядку*, або *другою частковою похідною*, функції u і позначають одним з символів

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 f(x_1^0, ..., x_m^0)}{\partial x_j \partial x_i}, \quad u''_{x_i x_j}, \quad f''_{x_i x_j}(x_1^0, ..., x_m^0),$$

або

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \quad \frac{\partial^2 f(x_1^0, ..., x_m^0)}{\partial x_i^2}, \quad u''_{x_i^2}, \quad f''_{x_i^2}(x_1^0, ..., x_m^0), \text{ якщо } j = i.$$

Загальне означення часткової похідної дають індуктивно:

$$\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x_j \partial x_{i_1} ... \partial x_{i_n}} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_n}}\right).$$

Часткову похідну $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ називають *змішаною*, якщо $i \neq j$.

Приклад 16.4.1.
Нехай $u = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$. Оскільки

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{-x}{y} = \frac{-x}{x^2 + y^2};$$

то

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{0 \cdot (x^2 + y^2) - y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{-1 \cdot (x^2 + y^2) + x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = -\frac{0 \cdot (x^2 + y^2) - x \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Як бачимо, тут змішані похідні u''_{xy} та u''_{yx} дорівнюють одна одній. Виявляється, що це не випадково. Правильна така теорема.

Теорема 16.4.1 (про рівність змішаних похідних). *Нехай функція $f(x,y)$ визначена в області $D \subset \mathbb{R}^2$ і в цій області існують похідні $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$. Якщо f''_{xy} та f''_{yx} як функції від x та y неперервні в точці (x_0, y_0), то*

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0). \tag{16.19}$$

Доведення. Розглянемо вираз

$$W(h,k) = \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0)}{hk},$$

де h та k настільки малі, що замкнений прямокутник з вершинами (x_0, y_0), (x_0+h, y_0), (x_0, y_0+k), (x_0+h, y_0+k) цілком міститься в D. Маємо

$$W(h,k) = \frac{1}{h}\left(\frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0)}{k} - \frac{f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0)}{k}\right) =$$

$$= \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h},$$

де $\varphi(x) = \frac{f(x, y_0+k) - f(x, y_0)}{k}$. За умовою, існує похідна

$$\varphi'(x) = \frac{f'_x(x, y_0+k) - f'_x(x, y_0)}{k},$$

отже, φ є неперервною на $[x_0, x_0+h]$. Тому можна використати теорему Лагранжа про скінченні прирости (теорему 6.2.2), з якої випливає, що

$$W(h,k) = \varphi'(x_0 + \theta_1 h) = \frac{f'_x(x_0+\theta_1 h, y_0+k) - f'_x(x_0+\theta_1 h, y_0)}{k}, \ (0 < \theta_1 < 1).$$

На підставі існування другої похідної $f''_{xy}(x,y)$ ще раз застосуємо теорему Лагранжа, цього разу до функції від y: $f'_x(x_0+\theta_1 h, y)$ в проміжку $[y_0, y_0+k]$. Отримаємо

$$W(h,k) = f''_{xy}(x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_2 k), \ (\theta_1, \theta_2 \in (0,1)).$$

Аналогічно доводимо, що при деяких $\theta_3, \theta_4 \in (0,1)$

$$W(h,k) = f''_{yx}(x_0+\theta_3 h, y_0+\theta_4 k).$$

Переходячи в рівності

$$f''_{xy}(x_0+\theta_1 h, y_0+\theta_2 k) = f''_{yx}(x_0+\theta_3 h, y_0+\theta_4 k)$$

до границі при h та k , що прямують до нуля, і використовуючи неперервність других змішаних похідних у точці (x_0, y_0), переконуємось у правильності рівності (16.19). $\square$

Правильна і загальна теорема про змішані похідні.

Теорема 16.4.2. *Нехай функція $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ визначена в області $D \subset \mathbb{R}^m$ і має в цій області всеможливі часткові похідні до порядку $(n-1)$ включно і змішані похідні n–го порядку, причому всі ці похідні неперервні в D. Тоді значення будь-якої n–ї змішаної похідної не залежить від порядку, в якому виконують послідовне диференціювання.*

Правильність цієї теореми випливає з теореми 16.4.1.

16.5. Диференціали вищих порядків

Означення 16.5.1. Нехай функція $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ визначена і диференційовна в області $D \subset \mathbb{R}^m$, отже, існує повний диференціал

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_m}dx_m. \tag{16.20}$$

Якщо права частина цієї рівності є диференційовною функцією змінних $x_1, \ldots, x_m$, то її диференціал називають *диференціалом другого порядку*, або *другим диференціалом*, від u і позначають символом d^2u:

$$d^2u = d(du).$$

Загалом, якщо визначено диференціал $d^n u$ порядку n від функції u, то її $(n+1)$–*м диференціалом* називають диференціал від $d^n u$:

$$d^{n+1}u = d(d^n u).$$

Зауваження 16.5.1. У разі переходу від $d^n u$ до $d^{n+1}u$ диференціали $dx_1, \ldots, dx_m$ незалежних змінних трактують як сталі, тому

$$d^2x_1 = ... = d^2x_m = 0. \tag{16.21}$$

Отже, якщо $\varphi_i(x_1, ..., x_m) = x_i$, то $d\varphi_i = dx_i$, отже, $d^2\varphi_i = 0$.

Для зручності позначимо через C_D^k множину всіх *k разів неперервно диференційовних на D* функцій, тобто таких функцій, які мають на D всеможливі часткові похідні до порядку k включно, причому всі ці похідні неперервні на D як функції від $x_1, \ldots, x_m$. З теорем 16.1.1, 16.1.2 випливає, що для будь-якої функції $u \in C_D^k$ існують диференціали $du, \ldots, d^k u$ і що $C_D^k \subset C_D$, де C_D — множина неперервних на D функцій.

Наступна теорема дає формулу для обчислення другого диференціала.

Теорема 16.5.1. *Якщо $u \in C_D^2$, то*

$$d^2u = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} dx_i^2 + 2\sum_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j, \tag{16.22}$$

де другу суму беруть по всіх $i, j = 1, \ldots, m$ таких, що $i < j$.

Доведення. З (16.13), (16.14) випливає, що

$$d^2u = d\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^{m} d\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) dx_i + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i} d^2 x_i,$$

тобто

$$d^2u = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i} d^2 x_i. \tag{16.23}$$

Звідси і з (16.21) отримуємо, що

$$d^2u = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j. \tag{16.24}$$

Для завершення доведення достатньо використати рівність $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$, яка випливає з теореми 16.4.2. □

Приклад 16.5.1.

У випадку, коли $u = f(x, y)$ — функція двох змінних, формула (16.22) набуває вигляду

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2, \tag{16.25}$$

а у випадку, коли $u = f(x, y, z)$ — функція трьох змінних, — вигляду

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dx dz + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dy dz\right). \tag{16.26}$$

Зауваження 16.5.2. Формулу (16.22) символьно можна записати в такому вигляді

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right)^2 u.$$

Використовуючи метод математичної індукції, неважко довести, що для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ та $u \in C_D^k$ справджується символьна рівність

$$d^k u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right)^k u,$$

яку потрібно розуміти так: спочатку "многочлен", що стоїть у дужках, формально підносять до степеня k, а потім усі отримані члени "множаться" на u, яке дописують у чисельник при ∂^k.

Теорема 16.5.2. *Нехай Δ, D — деякі області в $\mathbb{R}^k$ та $\mathbb{R}^m$, відповідно, функція $u = f(x_1, \ldots, x_m)$ двічі неперервно диференційовна на D, а функції*

$$x_j = \varphi_j(t_1 ... t_k) \ (j = 1, \ldots, m)$$

двічі неперервно диференційовні на Δ:

$$f \in C_D^2, \ \varphi_1, \ldots, \varphi_k \in C_\Delta^2,$$

причому для будь-якого $t = (t_1, \ldots, t_k) \in \Delta$

$$r(t) \stackrel{def}{=} (\varphi_1(t), ..., \varphi_m(t)) \in D \ .$$

Тоді функція $(t_1, \ldots, t_k) \mapsto u$ двічі неперервно диференційовна на Δ, а її другий диференціал d^2u має вигляд

$$d^2u = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_j} d^2 x_j. \tag{16.27}$$

Доведення. Застосовуючи наслідок 16.2.1 спочатку до функції u, а потім до функцій $u'_{x_1}, ..., u'_{x_m}$, переконуємось, що похідні $u''_{t_i t_j}$ $(i, j = 1, \ldots, k)$ існують і неперервні на Δ, як суми добутків неперервних функцій. Формулу (16.27) виведено в процесі доведення теореми 16.5.1 (див. (16.23)). □

Зауваження 16.5.3. Співвідношення (16.23) та (16.27) ідентичні за формою запису, але в умові теореми 16.5.1, у процесі доведення якої з'являється перше з них, змінні $x_1, \ldots, x_m$ є незалежними, тому з (16.23) випливає (16.24). У загальному ж випадку, тобто в ситуації, описаній в умові теореми 16.5.2, праві частини рівностей (16.24) та (16.27) не дорівнюють одна одній. Отже, *диференціали порядку вищого від першого інваріантності форми не мають*:

$$(d^2(f \circ r))(t) \neq (d^2 f)(r(t))$$

(порівняйте з (16.11), (16.12)).

Однак, якщо $x_1, \ldots, x_m$ є лінійними функціями від $t_1, \ldots, t_k$, тобто якщо

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} t_j + \beta_i, \ i = 1, \ldots, m, \ \alpha_{ij}, \beta_i \in \mathbb{R},$$

то $dx_i = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{ij} dt_j$, тому $d^2 x_i = 0$.

Отже, у цьому випадку форма другого диференціала (а тому, як легко довести за допомогою методу математичної індукції, і диференціала довільного порядку) інваріантна:

$$(d^k(f\circ r))(t) = (d^k)f(r(t)) = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^k f\right)(x_1, ..., x_m).$$

16.6. Формула Тейлора

Нехай $-\infty < a < t_0 < b < +\infty$, а $F \in C^{n+1}_{(a,b)}$. З теореми 6.6.2 випливає, що для будь-якого $t \in (a,b)$ існує $\theta \in (0,1)$ таке, що

$$\begin{aligned}\Delta F(t_0) = F(t) - F(t_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{F^{(k)}(t_0)}{k!}\Delta t^k + \frac{F^{(n+1)}(t_0+\theta\Delta t)}{(n+1)!}\Delta t^{n+1} = \\ = \sum_{k=1}^{n}\frac{d^k F(t_0)}{k!} + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(t_0+\theta\Delta t),\end{aligned} \tag{16.28}$$

де $\Delta t = t - t_0$.

Розглянемо питання про поширення формули Тейлора (16.28) на випадок функцій m змінних. Для спрощення запису обмежимось випадком $m = 2$.

Теорема 16.6.1. *Нехай $M_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{U}$ — деякий окіл точки M_0, $f \in C^{n+1}_D$. Якщо $M_0M_1 \subset \mathcal{U}$, де $M_1(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$, то існує $\theta \in (0,1)$ таке, що*

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = \\ = \sum_{k=1}^{n}\tfrac{1}{k!}d^k f(x_0,y_0) + \tfrac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y).\end{aligned} \tag{16.29}$$

Доведення. Приймемо

$$x = x_0 + t\Delta x, y = y_0 + t\Delta y,\ 0 \le t \le 1, \tag{16.30}$$

$$F(t) = f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y).$$

Зрозуміло, що $F \in C^{n+1}_{[0,1]}$, тому завдяки (16.28)

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = F(1) - F(0) = \\ = \sum_{k=1}^{n}\tfrac{d^k F(0)}{k!} + \tfrac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(\theta),\ (0<\theta<1),\end{aligned} \tag{16.31}$$

у цьому разі диференціал dt, що є в різних степенях праворуч, дорівнює $\Delta t =$ $= 1 - 0 = 1$

Оскільки у випадку лінійної заміни змінних (16.30) наявна інваріантність форми диференціала будь-якого порядку (див. зауваження 16.5.3), то

$$d^kF(0) = d^kf(x_0, y_0), \quad k = 1, .., n,$$

$$d^{n+1}F(\theta) = d^{n+1}f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y).$$

Крім того, оскільки $dt = 1$, то

$$dx = \Delta x \cdot dt = \Delta x, \quad dy = \Delta y \cdot dt = \Delta y.$$

Підставимо отримані співвідношення в (16.31), отримаємо (16.29). □

Зауваження 16.6.1. Формулу (16.29) можна вивести й без використання явно інваріантності форми вищих диференціалів у разі лінійної заміни. Для цього потрібно, використовуючи рівності $dt = \Delta t = 1$, переписати (16.31) у вигляді

$$\Delta f(x_0, y_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} + \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\theta). \tag{16.32}$$

Доведемо, що

$$F^k(t) = d^kf(x, y), \ k \in \mathbb{N}. \tag{16.33}$$

Справді, маємо

$$F'(t) = f'_x\Delta x + f'_y\Delta y = df(x, y).$$

Припустимо, що виконується (16.33), тобто

$$F^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^{k-i}} dx^i dy^{k-i},$$

де $C_k^i = \dfrac{k!}{i!(k-i)!}$. Використовуючи перетворення, аналогічні до використаних у процесі доведення теореми 5.9.1, отримуємо

$$F^{(k+1)}(t) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \left(\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{i+1} \partial y^{k-i}} dx^{i+1} dy^{k-i} + \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^i \partial y^{k+1-i}} dx^i dy^{k+1-i} \right) =$$
$$= \sum_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^i \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^i \partial y^{k+1-i}} dx^i dy^{k+1-i} = d^{k+1}f(x, y).$$

Отже, (16.33) доведено. Зокрема,

$$F^{(k)}(0) = d^kf(x_0, y_0), \ k = 1, \ldots, n,$$

$$F^{(n+1)}(\theta) = d^{n+1} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y).$$

Підставляючи ці співвідношення в (16.32), отримуємо (16.29).

16.7. Екстремуми функцій багатьох змінних

Нехай D — область в $\mathbb{R}^m$, $M_0(x_1^0, \ldots, x_m^0) \in D$, а $f : D \to \mathbb{R}$.

Означення 16.7.1. Кажуть, що функція f має *локальний максимум (локальний мінімум)* у точці M_0, якщо існує окіл $\mathcal{U}(M_0)$ точки M_0 такий, що для будь-якої точки $M(x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{U}(M_0)$

$$f(M) \leq f(M_0) \quad (f(M) \geq f(M_0)) .$$

Якщо при $x \in \mathcal{U}(M_0) \backslash M_0$ виконується строга нерівність $f(M) < f(M_0)$ $(f(M) > f(M_0))$, то кажуть, що функція f має в точці M_0 *строгий локальний максимум (строгий локальний мінімум)*.

Теорема 16.7.1. *Якщо в точці M_0 функція f має локальний екстремум і в цій точці існують скінченні часткові похідні за кожною змінною $x_1, \ldots, x_m$, то*

$$f'_{x_1}(M_0) = \ldots = f'_{x_m}(M_0) = 0. \tag{16.34}$$

Доведення. Розглянемо функцію $\varphi(x_1) = f(x_1, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ однієї змінної x_1, визначену, з огляду на умови теореми, в деякому околі точки x_1^0. У цій точці функція $\varphi(x_1)$ має локальний екстремум, і оскільки $\varphi'(x_1^0) = f'_{x_1}(x_1^0, .., x_m^0)$, то $f'_{x_1}(M_0) = 0$. Аналогічно доводять інші рівності системи (16.34). $\Box$

Зауваження 16.7.1. Точки, які задовольняють умови (16.34), називають *стаціонарними*. Зрозуміло, що, як і у випадку функцій однієї змінної, ці умови є необхідними, але не достатніми для існування в точці M_0 локального екстремуму функції f.

Теорема 16.7.2. *Нехай D — область в $\mathbb{R}^2$, $f \in C_D^2$, $M_0(x_0, y_0) \in D$ — стаціонарна точка функції f:*

$$f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0, \tag{16.35}$$

і $f''_{x^2}(M_0) = a_{11},\ f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0) = a_{12},\ f''_{y^2}(M_0) = a_{22},\ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \Delta$.

Тоді

а) *якщо $a_{11} > 0$, $\Delta > 0$, то f має в точці M_0 строгий локальний мінімум;*

б) *якщо $a_{11} < 0$, $\Delta > 0$, то f має в точці M_0 строгий локальний максимум;*

в) *якщо $\Delta < 0$, то f не має локального екстремуму в точці M_0.*

Доведення. Нехай Δx, $\Delta y \in \mathbb{R}$ такі, що відрізок M_0M, де M — точка з координатами (x, y), а $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, міститься в D.

Застосовуючи формулу Тейлора (16.29) і враховуючи (16.35), переконуємось, що існує точка $M_\theta \in [M_0, M]$ з координатами $(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)$ $(0 < \theta < 1)$ така, що

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}d^2 f(M_\theta) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(f''_{x^2}(M_\theta)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(M_\theta)\Delta x\Delta y + f''_{y^2}(M_\theta)\Delta y^2\right).$$

Нехай $\alpha_{11} \overset{def}{=} f''_{x^2}(M_\theta) - a_{11}$, $\alpha_{12} \overset{def}{=} f''_{xy}(M_\theta) - a_{12}$, $\alpha_{22} \overset{def}{=} f''_{y^2}(M_\theta) - a_{22}$. Маємо

$$2\Delta f(x_0, y_0) = \left(a_{11}\Delta x^2 + 2a_{12}\Delta x\Delta y + a_{22}\Delta y^2\right) + \left(\alpha_{11}\Delta x^2 + 2\alpha_{12}\Delta x\Delta y + \alpha_{22}\Delta y^2\right), \tag{16.36}$$

причому при всіх i, j, оскільки $f \in C^2_D$, виконується

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha_{ij}(\Delta x, \Delta y) = 0. \tag{16.37}$$

Уведемо такі позначення:

$$\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \quad h = \frac{\Delta x}{\Delta\rho}, \quad k = \frac{\Delta y}{\Delta\rho}, \tag{16.38}$$

$$\varepsilon = \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \alpha_{11}h^2 + 2\alpha_{12}hk + \alpha_{22}k^2.$$

Як бачимо, (16.36) можна переписати так:

$$2\Delta f(x_0, y_0) = \left((a_{11}h^2 + 2a_{12}hk + a_{22}k^2) + \varepsilon\right)\Delta\rho^2, \tag{16.39}$$

де

$$\lim_{\Delta\rho \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0 \tag{16.40}$$

(це випливає з (16.37) і з того, що $|h| \le 1, |k| \le 1$).

Для дослідження знака правої частини рівності (16.39) розглянемо функцію

$$A(\xi, \eta) = a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2, \quad (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$$

(функції такого вигляду називають *квадратичними формами*). Можливі такі випадки:

А. $\left(\forall (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\right) \{A(\xi, \eta) > 0\}$ (у цьому разі квадратичну форму A називають *додатно визначеною*).

Оскільки множина $\mathcal{U} = \left\{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \xi^2 + \eta^2 = 1\right\}$ обмежена і замкнена в $\mathbb{R}^2$, а функція A неперервна, то за теоремою Вейєрштрасса 15.5.3

$$(\exists m > 0)\,(\forall\,(\xi, \eta) \in \mathcal{U})\,\{A\,(\xi, \eta) \geq m\}\,.$$

Оскільки (див. (16.38)) $(h, k) \in \mathcal{U}$, то з (16.39), (16.40) випливає, що

$$(\forall \delta > 0)\,(\forall\,\Delta x, \Delta y : |\Delta x| < \delta, |\Delta y| < \delta)\left\{a_{11}h^2 + 2a_{12}hk + a_{22}k^2 + \varepsilon\,(\Delta x, \Delta y) > \frac{m}{2}\right\}.$$

Отже, $\Delta f\,(x_0, y_0) > \frac{1}{4}m\Delta\rho^2$, а це означає, що в розглядуваному випадку функція f в точці M_0 має локальний мінімум.

Б. $\left(\forall\,(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}\right)\{A(\xi, \eta) < 0\}$ (у цьому випадку квадратичну форму A називають *від'ємно визначеною*).

З викладеного вище випливає, що в цій ситуації M_0 є точкою локального мінімуму для функції $(-f)$, а, отже, точкою локального максимуму для функції f.

В. $\left(\exists\,(\xi_+, \eta_+) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\right)\{A(\xi_+, \eta_+) > 0\} \wedge \left(\forall\,(\xi_-, \eta_-) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\right)\{A(\xi_-, \eta_-) < 0\}$ (у цьому випадку квадратичну форму А називають *знакозмінною*).

Приймемо $h_\pm = \dfrac{\xi_\pm}{\sqrt{\xi_\pm^2 + \eta_\pm^2}}$, $k_\pm = \dfrac{\eta_\pm}{\sqrt{\xi_\pm^2 + \eta_\pm^2}}$. Зрозуміло, що $(h_\pm, k_\pm) \in \mathcal{U}$. $A(h_+, k_+) = m_+ > 0$, $A(h_-, k_-) = m_- < 0$.

Тому з (16.39), (16.40) випливає, що

$$(\exists \delta > 0)\,(\forall\,\Delta\rho : \Delta\rho < \delta)\left\{a_{11}h_+^2 + 2a_{12}h_+k_+ + a_{22}k_+^2 + \varepsilon > \frac{m}{2}\right\},$$

отже, при $\Delta x = h_+\Delta\rho$, $\Delta y = k_+\Delta\rho$ маємо

$$\Delta f\,(x_0, y_0) > \frac{1}{4}m_+\Delta\rho^2 > 0.$$

Аналогічно, при $\Delta x = h_-\Delta\rho$, $\Delta y = k_-\Delta\rho$ і достатньо малих $\Delta\rho$ виконується

$$\Delta f\,(x_0, y_0) < \frac{1}{4}m_-\Delta r^2 < 0.$$

Отже, у розглядуваній ситуації локального екстремуму немає.

Для завершення доведення досить нагадати елементарні відомості з теорії квадратних тричленів:

а) нехай $a_{11} > 0$, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$. У цьому випадку $A\,(\xi, 0) = a_{11}\xi^2 > 0$ при $\xi \neq 0$. При $\eta \neq 0$ $A\,(\xi, \eta) = \eta^2\left(a_{11}z^2 + 2a_{12}z + a_{22}\right)$, де $z = \frac{\xi}{\eta}$. Оскільки старший коефіцієнт тричлена, що стоїть у дужках додатний, а його дискримінант менший від нуля, то $A\,(\xi, \eta) > 0$. Отже, A — додатно визначена квадратична форма;

б) аналогічно доводять таке: якщо $a_{11} < 0$, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, то A — від'ємно визначена квадратична форма;

в) нехай $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$. У цьому випадку дискримінант тричлена $a_{11}z^2 + 2a_{12}z + a_{22}$ більший від нуля, тому цей тричлен, а разом з ним і квадратична форма $A\,(\xi, \eta)$ може набувати як додатних, так і від'ємних значень. □

Зауваження 16.7.2. Якщо $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, тобто якщо існує $(\xi_0, \eta_0) \neq (0,0)$ таке, що $A(\xi_0, \eta_0) = 0$, і $A(\xi, \eta)$ набуває або тільки невід'ємних, або тільки недодатних значень, то залежно від поведінки вищих похідних у цьому випадку функція може мати, а може й не мати точок екстремуму. Проілюструємо це на прикладах.

А. Нехай $f(x,y) = (x-y)^2$. Маємо $f'_x = 2(x-y)$, $f'_y = 2(y-x)$, отже, точка $M_0(0,0)$ є стаціонарною. У цій точці $a_{11} = a_{22} = 2$, $a_{12} = -2$, тому $\Delta = 0$. Зрозуміло, що $M_0(0,0)$ є точкою нестрогого локального мінімуму ($f(0,0) = 0$ і $\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\right)\{f(x,y) \geq 0\}$).

Б. Нехай $f(x,y) = x^3 + y^2$. Маємо $f'_x = 3x^2$, $f'_y = 2y$, отже, $M_0(0,0)$ — єдина стаціонарна точка. У цій точці $a_{11} = a_{12} = 0$, $a_{22} = 2$, так що $\Delta = 0$. Оскільки $f(0,0) = 0$, $f(x,0) = x^3$, то звідси випливає, що екстремуму в точці $M_0(0,0)$ немає.

Розглянемо тепер питання про достатні умови екстремуму функції довільної кількості змінних. Почнемо з того, що нагадаємо деякі відомі з курсу алгебри факти.

Означення 16.7.2. Функцію $A(\xi)$ вигляду

$$A(\xi) = A(\xi_1, ..., \xi_m) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\xi_i\xi_j, \qquad (16.41)$$

де $\xi = (\xi_1, ..., \xi_m) \in \mathbb{R}$, $a_{ij} = a_{ji}$ $(i,j = 1,..m)$, називають *квадратичною формою.*

Цю форму називають:

а) *додатно визначеною*, якщо

$$(\forall \xi \in \mathbb{R}^m \setminus (0,0,...,0))\,\{A(\xi) > 0\};$$

б) *від'ємно визначеною*, якщо

$$(\forall \xi \in \mathbb{R}^m \setminus (0,0,...,0))\,\{A(\xi) < 0\};$$

в) *невизначеною*, якщо існують $\xi_+, \xi_- \in \mathbb{R}^m$ такі, що $A(\xi_+) > 0$, $A(\xi_-) < 0$;

г) *напіввизначеною*, якщо вона не може набувати значення різних знаків, тобто $(\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^m)$ $\{A(\xi)\,A(\eta) \geq 0\}$, і існує таке $\xi \in \mathbb{R}^m \setminus (0,0,...,0)$, що $A(\xi) = 0$.

Приклад 16.7.1.

Нехай $D \subset \mathbb{R}^m$ — деяка область, $f \in C_D^2$, $M_0 \in D$,

$$A(dx_1, ..., dx_m) = d^2 f(M_0) = \left(d^2 f(M_0)\right)(dx_1, ..., dx_m) = \sum_{i,j=1}^{m} f''_{x_i x_j}(M_0)\, dx_i dx_j.$$

Оскільки $f''_{x_i x_j}(M_0) = f''_{x_j x_i}(M_0)$ $\quad (i,j = 1, ..., m)$, то $d^2 f(M_0)$ — квадратична форма.

Теорема 16.7.3 (критерій Сильвестра). *Нехай* $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *— квадратична форма вигляду* (16.41), *а* $\Delta_1, ..., \Delta_m$ *— її головні мінори:*

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_m = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}.$$

Ця квадратична форма є додатно визначеною тоді і тільки тоді, коли

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, ..., \Delta_m > 0, \tag{16.42}$$

і є від'ємно визначеною тоді і тільки тоді, коли

$$-\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, ..., (-1)^m \Delta_m > 0. \tag{16.43}$$

Теорема 16.7.4. *Припустимо, що $f \in C^2_D$, де D — область в $\mathbb{R}^m$, а $M_0 \in D$ — стаціонарна точка функції f. Якщо $d^2 f(M_0)$ є додатно визначеною (від'ємно визначеною) квадратичною формою, то в точці M_0 функція f має строгий локальний мінімум (строгий локальний максимум). Якщо $d^2 f(M_0)$ є невизначеною, то в точці M_0 екстремуму немає. Якщо ж ця форма є напіввизначеною, то наявність або відсутність екстремуму функції f в точці M_0 залежить від поведінки її вищих похідних.*

Доведення цієї теореми аналогічне до доведення теореми 16.7.2, узагальненням якої вона є.

Наслідок 16.7.1. *Нехай виконуються умови теореми 16.7.4. Приймемо*

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} f''_{x_1^2}(M_0) & f''_{x_1x_2}(M_0) & \dots & f''_{x_1x_j}(M_0) \\ f''_{x_2x_1}(M_0) & f''_{x_2^2}(M_0) & \dots & f''_{x_2x_j}(M_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f''_{x_jx_1}(M_0) & f''_{x_jx_2}(M_0) & \dots & f''_{x_j^2}(M_0) \end{vmatrix}, \quad (j = 1, ..., m).$$

Якщо виконуються умови (16.42) (відповідно, (16.43)), то в точці M_0 функція f має строгий локальний мінімум (строгий локальний максимум).

Правильність цього твердження випливає з теореми 16.7.3, яку доводять у курсі алгебри.

Зауваження 16.7.3. Нехай функція $u = f(x_1, ..., x_m)$ визначена і неперервна на замиканні $\overline{D}$ обмеженої області $D \subset \mathbb{R}^m$ і, за винятком, можливо, скінченної кількості точок, має в D всеможливі скінченні часткові похідні. За теоремою Вейєрштрасса (теорема 15.5.3), існує точка $M_0(x_1^0, ..., x_m^0) \in \overline{D}$, в якій ця функція набуває свого найбільшого (найменшого) значення. Якщо $M_0 \in D$, то в цій точці функція, очевидно, має локальний максимум (локальний мінімум), тобто M_0 є "підозрілою на екстремум" (це означає, що або M_0 є стаціонарною точкою, або в цій точці не існує деяких часткових похідних). Однак найбільшого (найменшого) значення функція

u може досягати й на межі ∂D області D. Тому *щоб знайти найбільше (найменше) значення функції $u = f(x_1, ..., x_m)$ на множині $\overline{D}$, треба знайти всі точки $M \in D$, "підозрілі на екстремум", обчислити значення функції в них і порівняти зі значеннями функції на межі ∂D. Найбільше (найменше) з цих значень і буде найбільшим (найменшим) значенням функції на $\overline{D}$.*

Проілюструємо сказане на прикладі.

Приклад 16.7.2.

Знайти найбільше значення функції $u = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$ в трикутнику

$$\overline{D} = \left\{(x, y) \in R^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\pi\right\}.$$

У внутрішніх точках множини $\overline{D}$ рівність $u'_x(M_0) = u'_y(M_0) = 0$ виконується тоді і тільки тоді, коли $M_0 = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$, причому $u\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. На межі області, тобто на прямих $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2\pi$ маємо $u(x, y) = 0$. Отже,

$$u_{\max} = u\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Розділ 17

Теорія неявних функцій та їхнє застосування

17.1. Позначення і формулювання задачі

Зосередимося на випадку $m = 2$ і розглянемо рівняння

$$F(x, y) = 0, \tag{17.1}$$

де F — функція двох змінних, визначена на деякій області $D \subset \mathbb{R}^2$. Якщо $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ — проміжок і для будь-якого $x \in \mathcal{I}$ існує одне або декілька значень y, які разом з x задовольняють рівняння (17.1), то кажуть, що *рівняння* (17.1) *визначає* одну або декілька функцій $y = f(x)$ таких, що

$$(\forall x \in \mathcal{I})\{F(x, f(x)) = 0\}.$$

Приклад 17.1.1.
Рівнянням $x - e^y = 0$ визначена функція $y = \ln x\,(x > 0)$, оскільки для довільного $x \in (0, \infty)$ маємо $x = e^{\ln x}$. Очевидно, що жодна інша функція цим рівнянням не визначена.

Означення 17.1.1. Функцію $y = f(x)$ називають *неявною*, якщо вона визначена за допомогою нерозв'язаного відносно y рівняння (17.1).

Зауваження 17.1.1. Якщо рівняння (17.1) визначає одну функцію $y = f(x)$, то множина

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\} \tag{17.2}$$

є графіком цієї функції.

Зрозуміло, що множина $G \subset \mathbb{R}^2$ вигляду (17.2) є графіком деякої визначеної на множині $\mathcal{I} \in \mathbb{R}$ функції тоді і тільки тоді, коли

$$(\forall\, x \in \mathcal{I})(\exists!\, y \in \mathbb{R})\{(x, y) \in G\}. \tag{17.3}$$

Умову (17.3) називають *умовою однозначності*. Геометрично вона означає, що вертикальна пряма $x = x_0$ ($x_0 \in \mathcal{I}$) перетинає криву G в одній і тільки в одній точці. Зрозуміло, що умова однозначності виконується не завжди.

Приклад 17.1.2.

Рівняння $x^2 + y^2 - 1 = 0$ при кожному $x \in [-1, 1]$ має два розв'язки $y = \pm\sqrt{1-x^2}$, тому воно визначає безліч функцій. Справді, якщо $A \subset [0, 1]$,

$$f_A(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & x \in A, \\ -\sqrt{1-x^2}, & x \in [0,1] \setminus A, \end{cases}$$

то, підставивши в розглядуване рівняння $y = f_A(x)$, отримаємо тотожність.

Отже, умова однозначності тут не виконується: коло $x^2 + y^2 - 1 = 0$ не є графіком функції. Однак якщо M_0 — довільна точка розглядуваного кола (крім (1, 0) та (-1,0)), то перетин її достатньо малого околу з цим колом уже є графіком функції. Ця обставина підтвержує доцільність такого означання.

Означення 17.1.2. Кажуть, що рівняння (17.1) *однозначно визначає y як функцію від x* у прямокутнику $P = \mathcal{I}_x \times \mathcal{I}_y$, де $\mathcal{I}_x, \mathcal{I}_y$ — проміжки, якщо для будь-якого $x \in \mathcal{I}_x$ це рівняння має один і тільки один корінь $y \in \mathcal{I}_y$.

У випадку, описаному в означенні 17.1.2, також кажуть, що рівняння (17.1) в околі точки $M_0 \in G \cap P$, де G визначено згідно з (17.2), *локально визначає y як функцію від x*. Сформулюємо задачу про визначення умов, що їх повинні задовольняти функція F та точка $(x_0, y_0) \in G$, достатніх для того, щоб рівняння (17.1) в околі цієї точки локально визначало y як функцію від x: $y = f(x)$, а також про зв'язок між неперервністю (диференційовністю) функцій F та f. Цю задачу, а також деякі її узагальнення розглянуто нижче.

17.2. Теореми про неявну функцію

Теорема 17.2.1. *Нехай:*

1) *функція F неперервна в прямокутнику $Q = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times [y_0 - \alpha, y_0 + \alpha]$, $M_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha > 0$;*

2) *$F(x_0, y_0) = 0$;*

3) *для довільного $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ функція $y \mapsto F(x, y)$ зростаюча (або спадна).*

Тоді

а) *існує $\beta \in (0, \alpha]$ таке, що рівняння $F(x, y) = 0$ в прямокутнику $P = \mathcal{I}_x \times \mathcal{I}_y$, де $\mathcal{I}_x = (x_0 - \beta, x_0 + \beta)$, $\mathcal{I}_y = (y_0 - \alpha, y_0 + \alpha)$ однозначно визначає y як функцію від x: $y = f(x)$;*

б) *$f(x_0) = y_0$;*

в) *$f \in C_{\mathcal{I}_x}$.*

Доведення. Нехай, для визначеності, функція $y \mapsto F(x,y)$ монотонно зростаюча при кожному $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$. Тоді $F(A_0) = F(x_0, y_0 - \alpha) < 0$, $F(B_0) = F(x_0, y_0 + \alpha) > 0$. Оскільки функції $x \mapsto F(x, y_0 + \alpha)$ та $x \mapsto F(x, y_0 - \alpha)$ неперервні на $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$(це випливає з неперервності F як функції двох змінних), то існує $\beta \in (0, \alpha)$ таке, що (рис. 17.1)

$$(\forall x \in (x_0 - \beta, x_0 + \beta))\ \{F(x, y_0 - \alpha) < 0 \wedge F(x, y_0 + \alpha) > 0\}. \tag{17.4}$$

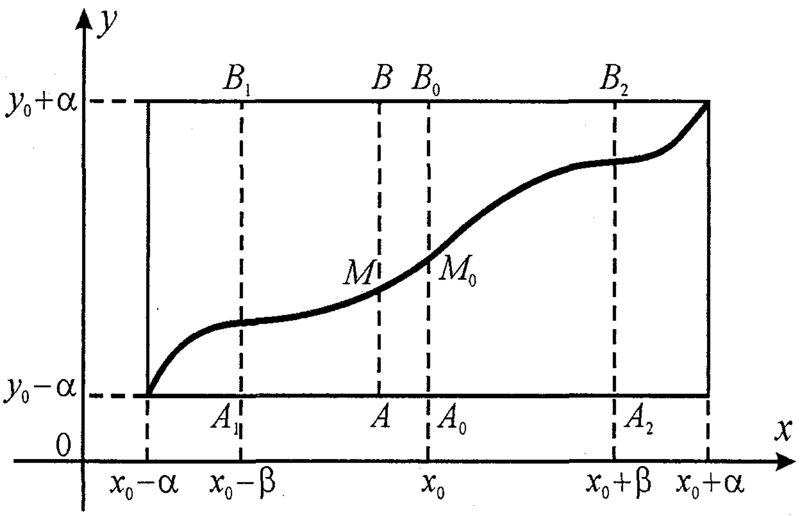


Рис. 17.1

З огляду на (17.4) і теорему Больцано-Коші про проміжне значення існує таке $y \in [y_0 - \alpha, y_0 + \alpha]$, що $F(x,y) = 0$. Єдиність такого y випливає з монотонності згаданої функції. Отже, рівняння $F(x,y) = 0$ в прямокутинку P визначає y як функцію від x:

$$y = f(x) \Leftrightarrow F(x,y) = 0.$$

Зокрема, враховуючи умову 2), маємо $f(x_0) = y_0$.

Наведені вище міркування засвідчують, що

$$(\forall x \in (x_0 - \beta, x_0 + \beta))\ \{|f(x) - f(x_0)| < \alpha\}. \tag{17.5}$$

Оскільки ці міркування застосовні і до будь-якого меншого квадрата з центром у точці M_0, тобто для будь-якого як завгодно малого $\alpha > 0$, то функція $f(x)$ неперервна при $x = x_0$.

Нехай тепер $\widetilde{x_0}$ — довільна точка з $\mathcal{I}_x$, $\varepsilon > 0$ — довільне число. Існує $\widetilde{\alpha} \in (0, \varepsilon)$ таке, що $(\widetilde{x_0} - \widetilde{\alpha}, \widetilde{x_0} + \widetilde{\alpha}) \times (f(\widetilde{x_0}) - \widetilde{\alpha}, f(\widetilde{x_0}) + \widetilde{\alpha}) \subset P$, бо $(\widetilde{x_0}, f(\widetilde{x_0})) \in P$, а P —

відкрита множина. Повторивши міркування, за допомогою яких виведено (17.5), отримаємо

$$(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in (\widetilde{x_0} - \delta, \widetilde{x_0} + \delta))\,\{|f(x) - f(\widetilde{x_0})| < \widetilde{\alpha} < \varepsilon\}.$$

Отже, $f \in C_{I_x}$. □

Теорема 17.2.2. *Нехай точка* $M_0(x_0, y_0)$, *число* α, *прямокутник* Q *такі, як у теоремі 17.2.1. Припустимо, що:*

1) *функція* $F \in C^1_Q$;

2) $F(x_0, y_0) = 0$;

3) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Тоді

а) *існує прямокутник* $P = \mathcal{I}_x \times \mathcal{I}_y$ $(\mathcal{I}_x = (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \mathcal{I}_y = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon))$ *такий, що рівняння* $F(x, y) = 0$ *однозначно визначає в* P y *як функцію від* x: $y = f(x) \Leftrightarrow F(x, y) = 0$;

б) $y_0 = f(x_0)$;

в) $f \in C^1_{\mathcal{I}_x}$, *причому*

$$(\forall x \in \mathcal{I}_x)\left\{f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}\right\}. \tag{17.6}$$

Доведення. Нехай $F'_y(x_0, y_0) > 0$. Оскільки $F'_y \in C_Q$, то існує $\varepsilon > 0$ таке, що $F'_y(x, y) > 0$ в прямокутнику $R = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \times [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$. Для прямокутника R виконуються всі припущення теореми 17.2.1 (зокрема, монотонність функції $y \mapsto F(x, y)$ при $x = \text{const}$ випливає з того, що $F'_y > 0$). Тому твердження а і *б* можна вважати доведеними. Крім того, $f \in C_{\mathcal{I}_x}$. Доведемо, що $f \in C^1_{\mathcal{I}_x}$.

Нехай число Δx таке, що $x + \Delta x \in \mathcal{I}_x$, $y = f(x)$, а $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. Тоді $F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$, а, отже, $\Delta F(x, y) = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = 0$.

Оскільки, згідно з теоремою 16.1.2, неперервно диференційовна функція F є диференційовною, то

$$0 = \Delta F(x, y) = F'_x(x, y)\Delta x + F'_y(x, y)\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y,$$

де $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha_i(\Delta x, \Delta y) = 0$, $i = 1, 2$. Звідси випливає, що

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x, y) + \alpha_1}{F'_y(x, y) + \alpha_2}.$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то з неперервності функції $f(x)$ маємо $\Delta y \to 0$, а тому $\alpha_1 \to 0$, $\alpha_2 \to 0$. Оскільки $F'_y(x, y) \neq 0$, то існує границя правої частини, а, отже, існує й похідна y за x:

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

Підставляючи $f(x)$ замість y, отримуємо (17.6). З огляду на теорему про неперервність композиції неперервних функцій з (17.6) випливає, що $f \in C^1_{I_x}$. □

Теорема 17.2.3. *Нехай функція* $F(x_1, ..., x_m, y)$ *визначена в околі* Q *точки* $M_0(x_1^0, ..., x_m^0, y^0) \in \mathbb{R}^{m+1}$ *так, що*

1) $F \in C^1_Q$;

2) $F(M_0) = 0$;

3) $F'_y(M_0) \neq 0$.

Тоді

а) *існує* $(m+1)$*–вимірний паралелепіпед* $P = P_x \times \mathcal{I}_y \subset Q$ *де* $P_x = \{x = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m : |x_i - x_i^0| < \alpha_i, i = 1, ..., m\}$, $\mathcal{I}_y = \{y \in \mathbb{R} : |y - y_0| < \beta\}$ *і єдина функція* m *змінних* $f : P_x \to \mathcal{I}_y$ *такі, що*

$$y = f(x_1, ..., x_m) \Leftrightarrow F(x_1, ..., x_m, y) = 0;$$

б) $y_0 = f(x_1^0, ..., x_m^0)$;

в) $f \in C^1_{P_x}$, *причому*

$$(\forall x = (x_1, ..., x_m) \in P_x)\left\{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}\right\}. \tag{17.7}$$

Доведення цієї теореми аналогічне до доведення теорем 17.2.1, 17.2.2.

Зауваження 17.2.1. Припустимо, що функція F задовольняє всі умови теореми 17.2.2. Отже, функція $y = f(x)$, про яку йдеться у цій теоремі, неперервно диференційовна. Наведемо простий спосіб обчислення похідної цієї функції. Для цього підставимо неявну функцію $y = f(x)$ у рівняння (17.1) і продиференціюємо отриману тотожність $F(x, f(x)) = 0$. На підставі теореми 16.2.1 про похідну складеної функції отримаємо

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y)y'_x = 0, \tag{17.8}$$

отже,

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}, \tag{17.9}$$

де $y = f(x)$. Іншими словами, ще раз переконуємось у правильності формули (17.6).

Якщо $F \in C^2_Q$, то вираз у формулі (17.9) праворуч можна продиференціювати. Отже, існує друга похідна y''_{x^2} від неявної функції y. Виконуючи диференціювання і підставляючи замість y'_x вираз (17.9), отримуємо рівність

$$y''_{x^2} = -\frac{{F'_x}^2 F''_{y^2} - 2F'_x F'_y F''_{xy} + {F'_x}^2 F''_{x^2}}{{F'_y}^3}.$$

Звідси $f \in C^2_{I_x}$.

За допомогою методу математичної індукції легко довести таке: якщо $F \in C_Q^k$ $(k \in \mathbb{N})$, то $f \in C_{I_x}^k$. Зазначимо, що похідні від неявної функції легше обчислювати шляхом повторного диференціювання тотожності (17.8) з урахуванням того, що y є функцією від x.

Аналогічна ситуація виникає у випадку рівняння $F(x_1, ..., x_m, y) = 0$.

17.3. Функціональні визначники (якобіани). Теорема про неявну вектор-функцію

Означення 17.3.1. Нехай $D \subset \mathbb{R}^m$ — деяка область, $f_1, ..., f_m \in C_D^1$. Визначник

$$\frac{D(y_1, ..., y_m)}{D(x_1, ..., x_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_m} \end{vmatrix}, \tag{17.10}$$

де

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, ..., x_m), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m = f_m(x_1, ..., x_m), \end{cases} \tag{17.11}$$

називають *функціональним визначником Якобі*, або *якобіаном*, системи (17.11).

Приклад 17.3.1.

Нехай x, y — декартові, а r, φ — полярні координати точки $M \in \mathbb{R}^2$, тобто $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тому якобіан переходу до полярних координат

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r. \tag{17.12}$$

Приклад 17.3.2.

Нехай x, y, z — декартові координати точки $M \subset \mathbb{R}$, а r, φ — полярні координати її проекції M_1 на площину xOy (рис. 17.2). Числа r, φ, z називають *циліндричними координатами* точки M. Оскільки $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$, то якобіан переходу до циліндричних координат

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r. \tag{17.13}$$

Приклад 17.3.3.

Нехай x, y, z — декартові координати точки $M \in \mathbb{R}^3$, а M_1 — її проекція на площину xOy. Позначимо через r довжину вектора $\overrightarrow{OM}$, через ψ — кут між $\overrightarrow{OM}$ та площиною xOy, а через φ — кут між $\overrightarrow{OM_1}$ та додатним напрямом осі абсцис (рис. 17.3). Числа φ, ψ, r називають *сферичними координатами* точки M. Оскільки

$$x = r\cos\varphi\cos\psi, \quad y = r\sin\varphi\cos\psi, \quad z = r\sin\psi,$$

то якобіан переходу до сферичної системи координат

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \psi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\cos\psi & -r\cos\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\cos\psi & r\cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\sin\psi \\ \sin\psi & 0 & r\cos\psi \end{vmatrix} =$$

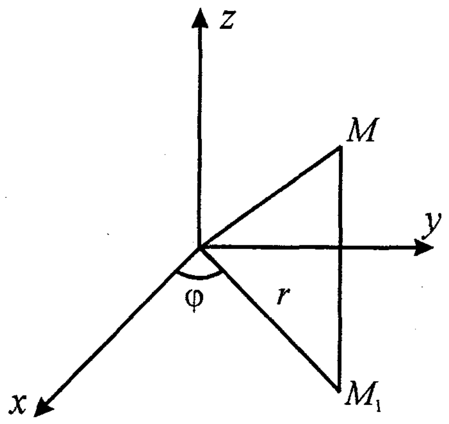


Рис. 17.2

$$= r^2\cos^2\varphi\cos^3\psi + r^2\sin^2\varphi\sin^2\psi\cos\psi + r^2\cos^2\varphi\sin^2\psi\cos\psi + r^2\sin^2\varphi\cos^3\psi =$$

$$= r^2\cos^2\varphi\cos\psi(\cos^2\psi + \sin^2\psi) + r^2\sin^2\varphi\cos\psi(\cos^2\psi + \sin^2\psi) =$$

$$= r^2\cos^2\varphi\cos\psi + r^2\sin^2\varphi\cos\psi = r^2\cos\psi(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi).$$

Отже,

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)} = r^2\cos\psi. \tag{17.14}$$

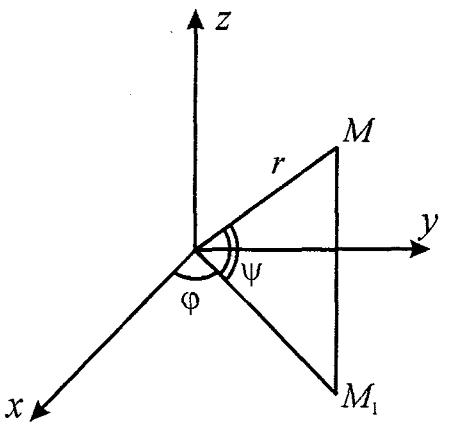


Рис. 17.3

Нехай $F_1, ..., F_n$ — функції $m+n$ змінних, множиною визначення кожної з яких є область $D \subset \mathbb{R}^{m+n}$. Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} F_1(x_1, ..., x_m, ..., y_1, ..., y_n) = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n) = 0 \end{cases} \tag{17.15}$$

і сформулюємо умови, достатні для того, щоб ця система локально визначала $y_1, ..., y_n$ як функції від $x_1, ..., x_m$, тобто щоб існували єдині функції

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, ..., x_m); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = f_n(x_1, ..., x_m) \end{cases} \tag{17.16}$$

такі, що в деякому околі N_0 точки $N_0 \in \mathbb{R}^{m+n}$ системи (17.15) та (17.16) еквівалентні.

Теорема 17.3.1. *Нехай $N_0(x_1^0, ..., x_m^0, y_1^0, ..., y_n^0) \in \mathbb{R}^{m+n}$, $M_0 \in \mathbb{R}^m$ — точка з координатами $(x_1^0, ..., x_m^0)$. Припустимо, що*

1) *функції $F_1, .., F_n$ неперервно диференційовні в деякому околі $\mathcal{U}$ точки N_0;*
2) $F_1(N_0) = ... = F_n(N_0) = 0$;
3) $\dfrac{D(F_1, ..., F_n)}{D(y_1, ..., y_n)}(N_0) \neq 0.$

Тоді існують числа $\alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ..., \beta_n > 0$ такі, що $P = P_x \times P_y \subset \mathcal{U}$, де $P_x = \{x = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m : |x_i - x_i^0| < \alpha_i,\ i = 1, ..., m\}$, $P_y = \{y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n : |y_j - y_j^0| < \beta_j,\ j = 1, ..., n\}$ і

а) *існують єдині $f_j : P_x \to (y_j^0 - \beta_j, y_j^0 + \beta_j)$ такі, що на P системи* (17.15) *та* (17.16) *еквівалентні;*

б) $f_j(M_0) = y_j^0$, $j = 1, ..., n$;

в) $f_1, ..., f_n \in C^1_{P_x}$.

Зауваження 17.3.1. Припустимо, що виконуються умови теореми 17.3.1. Розглянемо вектор-функції $F : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^m$ та $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, визначені за допомогою співвідношень $F(x, y) = (F_1(x, y), ...F_n(x, y))$, $f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$.

Кажуть, що відображення F є *неперервно диференційовним* на $\mathcal{U}$, і записують $F \in C^1_{\mathcal{U}}$, якщо функції $F_1(x_1, ..., y_n), F_n(x_1, ..., y_n)$ неперервно диференційовні на $\mathcal{U}$. Аналогічно розумітимемо запис $f \in C^1_{P_x}$.

Приймемо

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}(x),$$

$$F'_x(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}(x, y),$$

$$F'_y(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_m} \end{pmatrix} (x,y).$$

Теорему 17.3.1 коротко можна сформулювати так: якщо $F \in C^1_{\mathcal{U}}$, $F(N_0) = 0$ і матриця $F'_y(N_0)$ оборотна, то існує єдина вектор-функція $f : P_x \to \mathbb{R}^n$ така, що для будь-яких $(x, y) \in P_x$

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x).$$

У цьому разі $f(M_0) = N_0(y^0_1, ..., y^0_n)$, $f \in C^1_{P_x}$.

Виявляється, що

$$f'(M_0) = -\frac{F'_x(N_0)}{F'_y(N_0)} \tag{17.17}$$

(порівняйте з (17.6)). Зазначимо, що коли існування і неперервна диференційовність неявної вектор-фукції $f(x_1, ..., x_m)$ відомі наперед, то формулу (17.17) можна, використовуючи правило диференціювання композиції, отримати за допомогою міркувань, що аналогічні до зроблених під час виведення формули (17.9) (див. зауваження 17.2.1).

17.4. Умовні екстремуми. Метод невизначених множників Лагранжа

Розглянемо питання про екстремум функції $f(x_1, ..., x_{m+k})$ від $m + k$ змінних у випадку, що ці змінні задовольняють умови

$$\Phi_i(x_1, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_{m+k}) = 0, \ \ i = 1, ..., k, \tag{17.18}$$

які називають *рівняннями зв'язку*.

Кажуть, що в точці $N_0(x^0_1, ..., x^0_{m+k}) \in \mathbb{R}^{m+k}$, яка задовольняє ці рівняння, функція f має *умовний максимум* (*мінімум*), якщо нерівність

$$f(x_1, ..., x_{m+k}) \le f(x_{0,1}, ..., x_{0,m+k}) \quad \left(f(x_1, ..., x_{m+k}) \ge f(x_{0,1}, ..., x_{0,m+k})\right)$$

справджується в деякому околі $\mathcal{U}$ точки N_0 для всіх її точок $x_1, ..., x_{m+k}$, які задовольняють рівняння зв'язку (17.18).

Приклад 17.4.1.

Знайти умовний екстремум функції $f(x,y)=x^2+y^2$ у разі виконання рівняння зв'язку $x+y=1$.

Оскільки $y = 1-x$, то $f(x, 1-x) = 2x^2 - 2x + 1$. Тому в разі виконання умови зв'язку функція $f(x, y)$ є функцією однієї змінної. Її екстремум знаходимо елементарно: прирівнюючи до нуля її похідну, отримуємо $4x - 4 = 0$, звідки $x = \frac{1}{2}$. У цій точці функція має мінімум. Значенню $x = \frac{1}{2}$, згідно з рівнянням зв'язку, відповідає $y = \frac{1}{2}$. Отже, в точці $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ функція $f(x, y) = x^2 + y^2$ досягає мінімуму за умови $x + y - 1 - 0$. Геометрично це означає, що точка параболоїда $z = x^2 + y^2$, яка проектується в точку $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ є найнижчою з усіх його точок, що лежать над прямою $x + y - 1 = 0$.

Цей приклад засвідчує, що точка, в якій досягається умовний екстремум, не є, загалом, точкою екстремуму цієї функції.

Приклад 17.4.2.

Знайти точки умовного екстремуму функції $f(x, y) = y^2 - x^2$ в разі виконання рівняння зв'язку $y - 2x = 0$.

Маємо $f(x, 2x) = g(x) = 3x^2$, $g'(x) = 6x = 0$ і точка $x = 0$ є точкою мінімуму функції $g(x)$. Отже, точка (0;0) є точкою умовного мінімуму функції $f(x, y) = y^2 - x^2$ щодо рівняння зв'язку $y - 2x = 0$. Зазначимо, що функція $f(x, y)$ не має ні максимуму, ні мінімуму в жодній точці площини. Отже, цей приклад засвідчує, що функція може не мати екстремуму, а за певних рівнянь зв'язку може мати умовний екстремум.

Надалі припускатимемо, що $f, \Phi_1, ..., \Phi_n \in C^1_{\mathcal{U}}$ і в точці N_0 не дорівнює нулю хоча б один з визначників порядку k матриці

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{m+k}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_{m+k}} \end{pmatrix},$$

наприклад, визначник

$$\frac{D(\Phi_1, ..., \Phi_k)}{D(x_{m+1}, ..., x_{m+k})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{m+k}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_{m+k}} \end{vmatrix}.$$

Тоді в достатньо малому околі точки N_0 за теоремою 17.3.1 система (17.18) рівносильна системі

$$\begin{cases} x_{m+1} = \varphi_1(x_1, ..., x_m), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{m+k} = \varphi_k(x_1, ..., x_m), \end{cases} \tag{17.19}$$

де $\varphi_1, ..., \varphi_k$ — неявні функції, визначені системою (17.18). Отже, вимогу, щоб змінні $x_1, ..., x_m$, $x_{m+1}, ..., x_{m+k}$ задовольняли рівняннями зв'язку (17.18), можна замінити припущенням, що змінні $x_{m+1}, ..., x_{m+k}$ є функціями (17.19) аргументів $x_1, ..., x_m$. Тому питання про умовний екстремум для функції $f(x_1, ..., x_{m+k})$ від $m + k$ змінних у точці $N_0(x_1^0, ..., x_m^0, x_{m+1}^0, ..., x_{m+k}^0)$ зводиться до питання про звичайний екстремум для складеної функції від m змінних $f(x_1, ..., x_m, \varphi_1(x_1, ..., x_m),$ $..., \varphi_k(x_1, ..., x_m))$ у точці $M_0(x_1^0, ..., x_m^0)$.

Саме так ми діяли у прикладі 17.4.1. Однак виразити розв'язки системи (17.18) через елементарні функції часто неможливо. Тому бажано мати метод, який дає змогу знайти умовний екстремум не розв'язуючи системи (17.18). Такий метод запропонував Лагранж, розглянемо цей метод детальніше.

Уведемо допоміжну функцію

$$\Psi(x_1, ..., x_{m+k}, \lambda_1, ..., \lambda_k) = f + \lambda_1 \Phi_1 + ... + \lambda_k \Phi_k, \tag{17.20}$$

яку називають *функцією Лагранжа* для функції f і рівнянь зв'язку (17.18), а числа $\lambda_1, ..., \lambda_k$ — *множниками Лагранжа*. Точки, підозрілі на умовний екстремум, будуть розв'язками системи

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j} + ... + \lambda_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j} = 0, & j = 1, ..., m+k, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_i} = \Phi_i(x_1, ..., x_{m+k}) = 0, & i = 1, 2, ..., k, \end{cases} \tag{17.21}$$

яка містить $(m + 2k)$ рівнянь для визначення $(m + k)$ змінних $x_1, ..., x_{m+k}$ та k чисел $\lambda_1, ..., \lambda_k$. Рівняння системи (17.21) є *необхідними умовами точок умовного екстремуму*.

Нехай функції f та Φ_i двічі неперервно диференційовні і точка $N_0(x_1^0, ..., x_{m+k}^0)$ разом з множниками $\lambda_1^0, ..., \lambda_k^0$ задовольняє систему (17.21). Тоді достатньою умовою для точок умовного екстремуму буде знаковизначеність другого диференціала $d^2\Psi(N_0, \lambda_1^0, ..., \lambda_k^0)$ функції Лагранжа, тобто знаковизначеність квадратичної форми

$$d^2\Psi = \sum_{j,i=1}^{m+k} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_j \partial x_i}(N_0) dx_j dx_i$$

за умови, що диференціали $dx_1, ..., dx_{m+k}$ задовольняють систему

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(N_0)dx_1 + ... + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{m+k}}(N_0)dx_{m+k} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_1}(N_0)dx_1 + ... + \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_{m+k}}(N_0)dx_{m+k} = 0. \end{cases}$$

Якщо $d^2\Phi(N_0, \lambda_1^0, ..., \lambda_k^0)$ — додатно (від'ємно) визначена квадратична форма, то точка N_0 є точкою умовного мінімуму (максимуму) функції щодо рівнянь зв'язку (17.18).

Доведення цих тверджень можна знайти в підручниках зі списку літератури.

Приклад 17.4.3.

Знайдемо екстремум функції $f(x, y, z) = x + y + z$ за умови $\Phi = xyz - c^3$, де $c \neq 0$.

Побудуємо функцію Лагранжа $\Psi = x + y + z + \lambda(xyz - c^3)$ і розв'яжемо систему

$$\begin{cases} \psi'_x = 1 + \lambda yz = 0, \\ \psi'_y = 1 + \lambda xz = 0, \\ \psi'_z = 1 + \lambda xy = 0, \\ \quad xyz - c^3 = 0. \end{cases}$$

Маємо $x_0 = y_0 = z_0 = c$, $\lambda_0 = -1/c^2$. Отже, точка $N_0(c; c; c)$ при $\lambda_0 = -1/c^2$ є точкою, підозрілою на екстремум. Далі $d^2\Psi(N_0, -1/c^2) = -2(dxdy + dxdz + dydz)/c$. Бачимо, що $d^2\Psi(N_0, -1/c^2)$ не є знаковизначеною квадратичною формою для довільних dx, dy, dz і N_0. Проте в нашому прикладі диференціали в точці N_0 задовольняють рівняння $c^2(dx + dy + yz) = 0$. Якщо визначити звідси dz і підставити в попередній вираз, то отримаємо

$$d^2\Psi\left(P_0, -\frac{1}{c^2}\right) = -\frac{2}{c}(dxdy + (dx+dy)(-dx-dy)) = \frac{1}{c}(2dx^2 + 2dz^2 + 2dxdy) = \frac{1}{c}((dx+dy)^2 + dx^2 + dy^2).$$

Легко бачити, що $d^2\Psi(P_0, -1/c^2)$ є додатно визначеною формою, отже, точка N_0 є точкою умовного мінімуму.

Розділ 18

Кратні інтеграли

У цьому розділі наведено теорію кратних інтегралів. Її побудовано за аналогією до побудови теорії однократного інтеграла Рімана (див. розділ 9). Для ефективнішого використання аналогії з визначеним інтегралом Рімана спочатку введемо поняття подвійного інтеграла для плоскої фігури. Побудовану теорію перенесено на випадок кратного інтеграла.

18.1. Площа плоскої фігури

Плоскою фігурою F називають довільну обмежену множину F з простору $\mathbb{R}^2$. Щоб ввести поняття площі плоскої фігури, розглянемо спочатку спеціальний клас плоских фігур, а саме — многокутні фігури.

Означення 18.1.1. *Многокутною фігурою* на площині називають скінченне об'єднання многокутників.

З курсу середньої школи відоме поняття площі многокутної фігури. Надалі позначатимемо через $\mu(P)$ площу многокутної фігури P. Нагадаємо, що площа многокутної фігури має такі властивості:

1) $\mu(P) \geq 0$ (невід'ємність);
2) $(\forall P_1, P_2 : \; int\, P_1 \cap int\, P_2 = \varnothing) \; \{\mu(P_1 \cup P_2) = \mu(P_1) + \mu(P_2)\}$ (адитивність);
3) $P_1 = P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$ (інваріантність);
4) $P_1 \subset P_2 \Rightarrow \mu(P_1) \leq \mu(P_2)$ (монотонність).

Вправа 18.1.1. *Довести, що властивість* 4 *площі є наслідком властивостей* 1 *і* 2.

Зауваження 18.1.1. Зазначимо, що площу многокутної фігури природно вважати такою, що дорівнює одному і тому ж числу, незалежно від того, з межею чи без межі розглядають цю фігуру, тобто $\mu(P) = \mu(int\, P) = \mu(\overline{P})$ (див. означення 15.2.2).

Нехай F — плоска фігура. Розглянемо всеможливі многокутні фігури P, які повністю містяться в F, і фігури Q, які повністю містять F. Фігури P будемо називати *вписаними*, а фігури Q — *описаними*. Числова множина $\{\mu(P)\}$ площ усіх вписаних фігур P обмежена зверху (наприклад, площею довільної описаної многокутної фігури Q), а числова множина $\{\mu(Q)\}$ площ усіх описаних фігур Q обмежена знизу (наприклад, нулем). Тому існують і є скінченними величини

$$\mu_* = \mu_*(F) = \sup_{P\subset F} \mu(P) \tag{18.1}$$

та

$$\mu^* = \mu^*(F) = \inf_{Q\supset F} \mu(Q). \tag{18.2}$$

Якщо в фігуру не можна вписати жодної многокутної фігури P, то за означенням приймаємо $\mu_* = 0$.

Означення 18.1.2. *Нижньою площею фігури* F називають величину μ_* (див. (18.1)); *верхнею площею фігури* F — величину μ^* (див. (18.2)).

З того, що площа довільної вписаної фігури не більша від площі будь-якої описаної випливає, що

$$\mu_*(F) \le \mu^*(F).$$

Означення 18.1.3. Плоску фігуру F називають *квадровною* (або такою, що має площу), якщо

$$\mu_*(F) = \mu^*(F) \overset{\text{def}}{=\!=} \mu(F).$$

У цьому разі спільне число $\mu = \mu_* = \mu^*$ називають *площею* фігури F.

Зауваження 18.1.2. Зрозуміло, що довільна многокутна фігура F є квадровною в розумінні означення 18.1.3 і її площа $\mu(P)$ збігається з початковим значенням площі. Отже, ми поширили поняття площі з многокутників на деякий ширший клас фігур.

Теорема 18.1.1. *Фігура F квадровна тоді і тільки тоді, коли*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists P,Q:\ P\subset F\subset Q)\{\mu(Q)-\mu(P) < \varepsilon\}, \tag{18.3}$$

де P, Q — многокутні фігури.

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай $\varepsilon > 0$ — довільне фіксоване число. За означенням точних меж з (18.1) та (18.2) отримуємо, що існують многокутні фігури P і Q, $P\subset F\subset Q$ такі, що $\mu_* - \frac{\varepsilon}{2} < \mu(P) \le \mu_*$, $\mu^* \le \mu(Q) < \mu^* + \frac{\varepsilon}{2}$. З цих нерівностей і з рівності $\mu^* = \mu_*$ випливає, що $\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$.

($\Leftarrow$) Нехай виконується (18.3). Звідси та зі співвідношень

$$\mu(P) \le \mu_* \le \mu^* \le \mu(Q)$$

отримуємо $0 \le \mu^* - \mu_* \le \mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$. Оскільки $\varepsilon > 0$ — довільне число, то з умови $0 \le \mu^* - \mu_* < \varepsilon$ випливає, що $\mu^* = \mu_*$. □

Теорема 18.1.1 допускає просте, але важливе узагальнення, сформульоване у такій теоремі.

Теорема 18.1.2. *Фігура F квадровна тоді і тільки тоді, коли*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists F_1, F_2 : \ F_1 \subset F \subset F_2)\{\mu(F_2) - \mu(F_1) < \varepsilon\}, \tag{18.4}$$

де F_1, F_2 — квадровні фігури.

Доведення. ($\Rightarrow$) Необхідність випливає з теореми 18.1.1, оскільки многокутні фігури P і Q є квадровними.

($\Leftarrow$) Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ і нехай виконується (18.4). Оскільки F_1 і F_2 — квадровні фігури, то існують многокутні фігури P і Q такі, що $P \subset F_1 \subset F_2 \subset Q$, $\mu(Q) - \mu(F_2) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\mu(F_1) - \mu(P) < \frac{\varepsilon}{2}$. Звідси і з (18.4) отримуємо $\mu(Q) - \mu(P) < 2\varepsilon$ і $P \subset F \subset Q$. Отже, за теоремою 18.1.1 фігура F квадровна. □

Вправа 18.1.2. *Довести, що так введене поняття площі фігури зберігає властивості 1—4*

Зауваження 18.1.3. Легко бачити, що межа ∂F (див. означення 15.2.2) фігури F міститься в многокутній фігурі $Q \setminus P$, тобто $\partial F \subset Q \setminus P$, де Q, P — такі, як вище. Оскільки, завдяки адитивності площі многокутної фігури правильна рівність $\mu(Q \setminus P) = \mu(Q) - \mu(P)$, то нерівність (18.3) у форулюванні теореми 18.1.1 можна записати у вигляді $\mu(Q \setminus P) < \varepsilon$.

Означення 18.1.4. Множину точок E площини називають *множиною площі нуль*, якщо вона міститься в многокутній фігурі як завгодно малої площі, тобто

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists Q : \ E \subset Q)\{\mu(Q) < \varepsilon\},$$

де Q — многокутна фігура.

Із зауваження 18.1.3 випливає таке формулювання теореми 18.1.1.

Теорема 18.1.3. *Фігура F квадровна тоді і тільки тоді, коли її межа ∂F має площу нуль.*

З використанням цієї теореми визначимо квадровність широкого класу плоских фігур.

Теорема 18.1.4. *Довільна фігура, межа якої складається зі скінченної кількості спрямних кривих, квадровна.*

Доведення. Легко бачити, що скінченне об'єднання множин площі нуль є множиною площі нуль, тому для доведення теореми достатньо з'ясувати, що площа спрямної кривої γ дорівнює нулю.

Розіб'ємо криву γ за допомогою $n+1$ точок на частини, довжина кожної з яких дорівнює $|\gamma|/n$, де $|\gamma|$ — довжина γ. Візьмемо кожну з цих $n+1$ точок за центр квадрата зі стороною $2|\gamma|/n$. Об'єднання цих квадратів є многокутною фігурою, описаною навколо γ, і площа цієї фігури не перевищує суми площ квадратів, тобто числа $4|\gamma|^2(n+1)/n^2$. Оскільки n можна вибрати як завгодно великим, то число $4|\gamma|^2(n+1)/n^2$ можна зробити меншим від довільного наперед заданого числа $\varepsilon > 0$. Отже, спрямна крива γ має площу нуль. □

Наслідок 18.1.1. *Перетин двох квадровних фігур є квадровною фігурою.*

Доведення. Справді, нехай $F = F_1 \cap F_2$ і F_1, F_2 — квадровні. Очевидно, що $\partial F \subset \partial F_1 \cup \partial F_2$. Тому наше твердження випливає з теореми 18.1.3 і того факту, що об'єднання двох множин площі нуль має площу нуль. □

Зауваження 18.1.4. Введене в цьому підрозділі поняття площі називають поняттям *площі за Жорданом*, або *мірою Жордана*.

Зауваження 18.1.5. З вправи 18.1.2 (точніше, з адитивності міри Жордана) легко випливає таке твердження: якщо $F_1, F_2, \ldots, F_n$ — квадровні фігури без спільних внутрішніх точок, то

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} F_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(F_i). \qquad (18.5)$$

Рівність (18.5) називають властивістю *скінченної адитивності*. Однак міра Жордана не має властивості зліченної адитивності, тобто об'єднання зліченної сукупності квадровних фігур $F_1, F_2, \ldots$ без спільних внутрішніх точок не обов'язково буде квадровною фігурою (див. вправу 18.1.3).

Вправа 18.1.3. *Нехай фігура E є множиною точок $M(x,y)$ одиничного квадрата $K = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$, координати (x,y) яких є раціональними числами, тобто $E = \{M(x,y) \in K : x,y \in \mathbb{Q}\}$. Легко бачити, що множина E є зліченним об'єднанням точок M і міра Жордана кожної точки M дорівнює нулю. Довести, що множина E не є квадровною фігурою.*

Зауваження 18.1.6. Можна ввести інше узагальнення поняття площі, так звану міру Лебега, яка вже матиме і властивість зліченної адитивності. Таке узагальнене поняття площі виходить як за межі застосувань інтеграла Рімана, так і за межі нашого курсу математичного аналізу.

Вправа 18.1.4. *Довести, що криволінійна трапеція $F = \{(x,y) : a \le x \le b, 0 \le \le y \le f(x)\}$, де $f(x)$ — неперервна на $[a,b]$ функція, є квадровною фігурою і її площа за Жорданом*

$$\mu(F) = \int_a^b f(x)dx. \qquad (18.6)$$

Вправа 18.1.5. *Довести, що криволінійний сектор S, обмежений шляхом $[\alpha, \beta] \ni \varphi \mapsto r(\varphi)$ та променями $\varphi = \alpha$ та $\varphi = \beta$, має площу за Жорданом $\mu(S)$, яку обчислюють за формулою*

$$\mu(S) = \frac{1}{2} \int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi. \tag{18.7}$$

18.2. Означення та умови існування подвійного інтеграла

Нехай D — квадровна область. Розіб'ємо D за допомогою довільних спрямних кривих на скінченну кількість областей $D_1, D_2, \ldots, D_n$. Очевидно, що кожна область D_i є квадровною фігурою і $\mu(D_i) > 0, i = \overline{1, n}$. Зафіксуємо в кожній області D_i точку P_i. Сукупність областей D_i з фіксованими точками P_i називають *розбиттям $\tau = \tau(D)$ області D з вибраними точками P_i* і позначають символом $(\tau, \overline{P})$ (тут $\overline{P} = (P_1, ..., P_n)$). Нехай функція $f(x, y)$ визначена на області D.

Означення 18.2.1. Число

$$\sigma(f; (\tau, \overline{P})) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \mu(D_i) \tag{18.8}$$

називають *інтегральною сумою*, або *сумою Рімана*, функції f, що відповідає розбиттю $(\tau, \overline{P})$.

Діаметром області D_i називають число $d_i = \sup\{\rho(M_1, M_2) : M_1, M_2 \in D_i\}$, де $\rho(M_1, M_2)$ — відстань між точками M_1 та M_2. *Діаметром розбиття* τ області D назвемо число $|\tau| = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$.

Означення 18.2.2. Число $I \in \mathbb{R}$ називають *границею інтегральної суми* (18.8) при $|\tau| \to 0$ і пишуть

$$I = \lim_{|\tau| \to 0} \sigma(f; (\tau, P)), \tag{18.9}$$

якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (\tau, P) : |\tau| < \delta)\{|\sigma(f; (\tau, P)) - I| < \varepsilon\}.$$

Означення 18.2.3. Функцію $f(x, y)$ називають *інтегровною за Ріманом*, або *інтегровною*, в області D і пишуть $f \in \mathcal{R}_D$, якщо існує скінченна границя (18.9). Число I називають *подвійним інтегралом* функції f за областю D і позначають

$$I = \iint\limits_{D} f(x, y) dx dy.$$

Як і у випадку однократного визначеного інтеграла (див. теорему 9.2.1), методом від супротивного відшукують необхідну умову інтегровності функції.

Теорема 18.2.1. *Якщо $f \in \mathcal{R}_D$, то функція f обмежена на D.*

Надалі вважатимемо, що функція f є обмеженою на D. Теорію Дарбу для визначеного інтеграла, викладену в підрозділі 9.3, можна повністю перенести на випадок подвійного інтеграла. Завдяки повній аналогії ми обмежимось зазначенням загальної схеми викладок.

Складемо для заданого розбиття τ квадровної області D дві суми: верхню суму Дарбу

$$S = S(f, \tau) = \sum_{i=1}^{n} M_i \mu(D_i), \text{ де } M_i = \sup_{D_i} f(x, y),$$

і нижню суму Дарбу

$$s = s(f, \tau) = \sum_{i=1}^{n} m_i \mu(D_i), \text{ де } m_i = \inf_{D_i} f(x, y).$$

Правильні такі твердження (їхні доведення аналогічні до наведених у підрозділах 9.3 та 9.4).

Теорема 18.2.2. *Для довільного розбиття з вибраними точками $(\tau, \overline{P})$ області D виконується нерівність*

$$s \leq \sigma(f; (\tau, \overline{P})) \leq S.$$

Теорема 18.2.3. *Правильні рівності $s = \inf_{P} \sigma(f; (\tau, \overline{P}))$, $S = \sup_{P} \sigma(f; (\tau, \overline{P}))$.*

Теорема 18.2.4. *Нехай τ' — подрібнення розбиття τ області D. Тоді $s(f, \tau) \leq s(f, \tau')$, $S(f, \tau) \geq S(f, \tau')$.*

Теорема 18.2.5. *Нехай τ_1, τ_2 — довільні розбиття області D. Тоді $s(f, \tau_1) \leq S(f, \tau_2)$, $s(f, \tau_2) \leq S(f, \tau_1)$, тобто будь-яка нижня сума Дарбу не перевищує будь-якої верхньої суми Дарбу.*

Зауваження 18.2.1. Множина нижніх сум Дарбу обмеженої функції f обмежена зверху, а множина її верхніх сум Дарбу обмежена знизу. Тому існують (скінченні)

$$I_* = \sup_{\tau} s(f, \tau), \quad I^* = \inf_{\tau} S(f, \tau),$$

де верхню і нижню точні межі відшукують за всеможливими розбиттями області D.

Означення 18.2.4. Числа I_*, I^* називають, відповідно, *нижнім* та *верхнім інтегралами Дарбу* функції f за областю D.

Зрозуміло, що для будь-якого розбиття τ виконуються нерівності

$$s(f, \tau) \leq I_* \leq I^* \leq S(f, \tau).$$

Позначимо через $\omega_i(f) = \sup\{|f(N') - f(N'')| : N', N'' \in D_i\}$. Величину $\omega_i(f)$ називають *коливанням* функції f на області D_i.

Теорема 18.2.6 (критерії інтегровності функції). *Функція $f \in \mathcal{R}_D$ тоді й тільки тоді, коли виконується одне з тверджень:*

A) $\lim\limits_{|\tau|\to 0}(S(f,\tau) - s(f,\tau)) = 0$;

B) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \tau)\{S(f,\tau) - s(f,\tau) < \varepsilon\}$;

C) $I^* = I_*$;

D) $\lim\limits_{|\tau|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(f)\mu(D_i) = 0$.

Вправа 18.2.1. *Довести, що*

а) $\lim\limits_{|\tau|\to 0} s(f,\tau) = I_*$, $\lim\limits_{|\tau|\to 0} S(f,\tau) = I^*$.

б) $f \in \mathcal{R}_D \Leftrightarrow \lim\limits_{|\tau|\to 0} s(f,\tau) = \lim\limits_{|\tau|\to 0} S(f,\tau) = I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

18.3. Класи інтегровних функцій

За допомогою критеріїв інтегровності функції легко встановити таку достатню ознаку інтегровності функції.

Теорема 18.3.1. *Якщо функція f неперервна в замиканні $\overline{D}$ квадровної області D, то f інтегровна за Ріманом на D, тобто*

$$f \in C_{\overline{D}} \Rightarrow f \in \mathcal{R}_D.$$

Доведення. Якщо $f \in C_{\overline{D}}$, то за теоремою Кантора f рівномірно неперервна на $\overline{D}$, отже,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall N_1, N_2 \in D): \rho(N_1,N_2) < \delta)\left\{|f(N_1) - f(N_2)| < \frac{\varepsilon}{2\mu(D)}\right\}.$$

Звідси випливає, що для довільного розбиття $\tau = (D_i)_{i=1}^n$ області D, для якого $|\tau| < \delta$, виконується

$$\omega_i(f) \le \frac{\varepsilon}{2\mu(D)} < \frac{\varepsilon}{\mu(D)},$$

отже,

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\mu(D_i) < \varepsilon.$$

Тому $f \in \mathcal{R}_D$ (див. твердження D теореми 18.2.6). □

Теорема 18.3.2. *Якщо функція f обмежена в замиканні $\overline{D}$ області D і множина її точок розриву має площу нуль, то f інтегровна на області D.*

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$ — задане довільне число. За припущенням множину точок розриву функції f можна покрити многокутною фігурою Q, площа якої $\mu(Q) <$ $< \varepsilon/(2C)$, де C — коливання функції f в області D.

На множині $\overline{(D \setminus Q)}$ функція f рівномірно неперервна, а тому знайдеться $\delta > 0$ таке, що для довільного розбиття $\tau_1 = (D_i)_{i=1}^n$ області $(D \setminus \bar{Q})$, $|\tau_1| < \delta$, виконується $\omega_i(f) < \varepsilon/(2\mu(D))$. Тоді об'єднання τ_1 та Q дає розбиття τ області D, для якого

$$S(f,\tau) - s(f,\tau) \le \sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\mu(D_i) + C\mu(Q) \le \frac{\varepsilon}{2\mu(D)} \sum_{i=1}^{n} \mu(D_i) + C\frac{\varepsilon}{2C} < \varepsilon.$$

Завдяки твердженню В теореми 18.2.6, випливає інтегровність функції f на D. □

18.4. Властивості подвійних інтегралів

Властивості подвійного інтеграла цілком аналогічні до відповідних властивостей визначеного інтеграла.

Теорема 18.4.1 (адитивність подвійного інтеграла). *Нехай квадровна область D за допомогою спрямної кривої Γ розбита на дві області D_1 та D_2 без спільних внутрішніх точок. Для того, щоб $f \in \mathcal{R}_D$, необхідно і достатньо, щоб $f \in \mathcal{R}_{D_1}$ та $f \in \mathcal{R}_{D_2}$, причому*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy. \qquad (18.10)$$

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай $\tau = (D_i)_{i=1}^n$ — розбиття області D спрямними кривими (Γ_j) таке, що $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ — довільне фіксоване число. Додамо до кривих (Γ_j) спрямну криву Γ і позначимо отримане розбиття через τ_0. Очевидно, що τ_0 є подрібненням розбиття τ. Нехай $\tau_0 = \tau_{0,1} \cup \tau_{0,2}$, де $\tau_{0,j}$ — розбиття області D_j, а $S(f,\tau_{0,j})$, $s(f,\tau_{0,j})$ — верхня та нижня суми Дарбу, що відповідають зазначеному розбиттю області D_j, $j = 1,2$. Тоді за теоремою 18.2.4 маємо $S(f,\tau_0) - s(f,\tau_0) \le \le S(f,\tau) - s(f,\tau) < \varepsilon$. Звідси і зі співвідношень $S(f,\tau_0) - s(f,\tau_0) \ge S(f,\tau_{0,1}) - s(f,\tau_{0,1})$, $S(f,\tau_0) - s(f,\tau_0) \ge S(f,\tau_{0,2}) - s(f,\tau_{0,2})$, $S(f,\tau_0) = S(f,\tau_{0,1}) + S(f,\tau_{0,2})$, $s(f,\tau_0) = = s(f,\tau_{0,1}) + s(f,\tau_{0,2})$ отримуємо, що $f \in \mathcal{R}_{D_1}$, $f \in \mathcal{R}_{D_2}$ та рівність (18.10).

($\Leftarrow$) Нехай $\varepsilon > 0$ — довільне фіксоване число. За твердженням В теореми 18.2.6 знайдуться розбиття τ_1 та τ_2, відповідно, областей D_1 та D_2, такі, що $S(f,\tau_1) - - s(f,\tau_1) < \varepsilon/2$, $S(f,\tau_2) - s(f,\tau_2) < \varepsilon/2$. Тоді для розбиття τ області D, що є об'єднанням τ_1 та τ_2, отримуємо $S(f,\tau) - s(f,\tau) = (S(f,\tau_1) - s(f,\tau_1) + (S(f,\tau_2) - - s(f,\tau_2)) < \varepsilon$, $S(f,\tau) = S(f,\tau_1) + S(f,\tau_2)$, $s(f,\tau) = s(f,\tau_1) + s(f,\tau_2)$, що доводить інтегровність f на D і рівність (18.10). □

Теорема 18.4.2 (лінійність подвійного інтеграла). *Нехай $f, g \in \mathcal{R}_D$, $k \in \mathbb{R}$. Тоді*

а) $(f+g) \in \mathcal{R}_D$, *причому*

$$\iint\limits_D (f(x,y) + g(x,y))dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \iint\limits_D g(x,y)dxdy;$$

б) $kf \in \mathcal{R}_D$, *причому* $\iint\limits_D kf(x,y)dxdy = k\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Доведення. Твердження теореми випливають з таких рівностей:

$$\sum_{i=1}^{n}(f(P_i)+g(P_i))\mu(D_i) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\mu(D_i) + \sum_{i=1}^{n} g(P_i)\mu(D_i),$$

$$\sum_{i=1}^{n} kf(P_i)\mu(D_i) = k\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\mu(D_i),$$

оскільки границі доданків, що стоять праворуч, при $|\tau|\to 0$ існують, де $\tau=(D_i)_{i=1}^n$ — розбиття області D з вибраними точками P_i. □

Теорема 18.4.3 (монотонність подвійного інтеграла). *Нехай* $f, g \in \mathcal{R}_D$ *і* $f(x,y) \le g(x,y)$ *для всіх точок* $(x,y) \in D$. *Тоді*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \le \iint\limits_D g(x,y)dxdy. \tag{18.11}$$

Доведення. Якщо $f \in \mathcal{R}_D$ — невід'ємна функція, то всі відповідні їй інтегральні суми невід'ємні, а, отже, $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \ge 0$. Застосувавши цей факт до різниці $g(x,y) - f(x,y)$ і використавши твердження попередньої теореми, переконуємось у правильності нерівності (18.11). □

Теорема 18.4.4. *Нехай* $f \in \mathcal{R}_D$. *Тоді* $|f| \in \mathcal{R}_D$ *і має місце оцінка*

$$\left|\iint\limits_D f(x;y)dxdy\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|dxdy. \tag{18.12}$$

Доведення. Оскільки коливання $\omega_i(f)$ не менше від коливання $\omega_i(|f|)$, то інтегровність $|f|$ випливає з твердження D теореми 18.2.6. Нерівність (18.12) отримуємо з нерівності $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\mu(D_i)\right| \le \sum\limits_{i=1}^{n} |f(P_i)|\mu(D_i)$ граничним переходом при $|\tau|\to 0$. □

Теорема 18.4.5 (про середнє значення). *Нехай* $f \in \mathcal{R}_D$, $m_f = \inf\limits_D f(x,y)$, $M_f = \sup\limits_D f(x,y)$. *Тоді існує число* $c \in [m_f, M_f]$ *таке, що*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = c\mu(D). \tag{18.13}$$

Доведення. Оскільки $m_f \le f(x,y) \le M_f$ в області D, то з огляду на теорему 18.4.3

$$\iint\limits_D m_f dxdy \le \iint\limits_D f(x,y)dxdy \le \iint\limits_D M_f dxdy,$$

отже,

$$m_f\mu(D) \le \iint\limits_D f(x,y)dxdy \le M_f\mu(D);$$

$$m_f \le \frac{1}{\mu(D)}\iint\limits_D f(x,y)dxdy \le M_f.$$

Число $c = \dfrac{1}{\mu(D)}\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ є шуканим. □

Наслідок 18.4.1. *Якщо $f \in C_{\overline{D}}$, то існує точка $P_0 \in \overline{D}$ така, що*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(P_0)\mu(D). \tag{18.14}$$

Доведення. За теоремою Вейєрштрасса, існують точки $N_1, N_2 \in \overline{D}$ такі, що $f(N_1) = m$ $f(N_2) = M_f$. Тоді за теоремою Больцано-Коші про проміжне значення

$$(\forall\, c \in [m_f, M_f])(\exists\, P_0 \in \overline{D})\{f(P_0) = c\},$$

і рівність (18.14) випливає з (18.13). □

Вправа 18.4.1. *Нехай $f, g \in \mathcal{R}_D$ і функція $g(x,y)$ невід'ємна (недодатна) в області D. Довести, що існує число $c \in [m_f, M_f]$ таке, що*

$$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)dxdy = c \cdot \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

18.5. Зведення подвійного інтеграла до повторних

Нехай замикання $\overline{D}$ квадровної області D має вигляд

$$\overline{D} = \{(x,y) : a \le x \le b, \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}, \tag{18.15}$$

де функції φ, ψ неперервні на $[a,b]$ і функція $f(x,y)$ визначена на D. Якщо для довільного фіксованого $x \in [a,b]$ функція $f(x,y)$, як функція змінної y, інтегровна на відрізку $[\varphi(x), \psi(x)]$ і функція

$$F(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \tag{18.16}$$

інтегровна на відрізку $[a,b]$, то інтеграл

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

називають *повторним інтегралом* і позначають

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy. \tag{18.17}$$

Функцію $F(x)$, що визначена рівністю (18.16), називають *інтегралом, залежним від параметра* x.

Наведена нижче теорема дає ефективний спосіб обчислення подвійних інтегралів.

Теорема 18.5.1. *Нехай $f \in C_{\overline{D}}$ і множина $\overline{D}$ визначена співвідношенням (18.15). Тоді*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy. \tag{18.18}$$

Лема 18.5.1. *За умов теореми 18.5.1 функція (18.16) є неперервною на відрізку* $[a,b]$.

Доведення. Зробивши в інтегралі (18.16) заміну $y = \varphi(x)+(\psi(x)-\varphi(x))t$, $0 \le t \le 1$, отримаємо $F(x) = \int\limits_0^1 f(x,\varphi(x)+(\psi(x)-\varphi(x))t)(\psi(x)-\varphi(x))dt = \int\limits_0^1 g(x,t)dt$. Функція $g(x,t) = f(x,\varphi(x) + (\psi(x) - \varphi(x))t)(\psi(x) - \varphi(x)))$ неперервна на прямокутнику $Q = \{(x,t) : a \le x \le b, 0 \le t \le 1\}$ як композиція неперервних функцій. Нехай тепер $x_0 \in [a,b]$, $x_0+\Delta x \in [a,b]$, $N_1, N_2 \in Q$, $\omega(\delta; g) = \sup\{|g(N_1)-g(N_2)| : \rho(N_1,N_2) < \delta\}$ — модуль неперервності функції $g(x,t)$ на Q. Тоді

$$|F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)| = \left| \int_0^1 (g(x_0 + \Delta x, t) - g(x_0,t))dt \right| \le$$

$$\le \int_0^1 |g(x_0 + \Delta x, t) - g(x_0,t)|dt \le \omega(|\Delta x|; g).$$

Функція $g(x,t)$ є неперервною на компакті Q, отже, за теоремою Кантора, рівномірно неперервна на ньому, тому $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \omega(|\Delta x|; g) = 0$.

Звідси, з огляду на останню нерівність, маємо

$$\lim_{\Delta x \to 0}(F(x_0+\Delta x)-F(x_0))=0,$$

що означає неперервність функції $F(x)$ на $[a,b]$. $\square$

Доведення теореми 18.5.1. Зауважимо, що інтеграл у правій частині рівності (18.18) існує як інтеграл від неперервної функції $F(x)$ (див. лему 18.5.1).

Для доведення рівності (18.18) розіб'ємо відрізок $[a,b]$ на k рівних відрізків точками $x_i = a + \frac{b-a}{k}i$, $i = 0,1,2,\ldots,k$, і розглянемо функції

$$\varphi_0(x) = \varphi(x),\ \varphi_j(x) = \varphi(x) + \frac{\psi(x)-\varphi(x)}{k}j,\ j = 1,2,\ldots,k.$$

Очевидно, що $\varphi_j(x) = \varphi_{j-1}(x) + \frac{\psi(x)-\varphi(x)}{k}$, $j = 1,2,\ldots,k$. Множини $D_{ij} = \{(x,y)\colon x_{i-1} \le x \le x_i, \varphi_{j-1}(x) \le y \le \varphi_j(x)\}$, $i,j = 1,2,...,k$ утворюють розбиття τ_k області D (рис. 18.1).

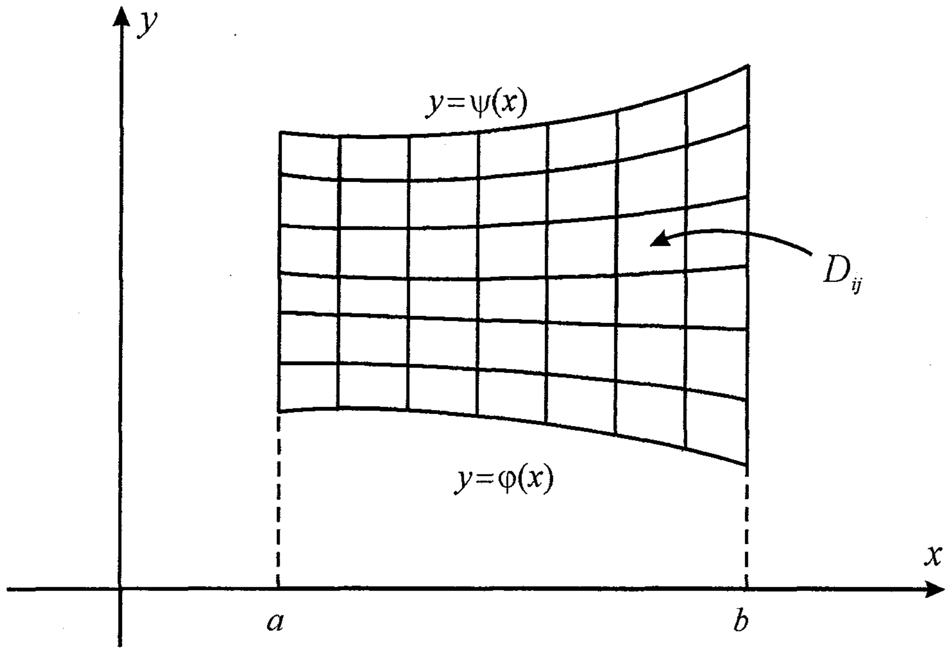


Рис. 18.1

Легко бачити, що

$$\lim_{k\to\infty}|\tau_k| = 0. \tag{18.19}$$

Тепер маємо

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy = \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy = \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \sum_{j=1}^k \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x,y)dy =$$

$$= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x,y)dy. \tag{18.20}$$

Позначимо $m_{ij} = \inf\limits_{D_{ij}} f(x,y)$, $M_{ij} = \sup\limits_{D_{ij}} f(x,y)$ і зауважимо, що $\mu(D_{ij}) = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} (\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x))dx$. Тоді

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x,y)dy \le M_{ij}\mu(D_{ij}),$$

й аналогічно

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x,y)dy \ge m_{ij}\mu(D_{ij}).$$

За допомогою останніх нерівностей для повторного інтеграла (18.17) отримуємо таку оцінку через нижню і верхню суми Дарбу функції $f(x,y)$ (див. (18.20)):

$$s(f,\tau_k) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k m_{ij}\mu(D_{ij}) \le \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \le \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k M_{ij}\mu(D_{ij}) = S(f,\tau_k). \tag{18.21}$$

Оскільки з огляду на теорему 18.3.1 функція $f \in \mathcal{R}_D$, діаметр розбиття τ_k прямує до нуля при $k \to +\infty$ (див. (18.19)), то завдяки вправі 18.2.1,б маємо

$$\lim_{k\to\infty} s(f,\tau_k) = \lim_{k\to\infty} S(f,\tau_k) = \iint_D f(x,y)dxdy.$$

Перейшовши до границі в нерівності (18.21) при $k \to +\infty$, отримуємо формулу (18.18). $\square$

Зауваження 18.5.1. Якщо множина $\overline{D}$ визначена співвідношенням

$$\overline{D} = \{(x,y) : c \le y \le d, \alpha(y) \le x \le \beta(y)\}, \tag{18.22}$$

функція $f \in C_{\overline{D}}$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx. \qquad (18.23)$$

Зауваження 18.5.2. Якщо для замикання $\overline{D}$ області D правильні рівності (18.15) і (18.22), то з (18.18) і (18.23) отримаємо формулу

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx,$$

яка виражає правила зміни порядку інтегрування в повторних інтегралах.

Приклад 18.5.1.

Обчислимо інтеграл від функції $z = x^2y$ за скінченною областю D, що обмежена частиною параболи $y = x^2$ і прямою $y = 1$.

Маємо $\overline{D} = \{(x,y) : -1 \le x \le 1, x^2 \le y \le 1\}$ і

$$\iint\limits_D x^2ydxdy = \int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{x^2}^1 (x^2y)dy = \int\limits_{-1}^1 x^2\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{x^2}^1 dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1 x^2(1-x^4)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7}\right)\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{4}{21}.$$

Зауваження 18.5.3. Якщо потрібно обчислити подвійний інтеграл за множиною, яку не можна записати у вигляді (18.15) або (18.22), то для того, щоб використати отримані формули, треба розбити цю множину на частини, кожна з яких матиме вигляд (18.15) або (18.22). Тоді, скориставшись адитивністю подвійного інтеграла (теорема 18.4.1), обчислення його зведеться до обчислення інтегралів за цими частинами, а інтеграли за допомогою формул (18.18) та (18.23) можна звести до повторних інтегралів.

18.6. Заміна змінних. Геометричний зміст модуля якобіана

Нехай G — квадровна область на площині $\mathbb{R}^2_{uv}$, D — квадровна область на $\mathbb{R}^2_{xy}$, $F = F(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ — відображення $\overline{G}$ на $\overline{D}$, тобто $F(\overline{G}) = \overline{D}$. Надалі припускаємо, що F задовольняє такі умови:

1) F взаємно однозначно відображає $\overline{G}$ на $\overline{D}$;
2) F неперервно диференційовне на $\overline{G}$;
3) якобіан $J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \ne 0$ на $\overline{G}$.

Зауваження 18.6.1. Відображення F^{-1}, обернене до F, також є неперервно диференційовним взаємно однозначним відображенням з якобіаном, що не дорівнює нулю на $\overline{D}$, оскільки $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1$, де $F^{-1}(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$.

Зауваження 18.6.2. З теореми про неявну функцію (див. 17.3) випливає, що $F(G) = D$, $F(\partial G) = \partial D$.

Теорема 18.6.1 (заміна змінних у подвійному інтегралі). *Нехай функція* $f(x,y) \in C_{\overline{D}}$, $F(\overline{G}) = \overline{D}$ *задовольняє умови 1—3. Тоді*

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{G} f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv. \qquad (18.24)$$

Доведення цієї теореми є громіздким, його можна знайти в підручниках, наведених у списку літератури. Ми розглянемо лише ідею цього доведення. Маємо у площині $\mathbb{R}^2_{uv}$ прямокутник $\Pi = \{(u,v) : u_0 \le u \le u_0 + \Delta u, v_0 \le v \le v_0 + \Delta v\}$ і позначимо через $T = F(\Pi)$ образ цього прямокутника у разі відображення F. Вершини криволінійного чотирикутника матимуть такі координати: $T_1(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))$, $T_2(x(u_0 + \Delta u, v_0), y(u_0 + \Delta u, v_0))$, $T_3(x(u_0, v_0 + \Delta v), y(u_0, v_0 + \Delta v))$, $T_4(x(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v), y(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v))$ (рис. 18.2).

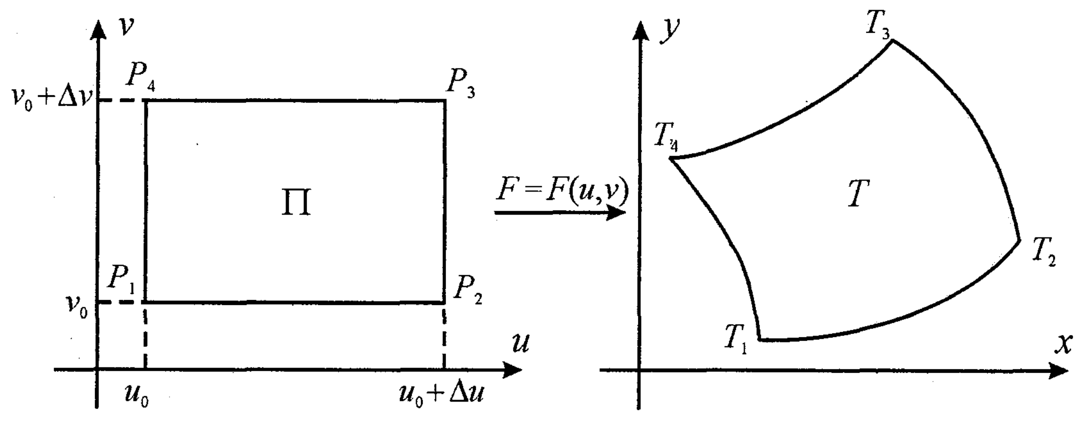


Рис. 18.2

З диференційовності функції F отримуємо

$$\begin{cases} x(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) = x(u_0, v_0) + x'_u(u_0, v_0)\Delta u + x'_v(u_0, v_0)\Delta v + \varepsilon_1 \rho, \\ y(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) = y(u_0, v_0) + y'_u(u_0, v_0)\Delta u + y'_v(u_0, v_0)\Delta v + \varepsilon_2 \rho, \end{cases} \qquad (18.25)$$

де функції $\varepsilon_i = \varepsilon_i(u_0, v_0, \Delta u, \Delta v) \to 0$ при $\rho = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2} \to 0$. Якщо ми розглянемо лінійне відображення $\widetilde{F}(u,v) = (\widetilde{x}(u,v), \widetilde{y}(u,v))$ площини $\mathbb{R}^2_{uv}$, задане формулами

$$\begin{cases} \widetilde{x} = x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0), \\ \widetilde{y} = y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0), \end{cases} \qquad (18.26)$$

де $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, $a_{11} = x'_u(u_0, v_0)$, $a_{12} = x'_v(u_0, v_0)$, $a_{21} = y'_u(u_0, v_0)$, $a_{22} = y'_v(u_0, v_0)$, то образом прямокутника П буде паралелограм T_0 з вершинами $T_{1,0}(x_0, y_0)$, $T_{2,0}(x_0+a_{11}\Delta u, y_0+a_{21}\Delta u)$, $T_{3,0}(x_0+a_{11}\Delta u+a_{12}\Delta v, y_0+a_{21}\Delta u+a_{22}\Delta v)$, $T_{4,0}(x_0 + a_{12}\Delta v, y_0 + a_{22}\Delta v)$. Відображення F в околі точки (u_0, v_0) відрізняється від лінійного відображення $\widetilde{F}$ на нескінченно малу функцію вищого порядку, ніж прирости аргументів Δu і Δv (див. (18.25), (18.26)). Тому площа $\mu(T)$ криволінійного чотирикутника T з вершинами T_1, T_2, T_3, T_4 "приблизно" дорівнює площі $\mu(T_0)$ паралелограма T_0 з вершинами $T_{1,0}, T_{2,0}, T_{3,0}, T_{4,0}$.

З аналітичної геометрії добре відомо, що

$$\mu(T_0) = \left| \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right| \Delta u \Delta v = |J(u_0, v_0)| \Delta u \Delta v.$$

Можна очікувати (і це справді так), що

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\mu(T)}{\mu(Q)} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\mu(F(Q))}{\mu(Q)} = |J(u_0, v_0)|. \qquad (18.27)$$

Формула (18.27) дає *геометричний зміст модуля якобіана відображення* F: модуль якобіана $|J(u_0, v_0)|$ в точці (u_0, v_0) — це границя відношення площі образу фігури до площі фігури, коли фігура стягується в точку (u_0, v_0).

З огляду на (18.27) інтегральні суми інтеграла з лівої частини (18.24) "приблизно" дорівнюватимуть інтегральним сумам інтеграла з правої частини (18.24). У цьому і полягає ідея доведення рівності (18.24).

Зауваження 18.6.3. Можна довести, що формула (18.24) справджується в разі загальніших припущень на відображення F, а саме: якобіан F може дорівнювати нулю на межі ∂Q області інтегрування Q, а відображення F може бути не взаємно однозначним на ∂Q.

Приклад 18.6.1.

Обчислимо інтеграл $A = \iint\limits_{x^2+y^2<1} \cos(\pi\sqrt{x^2+y^2})dxdy$. Для цього введемо нові змінні r, φ (полярні координати) за формулами $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тоді

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Це відображення переводить прямокутник $G = \{(r,\varphi) : 0 < r < 1, -\pi < \varphi < \pi\}$ взаємно однозначно, неперервно диференційовно і з якобіаном, що не дорівнює нулю, на область $D = K \setminus \{(x,y) : x \le 0, y = 0\}$, де $K = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$ — одиничний круг. Образом замикання $\overline{G}$ прямокутника G при відображенні $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ є множина $\overline{D} = \overline{K}$, причому на межі ∂G це відображення не є взаємно однозначним, і якобіан дорівнює нулю в одній точці межі ∂G. Тому за теоремою 18.6.1 та зауваженням 18.6.3 маємо

$$A = \iint\limits_{D} \cos(\pi r) r dr d\varphi = \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{1} r\cos(\pi r)dr = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(r\frac{\sin(\pi r)}{\pi}\Big|_0^1 - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \sin(\pi r)dr \right) d\varphi =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\pi^2} \cos(\pi r) \Big|_0^1 \right) d\varphi = -\frac{4}{\pi}.$$

18.7. Потрійні та n-кратні інтеграли

Теорію подвійного інтеграла без будь-яких ускладнень і нових ідей можна перенести на випадок потрійного і взагалі n-кратного інтеграла. У разі визначення класу квадровних фігур в $\mathbb{R}^2$ ми виходили з поняття площі многокутника, яке мало властивості невід'ємності, адитивності, інваріантності, монотонності (див. 18.1).

Для введення класу кубовних тіл в $\mathbb{R}^n, n \geq 3$, вважатимемо відомим спосіб обчислення об'єму часткового вигляду тіл в $\mathbb{R}^n$ — n-вимірного прямокутного паралелепіпеда. Нагадаємо (див. 15.1 та 15.2), що множину $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ усіх точок $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в $\mathbb{R}^n$, для яких $a_i \leq x \leq b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, називають *n-вимірним прямокутним паралелепіпедом.* За аналогією з $\mathbb{R}^2$ природно визначити об'єм $\mu(P)$ множини P так: $\mu(P) = \prod\limits_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$. У випадку $n = 3$ отримуємо поняття об'єму прямокутного паралелепіпеда з $\mathbb{R}^3$, відоме з курсу середньої школи.

Означення 18.7.1. *Елементарним тілом* називають множину точок $\mathbb{R}^n$, що є об'єднанням скінченної кількості n-вимірних прямокутних паралелепіпедів, які не мають спільних внутрішніх точок. Суму об'ємів цих паралелепіпедів називають *об'ємом* елементарного тіла.

Нехай тепер T — *тіло* в $\mathbb{R}^n$, тобто довільна обмежена множина в $\mathbb{R}^n$. Назвемо *нижнім об'ємом* тіла T точну верхню межу $\mu_* = \mu_*(T)$ об'ємів усіх елементарних тіл, які містяться в T, а *верхнім об'ємом* T — точну нижню межу $\mu^* = \mu^*(T)$ об'ємів усіх елементарних тіл, які містять тіло T. Легко бачити, що $\mu_* \leq \mu^*$.

Означення 18.7.2. Тіло T називають *кубовним*, якщо $\mu_*(T) = \mu^*(T)$, у цьому разі число $\mu(T) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \mu_*(T) = \mu^*(T)$ називають *n-вимірним об'ємом* тіла T.

Означення 18.7.3. *Поверхнею*, або *многовидом*, *n-вимірного об'єму нуль* називають замкнену множину, всі точки якої належать елементарному тілу як завгодно малого n–вимірного об'єму.

Аналогічно, як у плоскому випадку, доводять твердження.

Теорема 18.7.1. *Тіло T кубовне тоді і тільки тоді, коли*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists P, Q : P \subset T \subset Q)\{\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon\},$$

де P, Q — відповідно, вписане в T та описане навколо T елементарне тіло.

Теорема 18.7.2. *Тіло $T \subset \mathbb{R}^n$ кубовне тоді і тільки тоді, коли його межа ∂T є многовидом n-вимірного об'єму нуль.*

Означення n-кратного інтеграла від функції $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ за кубовним тілом $T \subset \mathbb{R}^n$ вводимо як границю інтегральних сум функції f, що відповідає розбиттю τ тіла T з вибраними точками, яке ми виконуємо за допомогою скінченної кількості многовидів об'єму нуль, тобто $\tau = (T_i)_{i=1}^m$, $\overline{T} = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \overline{T}_i$, $\mu(T_i) > 0$, $\mu(T) = \sum\limits_{i=1}^{m} \mu(T_i)$.

Для розбиття τ за повною аналогією з випадком $n = 2$ визначають верхню і нижню суми Дарбу функції f і відшукують необхідну та достатню умову інтегровності.

Теорема 18.7.3. *Для інтегровності функції f за тілом T необхідно і достатньо, щоб*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \tau)\{S(f,\tau) - s(f,\tau) < \varepsilon\},$$

де $S(f,\tau)$, $s(f,\tau)$ — верхня та нижня суми Дарбу функції f, що відповідають розбиттю τ кубовного тіла T.

Для позначення n-кратного інтеграла використовують один із символів:

$$\int\limits_T f(x)dx = \iint\limits_T \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1dx_2 \ldots dx_n, \tag{18.28}$$

а *клас інтегровних на T функцій f* позначають через $\mathcal{R}_T$. Добуток $dx_1dx_2 \ldots dx_n = dx$, зазвичай, називають *елементом об'єму* в просторі $\mathbb{R}^n$.

Теорема 18.7.4 (класи інтегровних функцій).
1. *Якщо $f \in C_{\overline{T}}$, то $f \in \mathcal{R}_T$.*
2. *Якщо функція f визначена на $\overline{T}$ і множина її точок розриву міститься в многовиді n-вимірного об'єму нуль, то $f \in \mathcal{R}_T$.*

Доведення цієї теореми аналогічне до доведення теорем 18.3.1 та 18.3.2.

Правильні для n-кратного інтеграла і основні властивості, аналогічні до сформульованих у 18.4 для подвійних інтегралів.

Сформулюємо теореми, що визначають формули повторного інтегрування та заміну змінних для інтеграла (18.28).

Теорема 18.7.5. *Нехай кубовне тіло T_n таке, що довільна пряма, паралельна до осі OX_1, перетинає його межу ∂T_n не більше ніж у двох точках (або вздовж відрізка, обмеженого двома точками), проекції яких на вісь OX_1 є неперервними функціями $a(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ і $b(x_2, x_3, \ldots, x_n)$, де $a(x_2, x_3, \ldots, x_n) \leq b(x_2, x_3, \ldots, x_n)$. Якщо функція f неперервна на $\overline{T}_n$ і тіло T_{n-1} є проекцією T_n на координатну гіперплощину $x_1 = 0$, то*

$$\iint\limits_{T_n} \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \iint_{T_{n-1}} \dots \int dx_2 dx_3 \dots dx_n \int\limits_{a(x_2,x_3,\dots,x_n)}^{b(x_2,x_3,\dots,x_n)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1.$$

Зауваження 18.7.1. У теоремі 18.7.5 замість x_1 можна взяти будь-яку іншу змінну x_j, $j = 2, \dots, n$.

Теорема 18.7.6 (заміна змінних у n-кратному інтегралі). *Нехай відображення $F = F(t_1, \dots, t_n) = (x_1(t_1, \dots, t_n), \dots, x_n(t_1, \dots, t_n))$, неперервно диференційовне на замиканні $\overline{K}$ кубовного тіла K, взаємно однозначно відображає $\overline{K}$ на замикання $\overline{T}$ кубовного тіла T і його якобіан $J(t_1, \dots, t_n) = \frac{\partial x_1, \dots, x_n}{\partial t_1, \dots, t_n} \neq 0$ на K. Якщо функція $f \in C_{\overline{T}}$, то*

$$\iint_T \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n =$$

$$= \iint_K \dots \int f(x_1(t_1, \dots, t_n), \dots, x_n(t_1, \dots, t_n)) |J(t_1, \dots, t_n)| dt_1 \dots dt_n. \tag{18.29}$$

Зауваження 18.7.2. Формула (18.29) правильна в разі загальніших припущень на відображення F (див. зауваження 18.6.3).

Зауваження 18.7.3. Під час обчислення потрійних інтегралів ($n = 3$) за формулою заміни змінних (18.29) часто використовують циліндричні та сферичні координати (див. 17.3).

Розділ 19

Криволінійні інтеграли

У цьому розділі перенесемо поняття одновимірного інтеграла на відрізку на випадок, коли областю інтегрування є деяка плоска чи просторова крива, тобто носій деякого шляху (див. означення 10.4.1 та 10.4.2). Такі інтеграли називають криволінійними.

19.1. Криволінійний інтеграл першого роду. Теорема існування

Нехай $C = \{(x(t), y(t)) : a \le t \le b\}$ — носій гладкого плоского шляху r, або гладка жорданова крива (див. означення 10.4.1 та 10.4.2), $A(x(a), y(a))$ та $B(x(b), y(b))$, — відповідно, початок та кінець кривої і на кривій $C = AB$ визначена неперервна функція $f(x, y)$.

Задамо розбиття τ відрізка [a,b] за допомогою точок $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ на n відрізків $[t_{k-1}, t_k]$ $(k = 1, 2, ..., n)$. У цьому разі крива C розпадається на n часткових кривих: $M_0M_1, M_1M_2, ..., M_{n-1}M_n$, де точки $M_k(x_k, y_k), k = 0, 1, ..., n$ мають координати $x_k = x(t_k), y_k = y(t_k)$. Виберемо на кожній кривій $M_{k-1}M_k$ довільну точку $N_k(\xi_k, \eta_k), \xi_k = x(\tau_k), \eta_k = y(\tau_k)$, де $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$. Позначимо через $\triangle l_k$ довжину k-ї кривої $M_{k-1}M_k (k = 1, 2, ..., n)$. Як зазначено в 10.4,

$$\triangle l_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt. \tag{19.1}$$

Діаметром розбиття кривої C називають число $|\tau| = \max\limits_{1 \le k \le n} \triangle l_k$. Розглянемо інтегральну суму

$$\sigma(f, \tau) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \triangle l_k. \tag{19.2}$$

Означення 19.1.1. Число $I \in \mathbb{R}$ називають *границею інтегральної суми* $\sigma(f, \tau)$ при $|\tau| \to 0$ і записують $\lim\limits_{|\tau|\to 0} \sigma(f, \tau) = I$, якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \tau, |\tau| < \delta)(\forall N_k \in M_{k-1}M_k)\{|\sigma(f, \tau) - I| < \epsilon\}. \qquad (19.3)$$

Означення 19.1.2. Якщо виконується (19.3), то число I називають *криволінійним інтегралом першого роду* від функції $f(x, y)$ вздовж кривої C і позначають

$$I = \int\limits_C f(x, y)\, dl \quad \text{або} \quad I = \int\limits_{AB} f(x, y)\, dl. \qquad (19.4)$$

З означення криволінійного інтеграла першого роду випливає, що:

1) він не залежить від орієнтації шляху r, тобто від того, в якому напрямі (від A до B або від B до A) є крива C, а саме:

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\, dl = \int\limits_{BA} f(x, y)\, dl;$$

2) фізичний зміст його відображає масу кривої C, лінійна густина якої дорівнює $f(x, y)$

Зауваження 19.1.1. Для просторової кривої $C = AB$ криволінійний інтеграл першого роду вводять аналогічно і позначають

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)\, dl.$$

Теорема 19.1.1. *Якщо $C = AB$ — гладка жорданова крива і функція $f(x, y)$ неперервна на C, то криволінійний інтеграл першого роду* (19.4) *існує і виконується*

$$\int\limits_C f(x, y)\, dl = \int\limits_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt, \qquad (19.5)$$

де $x = x(t)$, $y = y(t)$ рівняння шляху, що задає криву C.

Доведення. За умов теореми 19.1.1 інтеграл у правій частині (19.5) існує. Приймемо, що його значення дорівнює I. Нехай $\sigma_\tau(f)$ визначена рівністю (19.2) і $\varepsilon > 0$ — задане фіксоване число. Використовуючи (19.1) та адитивність інтеграла Рімана, можемо записати

$$\sigma(f, \tau) - I = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (f(x(\tau_k), y(\tau_k)) - f(x(t), y(t)))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt.$$

Зазначимо, що в разі прямування до нуля діаметра $|\tau|$ розбиття τ кривої C прямує до нуля і найбільша з різниць $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$. За теоремою Кантора, функція $f(x(t), y(t))$ є рівномірно неперервною на $[a, b]$, отже,

$$(\forall \varepsilon{>}0)(\exists \delta{>}0)(\forall \tau, |\tau|{<}\delta)\big(\forall s_k \in [t_{k-1}, t_k]\big) \left\{|f(x(s_k), y(s_k)){-}f(x(t), y(t))| < \frac{\varepsilon}{|C|}\right\},$$

де $|C|$ — довжина кривої C. Тому з останньої рівності отримуємо

$$|\sigma(f, \tau) - I| < \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\varepsilon}{|C|} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \frac{\varepsilon}{|C|} \sum_{k=1}^{n} |C_k| = \varepsilon,$$

тобто $\lim\limits_{|\tau| \to 0} \sigma_\tau(f) = I$, що доводить формулу (19.5). □

Зауваження 19.1.2. У випадку кусково-гладкої кривої C (див. означення 10.4.3) криволінійний інтеграл першого роду вздовж цієї кривої природно визначити як суму криволінійних інтегралів уздовж її гладких частин.

Зауваження 19.1.3. Криволінійні інтеграли першого роду мають ті ж властивості, що й звичайні визначені інтеграли Рімана. Це, зокрема, випливає з рівності (19.5). Перелічимо ці властивості:

1) $\int\limits_C (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y))\, dl = \alpha \int\limits_C f(x, y)\, dl + \beta \int\limits_C g(x, y)\, dl$, де $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (лінійність);
2) $\int\limits_{AB} f(x, y)\, dl = \int\limits_{AC} f(x, y)\, dl + \int\limits_{CB} f(x, y)\, dl$, де $AB = AC \cup CB$ (адитивність);
3) $|\int\limits_C f(x, y)\, dl| \le \int\limits_C |f(x, y)|\, dl$;
4) $\int\limits_C f(x, y)\, dl = f(M) \cdot |C|$, де M деяка точка кривої C.

Приклад 19.1.1.

Знайдемо довжину просторової кривої L, шлях якої задано рівняннями:
$x = e^{-t} \cos t, y = e^{-t} \sin t, z = e^{-t}, t \in [0, 2\pi]$

Задача зводиться до обчислення криволінійного інтеграла першого роду $\int\limits_L 1 \cdot dl$. За формулою (19.5) у випадку просторової кривої

$$\int\limits_L 1 \cdot dl = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{((e^{-t} \cos t)')^2 + ((e^{-t} \sin t)')^2 + ((e^{-t})')^2}\, dt =$$

$$= \int\limits_0^{4\pi} \sqrt{e^{-8t} + e^{-2t} + e^{-2t}}\, dt = -\sqrt{3} e^{-t} \Big|_0^2 = \sqrt{3}(1 - e^{-2\pi}).$$

19.2. Криволінійні інтеграли другого роду. Теорема існування

Нехай крива C, розбиття τ, координати x_k, y_k, ξ_k, η_k, числа $s_k, |\tau|$ такі, як у 19.1, і на C задані дві неперервні функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$.

Складемо інтегральні суми

$$\begin{aligned} \sigma_1(\tau) &= \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k)\cdot(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k\,, \\ \sigma_2(\tau) &= \sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k,\eta_k)\cdot(y_k - y_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\,. \end{aligned} \tag{19.6}$$

Означення 19.2.1. Нехай $I_j \in \mathbb{R}, j = 1,2$. Тоді

$$I_j = \lim_{\tau\to 0}\sigma_j(\tau)| \overset{def}{=} |(\forall\,\varepsilon > 0)(\exists\,\delta > 2)(\forall\,\tau, |\tau| < \delta)(\forall N_k \in M_{k-1}M_k)\{|\sigma_j(\tau) - I_j| < \varepsilon\}. \tag{19.7}$$

Означення 19.2.2. Числа I_1 та I_2 називають *криволінійними інтегралами другого роду* і позначають

$$I_1 = \int\limits_C P(x,y)\,dx, \quad I_2 = \int\limits_C Q(x,y)\,dy.$$

Суму інтегралів $\int\limits_C P(x,y)\,dx + \int\limits_C Q(x,y)\,dy$ називають *загальним інтегралом другого роду* і позначають

$$\int\limits_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy\,. \tag{19.8}$$

З означення криволінійних інтегралів другого роду випливає, що:

1) вони залежать від орієнтації кривої C, а саме

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\int\limits_{BA} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy;$$

2) фізичний зміст загального криволінійного інтеграла другого роду (19.3) відображає роботу з переміщення матеріальної точки з A в B уздовж кривої C під дією сили $\overline{F}(P,Q)$.

Зауваження 19.2.1. У випадку просторової кривої C загальний криволінійний інтеграл другого роду має вигляд

$$\int\limits_C P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz.$$

Теорема 19.2.1. *Нехай $C=AB$ — гладка жорданова крива, функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ неперервні на C. Тоді*

$$\int\limits_C P(x,y)\,dx = \int\limits_a^b P(x(t),y(t))x'(t)\,dt, \tag{19.9}$$

$$\int\limits_C Q(x,y)\,dy = \int\limits_a^b Q(x(t),y(t))y'(t)\,dt, \tag{19.10}$$

де $x = x(t), y = y(t), t \in [a,b]$ — рівняння шляху, що задає криву C.

Доведення. Досить довести (19.9), оскільки доведення (19.10) таке ж саме. Позначимо через I_1 значення інтеграла, що є в правій частині (19.9), яке існує за умови теореми 19.2.1. Нехай $\varepsilon > 0$ — довільне фіксоване число і $\sigma_1(\tau)$ визначене рівністю (19.6). Враховуючи рівномірну неперервність функції $P(x(t),y(t))$ на $[a,b]$, отримуємо, що $(\exists\,\delta > 0)(\forall\,\tau, |\tau| < \delta)(\forall\, s_k \in [t_{k-1},t_k])\{|f(x(s_k),y(s_k)) - f(x(t),y(t))| < < \dfrac{\varepsilon}{M(b-a)}\}$, $M = \max\limits_{a\le t\le b}|x'(t)|$.

Тоді завдяки рівності $x_k - x_{k-1} = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} x'(t)\,dt$ й адитивності інтеграла Рімана

$$|\sigma_1(\tau) - I_1| \le \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} |f(x(s_k),y(s_k)) - f(x(t),y(t))|\cdot|x'(t)|\,dt <$$

$$< \frac{\varepsilon}{M(b-a)}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}|x'(t)|\,dt \le \frac{\varepsilon}{M(b-a)}\cdot M\cdot(b-a) = \varepsilon.$$

Остання рівність означає, що $\lim\limits_{|\tau|\to 0}\sigma_8(\tau) = I_1$, що рівносильно рівності (19.9).

□

Зауваження 19.2.2. Легко бачити, що криволінійні інтеграли другого роду мають властивості, аналогічні до властивостей 1—4 криволінійних інтегралів першого роду.

Зауваження 19.2.3. Криволінійний інтеграл другого роду залежить від напряму обходу кривої $C = AB$. Тому потрібно домовитись про те, що будемо розуміти під символом

$$\int\limits_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

у випадку, коли C — замкнена крива (тобто коли точка B співпадає з точкою A). З двох можливих обходів замкненого контура C назвемо *додатним* той напрям обходу, за якого область, що лежить усередині контуру, залишається з лівого боку щодо точки, яка робить обхід (тобто напрям руху "проти руху годинникової стрілки"). Надалі вважаємо, що інтеграл (19.8) уздовж замкненого контуру C обходять у додатному напрямі і використовуємо таку форму запису:

$$\oint\limits_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Приклад 19.2.1.

Обчислити інтеграл $I = \int\limits_{AB} (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$, де AB — частина еліпса $x = a\cos t, y = b\sin t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Завдяки формулам (19.9) і (19.10) маємо

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} [(a\cos t + b\sin t)(-a\sin t) + (a\cos t - b\sin t)b\sin t]\,dt = \int\limits_0^{\pi/2} (ab\cos 2t - (a^2+b^2)\frac{1}{2}\sin 2t)\,dt =$$

$$= ab\frac{\sin 2t}{2}\bigg|_0^{2\pi} + \frac{a^2+b^2}{4}\cos 2t\bigg|_0^{2\pi} = \frac{ab}{2}(0-0) + \frac{a^2+b^2}{4}(-1-1) = -\frac{a^2+b^2}{2}.$$

Зазначимо, що підінтегральний вираз $(x+y)\,dx + (x-y)\,dy$ є повним диференціалом функції $u(x,y) = \frac{x^2-y^2}{2} + xy$. Як зазначено в 19.4, з цього твердження випливає, що інтеграл I не залежить від шляху інтегрування, що з'єднує точки A та B і дорівнює різниці $u(B) - u(A) = u(0,b) - u(a,0) = -\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = -\frac{a^2+b^2}{2}$.

19.3. Формула Гріна

З'ясуємо зв'язок між криволінійними інтегралами другого роду та подвійними інтегралами. Нехай G — область, обмежена скінченною кількістю замкнених гладких жорданових кривих, тобто $\partial G = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \Gamma_i$, де Γ_i — замкнена жорданова крива. Вважаємо, що межа ∂G області G *додатно орієнтована*, якщо у разі обходу кривих Γ_i область G є з лівого боку від спостерігача, і позначаємо $\partial G^+ = \partial G$. Протилежну орієнтацію межі ∂G позначаємо ∂G^-.

Теорема 19.3.1 (теорема Гріна). *Нехай функції P, Q, P'_y, Q'_x неперервні в замиканні області G, $\partial G = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \Gamma_i$, де Γ_i — замкнені гладкі жорданові криві. Тоді*

$$\int\limits_{\partial G} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy. \qquad (19.11)$$

Означення 19.3.1. Область $G \subset \mathbb{R}^2$ називають *елементарною відносно осі* OX, якщо $\overline{G} = \{(x,y) : a \le x \le b, f_1(x) \le y \le f_2(x)\}$, де f_1, f_2 — неперервні на $[a,b]$ функції.

Аналогічно, область G називають *елементарною відносно осі* OY, якщо $\overline{G} = \{(x,y) : c \le y \le d, \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y)\}$.

Означення 19.3.2. Область G називають *елементарною*, якщо G елементарна відносно осей OX та OY.

Зауваження 19.3.1. Можна довести, що область G, яка задовольняє умови теореми 19.3.1, можна розбити на скінченну кількість елементарних областей.

Доведення теореми 19.3.1. Теорему достатньо довести для елементарної області. Справді, нехай $\overline{G} = \bigcup\limits_{j=1}^{m} \overline{G}_j$, де G_j — елементарні області (див. зауваження 19.3.1). Якщо формула (19.11) справджується для кожної області G_j, то, додавши ці рівності, завдяки адитивності подвійного інтеграла праворуч отримаємо $\sum\limits_{j=1}^{m} \iint\limits_{G_j} = \iint\limits_{G}$, а зліва $\sum\limits_{j=1}^{m} \oint\limits_{\partial G_i} = \oint\limits_{\partial G}$. Інтеграли вздовж допоміжних кривих, які розбивають область G на елементарні, взаємно знищуються (оскільки інтегрування вздовж цих кривих виконують у протилежних напрямах).

Нехай область G — елементарна, тобто $\overline{G} = \{(x,y) : a \le x \le b, f_1(x) \le y \le f_2(x)\} = \{(x,y) : c \le y \le d, \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y)\}$ (рис. 19.1). Тоді

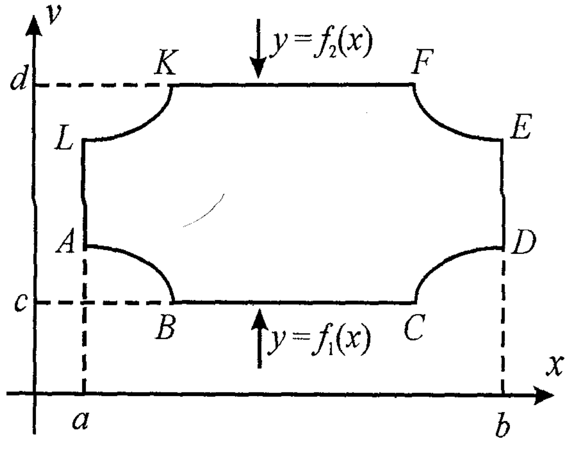


Рис. 19.1

$$-\iint\limits_{G} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy = -\int\limits_{a}^{b} (P(x, f_2(x)) - P(x, f_1(x)))\, dx =$$

$$= \Bigg(\int\limits_{ABCD} - \int\limits_{LKFE} \Bigg) P(x,y)dx = \Bigg(\int\limits_{ABCD} + \int\limits_{EFKL} + \int\limits_{DE} + \int\limits_{LA} \Bigg) P(x,y)dx = \int\limits_{\partial G} P(x,y)dx,$$

оскільки $(\int\limits_{DE} + \int\limits_{LA})P(x,y)\,dx = 0$. Аналогічно доводимо $\iint\limits_{G} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int\limits_{\partial G} Q(x,y)\,dy$.

Додавши обидві рівності, отримуємо формулу Гріна (19.11). □

Наслідок 19.3.1 (обчислення площ фігур). *Нехай область G така, як у теоремі 19.3.1. Тоді*

$$\mu(G) = \frac{1}{2} \int\limits_{\partial G} x\,dy - y\,dx, \tag{19.12}$$

де $\mu(G)$ — площа області G.

Доведення. За умовами теореми 19.3.1 область G є квадровною (див. теорему 18.1.4), а за формулою (19.11) маємо ($P = -y, Q = x$)

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\partial G} -y\,dx + x\,dy = \frac{1}{2} \iint\limits_{G} (1+1)\,dx\,dy = \mu(G).$$

□

Приклад 19.3.1.

Обчислимо площу внутрішності D еліпса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Оскільки $x = a\cos t, y = b\sin t, t \in [0, 2\pi]$, — параметричне зображення еліпса, то за формулою (19.12)

$$\mu(D) = \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{2\pi} (a\cos t \cdot b\cos t - b\sin t(-a\sin t))\,dt = \frac{1}{2}ab \int\limits_{a}^{b} dt = \pi ab.$$

19.4. Незалежність криволінійного інтеграла від шляху інтегрування

Нехай функції $P(x,y), Q(x,y)$ неперервні в області $G \subset \mathbb{R}^2$, а C_1, C_2 — дві довільні гладкі криві з початком у точці A та кінцем у точці B, які належать області G. Визначимо умови, за яких

$$\int\limits_{C_1} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{C_2} P\,dx + Q\,dy,$$

тобто криволінійний інтеграл другого роду не залежатиме від шляху інтегрування.

Вправа 19.4.1. *Довести, що криволінійний інтеграл другого роду не залежить від шляху інтегрування в області G тоді і тільки тоді, коли $\oint\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = 0$ для довільної замкненої жорданової кривої Γ з області G.*

Теорема 19.4.1. *Нехай функції P, Q неперервні в області G, AB — довільна крива з G. Для того, щоб $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy$ не залежав від кривої AB, необхідно і достатньо, щоб існувала функція $u(x,y)$ така, що $du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ в області G, тобто щоб вираз $Pdx + Qdy$ був повним диференціалом деякої функції u. У цьому випадку*

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = u(B) - u(A). \tag{19.13}$$

Доведення. ($\Rightarrow$) Зафіксуємо в G деяку точку $M_0(x_0, y_0)$ і нехай $M(x,y)$ — довільна точка області G. Приймемо

$$u(M) = \int\limits_{M_0M} P\,dx + Q\,dy,$$

де інтеграл беруть уздовж будь-якої гладкої кривої, що з'єднує точки M_0 і M. Доведемо, що так визначена функція $u(x,y)$ є шуканою, тобто що $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$. Від точки $M(x,y)$ змістимось у точку $N(x + \triangle x, y)$ так, щоб відрізок $\overline{MN}$ належав області G. Тоді функція $u(x,y)$ отримає приріст

$$u(x + \triangle x, y) - u(x,y) = \left(\int\limits_{M_0MN} - \int\limits_{M_0M} \right) P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\overline{MN}} P\,dx + Q\,dy.$$

На відрізку $\overline{MN}$ координата y має стале значення, отже,

$$\int\limits_{\overline{MN}} Q\,dy = 0.$$

Тому, за теоремою про середнє,

$$u(x + \triangle x, y) - u(x,y) = \int\limits_{\overline{MN}} P\,dx = \int\limits_{x}^{x+\triangle x} P(t,y)\,dt = P(x + \Theta\triangle x, y)\triangle x,$$

де $0 < \Theta < 1$, звідки

$$\frac{u(x + \triangle x, y) - u(x,y)}{\triangle x} = P(x + \Theta\triangle x, y).$$

Перейшовши до границі при $\triangle x \to 0$, завдяки неперервності функції $P(x,y)$, отримуємо, що границя існує і $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$. Аналогічно доводять, що $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$.

($\Leftarrow$) Нехай $P\,dx + Q\,dy = du(x,y)$. З'єднаємо точки A і B довільною гладкою кривою $AB \subset G$, і нехай $x = x(t), y = y(t), a \le t \le b$ — параметричне зображення цього шляху. Завдяки неперервності $\frac{\partial u}{\partial x} = P$ та $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$ функція $u(x(t), y(t))$ диференційовна на $[a,b]$. Тоді за формулою Ньютона-Лейбніца отримуємо

$$\int\limits_{\breve{AB}} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_a^b \{P((x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\}\,dt =$$

$$= \int\limits_a^b \frac{\partial u}{\partial t} u(x(t), y(t))\,dt = u(x(b), y(b)) - u(x(a), y(a)) = u(B) - u(A).$$

□

Зауваження 19.4.1. У випадку просторової кривої інтеграл $\int\limits_{\breve{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ не залежить від шляху інтегрування тоді і тільки тоді, коли $P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = du(x,y,z)$ у кожній точці області G.

Приклад 19.4.1.

Обчислити $I = \int\limits_{\breve{AB}} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$, де AB — гладка крива з початком у точці $A(1,0,-1)$ та кінцем у точці $B(2,1,1)$.

Оскільки підінтегральний вираз є повним диференціалом функції $u = xyz$ в просторі $\mathbb{R}^3$, то інтеграл $I = (xyz)\Big|_{(1,0,-1)}^{(2,1,1)} = 2 - 0 = 2$.

Зауваження 19.4.2. Якщо за умов теореми 19.4.1 функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ неперервно диференційовні в області G, то в G виконується рівність $P'_y = Q'_x$, яка означає рівність змішаних похідних: $u''_{xy} = u''_{yx}$. Отже, за теоремою 19.4.1 необхідною умовою незалежності криволінійного інтеграла

$$\int\limits_{\breve{AB}} P\,dx + Q\,dy \tag{19.14}$$

від шляху інтегрування за умови неперервної диференційовності функцій $P(x,y)$, $Q(x,y)$ є рівність

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \tag{19.15}$$

справджуваність якої легко перевірити. Виявляється, що умова (19.15) в деяких областях є і достатньою для незалежності криволінійного інтеграла (19.14).

Нехай C — замкнена жорданова крива. Тоді обмежену та необмежену області, межею яких є ця крива, називають, відповідно, *внутрішністю* та *зовнішністю* кривої C і позначають $int\ C$ та $ext\ C$.

Означення 19.4.1. Область G називають *однозв'язною*, якщо будь-яка замкнена жорданова крива C з області G належить G разом зі своєю внутрішністю.

Приклад 19.4.2.

Круг $x^2+y^2<R^2$, площина $\mathbb{R}^2$, півплощина $x>0$ — приклади однозв'язних областей; кільце $r^2<x^2+y^2<R^2$, проколений окіл $\overset{\circ}{U}(x_0)$ точки x_0 — неоднозв'язні області.

Теорема 19.4.2. *Нехай $P(x,y)$, $Q(x,y)$ — неперервно диференційовні в однозв'язній області G. Для того, щоб інтеграл* (19.14) *не залежав від шляху інтегрування в області G, необхідно і достатньо, щоб у G виконувалась умова* (19.15).

Доведення. ($\Rightarrow$) Див. зауваження 19.4.2.

($\Leftarrow$) Нехай Γ — довільна замкнена гладка жорданова крива з області G. Оскільки область G однозв'язна, то $int\,\Gamma\subset G$. У замиканні $int\,G$ виконуються всі умови теореми Гріна, отже,

$$\oint\limits_{\Gamma} P\,dx+Q\,dy=\iint\limits_{int\,\Gamma}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint\limits_{int\,\Gamma}0\,dx\,dy=0.$$

Тепер треба скористатись твердженням вправи 19.4.1. □

Зауваження 19.4.3. Необхідною умовою незалежності криволінійного інтеграла

$$\int\limits_{\breve{AB}} P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

від шляху інтегрування в області $G\subset\mathbb{R}^3$ є виконання в G рівностей

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y} \tag{19.16}$$

за умови, що функції $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ неперервно диференційовні в області G. Справді, співвідношення (19.16) рівносильні рівностям змішаних похідних функції $u(x,y,z): u''_{xy}=u''_{yx},\ u''_{xz}=u''_{zx},\ u''_{yz}=u''_{zy}$.

Приклад 19.4.3.

Обчислимо інтеграл $I=\oint\limits_{x^2+y^2=1}\frac{-y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{x}{x^2+y^2}\,dy$. Оскільки $x=\cos t,\ y=\sin t,\ t\in[0,2\pi]$, — параметричне зображення одиничного кола $x^2+y^2=1$, то отримуємо

$$I=\int\limits_0^{2\pi}\frac{-\sin t\cdot(-\sin t)+\cos t\cdot\cos t}{\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=\int\limits_0^{2\pi}dt=2\pi\neq 0.$$

З іншого боку, $P'_y=(\frac{-y}{x^2+y^2})'_y=\frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $Q'_x=(\frac{x}{x^2+y^2})'_x=\frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, отже, $P'_y=Q'_x$ в області $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Цей приклад відображає суттєвість умови однозв'язності області в теоремі 19.4.2.

Розділ 20

Поверхневі інтеграли

20.1. Означення поверхні. Дотична площина і нормаль до поверхні

Розглянемо відображення плоских обмежених областей і їхніх замикань у простір $\mathbb{R}^3$. Замикання області D називають *замкненою областю* і позначають $\overline{D}$.

Означення 20.1.1. *Поверхнею* у просторі $\mathbb{R}^3$ називають неперервне відображення $M \mapsto f(M)$ замкненої області $\overline{D} \subset \mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^3$, тобто

$$f : \overline{D} \to \mathbb{R}^3. \tag{20.1}$$

Образ $S = \{f(M) \in \mathbb{R}^3 : M \in \overline{D}\}$ множини $\overline{D}$ у разі відображення f називають *носієм поверхні.*

Зазначимо: в означенні поверхні не обумовлено, що відображення (20.1) є взаємно однозначним. Точку P носія S поверхні (20.1) називають *кратною точкою*, або *точкою самоперетину* поверхні, якщо

$$(\exists M_1, M_2 \in \overline{D},\ M_1 \neq M_2)\{f(M_1) = f(M_2) = P\}.$$

Якщо поверхня (20.1) не має кратних точок, то поверхню називають *простою.*

Якщо на площині $\mathbb{R}^2$ уведена прямокутна система координат, наприклад u, v, то приймемо $f(M) = r(u, v)$, $M(u, v)$. Тоді відображення (20.1) запишемо у вигляді

$$\overline{D} \ni (u, v) \mapsto r(u, v) \in \mathbb{R}^3, \tag{20.2}$$

або у векторній формі

$$\overline{D} \ni (u, v) \mapsto \overline{r}(u, v) \in \mathbb{R}^3, \tag{20.3}$$

де $r(u, v)$ — кінець радіус-вектора $\overline{r}(u, v)$.

За такого зображення поверхні змінні u, v називають *координатами* поверхні, або її *параметрами.*

Якщо в просторі $\mathbb{R}^3$ також задати прямокутну систему координат, то відображення (20.1) можна записати у координатному вигляді

$$x = x(u,v), \;\; y = y(u,v), \;\; z = z(u,v), \;\; (u,v) \in \overline{D}, \tag{20.4}$$

де $f(M) = r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.

Якщо за параметри u і v поверхні можна взяти дві довільні координати простору $\mathbb{R}^3$, наприклад x і y, то відображення (20.4) можна записати у вигляді

$$z = f(x,y), \;\; (x,y) \in \overline{D}. \tag{20.5}$$

Таке задання поверхні називають *явним зображенням.*

Зауваження 20.1.1. Якщо поверхня задана рівнянням (20.5), то вона є простою поверхнею.

Означення 20.1.2. Поверхню (20.1) називають *n-разів неперервно диференційовною*, якщо векторна функція (20.3) або, що рівносильно, координатні функції (20.4) є n разів неперервно диференційовні на $\overline{D}$.

Часто термін "поверхня" (у випадках, коли це не може призвести до недоречностей) використовують і в розумінні "носій поверхні".

Приклад 20.1.1.

Сфера радіусом R з центром у початку координат є нескінченно диференційовною поверхнею (точніше, носієм поверхні), що задана відображенням $x = R\cos\psi\sin\varphi$, $y = R\cos\psi\sin\varphi$, $z = R\sin\psi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $-\pi/2 \le \psi \le \pi/2$. Весь меридіан, що є образом відрізка $\varphi = 0$, $-\frac{\pi}{2} \le \psi \le \frac{\pi}{2}$, складається з кратних точок.

Якщо згадати означення кривої (див. 10.4), то поняття поверхні є аналогом поняття шляху.

Означення 20.1.3. Поверхні $S : r = r(u,v), (u,v) \in \overline{D}$ і $S_1 : \rho = \rho(u_1, v_1), (u_1, v_1) \in \overline{D_1}$, називають *еквівалентними*, якщо існує бієкція $F : \overline{D} \to \overline{D}_1$ така, що

а) F — неперервно диференційовна на $\overline{D}$;

б) $(\forall (u,v) \in \overline{D})\{\frac{\partial(u_1,v_1)}{\partial(u,v)} > 0\}$;

в) $(\forall (u,v) \in \overline{D})\;\{r(u,v) = \rho(F(u,v))\}$.

Зауваження 20.1.2. Відображення F, що задовольняє умови а—б, називають *допустимим перетворенням параметрів u, v* (порівняйте з означенням 10.4.7).

Зауваження 20.1.3. Легко перевірити, що відношення еквівалентності поверхонь є рефлексивним, симетричним і транзитивним, а, отже, воно розбиває всі поверхні на еквівалентні класи. Кожний такий клас також називають поверхнею.

Нехай
$$S : \overline{r} = \overline{r}(u,v),\ (u,v) \in \overline{D}, \tag{20.6}$$
— неперервно диференційовна поверхня. Тоді $\overline{r} = \overline{r}(u,v_0)$, $(u,v_0) \in \overline{D}$, є зображенням деякої кривої, яку називають *координатною лінією* (*u-лінією*). Вектор
$$\overline{r}_u{}' = \frac{\partial \overline{r}}{\partial u} = (x'_u, y'_u, z'_u)$$
є її дотичним вектором. Аналогічно, $\overline{r} = \overline{r}(u_0,v)$, $(u_0,v) \in \overline{D}$, — *координатні v-лінії* і дотичний до них вектор
$$\overline{r}_v{}' = \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} = (x'_v, y'_v, z'_v)$$

Означення 20.1.4. Точку $r(u_0,v_0)$ поверхні (20.6) називають *особливою точкою поверхні* S, якщо вектори $\overline{r}_u{}'(u_0,v_0)$ та $\overline{r}_v{}'(u_0,v_0)$ є колінеарними.

Якщо точка поверхні не є особливою, то $\overline{r}_u{}' \neq 0$, $\overline{r}_v{}' \neq 0$. Очевидно, точка не є особливою тоді і тільки тоді, коли в цій точці векторний добуток $[\overline{r}_u{}', \overline{r}_v{}'] \neq 0$. Якщо поверхня задана явним зображенням (20.5), то вона не має особливих точок. Справді, у цьому випадку $u = x$, $v = y$, $\overline{r}_u{}' = \overline{r}_x{}' = (1, 0, f'_x)$, $\overline{r}_v{}' = \overline{r}_y{}' = (0, 1, f'_y)$ і довжина векторного добутку
$$|\,[\overline{r}_x{}', \overline{r}_y{}']\,| = \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} > 0.$$

Означення 20.1.5. Неперервно диференційовну поверхню, яка не має особливих точок, називають *гладкою* поверхнею.

Нехай $r(u_0,v_0)$ не є особливою точкою поверхні (20.6) (зокрема, якщо поверхня S гладка, то $r(u_0,v_0)$ — довільна точка).

Означення 20.1.6. Площину, що проходить через точку $r(u_0,v_0)$ і паралельна до векторів $\overline{r}_u{}'(u_0,v_0)$ та $\overline{r}_v{}'(u_0,v_0)$ називають *дотичною площиною* до поверхні S у цій точці.

Позначивши через $\overline{r}_0$ радіус-вектор точки дотику, а через $\overline{r}$ — змінний радіус-вектор точок дотичної площини, отримуємо рівняння дотичної площини (умова компланарності трьох векторів):
$$(\overline{r} - \overline{r}_0)\overline{r}_u\overline{r}_v = 0,$$
яке в координатному вигляді записують так:
$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = 0.$$

Приймемо $A = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$, $B = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$, $C = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$. Тоді з останньої рівності отримаємо рівняння дотичної площини

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{20.7}$$

Рівняння (20.7) у випадку явного задання поверхні (20.5) має вигляд

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \tag{20.8}$$

оскільки

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ f'_x & f'_y \end{vmatrix} = -f'_x, \ B = \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -f'_y, \ C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Отже, означення 20.1.6 дотичної площини до поверхні з явним зображенням і наведене в 16.3 еквівалентні. Справді, обидва означення приводять до одного і того ж рівняння (20.8).

Означення 20.1.7. Пряму, що проходить через точку дотику поверхні з дотичною площиною і перпендикулярна до площини, називають *нормальною прямою до поверхні в заданій точці.*

Її рівняння в загальному випадку задання поверхні (20.6) має вигляд

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}.$$

Означення 20.1.8. Одиничний вектор, колінеарний до нормальної прямої, що проходить через задану точку поверхні, називають *нормаллю* до цієї поверхні у цій точці.

Отже, в кожній точці гладкої поверхні S, що задана зооображенням (20.6), визначена нормаль

$$\overline{\nu} = \frac{[\overline{r}_u{}', \overline{r}_v{}']}{|\,[\overline{r}_u{}', \overline{r}_v{}']\,|}, \tag{20.9}$$

яка є неперервною функцією на $\overline{D}$. У цьому випадку кажуть, що на гладкій поверхні S існує неперервна нормаль.

Означення 20.1.9. Будь-яку неперервну одиничну нормаль $\overline{\nu} = \overline{\nu}(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}$, гладкої поверхні (20.6) називають *орієнтацією поверхні* S.

Очевидно таке: якщо вектор $\overline{\nu}$ є орієнтацією поверхні S, то і вектор $(-\overline{\nu})$ також є орієнтацією цієї ж поверхні. Неважко показати, що інших орієнтацій немає. Надалі, для визначеності, за додатну орієнтацію гладкої поверхні (20.6) прийматимемо завжди вектор (20.9).Тоді орієнтація $(-\overline{\nu})$ від'ємна.

Означення 20.1.10. Гладку поверхню з зафіксованою однією її орієнтацією, називають *орієнтованою поверхнею.*

Поверхню S із додатною орієнтацією позначають S^+, а з від'ємною — S^-.

Вправа 20.1.1. *Довести, що в разі допустимого перетворення параметрів (див. зауваження 20.1.2) гладкість поверхні та її орієнтація не зміняться, тобто еквівалентні поверхні S та S_1 є одночасно гладкими і їхні орієнтації однакові.*

Нехай тепер гладка поверхня S має явне зображення $z = z(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}$. Тоді $[\overline{r}_x{}', \overline{r}_y{}'] = -f_x'\overline{i} - f_y'\overline{j} + \overline{k}$, звідки, з огляду на (20.9),

$$\overline{\nu} = \left(\frac{-f_x'}{\sqrt{1 + (f_x')^2 + f_y'^2}}, \frac{-f_y'}{\sqrt{1 + (f_x')^2 + (f_y')^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + (f_x')^2 + (f_y')^2}} \right).$$

Отже, $\cos(\widehat{\overline{\nu}, \overline{k}}) = \frac{1}{\sqrt{1+(f_x')^2+(f_y')^2}} > 0$, тобто орієнтація $\overline{\nu}$ утворює гострий кут з віссю OZ. Це означає, що вектор $\overline{\nu}$ напрямлений уверх від поверхні S. Тому поверхню S, орієнтовану нормаллю $\overline{\nu}$, називають *верхньою стороною* поверхні і позначають $\hat{S}$ (тобто $\hat{S} = S^+$), а орієнтовану протилежною нормаллю $(-\overline{\nu})$, напрямлену вниз від поверхні, — її *нижньою стороною* і позначають $\check{S}$ ($\check{S} = S^-$).

Зауваження 20.1.4. Наведені вище означення не можна перенести на негладкі поверхні. Прикладом поверхні, на якій не можна вибрати неперервну нормаль, є конус: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \le a^2$. Справді, $\overline{r}_x{}' = (1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})$, $\overline{r}_y{}' = (1, 0, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$, $[\overline{r}_x{}', \overline{r}_y{}'] = (\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1)$, $|[\overline{r}_x{}', \overline{r}_y{}']| = 2$. Оскільки границі $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ і $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ не існують, то і нормаль $\overline{\nu} = \dfrac{[\overline{r}_x{}', \overline{r}_y{}']}{|[\overline{r}_x{}', \overline{r}_y{}']|}$ не має границі при $(x,y) \to (0,0)$. Отже, на конусі не можна вибрати нормаль, неперервну на $\overline{D} = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le a^2\}$. Іншим простим прикладом негладкої поверхні, де існує пряма лінія, уздовж якої нормалі за їхнього довільного вибору мають розрив, є частина двогранного кута, а саме — його ребро.

20.2. Площа поверхні. Кусково-гладкі поверхні

Нехай $S : \overline{r} = \overline{r}(u,v)$, $(u,v) \in \overline{D}$ — гладка поверхня, де D — квадровна область. Розглянемо розбиття T_k площини змінних u і v на квадрати Q_i зі сторонами $(1/k)$, $k \in \mathbb{N}$. З квадрованості області D випливає її обмеженість, тому замкнена область $\overline{D}$ буде покрита скінченною кількістю квадратів Q_i (Q_i називають *квадратами рангу k*). Пронумеруємо довільно всі непорожні перетини цих квадратів з $\overline{D}$ і позначимо їх через E_i, $i = 1, 2, \ldots, i_k$. Тоді $\tau = \{E_i\}_{i=1}^{i_k}$ є розбиттям замкненої області $\overline{D}$.

Розглянемо множини $\overline{E}_i$, які є замкненими квадратами в $\overline{D}$ (за достатньо великого k такі E_i завжди існують). Сукупність усіх названих множин E_i позначимо через $\tau(D)$. Візьмемо один довільний квадрат $E_i \in \tau(D)$, і нехай P_i — одна з його вершин. Тоді в разі переходу від вершини P_i до сусідніх вершин радіус-вектор $\overline{r}(u,v)$ з точністю до нескінченно малих вищого порядку ніж $h = 1/k$ отримає приріст, що дорівнює за абсолютним значенням, відповідно, числам $|\overline{r}_u{}' \cdot h|$ і $|\overline{r}_v{}' \cdot h|$, бо

$$\overline{r}(u+h,v) - \overline{r}(u,v) = \overline{r}_u{}' \cdot h + o(h),$$
$$\overline{r}(u,v+h) - \overline{r}(u,v) = \overline{r}_v{}' \cdot h + o(h),\ h \to 0.$$

Під час визначення площі поверхні образи квадратів $E_i \in \tau(D)$ будемо замінювати прямолінійними паралелограмами, побудованими на векторах $\overline{r}_u{}' \cdot h$ та $\overline{r}_v{}' \cdot h$. Легко бачити, що площа Δ_i такого паралелограма $\Delta_i = |\,[\overline{r}_x{}', \overline{r}_y{}']\,|_{P_i} \cdot h^2 = |\,[\overline{r}_u{}', \overline{r}_v{}']\,|_{P_i}\, \mu(E_i)$. Приймемо

$$\sigma(\tau; S) = \sum_{E_i \in \tau(D)} \Delta_i = \sum_{E_i \in \tau(D)} |\,[\overline{r}_x{}', \overline{r}_y{}']\,|_{P_i}\, \mu(E_i). \tag{20.10}$$

Величину $\sigma(\tau; S)$ називають *інтегральною сумою площі поверхні* S, що відповідає розбиттю τ.

Означення 20.2.1. Площею $\mu(S)$ гладкої поверхні S називають *границю інтегральних сум* (20.10), коли діаметр розбиття τ прямує до нуля (тобто коли $k \to +\infty$).

Теорема 20.2.1. *Гладка поверхня $S\ :\ \overline{r} = \overline{r}(u,v)$, де $(u,v) \in \overline{D}$, D — квадровна область, має площу $\mu(S)$, яку обчислюють за формулою*

$$\mu(S) = \iint\limits_D \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv = \iint\limits_D \sqrt{EG-F^2}\,dudv, \tag{20.11}$$

де $A = \dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$, $B = \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(x,y)}$, $C = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$, $E = (\overline{r}_u{}')^2 = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2$, $G = (\overline{r}_v{}')^2 = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2$, $F = (\overline{r}_u{}', \overline{r}_v{}') = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v$.

Доведення. Оскільки функції $\overline{r}_u{}'$ і $\overline{r}_v{}'$ неперервні в $\overline{D}$, то границя інтегральних сум (20.10) при $k \to +\infty$ існує і не залежить від вибору точок $P_i \in E_i \in \tau(D)$. З іншого боку, приєднання до інтегральних сум доданків, що відповідають множинам $E_i \in \tau$ та $E_i \notin \tau(D)$, не впливає на величину границі інтегральних сум (20.10). Тому границя інтегральних сум (20.10) дорівнює подвійному інтегралу від функції $|\,[\overline{r}_u{}', \overline{r}_v{}']\,|$ за множиною D, тобто

$$\mu(S) = \iint\limits_D |\,[\overline{r}_u{}', \overline{r}_v{}']\,|dudv. \tag{20.12}$$

Маємо $[\overline{r}_u{}', \overline{r}_v{}'] = A\overline{i} + B\overline{j} + C\overline{k}$, звідки (див. (20.12)) отримаємо першу рівність (20.11). Зазначимо, що для довільних векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ правильна формула

$$|\,[\overline{a}, \overline{b}]\,|^2 + |(a, b)|^2 = |\overline{a}|^2 \cdot |\overline{b}|^2.$$

Звідси

$$|\,[\overline{r}_u{}', \overline{r}_v{}']\,|^2 = \overline{r}_u{}'^2 \overline{r}_v{}'^2 - (\overline{r}_u{}', \overline{r}_v{}')^2 = EG - F^2,$$

що доводить, з огляду на (20.12), другу рівність формули (20.11). □

Зауваження 20.2.1. Вираз $\sqrt{EG - F^2}dudv$ позначають символом dS:

$$dS = \sqrt{EG - F^2}dudv,$$

і називають *елементом площі поверхні*. Тоді формулу (20.11) можна переписати у вигляді

$$\mu(S) = \iint\limits_D dS.$$

Вправа 20.2.1. *Довести, що площа гладкої поверхні S не залежить від вибору її зображення, тобто що площі еквівалентних поверхонь однакові.*

Приклад 20.2.1.

Знайдемо формулу для обчислення площі неперервно диференційовної поверхні S, заданої явним зображенням (20.5). У цьому випадку $\overline{r}_u{}' = (1, 0, f_x')$, $\overline{r}_v{}' = (1, 0, f_y')$, $E = (\overline{r}_u{}')^2 = 1 + (f_x')^2$, $G = (\overline{r}_v{}')^2 = 1 + (f_y')^2$, $F = (\overline{r}_u{}', \overline{r}_v{}') = f_x' f_y'$, $EG - F^2 = 1 + (f_x')^2 + (f_y')^2$,

$$\mu(S) = \iint\limits_D \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}dxdy. \tag{20.13}$$

Перейдемо до визначення кусково-гладких поверхонь.

Означення 20.2.2. *Краєм*, або *межею*, ∂S поверхні $S : r = r(u, v), (u, v) \in \overline{D}$, називають образ межі ∂D області D в разі відображення $r(u, v)$, тобто

$$\partial S = \{r(u, v) : (u, v) \in \partial D\} = r(\partial D).$$

Нехай $S_j : r = r_j(u_j, v_j)$, $(u_j, v_j) \in \overline{D}_j$, $j = 1, 2$ — гладкі поверхні, межі ∂D_j областей D_j яких є кривими: $\partial D_j = \{(u_j(t), v_j(t)) : a_j \le t \le b_j\}$. Тоді краї ∂S_j поверхонь S_j також є кривими, а саме — $\partial S_j = \{r_j(u_j(t), v_j(t)) : a_j \le t \le b_j\}$.

Означення 20.2.3. Нехай поверхні S_1 та S_2 такі, як вище. Припустимо, що існують відрізки $[c_1, d_1] \subset [a_1, b_1]$ і $[c_2, d_2] \subset [a_2, b_2]$ та допустима зміна параметризації $\varphi : [c_1, d_1] \to [c_2, d_2]$ шляхів, носіями яких є криві $\partial D_j^* = \{(u_j(t), v_j(t)) : t \in [c_j, d_j]\}$, а $\partial S_j^* = r_j(\partial D_j^*)$, $j = 1, 2$. Кажуть, що гладкі поверхні S_1 і S_2 *склеєні вздовж кривих ∂S_1^* і ∂S_2^**, якщо

$$(\forall t \in [c_1, d_1])\{r_1(u_1(t), v_1(t)) = r_2(u_2(\varphi(t)), v_2(\varphi(t)))\}.$$

Зауваження 20.2.2. Якщо ж між собою склеюється скінченна кількість гладких поверхонь S_1,S_2,...,S_k, то вважаємо, що криві, вздовж яких склеюються ці поверхні, не мають спільних внутрішніх точок і об'єднання $\bigcup\limits_{j=1}^{k} S_j$ носіїв поверхонь є зв'язною множиною.

Означення 20.2.4. Поверхню S, яку отримують шляхом склеювання скінченної кількості гладких поверхонь S_1,S_2,...,S_k, називають *кусково-гладкою* і позначають $S = (S_j)_{j=1}^{k}$.

Поверхні S_i та S_j, $i \neq j$, $i, j \in 1, 2, \ldots, k$ називають *сусідніми*, якщо вони склеєні вздовж хоча б однієї пари кривих ∂S_i^* та ∂S_j^*.

Приклад 20.2.2.

Сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ можна розглядати як кусково-гладку поверхню, що є наслідком склеювання двох півсфер $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ та $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 1$, уздовж кола $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$. У разі задання рівняння цього кола в параметричному вигляді $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$ за допустиму зміну параметризації φ можна взяти тотожне відображення відрізка $[0, 2\pi]$ на себе.

Визначимо поняття орієнтації для кусково-гладких поверхонь. Означення орієнтації за допомогою вибору неперервної нормалі на поверхні в цьому випадку є незручним. Це пов'язано з порушенням гладкості поверхні, зокрема, на кривих, уздовж яких виконано склеювання (див. зауваження 20.1.4).

Запропонуємо інший підхід до поняття орієнтації, який ґрунтується на склеюванні поверхонь, краї яких є кривими. Нехай $S : r = r(u, v)$, $(u, v) \in \overline{D}$ — гладка поверхня, краєм якої є крива. Додатна орієнтація кривої $\partial D = \{(u(t), v(t)) : a \leq t \leq b\}$, з огляду на відображення $r(u(t), v(t)), a \leq t \leq b$, породжує визначену орієнтацію краю ∂S поверхні S. Цю орієнтацію краю ∂S поверхні S називають *узгодженою* з орієнтацією

$$\overline{\nu} = \frac{[\overline{r}_u{}', \overline{r}_v{}']}{|\,[\overline{r}_u{}', \overline{r}_v{}']\,|}$$

поверхні S (див. означення 20.1.9). Очевидно, що орієнтація $(-\overline{\nu})$ узгоджена з протилежною орієнтацією кривої ∂S. Отже, задання орієнтації $\overline{\nu}$ гладкої поверхні рівносильне заданню орієнтації кривої ∂S, яка є її краєм. Тому орієнтацію краю ∂S поверхні S також називають *орієнтацією поверхні* S.

Зауваження 20.2.3. Природність означення узгодженості орієнтації краю ∂S з орієнтацією гладкої поверхні S пояснюють правилом свердлика. Справді, якщо поверхня S задана явним зображенням $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \overline{D}$ і нормаль

$$\overline{v} = \left(\frac{-f_x'}{\sqrt{1 + (f_x')^2 + (f_y')^2}}, \frac{-f_y'}{\sqrt{1 + (f_x')^2 + (f_y')^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + (f_x')^2 + (f_y')^2}} \right)$$

утворює з віссю OZ гострий кут, то її додатна орієнтація краю ∂S відповідає напряму обертання ручки свердлика, а напрям вектора $\overline{v}$ — руху самого свердлика.

Означення 20.2.5. Нехай S_1 і S_2 — дві гладкі поверхні, склеєні вздовж кривих ∂S_1^* і ∂S_2^* (див. означення 20.2.3). Орієнтації ∂S_1 і ∂S_2 поверхонь S_1 і S_2 називають *узгодженими*, якщо кожна з них породжує на кривих ∂S_1^* та ∂S_2^* протилежні орієнтації.

Означення 20.2.6. Кажуть, що кусково-гладку поверхню $S = (S_j)_{j=1}^k$ можна *орієнтувати*, якщо існують такі орієнтації $\partial S_1, ..., \partial S_k$ країв поверхонь $S_1, ..., S_k$, що для будь-яких двох сусідніх поверхонь S_i та S_j їхні орієнтації ∂S_i та ∂S_j узгоджені. Сукупність таких орієнтацій, якщо вона існує, називають *орієнтацією поверхні* S. Якщо орієнтації країв $\partial S_1, ..., \partial S_k$ є орієнтацією поверхні $S = (S_j)_{j=1}^k$, то сукупність протилежних орієнтацій цих країв також є орієнтацією поверхні S, яку називають *протилежною* до заданої.

Зауваження 20.2.4. Можна довести таке: якщо поверхню S можна орієнтувати, то жодних інших орієнтацій, крім двох зазначених, у неї немає. Одну з цих двох орієнтацій називають *додатною* орієнтацією, а іншу — *від'ємною*. Аналогічно, як у 20.1, кусково-гладку поверхню з зафіксованою орієнтацією називають *орієнтованою*. У цьому випадку ту з орієнтованих поверхонь, орієнтація якої названа *додатною*, позначають через S^+, а протилежно орієнтовану — через S^-.

Зауваження 20.2.5. Кожна кусково-гладка поверхня $S = (S_j)_{j=1}^k$ є орієнтовною. Для задання її орієнтації достатньо на кожній гладкій поверхні $S_1, ..., S_k$ задати неперервну нормаль так, щоб узгоджені з нею орієнтації ∂S_j країв поверхонь S_j були узгоджені між собою в розумінні означення 20.2.5. Якщо кусково-гладка поверхня є межею обмеженої області G простору R^3, то одна з її орієнтацій складається з нормалей, напрямлених від поверхні в область G, які називають *внутрішніми* нормалями, а інша складається з нормалей, напрямлених від поверхні в доповнення області G, які називають *зовнішніми* нормалями.

20.3. Поверхневі інтеграли першого та другого роду

Нехай надалі S — гладка поверхня (20.6), де область D є квадровною фігурою, $\overline{\nu}$ — нормаль до поверхні S, що визначена рівністю (20.9), функції $f(x, y, z)$, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ визначені на носії поверхні S.

Розглянемо довільне розбиття $\tau = \{D_i\}_{i=1}^n$ області D і нехай $|\tau|$ — діаметр цього розбиття. Позначимо через $S_i = \overline{r}(D_i)$ образи областей D_i у разі відображення $\overline{r}(u, v)$, $M_i \in S_i$ — довільна точка S_i, $\overline{\nu}(M_i) = (\cos\alpha_i, \cos\beta_i, \cos\gamma_i)$ — значення нормалі $\overline{\nu}$ в точці M_i, $\mu(S_i)$ — площа поверхні $S_i : r = r(u, v)$, $(u, v) \in D_i$. Складемо чотири суми

$$\sigma_1(\tau) = \sigma_1(\tau; f) = \sum_{i=1}^n f(M_i)\mu(S_i),$$

$$\sigma_2(\tau) = \sigma_2(\tau; P) = \sum_{i=1}^{n} P(M_i)\mu(S_i)\cos\alpha_i,$$

$$\sigma_3(\tau) = \sigma_3(\tau; Q) = \sum_{i=1}^{n} Q(M_i)\mu(S_i)\cos\beta_i,$$

$$\sigma_4(\tau) = \sigma_4(\tau; R) = \sum_{i=1}^{n} R(M_i)\mu(S_i)\cos\gamma_i.$$

Означення 20.3.1. Число I_k ($k = 1, 2, 3, 4$) називають *границею суми* $\sigma_k(\tau)$ при $|\tau| \to 0$ і пишуть

$$I_k = \lim_{|\tau|\to 0} \sigma_k(\tau),$$

якщо

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall\tau, |\tau| < \delta)(\forall M_i \in S_i)\{|\sigma_k(\tau) - I_k| < \varepsilon\}.$$

Означення 20.3.2. Якщо при $|\tau| \to 0$ існує границя суми $\sigma_1(\tau)$, то цю границю називають *поверхневим інтегралом першого роду* від функції $f(x, y, z)$ по поверхні S і позначають

$$I_1 = \iint_S f(x, y, z)\, dS. \tag{20.14}$$

Числа I_k, що є границями при $|\tau| \to 0$ сум $\sigma_k(\tau)$, I_k ($k = 1, 2, 3, 4$), називають *поверхневими інтегралами другого роду* і, відповідно, позначають

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_S P(x, y, z)\cos\alpha\, dS = \iint_{S^+} P(x, y, z)\, dydx, \\ I_3 &= \iint_S Q(x, y, z)\cos\beta\, dS = \iint_{S^+} Q(x, y, z)\, dxdz, \\ I_4 &= \iint_S R(x, y, z)\cos\gamma\, dS = \iint_{S^+} R(x, y, z)\, dydz. \end{aligned} \tag{20.15}$$

Суму останніх трьох інтегралів називають *загальним поверхневим інтегралом другого роду* і позначають

$$\iint_S P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\, dS = \iint_{S^+} P dydx + Q dxdz + R\, dydz. \tag{20.16}$$

З означення поверхневих інтегралів випливає, що: 1) поверхневий інтеграл першого роду не залежить від вибору орієнтації поверхні, а поверхневі інтеграли другого роду змінюють знак у разі зміни її орієнтації на протилежну; 2) фізичний зміст інтеграла (20.14) — це маса поверхні S, густина якої дорівнює $f(x, y, z)$, а інтеграла (20.16) — потік вектора $\overline{a}(P, Q, R)$ через поверхню S^+ (див. означення 20.4.1, д).

Теорема 20.3.1. *Нехай S^+ — гладка орієнтована поверхня (20.4), де D — квадровна область, функції f, P, Q, R неперервні на носії поверхні S. Тоді*

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,dudv; \tag{20.17}$$

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS = \iint_D (P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot A + \\ + Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot B + R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot C)\,dudv. \tag{20.18}$$

Доведення. Достатньо довести формулу (20.17), оскільки формула (20.18) випливає з (20.17) і рівностей $\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $dS = \sqrt{EG-F^2}dudv = \sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv$. Зазначимо, що інтеграл, який стоїть у правій частині (20.16) (позначимо його I), існує, оскільки підінтегральна функція неперервна на квадровній області $\overline{D}$. Тому достатньо довести, що границя суми $\sigma_1(\tau)$ при $|\tau| \to 0$ дорівнює I. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ і оцінимо різницю

$$|\sigma_1(\tau) - I| = \left|\sum_{i=1}^n f(M_i)\mu(S_i) - \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} f(M)\sqrt{EG-F^2}dudv\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^n \iint_{D_i} (f(M_i) - f(M))\sqrt{EG-F^2}dudv\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} |f(M_i) - f(M)|\sqrt{EG-F^2}dudv.$$

Оскільки функція $f(M)$ рівномірно неперервна на $\overline{D}$, то

$$(\exists\delta > 0)(\forall M, M_i : \rho(M, M_i) < \delta)\left\{|f(M) - f(M_i)| < \frac{\varepsilon}{\mu(S)}\right\}.$$

З двох останніх нерівностей для розбитття τ, $|\tau| < \delta$, отримуємо

$$|\sigma_1(\tau) - I| < \frac{\varepsilon}{\mu(S)}\sum_{i=1}^n \iint_{D_i} \sqrt{EG-F^2}dudv = \frac{\varepsilon}{\mu(S)}\cdot\mu(S) = \varepsilon,$$

що доводить (20.17) з огляду на довільність числа ε. □

Зауваження 20.3.1. Якщо гладка поверхня S задана явним зображенням $z=f(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}$, а $\hat{S}$ — верхня її сторона, то

$$\iint\limits_{\hat{S}} R(x,y,z)\cos\gamma dS = \iint\limits_{D} R(x,y,z(x,y))dxdy. \tag{20.19}$$

Справді, достатньо зазначити, що $dS = \sqrt{EG-F^2}dxdy$, $EG-F^2 = 1+(f'_x)^2+(f'_y)^2$, $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}}$. Формула (20.19) пояснює позначення (20.15) поверхневих інтегралів другого роду.

Зауваження 20.3.2. Якщо $S = (S_j)_{j=1}^k$ — кусково-гладка орієнтована поверхня і $S^+ = (S_j^+)_{j=1}^k$ — одна з її орієнтацій за допомогою нормалей $\overline{\nu}_j$ на $S_j, j = 1,2,\ldots,k$, то приймаємо ($\overline{a} = (P,Q,R)$)

$$\iint\limits_{S^+} (\overline{a},\overline{\nu})dS = \sum_{j=1}^{n} \iint\limits_{S_j^+} (\overline{a},\overline{\nu}_j)dS\,,$$

$$\iint\limits_{S} f(x,y,z)dS = \sum_{j=1}^{n} \iint\limits_{S_j} f(x,y,z)dS\,.$$

Щоб ці формули були змістовними, поверхні S_j повинні бути задані на квадровних областях $D_j, j = 1,2,\ldots,k$.

20.4. Векторні та скалярні поля. Їхні характеристики

Часто замість термінів “числова функція точки”, “векторна функція точки” використовують рівнозначні їм: “скалярне поле”, “векторне поле”. Ця термінологія відображає, що значення розглядуваних функцій залежать від точок простору, а не від їхніх координат за вибраною системою координат. Оскільки скалярне поле $u(M), M \in D$ — це числова функція $u(x,y,z)$, задана в області D , то поняття диференційовності скалярного поля $u(M)$ збігається з диференційовністю числової функції $u(x,y,z)$. Аналогічно, векторне поле $\overline{a}(a_x,a_y,a_z)$ диференційовне в області D, якщо диференційовні в D координати a_x,a_y,a_z цього поля $\overline{a}$.

Означення 20.4.1. Нехай в області D задані диференційовне векторне поле $u(M)$ і векторне поле $\overline{a}(M) = (a_x(M),a_y(M),a_z(M))$. Тоді:

а) *градієнтом* $\overline{grad}\,u(M)$ скалярного поля $u(M)$ в D називають векторне поле $\overline{grad}\,u(M) = (u'_x(M),u'_y(M),u'_z(M))$;

б) *дивергенцією* $div\,\overline{a}(M)$ векторного поля $\overline{a}(M)$ називають скалярне поле $div\,\overline{a}(M) = \dfrac{\partial a_x}{\partial x}(M) + \dfrac{\partial a_y}{\partial y}(M) + \dfrac{\partial a_z}{\partial z}(M)$;

в) *ротором* $\overline{rot}\,\overline{a}(M)$ векторного поля $\overline{a}(M)$ називають векторне поле

$$\overline{rot}\,\overline{a}(M) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\overline{k} =$$

$$= \left(\frac{\partial a_y}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)(M);$$

г) *циркуляцією векторного поля* $\overline{a}(M)$ уздовж замкненого гладкого контуру Γ, $\Gamma \subset D$, називають криволінійний інтеграл другого роду

$$\oint\limits_{\Gamma} a_x dx + a_y dy + a_z dz = \oint\limits_{\Gamma} (\overline{a}, d\overline{r}),$$

де $d\overline{r} = (dx, dy, dz)$;

д) *потоком векторного поля* $\overline{a}(M)$ через орієнтовану гладку поверхню S^+ називають поверхневий інтеграл другого роду

$$\iint\limits_{S^+} (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma)\, dS = \iint\limits_{S^+} a_x\, dydz + a_y\, dzdx + a_z\, dxdy = \iint\limits_{S} (\overline{a}, \overline{\nu})\, dS,$$

де нормаль $\overline{\nu}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ визначає орієнтацію S;

е)скалярне поле $u(M)$ називають *потенціальною функцією*, або *потенціалом*, векторного поля $\overline{a}(M)$ в області D, якщо $\overline{a}(M) = \overline{grad}\, u(M)$ в D;

є) векторне поле $\overline{a}(M)$ називають *потенціальним* в області D, якщо його циркуляція вздовж довільної замкненої гладкої кривої з області D дорівнює нулю.

Зауваження 20.4.1. Якщо ввести символ набла, тобто $\overline{\nabla} = \overline{i}\frac{\partial}{\partial x} + \overline{j}\frac{\partial}{\partial y} + \overline{k}\frac{\partial}{\partial z}$, то можна записати $\overline{grad}\, u = \overline{\nabla} \cdot u$, $div\, \overline{a} = (\overline{\nabla}, \overline{a})$, $\overline{rot}\, \overline{a} = [\overline{\nabla}, \overline{a}]$.

Зауваження 20.4.2. Можна показати, що характеристики скалярного і векторного полів, введені означенням 20.3.1, не залежать від вибору декартової системи координат.

Вправа 20.4.1. *Нехай $u, f, \overline{a}, \overline{b}$ — двічі неперервно диференційовні поля. Довести формули :*

а) $\overline{rot}\, \overline{grad}\, u = 0$;

б) $div\, \overline{rot}\, \overline{a} = 0$;

в) $div\, \overline{grad}\, u = \Delta u$, де $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$;

г) $div\,(f\overline{a}) = f \cdot div\, \overline{a} + (\overline{grad}\, f, \overline{a}))$.

Теорема 20.4.1. *Нехай $\overline{a} = (P, Q, 0)$ — неперервно диференційовне плоске векторне поле, задане в однозв'язній області $D \subset \mathbb{R}^2$. Тоді такі твердження еквівалентні:*

1) *$\overline{a}$ — потенціальне векторне поле в області D;*

2) *векторне поле $\overline{a}$ має потенціальну функцію $u(M)$ в області D;*

3) *$\overline{rot}\, \overline{a}(M) = 0$ в області D.*

Доведення цієї теореми випливає з тверджень, доведених у 19.4.

20.5. Формула Гаусса-Остроградського. Геометричне тлумачення дивергенції

Нехай G — кубовна область в $\mathbb{R}^3$, межа ∂G якої є кусково-гладкою поверхнею. ∂G^+ — орієнтація ∂G за допомогою зовнішніх нормалей до G.

Означення 20.5.1. Область $G \subset \mathbb{R}^3$ називають *елементарною відносно осі OZ*, якщо її замикання має вигляд $\overline{G} = \{(x,y,z) : (x,y) \in \overline{D},\ \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\}$.

Позначимо через S_1 поверхню, задану рівнянням $z = \varphi(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}$, а через S_2 — поверхню $z = \psi(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}$. Тоді поверхня ∂G складається з S_1, S_2 та, можливо, з поверхні S_0, що є частиною циліндра, основою якого є межа ∂D області D, а твірні паралельні до осі OZ. Отже,

$$\partial G^+ = S_1^+ \cup S_2^+ \cup S_0^+ = \check{S}_1 \cup \hat{S}_2 \cup S_0^+. \tag{20.20}$$

Аналогічно визначаються області, елементарні щодо осі OX та OY.

Означення 20.5.2. Область $G \subset \mathbb{R}^3$ називають *елементарною*, якщо вона елементарна щодо всіх координатних осей.

Прикладами елементарних областей є тетраедри, куби, призми (взагалі довільні опуклі многогранники), кулі, еліпсоїди тощо.

Зауваження 20.5.1. Можна довести, що довільну обмежену область, межа якої є кусково-гладкою поверхнею, можна розбити на скінченну кількість елементарних областей.

Теорема 20.5.1 (теорема Гаусса-Остроградського). *Нехай межа ∂G кубовної області $G \subset \mathbb{R}^3$ є кусково-гладкою поверхнею, а векторне поле $\overline{a}(P,Q,R)$ і часткові похідні P'_x, Q'_y, R'_z неперервні на $\overline{G}$. Тоді*

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint\limits_{\partial G^+} R\,dxdy + Q\,dzdx + P\,dzdy \tag{20.21}$$

або

$$\iiint\limits_G div\,\overline{a}(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{\partial G^+} (\overline{a},\overline{\nu})\,dS, \tag{20.21'}$$

де $\overline{\nu}$ — зовнішня нормаль до ∂G.

Доведення. Теорему достатньо довести для елементарної області G, оскільки з огляду на зауваження 20.5.1 область G можна розбити на скінченну кількість елементарних областей $G_j (j = 1, 2, \ldots, k)$ і застосувати теорему Гаусса-Остроградського до кожної області G_j. Далі, додавши одержані результати, отримуємо формулу (20.21). Справді, в лівій частині рівності завдяки адитивності кратного інтеграла одержуємо інтеграл за областю G, а в правій частині рівності сума всіх поверхневих інтегралів за тими поверхнями, які належать межам двох областей, дорівнює нулю, бо зовнішня нормаль до однієї з областей є внутрішньою до іншої. Тому залишаться тільки інтеграли по поверхнях, які належать межам областей G_j, що становлять у сукупності межу ∂G.

Отже, нехай G — елементарна область і ∂G^+ має вигляд (20.20). Тоді

$$\iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}\,dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\,dz \right) dxdy =$$

$$= \iint\limits_D R(x,y,\psi(x,y))\,dxdy - \iint\limits_D R(x,y,\varphi(x,y))dxdy = \iint\limits_{\hat{S}_2} R(x,y,z)\,dxdy -$$

$$- \iint\limits_{\hat{S}_1} R(x,y,z)\,dxdy + \iint\limits_{S_0^+} R(x,y,z)\,dxdy = \iint\limits_{\partial G} R(x,y,z)\,dxdy, \qquad (20.22)$$

бо $\iint\limits_{\hat{S}_1} R\,dxdy = -\iint\limits_{\check{S}_1} R\,dxdy$, $\iint\limits_{S_0^+} R\,dxdy = \iint\limits_{S_0^+} R\cos\gamma\,dS = 0$, оскільки $\gamma = 90°$.

Аналогічно отримуємо, що

$$\iiint\limits_G \frac{\partial P}{\partial x}\,dxdydz = \iint\limits_{\partial G^+} P\,dydz\,;$$

$$\iiint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial y}\,dxdydz = \iint\limits_{\partial G^+} Q\,dzdx\,.$$

Додавши останні рівності до (20.22), одержимо формулу (20.21), яку називають *формулою Гаусса-Остроградського.* □

Зауваження 20.5.2. Теорема Гаусса-Остроградського в термінах характеристик векторного поля звучить так (див. (20.21′)): потік векторного поля $\overline{a}$ через орієнтовану кусково-гладку поверхню ∂G^+ дорівнює об'ємному інтегралу за областю G від дивергенції поля $\overline{a}$.

Зауваження 20.5.3. Формула (20.21) дає змогу знайти об'єм області G через відповідний поверхневий інтеграл. Справді, прийнявши в (20.21) $P(x,y,z) = x$, $Q(x,y,z) = y$, $R(x,y,z) = z$ і зазначивши, що $\iiint\limits_G dxdydz = \mu(G)$, отримаємо

$$\mu(G) = \frac{1}{3}\iint\limits_{\partial G^+} x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy = \frac{1}{3}\iint\limits_{\partial G^+} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS,$$

де $\overline{\nu}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — зовнішня нормаль до ∂G.

Теорема 20.5.2 (геометричний зміст дивергенції). *Нехай $\overline{a}$ — неперервно диференційовне в області $G \subset R^3$ векторне поле, G — область, обмежена кусково-гладкою поверхнею ∂G, $D \subset G$, ∂D^+ — поверхня ∂D, орієнтована за допомогою вибору зовнішньої нормалі $\overline{\nu}$; точка $M_0 \in D$, $d(D)$ — діаметр області D. Тоді*

$$div\,\overline{a}(M_0) = \lim_{d(D)\to 0} \frac{\iint\limits_{\partial D^+} (\overline{a},\overline{\nu}) dS}{\mu(D)}. \tag{20.23}$$

Доведення. За теоремою про середнє з формули (20.21′) маємо

$$\iint\limits_{\partial D^+} (\overline{a},\overline{\nu})\, dS = \iiint\limits_{D} div\,\overline{a}(x,y,z)\, dxdydz = \overline{a}(M)\cdot \mu(D),$$

де M — деяка точка D. Звідси

$$\overline{a}(M) = \frac{\iint\limits_{\partial D^+} (\overline{a},\overline{\nu})\, dS}{\mu(D)},$$

і, перейшовши до границі при $d(D) \to 0$, завдяки неперервності в точці M_0 функції $div\,\overline{a}(M)$ отримаємо (20.23). □

Зауваження 20.5.4. Точки векторного поля $\overline{a}$, в яких $div\,\overline{a} \neq 0$, називають *джерелами* векторного поля. Природність цього терміна пояснюють тим, що потік $\overline{a}$ через довільну достатньо малу поверхню, яка містить джерело, не дорівнює нулю (див. формулу (20.23)).

20.6. Формула Стокса. Геометричне тлумачення ротора

Нехай $S : \overline{r} = \overline{r}(u,v), (u,v) \in \overline{D}$ — гладка поверхня, межа ∂D області D складається зі скінченної кількості замкнених жорданових кривих, ∂D — додатно орієнтована межа області D, $\partial S^+ = r(\partial D)$ — орієнтований край поверхні S, $\overline{\nu} = [\overline{r}_u{}', \overline{r}_v{}']/|[\overline{r}_u{}', \overline{r}_v{}']|$ — нормаль до поверхні S. Отже, орієнтація ∂S^+ узгоджена з нормаллю $\overline{\nu}$ (див. 20.2). У цьому випадку кажуть, що контур ∂S^+ *обмежує* поверхню S (точніше носія поверхні S), або що поверхня S *натягнена на контур* ∂S^+.

Теорема 20.6.1 (теорема Стокса). *Нехай функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ — неперервно диференційовні в області G, поверхня $S \subset G$ така, як вище, $\overline{\nu} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $\overline{a}(P,Q,R)$. Тоді*

$$\oint\limits_{\partial S^+} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_{S} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS =$$

$$= \iint\limits_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right) dS, \quad (20.24)$$

або

$$\oint\limits_{\partial S^+} (\overline{a}, d\overline{r}) = \iint\limits_S (\overline{rot\overline{a}}, \overline{\nu})\, dS. \quad (20.24')$$

Доведення. Припустимо, для простоти доведення, що межа $\partial D = \{(u(t), v(t)) \colon a \le t \le b\}$ складається з одного додатно орієнтованого контуру, а поверхня S двічі неперервно диференційовна. Тоді

$$\partial S^+ = \{(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))),\ a \le t \le b\}$$

і

$$\int\limits_{\partial S^+} P(x, y, z)\, dx = \int\limits_a^b P(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)) x'_t(u(t), v(t))\, dt =$$

$$= \int\limits_{\partial D} P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left(\frac{\partial x(u, v)}{\partial u} du + \frac{\partial x(u, v)}{\partial v} dv \right) =$$

$$= \int\limits_{\partial D} \left(P \frac{\partial x}{\partial u} \right) du + \left(P \frac{\partial x}{\partial v} \right) dv.$$

Застосувавши до останнього інтеграла формулу Гріна, отримаємо

$$\int\limits_{\partial S^+} P\, dx = \iint\limits_D \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(P \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(P \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right) dxdy =$$

$$= \iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} + P \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} - P \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} \right] dudv =$$

$$= \iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right) dudv =$$

$$= \iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial z} B - \frac{\partial P}{\partial y} C \right) dudv = \iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos\gamma \right) dS.$$

Аналогічно доводимо, що

$$\int\limits_{\partial S^+} Q dy = \iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right) dS,$$

$$\int\limits_{\partial S^+} R dz = \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right) dS.$$

Додавши останні три рівності, отримуємо формулу (20.24), яку називають *формулою Стокса.* □

Зауваження 20.6.1. Теорема Стокса в термінах характеристик векторного поля звучить так (див. (20.24′)): циркуляція векторного поля $\overline{a}$ взовж контуру ∂S^+ дорівнює потоку ротора цього поля через поверхню S, натягнену на контур ∂S^+.

Зауваження 20.6.2. Формула Стокса (20.24) правильна для кусково-гладких орієнтованих поверхонь. Достатньо записати формулу Стокса для кожної гладкої орієнтованої поверхні, що є в кусково-гладкій поверхні, і додати їх (порівняйте з доведенням формул Гріна і Гаусса-Остроградського).

Зауваження 20.6.3. Узгодженість орієнтацій контуру ∂S^+ з нормаллю $\overline{\nu}$ до поверхні S у теоремі Стокса рівносильна тому, що спостерігач, який обходить поверхню S уздовж орієнтованого контуру ∂S^+ і дивиться на неї з кінця нормалі $\overline{\nu}$, бачить поверхню S ліворуч від себе.

Теорема 20.6.2 (геометричний зміст ротора). *Нехай $\overline{a}$ — неперервно диференційовне векторне поле в області $G \subset \mathbb{R}^3$, M_0 — фіксована точка G, $\overline{\nu}$ — довільний одиничний вектор, α — площина, що перпендикулярна до вектора $\overline{\nu}$ і проходить через точку M_0, S — обмежена область у площині α, межа ∂S якої є кусково-гладкою кривою, орієнтація ∂S^+ узгоджена з нормаллю $\overline{\nu}$, $M_0 \in S$ і $S \subset G$. Тоді*

$$\overline{rot_{\overline{\nu}}}\,\overline{a}(M_0) = \lim_{d(S)\to 0} \frac{\int\limits_{\partial S^+} (\overline{a}, d\overline{r})}{\mu(S)}, \tag{20.25}$$

де $d(S)$ — діаметр області S, $\overline{rot_{\overline{\nu}}}\,\overline{a}(M_0)$ — проекція вектора $\overline{rot}\,\overline{a}(M_0)$ на вектор $\overline{\nu}$.

Доведення. За формулою Стокса (20.24′) і теоремою про середнє ($M \in S$)

$$\iint\limits_{\partial S^+} (\overline{a}, d\overline{r}) = \iint\limits_S \overline{rot_{\overline{\nu}}}\,\overline{a}\, dS = \overline{rot_{\overline{\nu}}}\,\overline{a}(M)\,\mu(S),$$

отже,

$$\overline{rot_{\overline{\nu}}}\overline{a}(M) = \frac{\int\limits_{\partial S^+} (\overline{a}, d\overline{r})}{\mu(S)}.$$

Перейдемо в останній рівності до границі коли $d(S) \to 0$. Тоді $M \to M_0$ і завдяки неперервності в точці M_0 функції $\overline{rot_{\overline{\nu}}}\,\overline{a}(M)$ отримаємо формулу (20.25). □

20.7. Соленоїдні та потенційні векторні поля

Обмежену область з простору $\mathbb{R}^3$, для якої правильна теорема Гаусса-Остроградського (див. 20.5), будемо називати *допустимою* областю, а поверхню, для якої правильна формула Стокса (див. 20.6), — *допустимою* поверхнею.

Означення 20.7.1. Неперервно диференційовне в області $G \subset \mathbb{R}^3$ векторне поле $\overline{a} = \overline{a}(x, y, z)$ називають *соленоїдним* у G, якщо його потік через орієнтовану межу довільної допустимої області D, $\overline{D} \subset G$, дорівнює нулю.

Якщо векторне поле є, наприклад, полем швидкостей рідини, що тече, то його соленоїдність означає, що в кожну область, яка міститься всередині цієї рідини, у кожний момент часу скільки рідини вливається, стільки її витікає.

Теорема 20.7.1. *Неперервно диференційовне в області G векторне поле $\overline{a}$ соленоїдне в G тоді і лише тоді, коли*

$$(\forall\, M \in G)\{div\, \overline{a}(M) = 0\}. \tag{20.26}$$

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай $M_0 \in G$, $\mathcal{U}(M_0, r)$ — куля з центром у точці M_0 радіусом r така, що $\overline{\mathcal{U}}(M_0, r) \subset G$. З теореми 20.5.2 і означення 20.7.1 маємо

$$div\, \overline{a}(M_0) = \lim_{r \to 0} \left(\frac{\iint\limits_{\partial\mathcal{U}^+(M_0,r)} (\overline{a}, \overline{v})dS}{\mu(K(M_0, r))} \right) = 0.$$

($\Leftarrow$)Нехай D — довільна допустима область, $\overline{D} \subset G$. Тоді за формулою Гаусса-Остроградського

$$\iint\limits_{\partial D^+} (\overline{a}, \overline{v}) = \iiint\limits_{D} div\, \overline{a}(x, y, z)\, dxdydz = \iiint\limits_{D} 0 \cdot dxdydz = 0.$$

□

Приклад 20.7.1.

Наведемо приклад соленоїдного поля. Нехай $\overline{a} = \overline{rot\, \overline{b}}$ — векторне поле роторів деякого двічі диференційовного поля $\overline{b}$ в області G. Тоді (див. вправу 20.4.1, б) поле $\overline{a}$ є соленоїдним, бо $div\, \overline{a} = div\, \overline{rot\, \overline{b}} = 0$.

Означення 20.7.2. Область G з простору $\mathbb{R}^3$ називають *однозв'язною*, якщо

$$(\forall\, \Gamma \subset G)(\exists\, S_\Gamma)\{S_\Gamma \subset G\},$$

де Γ — довільний замкнений кусково-гладкий контур; S_Γ — допустима поверхня, натягнена на Γ.

Зауваження 20.7.1. Однозв'язні в $\mathbb{R}^3$ області називають також *поверхнево однозв'язними.*

Вправа 20.7.1. *Довести, що опукла область з $\mathbb{R}^3$ є однозв'язною.*

Теорема 20.7.2. *Нехай в однозв'язній області $G \subset \mathbb{R}^3$ задане неперервно диференційовне векторне поле $\overline{a} = (P, Q, R)$. Тоді такі твердження еквівалентні:*

1) *$\overline{a}$ — потенційне векторне поле;*
2) *в області G існує потенційна функція $u = u(M)$ векторного поля $\overline{a}$;*
3) *поле $\overline{a}$ — безроторне, тобто $\overline{rot}\,\overline{a}(M) = 0$ в області G.*

Доведення. 1 $\Rightarrow$ 2. Доведення аналогічне до доведення плоского випадку (див. доведення твердження в 19.4)

2 $\Rightarrow$ 3. Маємо $u'_x = P$, $u'_y = Q$, $u'_z = R$. Тому $u''_{xy} = P'_y = Q'_x = u''_{yx}$, $u''_{xz} = P'_z = R'_x = u''_{zx}$, $u''_{yz} = Q'_z = R'_y = u''_{zy}$ в кожній точці області G, а, отже, $\overline{rot}\,\overline{a}(M) = 0$.

3 $\Rightarrow$ 1. Нехай Γ — довільний замкнений кусково-гладкий контур, $\Gamma \subset G$. Оскільки G — однозв'язна область, то існує допустима поверхня S, натягнена на Γ. За формулою Стокса,

$$\oint_{\Gamma} (\overline{a}, d\overline{r}) = \iint_{S} (\overline{rot}\, a(M), \overline{\nu})\, dS = 0.$$

□

Зауваження 20.7.2. Потенційні та соленоїдні поля не вичерпують усіх можливих векторних полів. Однак за достатньо загальних припущень довільне векторне поле $\overline{a}$ можна зобразити як суму потенційного та соленоїдного векторних полів. Це твердження називають *теоремою Гельмгольца.*

Розділ 21

Інтеграли, залежні від параметра

Нехай $f(x,y)$ — функція від двох змінних, визначена при всіх $x \in [a,b]$ та $y \in Y$, причому для довільного $y \in Y$ існує інтеграл

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)dx.$$

Цей інтеграл є функцією від змінної y, яку називають *параметром*. Природно постає таке запитання: за яких умов справджується кожне з наведених нижче співвідношень:

1) $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = g(x) \Rightarrow \lim\limits_{y\to y_0} F(y) = \int\limits_a^b g(x)dx$;

2) $f \in C_{[a,b]\times Y} \Rightarrow F \in C_Y$;

3) $F'(y) = \int\limits_a^b f'_y(x,y)dx$;

4) $\int\limits_c^d F(y)dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx$.

Нагадаємо, що навіть у випадку, коли $Y = \mathbb{N}$, $y_0 = +\infty$, перше з цих співвідношень може не справджуватися, однак (див. теорему 13.3.4) якщо послідовність f_n збігається до граничної функції g рівномірно, то

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Тому, перш ніж давати відповідь на поставлене запитання, розглянемо одну модифікацію поняття рівномірної збіжності функціональної послідовності.

21.1. Рівномірна збіжність функції двох змінних до граничної функції

Уважатимемо, що $E, Y \subset \mathbb{R}$, $f : E \times Y \to \mathbb{R}$ — функція двох дійсних змінних, а y_0 — гранична точка множини Y (наприклад, $E = [a, b]$, $Y = [c, \omega)$, $y_0 = \omega$).

Означення 21.1.1. Нехай $g : E \to \mathbb{R}$ — деяка функція. Функцію $f(x, y)$ називають *рівномірно збіжною* щодо $x \in E$ при $y \to y_0$ до $g(x)$ і записують

$$f(x,y) \overset{y \to y_0}{\underset{E}{\rightrightarrows}} g(x)$$

(або просто $f(x,y) \rightrightarrows g(x)$, коли зрозуміло, про які E та y_0 йдеться), якщо

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall\, x \in E)\big(\forall\, y \in Y,\, y \in \overset{o}{\mathcal{U}}_\delta(y_0)\big) \Big\{ |f(x,y) - g(x)| < \varepsilon \Big\}. \tag{21.1}$$

Зауваження 21.1.1. Зрозуміло таке: якщо справжується (21.1), то

$$(\forall\, x \in E) \left\{ \lim_{y \to y_0} f(x,y) = g(x) \right\}, \tag{21.2}$$

тобто з рівномірної збіжності випливає поточкова збіжність. Тому в ситуації, про яку йдеться в означенні 21.1.1, кажуть, що рівність (21.2) справджується рівномірно щодо $x \in E$. Зазначимо, що запис $f(x,y) \overset{y \to y_0}{\underset{E}{\rightrightarrows}} g(x)$ рівносильний такому:

$$\lim_{y \to y_0} \sup_{x \in E} |f(x,y) - g(x)| = 0 \tag{21.3}$$

(порівняйте з (13.5)).

Твердження 21.1.1. *Функція $f(x,y)$ при $y \to y_0$ рівномірно щодо $x \in E$ збігається до функції $g(x)$ тоді і тільки тоді, коли для довільної послідовності $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset Y \setminus \{y_0\}$, $y_n \to y_0$, $n \to +\infty$, функціональна послідовність $\{f_n\}$, де $f_n(x) = f(x, y_n)$, збігається рівномірно на множині E до граничної функції g.*

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай $f(x,y)$ прямує до $g(x)$ рівномірно на E при $y \to y_0$, а послідовності $\{f_n\}$ і $\{y_n\}$ такі, як в умові теореми. Зафіксуємо довільне число $\varepsilon > 0$ і виберемо $\delta = \delta(\varepsilon)$ так, щоб справджувалося (21.1). Оскільки $y_n \to y_0$, то $(\exists\, N = N(\delta) \in \mathbb{N})\,(\forall\, n > N)\; \{|y_n - y_0| < \delta\}$. Звідси і з (21.1) випливає, що $(\forall\, x \in E)\,(\forall\, n > N)\; \{|f(x, y_n) - g(x)| < \varepsilon\}$, отже, $f_n(x) \underset{E}{\rightrightarrows} g(x)$.

($\Leftarrow$) Нехай для будь-якої послідовності $\{y_n\}$, яка задовольняє умови теореми, послідовність $f_n(x) = f(x, y_n)$ рівномірно на E збігається до функції $g(x)$. Міркуючи від супротивного, припустимо, що $f(x,y)$ не є рівномірно збіжною на E до $g(x)$ при $y \to y_0$, тобто

$$(\exists\, \varepsilon > 0)\,(\forall\, \delta > 0)\,(\exists\, x_\delta \in E)\,(\exists\, y_\delta \in \overset{o}{\mathcal{U}}_\delta(y_0)) \Big\{ |f(x_\delta, y_\delta) - g(x_\delta)| \geq \varepsilon \Big\}.$$

Нехай $\{\delta_n\}$ — послідовність додатних чисел, збіжна до нуля. Тоді для послідовностей $\{y_n\}$, $\{x_n\}$, де $y_n = y_{\delta_n}$, $x_n = x_{\delta_n}$, виконується $0 < |y_n - y_0| < \delta_n$ і $|f(x_n, y_n) - g(x_n)| \geq \varepsilon$. Отже, послідовність $\{y_n\}$ збігається до y_0, а послідовність $\{f_n\}$, де $f_n(x) = f(x, y_n)$, не збігається до g рівномірно на E. Отримана суперечність переконує у правильності твердження.

□

Зауваження 21.1.2. Як видно з аналізу доведення твердження 21.1.1, можна обмежитися монотонними послідовностями $\{y_n'\}$, $\{y_n''\}$ такими, що $y_n' \nearrow y_0$, $y_n'' \searrow y_0$, $n \to \infty$.

Теорема 21.1.1 (критерій Коші). *Функція $f(x,y)$ при $y \to y_0$ рівномірно щодо $x \in E$ збігається до деякої граничної функції $g(x)$ тоді і тільки тоді, коли*

$$(\forall\, \varepsilon > 0)\,(\exists\, \delta > 0)\,(\forall\, x \in E)\,(\forall\, y, y' \in Y \cap \overset{o}{\mathcal{U}}_\delta(y_0)) \left\{ |f(x,y') - f(x,y)| < \varepsilon \right\}. \quad (21.4)$$

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай рівність $\lim\limits_{y \to y_0} f(x,y) = g(x)$ справджується рівномірно щодо $x \in E$. Замінивши в означенні 21.1.1 ε на $\varepsilon/2$, переконуємось в існуванні числа $\delta > 0$ такого, що при всіх $x \in E$ та y, $y' \in \overset{o}{\mathcal{U}}_\delta(y_0)$ справджуються нерівності

$$|f(x,y) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}; \quad |f(x,y') - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

з яких випливає, що $|f(x,y') - f(x,y)| < \varepsilon$.

($\Leftarrow$) З (21.4) та критерію Коші існування границі функції (теорема 3.6.1) випливає, що для будь-якого $x \in E$ існує скінченна границя (21.2). Переходячи в (21.4) до границі при $y' \to y_0$ (і фіксованому $y \in Y \cap \overset{o}{\mathcal{U}}_\delta(y))$, отримуємо

$$(\forall\, \varepsilon > 0)\,(\exists\, \delta > 0)\,(\forall\, x \in E)\,(\forall\, y \in Y \cap \overset{o}{\mathcal{U}}_\delta(y_0)) \left\{ |f(x,y) - g(x)| \leq \varepsilon \right\},$$

тобто $f(x,y) \rightrightarrows g(x)$. □

Вправа 21.1.1. *Довести попередню теорему на підставі твердження 21.1.1.*

Наслідок 21.1.1 (неперервність граничної функції). *Якщо функція $f(x,y)$ за будь-якого $y \in Y$ є неперервною за змінною x на проміжку $E = [a,b]$ і при $y \to y_0$ рівномірно збігається до функції $g(x)$, то $g \in C_{[a,b]}$.*

Доведення. Нехай $\{y_n\}$ — деяка послідовність з $Y \setminus \{y_0\}$, яка збігається до y_0. Тоді з огляду на твердження 21.1.1 $f(x, y_n) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} g(x)$. Для завершення доведення достатньо застосувати наслідок 13.3.1. □

Теорема 21.1.2 (теорема Діні). *Нехай функція $f(x,y)$ за будь-якого $y \in Y$ є неперервною щодо x на проміжку $[a,b]$ і монотонною щодо y у разі кожного фіксованого $x \in [a,b]$. Якщо існує $g \in C_{[a,b]}$ така, що для будь-яких $x \in [a,b]$ справджується рівність (21.2), то $f(x,y) \underset{[a,b]}{\overset{y \to y_0}{\rightrightarrows}} g(x)$.*

Доведення. Нехай, для визначеності, функція $y \mapsto f(x,y)$ є незростаючою за кожного фіксованого $x \in [a,b]$. Існують монотонно неспадна послідовність $\{y_n'\}$ та монотонно незрозстаюча послідовність $\{y_n''\}$ ($y_n', y_n'' \in Y \setminus \{y_0\}$) такі, що $y_n' \nearrow y_0$, $y_n'' \searrow y_0$. Очевидно, що послідовність $\{f(x,y_n')\}$ монотонно неспадна, а $\{f(x,y_n'')\}$ монотонно незростаюча. Тому з огляду на теорему 13.3.2

$$f(x,y_n') \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} g(x); \quad f(x,y_n'') \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} g(x).$$

Отже, правильність теореми випливає з твердження 21.1.1 та зауваження 21.1.2. □

На завершення наведемо достатню умову рівномірної збіжності функції двох змінних до граничної функції.

Теорема 21.1.3. *Нехай функція $f(x,y)$ неперервна на прямокутнику*

$$\Pi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ c \le y \le d\} \quad (-\infty < c < d < +\infty).$$

Тоді для кожного $y_0 \in [c,d]$ виконується

$$f(x,y) \underset{[a,b]}{\overset{y \to y_0}{\rightrightarrows}} f(x,y_0).$$

Доведення. За теоремою Кантора (теорема 15.5.4)

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\left(\forall (x,y) \in \Pi, |x'-x''| < \delta, |y'-y''| < \delta\right)\left\{|f(x',y')-f(x'',y'')| < \varepsilon\right\}.$$

Нехай $x' = x'' = x$, $y' = y$, $y'' = y_0$. Тоді

$$(\forall x \in [a,b])\,(\forall y \in [c,d], |y-y_0| < \delta)\left\{|f(x,y) - f(x,y_0)| < \varepsilon\right\}.$$

А це означає, що $f(x,y)$ прямує до $f(x,y_0)$ рівномірно щодо $x \in [a,b]$ при $y \to y_0$. □

21.2. Властиві інтеграли, залежні від параметра

Ми вважаємо, що $f : [a,b] \times Y \to \mathbb{R}$ $(-\infty < a < b < +\infty,\ Y \subset \mathbb{R})$ — функція двох змінних, причому для довільного $y \in Y$ існує інтеграл

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx. \tag{21.5}$$

Функцію F називають *інтегралом, залежним від параметра* y.

Розглянемо деякі властивості інтеграла (21.5), а саме — з'ясуємо умови, за яких справджуються співвідношення, наведені у вступі до цього розділу.

Теорема 21.2.1 (граничний перехід під знаком інтеграла). *Нехай y_0 — гранична точка множини Y. Якщо за будь-якого $y \in Y$ функція $x \mapsto f(x,y)$ є інтегровною на $[a,b]$ і $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = g(x)$ рівномірно щодо $x \in [a,b]$, то функція g інтегровна на $[a,b]$ і можна переходити до границі під знаком інтегралу*

$$\lim_{y\to y_0} \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Доведення. Нехай $y_n \in Y \setminus \{y_0\}$ $(n \in \mathbb{N})$ і $y_n \to y_0$. З огляду на твердження 21.1.1 $f(x,y_n) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} g(x)$, тому (див. наслідок 13.3.1 та теорему 13.3.3) $g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ і має місце

$$\int_a^b g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x,y_n)\,dx.$$

Для завершення доведення достатньо застосувати теорему 3.1.1. □

Наслідок 21.2.1. *Нехай y_0 — гранична точка множини Y. Якщо за будь-якого $y \in Y$ функція $x \mapsto f(x,y)$ неперервна щодо x на $[a,b]$, а для будь-якого $x \in [a,b]$ функція $y \mapsto f(x,y)$ монотонна щодо y і $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y = g(x)$, де $g \in C_{[a,b]}$, то*

$$\lim_{y\to y_0} \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Правильність цього твердження випливає безпосередньо з теорем 21.1.2 та 21.2.1.

Теорема 21.2.2 (неперервність інтеграла, залежного від параметра). *Нехай функція $f(x,y)$ визначена і неперервна на множині*

$$\Pi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ c \le y \le d\} \quad (-\infty < c < d + \infty).$$

Тоді функція $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ *є неперервною на* $[c,d]$.

Доведення. З теорем 21.2.1 та 21.1.3 випливає, що

$$\lim_{y\to y_0}\int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b f(x,y_0)\,dx,$$

тобто функція $F(y)$ є неперервною в точці y_0. Оскільки y_0 — довільна точка $[c,d]$, то $F(y)$ неперервна на цьому проміжку. □

Теорема 21.2.3 (інтегровність інтеграла, залежного від параметра). *Якщо функція* $f(x,y)$ *неперервна на прямокутнику* Π, *то функція* $F(y)$ *інтегровна на* $[c,d]$, *причому*

$$\int\limits_c^d F(y)\,dy \equiv \int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy. \tag{21.6}$$

Доведення. За теоремою 21.2.2 функція $F(y)$ неперервна на $[c,d]$, а, отже, $F(y)$ інтегровна на цьому проміжку. Співвідношення (21.6) випливає з теореми про рівність повторних інтегралів, кожен з яких дорівнює подвійному інтегралу

$$\iint\limits_{\Pi} f(x,y)\,dx\,dy.$$

□

Теорема 21.2.4 (диференційовність інтеграла, залежного від параметра). *Нехай функції* $f(x,y)$ *і* $f_y'(x,y)$ *неперервні на прямокутнику* Π. *Тоді функція* F, *визначена згідно з* (21.5), *диференційовна на* $[c,d]$, *причому*

$$F'(y) = \frac{d}{dy}\int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b f_y'(x,y)\,dx. \tag{21.7}$$

Доведення. Зафіксуємо довільне $y_0 \in [c,d]$. За теоремою Лагранжа про скінченні прирости (теорема 6.2.2) для довільного $h \in \mathbb{R}$ такого, що $y_0 + h \in [c,d]$, існує $\theta \in (0,1)$ таке, що

$$\frac{F(y_0+h)-F(y_0)}{h} = \int\limits_a^b \frac{f(x,y_0+h)-f(x,y_0)}{h}dx = \int\limits_a^b f_y'(x,y_0+\theta h)dx. \tag{21.8}$$

Далі, згідно з теоремою Кантора (теорема 15.5.4), функція f_y' рівномірно неперервна на $[a,b]$, тобто

$$(\forall\,\varepsilon>0)\,(\exists\,\delta>0)\,(\forall\,x',x''\in[a,b],0<|x'-x''|<\delta)\,(\forall\,y',y''\in[c,d],0<|y'-y''|<\delta)$$
$$\left\{|f_y'(x',y')-f_y'(x'',y'')|<\varepsilon\right\}.$$

Прийнявши тут $x'=x''=x$, $y'=y_0$, $y''=y_0+\theta h$, $|h|<\delta$, отримуємо

$$|f_y'(x,y_0+\theta h)-f_y'(x,y_0)|<\varepsilon,$$

тобто

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in[a,b])(\forall h\in\mathbb{R},|h|<\delta)\left\{\left|\frac{f(x,y_0+h)-f(x,y_0)}{h}-f_y'(x,y_0)\right|<\varepsilon\right\}.$$

Це означає, що функція $\dfrac{f(x,y_0+h)-f(x,y_0)}{h}$ при $h\to 0$ рівномірно щодо $x\in[a,b]$ збігається до $f_y'(x,y_0)$. Для завершення доведення достатньо застосувати теорему 21.2.1 до першої рівності співвідношення (21.8). □

Зауваження 21.2.1. Формулу (21.7) називають *правилом Лейбніца.*

Розглянемо випадок, коли межі інтегрування в інтегралі (21.5) залежать від параметра. До закінчення підрозділу, вважатимемо, що функція $f(x,y)$ визначена на обмеженому прямокутнику $\Pi=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$ і графіки кривих $x=\alpha(y)$, $x=\beta(y)$ $(c\le y\le d)$ не виходять за межі множини Π.

Теорема 21.2.5. *Нехай функція f визначена і неперервна на* Π, *а функції* α, $\beta\in C_{[c,d]}$. *Тоді інтеграл*

$$F(y)=\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx \tag{21.9}$$

є неперервною функцією на $[c,d]$.

Доведення. Нехай $y_0\in[c,d]$. Тоді для будь-якого $y\in[c,d]$ маємо

$$F(y)=\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)\,dx+\int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx-\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x,y)\,dx. \tag{21.10}$$

Далі, з огляду на теорему 21.2.2

$$\lim_{y\to y_0}\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)\,dx=\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)\,dx=F(y_0).$$

Крім того (див. (9.14), (9.15)), з огляду на неперервність функцій α та β

$$\left|\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x,y)\,dx\right| \le \max_{(x,y)\in\Pi} |f(x,y)|\cdot|\alpha(y)-\alpha(y_0)| \underset{y\to y_0}{\longrightarrow} 0,$$

$$\left|\int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx\right| \le \max_{(x,y)\in\Pi} |f(x,y)|\cdot|\beta(y)-\beta(y_0)| \underset{y\to y_0}{\longrightarrow} 0.$$

Отже, $\lim\limits_{y\to y_0} F(y) = F(y_0)$, тобто функція (21.9) є неперервною на $[c,d]$. □

Теорема 21.2.6 (узагальнене правило Лейбніца). *Нехай справджуються всі умови теореми 21.2.5 і, крім того, існують похідні $f_y' \in C_\Pi$, $\alpha', \beta' \in C_{[c,d]}$. Тоді функція $F(y)$, що визначена інтегралом (21.9), диференційовна на $[c,d]$, причому*

$$F'(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f_y'(x,y)\,dx + \beta'(y)f(\beta(y),y) - \alpha'(y)f(\alpha(y),y).$$

Доведення. За умов теореми справджується співвідношення (21.10), у якому перший інтеграл при $y=y_0$ має похідну (див. теорему 21.2.4)

$$\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f_y'(x,y_0)\,dx.$$

Для другого інтеграла (значення якого при $y=y_0$ дорівнює нулю) з огляду на теорему про середнє отримуємо

$$\frac{1}{y-y_0}\int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx = \frac{\beta(y)-\beta(y_0)}{y-y_0} f(\xi,y),$$

де ξ міститься між $\beta(y_0)$ та $\beta(y)$. Тому похідна від другого інтеграла при $y=y_0$ дорівнює

$$\beta'(y_0)f(\beta(y_0),y_0).$$

Аналогічно доводимо, що похідна від третього інтеграла дорівнює

$$-\alpha'(y_0)f(\alpha(y_0),y_0).$$

□

Вправа 21.2.1. *Довести, що за умов теореми 21.2.6 функція F є неперервно диференційовною, тобто $F' \in C_{[a,b]}$.*

21.3. Рівномірна збіжність інтегралів

У 21.2 йшлося про залежні від параметра *властиві* інтеграли вигляду (21.5). Природно постає питання про поширення викладеної вище теорії на випадок *невластивих* інтегралів. Виявляється, що в цьому разі важливу роль відіграє поняття рівномірної збіжності невластивих інтегралів, до визначення якого ми переходимо.

Нехай функція $f(x, y)$ визначена на множині $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, +\infty),\ y \in Y\}$, $Y \subset \mathbb{R}$ і для будь-якого $y \in Y$ існує інтеграл

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx. \tag{21.11}$$

Інтеграл $I(y)$ називають *невластивим інтегралом першого роду*. Згідно з означенням невластивого інтеграла,

$$\int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^{t} f(x, y)\, dx.$$

Отже, інтеграл

$$F(t, y) = \int_a^{t} f(x, y)\, dx \tag{21.12}$$

є функцією $F(t, y)$ двох змінних, яка за фіксованого $y_0 \in Y$ збігається до $I(y)$ при $t \to +\infty$.

Означення 21.3.1. Невластивий інтеграл (21.11) називають *рівномірно збіжним* на множині Y, якщо $F(t, y) \underset{Y}{\overset{t \to +\infty}{\rightrightarrows}} I(y)$, тобто

$$(\forall\, \varepsilon > 0)\, (\exists\, t_0 \geq a)\, (\forall\, t > t_0)\, (\forall\, y \in Y) \left\{ \left| \int_t^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon \right\}.$$

Зауваження 21.3.1. Зрозуміло, що

$$\left(F(b, y) \underset{Y}{\overset{t \to +\infty}{\rightrightarrows}} I(y) \right) \Leftrightarrow \lim_{t \to +\infty} \sup_{y \in Y} \left| \int_b^{+\infty} f(x, y)\, dx \right| = 0$$

(порівняйте з (13.5) та (21.3)).

Розглянемо деякі ознаки рівномірної збіжності інтеграла (21.11).

Теорема 21.3.1 (критерій Коші). *Інтеграл (21.11) є рівномірно збіжним на множині Y тоді і тільки тоді, коли*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists\, t_0 \geq a)\,(\forall\, t', t'' \in (t_0, +\infty))\,(\forall\, y \in Y)\,\left\{ \left| \int_{t'}^{t''} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon \right\}.$$

Доведення. Правильність цього критерію випливає з теореми 21.1.1, застосованої до функції (21.12). □

Теорема 21.3.2 (ознака Вейєрштрасса). *Нехай для будь-яких $x \in [a, +\infty)$ та $y \in Y$ справджується нерівність $|f(x,y)| \leq \varphi(x)$ і інтеграл $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ збіжний. Тоді інтеграл (21.11) рівномірно збіжний на множині Y.*

Доведення. Правильність цього твердження випливає безпосередньо з теореми 21.3.1 та нерівності

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x,y)\,dx \right| < \int_{t'}^{t''} \varphi(x)\,dx.$$

□

Теорема 21.3.3 (ознака Діріхле). *Нехай функції двох змінних f та g визначені на множині $[a, +\infty) \times Y$, причому:*

$Д_1$) інтеграл $\int_a^t f(x,y)\,dx$ рівномірно обмежений, тобто

$$(\exists\, K > 0)\,(\forall\, t > a)\,(\forall\, y \in Y)\left\{ \left| \int_a^t f(x,y)\,dx \right| \leq K \right\};$$

$Д_2$) для довільного $y \in Y$ функція $g(x,y)$ монотонна на $[a, +\infty)$ і $g(x,y) \overset{x\to+\infty}{\underset{Y}{\rightrightarrows}} 0$.

Тоді інтеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x,y) g(x,y)\,dx \tag{21.13}$$

рівномірно збіжний на множині Y.

Теорема 21.3.4 (ознака Абеля). *Нехай функції двох змінних f та g визначені на множині $[a, +\infty) \times Y$, причому:*

A_1) інтеграл $\int_a^t f(x,y)\,dx$ рівномірно збіжний щодо $y \in Y$;

A_2) для кожного $y \in Y$ функція $g(x, y)$ монотонна щодо x на $[a, +\infty)$ і рівномірно обмежена на $[a, +\infty) \times Y$, тобто

$$(\exists\, M > 0)\,(\forall\, x \geq a)\,(\forall\, y \in Y)\Big\{|g(x, y)| \leq M\Big\}.$$

Тоді інтеграл (21.13) рівномірно збіжний на множині Y.

Доведення. Ці дві теореми доводимо за схемою, запропонованою під час доведення теореми 11.3.2, наслідку 11.3.3 та теорем 12.5.1, 12.5.2. □

Вправа 21.3.1. *Довести таке: якщо функція $f(x, y)$ неперервна і невід'ємна на множині $[a, +\infty) \times [c, d]$, а інтеграл $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$ є неперервною функцією на $[c, d]$, то $I(y)$ рівномірно збіжний на $[c, d]$.*

21.4. Властивості невластивих інтегралів, залежних від параметра

Уважатимемо, що функція $f(x, y)$ визначена на множині $[a, +\infty) \times Y$, $Y \subset \mathbb{R}$, а невластивий інтеграл $I(y)$ визначений рівністю (21.11).

Теорема 21.4.1 (граничний перехід під знаком інтеграла). *Нехай*

1) $\forall\, b > a: \; f(x, y) \underset{[a,b]}{\overset{y \to y_0}{\rightrightarrows}} g(x)$, *де y_0 — гранична точка множини Y;*

2) *інтеграл (21.11) рівномірно збіжний на множині Y.*

Тоді

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = \lim_{y \to y_0} \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\, dx = \int\limits_a^{+\infty} g(x)\, dx. \tag{21.14}$$

Доведення. Доведемо спочатку, що функція $g(x)$ невластиво інтегровна на $[a, +\infty)$. З умови 2 теореми отримуємо, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує число $t_0 > a$ таке, що для довільних $t' > t_0$, $t'' > t_0$ і для всіх $y \in Y$ виконується

$$\left| \int\limits_{t'}^{t''} f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon.$$

За теоремою 21.2.1, завдяки умові 1 теореми, $\left| \lim\limits_{y \to y_0} \int\limits_{t'}^{t''} f(x, y)\, dx \right| = \left| \int\limits_{t'}^{t''} g(x)\, dx \right| \leq \varepsilon$.

За критерієм Коші збіжності невластивого інтеграла (див. теорему 11.3.1), отримуємо інтегровність функції $g(x)$ на $[a, +\infty)$.

Нехай $\{t_n\}$ — довільна послідовність така, що $t_n \to +\infty$, $n \to \infty$. Розглянемо функціональну послідовність $\{I_n(y)\}$, де

$$I_n(y) = \int\limits_a^{t_n} f(x,y)\,dy. \tag{21.15}$$

З огляду на твердження 21.1.1 та теорему 21.2.1 одержуємо, що послідовність $\{I_n(y)\}$ рівномірно на множині Y збігається до інтеграла $I(y)$ (див. (21.11)) і для кожного $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{y\to y_0} I_n(y) = \lim_{y\to y_0} \int\limits_a^{t_n} f(x,y)\,dx = \int\limits_a^{t_n} \big(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\big)\,dx = \int\limits_a^{t_n} g(x)\,dx.$$

Однак тоді за теоремою 13.3.1 існує границя

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = \lim_{y\to y_0}\lim_{n\to\infty} I_n(y) = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^{t_n} g(x)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx,$$

що доводить рівність (21.14). □

Вправа 21.4.1. *Нехай функція $f(x,y)$ неперервна і невід'ємна на множині $[a,+\infty)\times[c,d]$, за кожного фіксованого $x \in [a,+\infty)$ функція $f(x,y)$ є спадною щодо y при $y \to y_0$ і збігається до неперервної на $[a,b]$ функції $g(x)$. Довести, що зі збіжності інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ випливає можливість граничного переходу при $y \to y_0$ під знаком інтеграла (21.11).*

Теорема 21.4.2 (неперервність невластивого інтеграла). *Нехай*

1) *функція $f(x,y)$ неперервна на $[a,+\infty)\times[c,d]$;*

2) *інтеграл $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ рівномірно збіжний на відрізку $[c,d]$.*

Тоді $I(y)$ є неперервною функцією на $[c,d]$.

Доведення. За теоремою 21.1.3, завдяки умові 1, для довільних $b > a$ та $y_0 \in [c,d]$ виконується

$$f(x,y) \underset{[a,b]}{\overset{y\to y_0}{\rightrightarrows}} f(x,y_0).$$

Звідси і з теореми 21.4.1 випливає

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = \lim_{y\to y_0}\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y_0)\,dx = I(y_0),$$

що доводить теорему 21.4.2. □

Теорема 21.4.3 (інтегровність невластивого інтеграла). *Нехай виконуються умови теореми 21.4.2. Тоді функція $I(y)$ інтегровна на $[c,d]$, причому*

$$\int_c^d I(y)\,dy \equiv \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x,y)\,dy. \qquad (21.16)$$

Доведення. Згідно з теоремою 21.4.2 функція $I(y)$ неперервна на відрізку $[c,d]$, отже, інтегровна на ньому. Доведемо рівність (21.16). Розглянемо послідовність функцій (21.15). За теоремою 21.2.3, для кожної функції $I_n(y)$ отримуємо

$$\int_c^d I_n(y)\,dy \equiv \int_c^d dy \int_a^{t_n} f(x,y)\,dx = \int_a^{t_n} dx \int_c^d f(x,y)\,dy. \qquad (21.17)$$

Оскільки на $[c,d]$ послідовність $\{I_n(y)\}$ рівномірно збіжна до $I(y)$, то під знаком інтеграла, що стоїть у лівій частині (21.17), можна зробити граничний перехід при $n \to +\infty$. Отже, при $n \to +\infty$ існує границя послідовності інтегралів, що стоять у правій частині (21.17). Тому

$$\lim_{n\to\infty} \int_c^d I_n(y)\,dy = \int_c^d I(y)\,dy = \lim_{n\to\infty} \int_a^{t_n} dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

□

Теорема 21.4.4 (диференційовність невластивого інтеграла). *Нехай*

1) *функції $f(x,y)$ та $f_y'(x,y)$ неперервні на множині $[a,+\infty) \times [c,d]$;*

2) *інтеграл $I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ збіжний на множині $[c,d]$;*

3) *інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f_y'(x,y)\,dx$ рівномірно збіжний на $[c,d]$.*

Тоді функція $I(y)$ диференційовна на $[c,d]$, причому

$$I'(y) \equiv \frac{d}{dy} \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^{+\infty} f_y'(x,y)\,dx.$$

Доведення. Розглянемо функціональну послідовність $\{I_n(y)\}$, визначену рівностями (21.15). З огляду на теорему 21.2.4 $I_n'(y) = \int\limits_a^{t_n} f_y{}'(x,y)\,dx$. Оскільки послідовність диференційовних функцій $I_n(y)$ збіжна на $[c,d]$ до функції $I(y)$, а послідовність функцій $I_n'(y)$ рівномірно збіжна на $[c,d]$, то згідно з теоремою 13.3.4

$$I'(y) \equiv \left(\lim_{n\to\infty} I_n(y)\right)' = \lim_{n\to\infty} I_n'(y) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^{t_n} f_y{}'(x,y)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} f_y{}'(x,y)\,dx.$$

□

Доведемо тепер теорему про інтегровність невластивого інтеграла (21.11) уздовж нескінченного проміжку зміни параметра y.

Теорема 21.4.5. *Нехай*

1) $f(x,y)$ *неперервна на множині* $[a,+\infty) \times [c,+\infty)$ *функція;*

2) $\forall \eta > c:\ F(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ — *рівномірно збіжний на множині* $[c,\eta]$;

3) $\forall b > a:\ \Phi(x) = \int\limits_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ — *рівномірно збіжний на* $[a,b]$;

4) *збіжний один з інтегралів* $\int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} |f(x,y)|\,dx$ *або* $\int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^{+\infty} |f(x,y)|\,dy$.

Тоді збіжні і дорівнюють один одному два повторні інтеграли

$$\int\limits_c^{+\infty} F(y)\,dy = \int\limits_a^{+\infty} \Phi(x)\,dx. \tag{21.18}$$

Доведення. Нехай збіжний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^{+\infty} |f(x,y)|\,dy$ і $c < \eta < +\infty$. Завдяки умовам 1 та 2, з теореми 21.4.3 отримуємо

$$\int\limits_c^{\eta} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^{\eta} f(x,y)\,dy. \tag{21.19}$$

Доведемо, що можливий граничний перехід під знаком інтеграла в правій частині рівності (21.19) при $\eta \to +\infty$. Функція $\Phi(x,\eta) = \int\limits_c^{\eta} f(x,y)\,dy$ з огляду на умову 3 теореми рівномірно збігається до функції $\Phi(x)$ на проміжку $[a,b]$ при $\eta \to +\infty$, де $b > a$ — довільне число. Інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \Phi(x,\eta)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^{\eta} f(x,y)\,dy$ — рівномірно збіжний щодо η на $[c,+\infty)$, оскільки за ознакою Вейєрштрасса рівномірної збіжності (теорема 21.3.2), маємо

$$\sup_{c\le\eta\le+\infty} |\Phi(x,\eta)| \le \sup_{c\le\eta\le+\infty} \int_a^{\eta} |f(x,y)|\,dy \le \int_a^{+\infty} |f(x,y)|\,dy,$$

а інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^{+\infty} |f(x,y)|\,dy$ — збіжний за припущенням.

Отже, за теоремою 21.4.1

$$\lim_{\eta\to+\infty} \int_a^{+\infty} \Phi(x,\eta)\,dx = \int_a^{+\infty} (\lim_{\eta\to+\infty} \Phi(x,\eta))\,dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x,y)\,dy.$$

Рівність (21.18) тепер випливає з (21.19). □

Наслідок 21.4.1. *Нехай*

1) *функція $f(x,y)$ є неперервною і невід'ємною на $[a,+\infty)\times[c,+\infty)$;*

2) *інтеграл $F(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ є неперервною функцією на $[c,+\infty)$;*

3) *інтеграл $\Phi(x) = \int\limits_c^{+\infty} f(x,y)\,dy$ є неперервною функцією на $[a,+\infty)$.*

Тоді зі збіжності одного з інтегралів $\int\limits_c^{+\infty} F(y)\,dy$ і $\int\limits_a^{+\infty} \Phi(x)\,dx$ випливає збіжність іншого з цих інтегралів і правильна рівність (21.18).

Доведення. За твердженням вправи 21.3.1 отримуємо, що інтеграли $F(y)$ та $\Phi(x)$ є рівномірно збіжними, відповідно, на $[a,+\infty)$ і $[c,+\infty)$, а, отже, виконуються умови теореми 21.4.5. □

Зауваження 21.4.1. Нехай функція $f(x,y)$ визначена на множині $[a,b]\times Y$, для кожного фіксованого $y\in Y$ функція $f(x,y)\to\infty$ при $x\to a+0$ і збіжний невластивий інтеграл

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx. \tag{21.20}$$

Функцію $I(y)$ називають *невластивим інтегралом другого роду*, залежним від параметра. За допомогою заміни $x = a + \frac{1}{t}$ цей невластивий інтеграл другого роду зводиться до невластивого інтеграла першого роду, тобто

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(a+\frac{1}{t}, y\right)\frac{1}{t^2}\,dt.$$

Тому на інтеграли (21.20) можуть бути поширені основні теореми про граничний перехід під знаком невластивого інтеграла, про умови його неперервності щодо параметра, про інтегровність та диференційовність за параметром під знаком інтеграла. Інтеграл вигляду

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^b f(x,y)\,dx + \int_b^{+\infty} f(x,y)\,dx,$$

де перший доданок — інтеграл від необмеженої функції, а другий — інтеграл уздовж необмеженого проміжку, називають *рівномірно збіжним*, якщо рівномірно збігаються обидва інтеграли, що стоять у правій частині.

21.5. Обчислення деяких невластивих інтегралів

1. Обчислимо інтеграл $A = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$, збіжність якого випливає з ознаки Діріхле (див. теорему 21.3.3). Розглянемо допоміжну функцію

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}\, e^{-yx}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Функція $f(x,y)$ та її похідна $f_y'(x,y) = -e^{xy}\sin x$ неперервні на множині $\{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0\}$ і $f(x,0) = \dfrac{\sin x}{x}$. Нехай

$$A(y) = \int_0^{+\infty} e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} f(x,y)\,dx.$$

Цей інтеграл рівномірно збіжний на множині $y \geq 0$, оскільки за ознакою Діріхле рівномірної збіжності (теорема 21.3.3) функція $\frac{1}{x}$ при $x \to +\infty$ монотонно і рівномірно щодо $y \geq 0$ прямує до нуля, та виконуються оцінка

$$\left|\int_0^t e^{-yx}\sin x\,dx\right| = \left|-\frac{e^{-yx}(y\sin x + \cos x)}{1+y^2}\right|\Bigg|_0^t \leq \left|\frac{e^{-yt}(y\sin t + \cos t)}{1+y^2}\right| + \left|\frac{1}{1+y^2}\right| \leq$$

$$\leq \frac{2(1+y)}{1+y^2} \leq 3.$$

З огляду на теорему 21.4.2 отримуємо, що функція $A(y)$ неперервна на $[0,+\infty)$, зокрема справджується рівність

$$\lim_{y\to 0+} A(y) = A(0) = A.$$

Знайдемо значення $A(y)$. Розглянемо допоміжний інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-yx}\sin x\,dx$, який є рівномірно збіжним на множині $y \geq y_0$, де $y_0 > 0$. Справді, за ознакою Вейєрштрасса рівномірної збіжності (теорема 21.3.2) $\sup\limits_{y\geq y_0} |e^{-yx}\sin x| \leq e^{-y_0 x}$, а інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-y_0 x}\,dx$ збіжний. Завдяки теоремі 21.4.4 для довільного $y > 0$ маємо

$$A'(y) = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-yx}\sin x\,dx = \left.\frac{e^{-yx}(y\sin x + \cos x)}{1+y^2}\right|_0^{+\infty} = -\frac{1}{1+y^2}.$$

Інтегруючи це співвідношення вздовж проміжку $[y, +\infty)$, отримуємо

$$A(+\infty) - A(y) = -\operatorname{arctg} t\Big|_y^{+\infty} = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} y.$$

Оскільки $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq 1$, то для $y \geq y_0$

$$|A(y)| \leq \int\limits_0^{+\infty} e^{-y_0 x}\,dx = -\frac{1}{y_0}e^{-y_0 x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{y_0} \longrightarrow 0,\ \ y_0 \to +\infty.$$

Звідси отримуємо, що $A(+\infty) = 0$, отже,

$$A(y) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y,\ y > 0.$$

Перейшовши в цій рівності до границі при $y \to +0$, одержуємо

$$A(0) = A = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Вправа 21.5.1. *Довести, що інтеграл*

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \alpha > 0; \\ 0, & \alpha = 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & \alpha < 0. \end{cases}$$

Інтеграл $I(\alpha)$ називають *інтегралом Діріхле.*

2. Обчислимо інтеграл Пуассона

$$B = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Приймемо $x = yt$, де $y > 0$, й отримаємо

$$B = B(y) = \int_0^{+\infty} e^{-y^2t^2} y\, dt.$$

Домножимо обидві частини цього співвідношення на e^{-y^2} і проінтегруємо за y уздовж проміжку $[0, +\infty)$:

$$B \int_0^{+\infty} e^{-y^2}\, dy = B^2 = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} y\, dy \int_0^{+\infty} e^{-y^2t^2}\, dt.$$

Розглянемо функцію $f(y,t) = ye^{-(1+t^2)y^2}$, яка є неперервною і невід'ємною на множині $y \geq 0$, $t \geq 0$. Інтеграли

$$F(y) = \int_0^{+\infty} f(y,t)\, dt = ye^{-y^2} \int_0^{+\infty} e^{-y^2t^2}\, dt = e^{-y^2} B,$$

$$\Phi(t) = \int_0^{+\infty} f(y,t)\, dy = \int_0^{+\infty} ye^{-(1+t^2)y^2}\, dy = \frac{-1}{2(1+t^2)} e^{-(1+t^2)y^2}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2(1+t^2)}$$

є неперервними функціями в області зміни параметра, тобто, відповідно, на множинах $y \geq 0$ і $t \geq 0$. Крім того,

$$\int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} f(y,t)\, dy = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Отже, виконані всі умови наслідку 21.4.1. Тому

$$B^2 = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} y\, dy \int_0^{+\infty} e^{-y^2t^2}\, dt = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} f(y,t)\, dy = \frac{\pi}{4},$$

звідки $B = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

21.6. Інтеграли Ейлера

Вивчимо деякі властивості важливих неелементарних функцій, які називають *інтегралами Ейлера*. Інтегралом Ейлера *першого роду*, або "*бета-функцією*"

(B-функцією), називають інтеграл

$$B(\alpha,\beta) = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx.$$

У цьому інтегралі α і β є параметрами, і якщо $\alpha < 1$, $\beta < 1$, то інтеграл $B(\alpha,\beta)$ буде невластивим, причому підінтегральна функція має дві особливі точки $x = 0$ та $x = 1$.

Інтегралом Ейлера *другого роду*, або "*гамма-функцією*" (Γ-функцією), називають інтеграл

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx.$$

При $\alpha < 1$ інтеграл $\Gamma(\alpha)$ має дві особливі точки $x = 0$ та $x = +\infty$. Дослідимо спочатку Γ-функцію.

1. Функція $\Gamma(\alpha)$ неперервна на $(0,+\infty)$. Дійсно

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx + \int\limits_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx = I_1 + I_2.$$

Оскільки підінтегральна функція $f(x,\alpha) = x^{\alpha-1}e^{-x}$ є неперервною на $[0,+\infty)\times(0,+\infty)$, $0 \le x^{\alpha-1}e^{-x} \le x^{\alpha_0-1}$ для $x \in [0,1]$, $\alpha \ge \alpha_0 > 0$, $0 \le x^{\alpha-1}e^{-x} \le x^{\alpha_1-1}e^{-x}$ для $x \in [1,+\infty)$ і $\alpha \le \alpha_1 < +\infty$, то за ознакою Вейєрштрасса інтеграли I_1 та I_2 рівномірно збіжні щодо α на $[\alpha_0,\alpha_1]$. З огляду на теорему 21.4.2 та довільність $\alpha_0 > 0$ і $\alpha_1 < +\infty$ отримаємо неперервність Γ-функції на $(0,+\infty)$.

2. Функція $\Gamma(\alpha)$ нескінченну кількість разів неперервно диференційовна на проміжку $(0,+\infty)$, причому

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\ln^n x\, e^{-x}\,dx.$$

Це твердження доводять аналогічно до властивості 1, однак використовують такі оцінки підінтегральної функції ($\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $\eta > 0$)

$$|\ln^n x\cdot x^{\alpha-1}e^{-x}| \le x^{\alpha_0-\varepsilon-1},\ x \in (0;\delta],\ \alpha \ge \alpha_0 > 0,$$

$$|\ln^n x\cdot x^{\alpha_1-1}e^{-x}| \le x^{\alpha_1}e^{-x},\ x \in [\eta;+\infty),\ \alpha \le \alpha_1,$$

які випливають з рівностей

$$\lim_{x\to 0+}(x^\varepsilon \ln x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\varepsilon} = 0.$$

3. Справджується *формула зведення*:

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \ \alpha > 0.$$

Справді, проінтегрувавши частинами, отримаємо

$$\Gamma(\alpha+1) = \int\limits_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}\,dx = -x^\alpha e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \alpha\int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx = \alpha\Gamma(\alpha).$$

Якщо $n-1 < \alpha < n$, то, застосувавши послідовно формулу зведення, матимемо

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-n+1).$$

Ця рівність засвідчує, що достатньо знати $\Gamma(\alpha)$ на проміжку $(0,1)$, щоб обчислити її значення для довільного $\alpha > 0$.

Для $\alpha = n \in \mathbb{N}$ маємо

$$\Gamma(n+1) = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot\Gamma(1) = n!,$$

оскільки $\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}|_0^{+\infty} = 1.$

Дослідимо тепер B-функцію. Виконаємо заміну $x = \frac{t}{t+1}$. Тоді

$$t = \frac{1}{1-x} - 1, \quad dx = \frac{1}{(1+t)^2}dt$$

і тому

$$B(\alpha,\beta) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{(t+1)^{\alpha-1}}\cdot\frac{1}{(1+t)^{\beta-1}}\cdot\frac{dt}{(1+t)^2} = \int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\,dt. \tag{21.21}$$

Як й під час дослідження Г–функції, неважко довести, що:

1) функція $B(\alpha,\beta)$ неперервна в області $\alpha > 0$, $\beta > 0$;

2) функція $B(\alpha,\beta)$ нескінченну кількість разів неперервно диференційовна в області $\alpha > 0$, $\beta > 0$;

3) функція $B(\alpha,\beta)$ симетрична, тобто $B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha)$ для всіх $\alpha > 0$, $\beta > 0$;

4) справджується *формула зведення*: $B(\alpha+1,\beta) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Властивість 3 випливає з означення B-функції (потрібно в інтегралі зробити заміну $t = 1 - x$). Далі,

$$B(\alpha+1,\beta) = \int_0^1 x^\alpha (1-x)^{\beta-1}\,dx = -\frac{1}{\beta}x^\alpha(1-x)^\beta\Big|_0^1 + \frac{\alpha}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^\beta\,dx =$$

$$= \frac{\alpha}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx - \frac{\alpha}{\beta}\int_0^1 x^\alpha(1-x)^{\beta-1}\,dx = \frac{\alpha}{\beta}B(\alpha,\beta) - \frac{\alpha}{\beta}B(\alpha+1,\beta).$$

Отже, $(1+\frac{\alpha}{\beta})B(\alpha+1,\beta) = \frac{\alpha}{\beta}$, звідки отримаємо формулу зведення для функції $B(\alpha,\beta)$. З властивості симетрії для довільних $\alpha > 0$, $\beta > 0$ маємо формулу

$$B(\alpha,\beta+1) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta).$$

У разі застосування послідовно цих формул зведення можна виразити довільні значення $B(\alpha,\beta)$ через значення цієї функції в прямокутнику $\Pi = \{(\alpha,\beta)\colon 0 \le \alpha \le 1, 0 \le \beta \le 1\}$.

Властивості 1 та 2 функції $B(\alpha,\beta)$ випливають з такої теореми, яка дає зв'язок між інтегралами Ейлера.

Теорема 21.6.1. *Для $\alpha > 0$, $\beta > 0$ правильна рівність*

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{21.22}$$

Доведення. Зробимо заміну $x = (1+v)t$, $v > 0$. Тоді

$$\Gamma(\alpha+\beta) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha+\beta-1}e^{-x}\,dx = (1+v)^{\alpha+\beta}\int_0^{+\infty} t^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+v)t}\,dt,$$

звідки

$$\Gamma(\alpha+\beta)\frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}} = \int_0^{+\infty} t^{\alpha+\beta-1}v^{\alpha-1}e^{-(1+v)t}\,dt.$$

Припустимо спочатку, що $\alpha > 1$, $\beta > 1$ і розглянемо на множині $t \ge 0$, $v \ge 0$ функцію $f(t,v) = t^{\alpha+\beta-1}v^{\alpha-1}e^{-(1+v)t}$. Очевидно, що $f(t,v) \ge 0$ і неперервна на цій множині. Інтеграл

$$F(v) = \int_0^{+\infty} f(t,v)\,dt = \Gamma(\alpha+\beta)\frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}}$$

є неперервною функцією на множині $v \geq 0$, а інтеграл

$$\Phi(t) = \int_0^{+\infty} f(t,v)\,dv = t^{\beta-1}e^{-t}\int_0^{+\infty}(vt)^{\alpha-1}e^{-tv}t\,dv = t^{\beta-1}e^{-t}\Gamma(\alpha)$$

— неперервною функцією на множині $t \geq 0$. Нарешті, існує повторний інтеграл

$$\int_0^{+\infty}\Phi(t)\,dt = \int_0^{+\infty}dt\int_0^{+\infty}f(t,v)\,dv = \int_0^{+\infty}\Gamma(\alpha)t^{\beta-1}e^{-t}\,dt = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta).$$

Отже, з наслідку 21.4.1 випливає рівність

$$\int_0^{+\infty}F(v)\,dv = \int_0^{+\infty}\Phi(t)\,dt.$$

Однак завдяки (21.21), маємо

$$\int_0^{+\infty}F(v)\,dv = \Gamma(\alpha+\beta)\int_0^{+\infty}\frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}} = \Gamma(\alpha+\beta)\cdot B(\alpha,\beta),$$

тобто $\Gamma(\alpha+\beta)\cdot B(\alpha,\beta) = \Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)$, що доводить (21.22) у випадку $\alpha > 1$, $\beta > 1$.

Нехай тепер $\alpha > 0$, $\beta > 0$. За доведеним правильна формула

$$B(\alpha+1,\beta+1) = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}. \tag{21.23}$$

Використовуючи формулу зведення, отримуємо

$$B(\alpha+1,\beta+1) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}B(\alpha,\beta+1) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}\cdot\frac{\beta}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta),$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \qquad \Gamma(\beta+1) = \beta\Gamma(\beta),$$

$$\Gamma(\alpha+\beta+2) = (\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta+1) = (\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta).$$

Підставимо ці вирази в (21.23) одержимо формулу (21.22) для всіх $\alpha > 0$, $\beta > 0$. □

Зауваження 21.6.1. Для $0 < \alpha < 1$ справджується *формула доповнення*

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}. \tag{21.24}$$

Приклад 21.6.1.

Обчислити інтеграли:

а) $I_1 = \int\limits_0^{+\infty} x^{1/4}(1+x)^{-2}\,dx$;

б) $I_2 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$;

в) $I_3 = \int\limits_0^{+\infty} \sin^{\alpha-1} x \cos^{\beta-1} x\,dx,\ \alpha > 0,\ \beta > 0.$

За формулами (21.21), (21.22) та (21.24) маємо

$$I_1 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{5/4-1}}{(1+x)^{5/4+3/4}}\,dx = B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{\Gamma(\frac{5}{4})\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(2)} = \frac{\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{3}{4})}{1!} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{\sin(\pi/4)} = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}.$$

Зробимо заміну $t = x^3$ $\left(x = t^{1/3},\ dx = \frac{1}{3}t^{-2/3}\right)$ в інтегралі I_2 і отримаємо

$$I_2 = \frac{1}{3}\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{-2/3}}{1+t}\,dt = \frac{1}{3}\,B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{\sin(\pi/3)} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Для обчислення інтеграла I_3 зробимо заміну $t = \sin^2 x$. Тоді $x = \arcsin\sqrt{t}$, $dx = \frac{1}{\sqrt{1-t}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}dt$ та інтеграл набуває вигляду

$$I_3 = \frac{1}{2}\int\limits_0^{1} t^{\frac{\alpha-1}{2}}(1-t)^{\frac{\beta-1}{2}}(1-t)^{-1/2}t^{-1/2}\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{1} t^{\frac{\alpha}{2}-1}(1-t)^{\frac{\beta}{2}-1}\,dt = \frac{1}{2}\,B\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right).$$

Розділ 22

Аналітичні функції комплексної змінної

Коротко наведемо основні властивості аналітичних функцій комплексної змінної. Цей клас функцій значно вужчий від множини неперервно диференційовних у плоскій області функцій. З іншого боку, клас аналітичних функцій настільки широкий, що має численні застосування як в інших розділах сучасної математики, так і безпосередньо в природничих науках.

22.1. Функції комплексної змінної. Неперервність та диференційовність

Незважаючи, що комплексні числа вивчають у курсі вищої алгебри, тут нагадаємо деякі поняття, пов'язані з ними. Число $z = x + iy$, де $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ та $i^2 = -1$ називають *алгебраїчним записом комплексного числа*, а $x = \operatorname{Re} z$ і $y = \operatorname{Im} z$, відповідно, — *дійсною* та *уявною частинами* числа z. Якщо $y = 0$, то z — дійсне число; якщо $x = 0$, $y \neq 0$, то z називають уявним числом. Число $\bar{z} = x - iy$ називають *комплексно спряженим* до числа $z = x + iy$.

Оскільки комплексне число $z = x + iy$ розуміють як пару (x, y), то йому можна поставити у відповідність точку на площині. Таку площину називають *комплексною площиною* (z — площиною) і позначають через $\mathbb{C}$. У цьому разі вісь абсцис називають *дійсною* віссю, вісь ординат — *уявною*.

Якщо для визначення точки $z \neq 0$ на комплексній площині використати полярну систему координат (r, φ), то матимемо $x = r\cos\varphi$ та $y = r\sin\varphi$, тобто $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Це є *тригонометричний запис* комплексного числа. У цьому випадку r називають *модулем* числа z, а φ його *аргументом* і записують $|z| = r$ і $\varphi \in \operatorname{Arg} z$. За теоремою Піфагора, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Легко побачити, що $\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, де $\rho(z_1, z_2)$ — відстань між точками z_1 і z_2. Аргумент визначений не однозначно, а з точністю до доданка, кратного 2π. Єдине φ з множини $\mathrm{Arg}\ z$, $z \neq 0$, яке належить фіксованому проміжку $[a, a+2\pi)$, позначають через $\arg_a z$. Число $\arg_{-\pi} z$ називають *головним значенням* аргументу і позначають через $\arg z$. Головним значенням аргументу часто називають і $\arg_0 z$. Аргумент числа $z = 0$ взагалі не визначений. Два відмінні від 0 комплексні числа рівні, якщо рівні їхні модулі, а аргументи або рівні, або відрізняються на дійсне число, кратне 2π. Рівність $k_1 \mathrm{Arg}\ z_1 = k_2 \mathrm{Arg}\ z_2$, $k_1 \in \mathbb{Z}$, $k_2 \in \mathbb{Z}$, уважають правильною, якщо $k_1 \arg z_1 = k_2 \arg z_2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Модуль і аргумент можна визначити через дійсну та уявну частини за допомогою формул $r = \sqrt{x^2+y^2}$ та $tg\ \varphi = y/x$. Під час розв'язування останнього рівняння треба обов'язково враховувати знаки чисел x і y. Наприклад:

$$\arg z = \begin{cases} \mathrm{arctg}\,(y/x) & (x > 0); \\ \mathrm{arctg}\,(y/x) + \pi\,\mathrm{sign}\, y & (x < 0); \\ (\pi/2)\,\mathrm{sign}\, y & (x = 0). \end{cases}$$

Без додаткових пояснень надалі використовуватимемо позначення $z = x+iy$, $w = u+iv$, $x, y, u, v \in \mathbb{R}$, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ та $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r > 0$, $\rho > 0$, φ, $\theta \in \mathbb{R}$; аналогічні позначення літер з індексами (наприклад, $w_1 = u_1 + iv_1$).

Оскільки комплексне число можна розуміти як вектор, легко отримати нерівності трикутника у вигляді $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ і $|z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|$. З першої з цих нерівностей випливає, що $|z| = |x+iy| \le |x| + |y|$. З іншого боку, $|x| = \sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2+y^2} = |z|$ і $|y| \le |z|$. Отже, одержуємо нерівності

$$\left.\begin{matrix} |\mathrm{Re}\ z| \\ |\mathrm{Im}\ z| \end{matrix}\right\} \le |z| \le |\mathrm{Re}\ z| + |\mathrm{Im}\ z|. \tag{22.1}$$

У комплексному аналізі поняття околу, внутрішньої і зовнішньої точок множини, збіжності, границі, функції, області, кривої, тощо вводять як у дійсному аналізі у випадку $\mathbb{R}^2$.

Наприклад, *областю* називають відкриту лінійно зв'язну множину з $\mathbb{C}$. *Замкненою областю* називають замикання області, тобто об'єднання області з її краєм.

Відображення $f : E \to \mathbb{C}$, де множина $E \subset \mathbb{C}$, називають *функцією комплексної змінної* і позначають $w = f(z)$. Якщо прийняти $z = x+iy, w = u+iv$, то задання функції комплексної змінної рівносильне заданню двох дійснозначних функцій від двох дійсних змінних: $u = u(x,y), v = v(x,y)$.

Означення границі функції f в точці $z_0 \in E$ є таким:

$$(\lim_{z\to z_0} f(z) = A) \overset{def}{\equiv} (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall z \in E, 0 < |z - z_0| < \delta)\,\{|f(z) - A| < \varepsilon\}.$$

Доведення багатьох теорем для функцій комплексної змінної можна отримати як наслідки з відомих теорем дійсного аналізу, використовуючи нерівності (22.1).

Теорема 22.1.1. *Нехай* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. *Тоді*

$$(\lim_{z\to z_0} f(z) = A) \Leftrightarrow (\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) = \operatorname{Re} A) \wedge (\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y) = \operatorname{Im} A).$$

Справді, правильність цієї теореми випливає з нерівностей

$$\left.\begin{matrix} |u - \operatorname{Re} A| \\ |v - \operatorname{Im} A| \end{matrix}\right\} \le |f - A| \le |u - \operatorname{Re} A| + |v - \operatorname{Im} A|,$$

які є наслідком нерівностей (22.1).

Функцію f називають *неперервною в точці* z_0, якщо $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$. З теореми 22.1.1 випливає, що f неперервна в точці z_0 тоді і тільки тоді, коли функції u і v неперервні в точці (x_0, y_0). Функцію називають *неперервною на множині*, якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини. Нарешті, функцію f називають *обмеженою на множині* E, якщо $(\exists M > 0)(\forall z \in E)\{|f(z)| \le M\}$.

Означення 22.1.1. *Похідною* функції f в точці $z_0 \in \mathbb{C}$ називають величину

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

З цього означення, як і для функції дійсної змінної, легко отримати формули для знаходження похідної суми, добутку, частки двох функцій. Ці формули такі ж, як і для функцій дійсної змінної.

Вправа 22.1.1. *Довести, що функція* $f(z) = \operatorname{Re} z$ *не має похідної в жодній точці площини* $\mathbb{C}$, *хоча її дійсна* $(u = x)$ *та уявна* $(v = 0)$ *частини неперервно диференційовні в* $\mathbb{R}^2$.

Якщо $z = z(t)$ — комплекснозначна функція дійсної змінної $t \in [a,b]$, то, приймаючи $z(t) = x(t) + iy(t)$, отримаємо $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

Нехай $x = x(t)$, $y = y(t)$, де $x(t)$ і $y(t)$ є неперервними функціями від $t \in [a,b]$, — параметричне зображення деякої кривої C в $\mathbb{R}^2$. Якщо перейдемо до $\mathbb{C}$, то це параметричне зображення матиме вигляд $z = z(t)$, $t \in [a,b]$, причому $z(t)$ — неперервна на $[a,b]$ функція. Через C^- позначатимемо криву C з протилежним напрямом обходу, тобто $z = z(a + b - t)$, $t \in [a,b]$ — параметричне зображення C^-. Якщо Γ — замкнена жорданова крива, то множина $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ складається з двох областей: обмеженої $\operatorname{int}\Gamma$ і необмеженої $\operatorname{ext}\Gamma$. Вважаємо, що замкнена жорданова крива орієнтована так, що в разі обходу Γ область $\operatorname{int}\Gamma$ залишається ліворуч.

Надалі для спрощення формулювання тверджень домовимося розглядати тільки кусково-гладкі криві, не зазначаючи спеціально про цю домовленість, хоч у багатьох випадках ми не використовуватимемо властивостей кускової гладкості, а в деяких випадках могли б лише вимагати спрямності кривої. Довжину кривої C позначатимемо через $|C|$ (читають "довжина", а не "модуль").

Нагадаємо, що область $G \subset \mathbb{C}$ називають *однозв'язною*, якщо яку б замкнену жорданову криву Γ з цієї області не взяти, то $\operatorname{int}\Gamma \subset G$. Приклади однозв'язних областей: а) круг $\{z : |z - z_0| < R\}$ радіусом R з центром у точці z_0; б) верхня півплощина $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$; в) права півплощина $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$.

Досі ми говорили про скінченну площину $\mathbb{C}$. Буде вигідно до неї додати спеціальну точку ∞, ε-околом якої є $\{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1/\varepsilon\}$. Над нескінченно віддаленою точкою означені такі дії: якщо, $z \in \mathbb{C}$, то $z + \infty = \infty$ і $z/\infty = 0$, а якщо $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$, то $z/0 = \infty$ і $z \cdot \infty = \infty$. Операції $\infty + \infty$, $0 \cdot \infty$ і ∞/∞ не визначають.

Множину $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ називають *розширеною комплексною площиною. Колом* у $\overline{\mathbb{C}}$ вважатимемо як коло в $\mathbb{C}$, так і пряму в $\mathbb{C}$. *Кругом* називатимемо область, обмежену колом, так що в $\overline{\mathbb{C}}$ кругом може бути і зовнішність кола, і півплощина. Доцільність такого розширення стане зрозумілою під час вивчення дробово-лінійних відображень. З формального погляду воно дає змогу в багатьох теоремах відкинути додаткові умови. Наприклад, твердження, що через три точки в $\mathbb{C}$, які не лежать на одній прямій, можна провести одне і тільки одне коло, тепер звучить так: через три різні точки в $\overline{\mathbb{C}}$ можна провести одне і тільки одне коло. Рівняння кола в декартових координатах має за такої домовленості вигляд $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$ (вимога $A \neq 0$ тепер не потрібна).

22.2. Поняття моногенності та аналітичності функції. Умови Коші-Рімана

Уведемо одне з основних понять теорії функцій комплексної змінної — означення аналітичної функції і визначимо необхідні та достатні умови аналітичності.

Означення 22.2.1. Нехай в області G задана функція f і $z_0 \in G$:

а) функцію f називають *диференційовною*, або *моногенною, у точці* z_0, якщо вона має скінченну похідну $f'(z_0)$, і *диференційовною (моногенною) в області* G, якщо вона моногенна в кожній точці цієї області;

б) якщо функція f в деякому околі точки z_0 має неперервну похідну, то її називають *аналітичною в точці* z_0. Якщо f аналітична в кожній точці області G, то її називають *аналітичною в* G;

в) функцію f називають *аналітичною в замкненій області* $\overline{G}$, якщо вона аналітична в деякій області D, яка містить $\overline{G}$;

г) визначену в околі точки ∞ функцію f називають *аналітичною в* ∞, якщо функція $g(z) = f(1/z)$ аналітична в точці $z = 0$.

Означення 22.2.2. Аналітичну в усій площині $\mathbb{C}$ функцію називають *цілою* функцією.

Вправа 22.2.1. *Довести, що функція $f(z) = |z|^2$ моногенна в точці $z_0 = 0$, але не аналітична в цій точці.*

Очевидно, що з аналітичності функції f в області G випливає її моногенність у цій області. Можна довести, що справджується також обернене твердження, яке ми наводимо без доведення.

Теорема 22.2.1 (теорема Гурса). *Якщо функція f моногенна в області G, то f аналітична в G.*

Наведена нижче теорема дає необхідні та достатні умови моногенності функції.

Теорема 22.2.2. *Нехай в околі точки z_0 задана функція $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, а функції u і v мають у цьому околі неперервні часткові похідні. Тоді необхідною і достатньою умовою моногенності функції f у точці z_0 є виконання в цій точці таких умов Коші-Рімана:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{22.2}$$

Доведення. Якщо f моногенна в z_0, то

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0), \tag{22.3}$$

як би до точки z_0 не наближатися. Спочатку наближатимемося до z_0 по горизонтальній прямій $\{z : \operatorname{Im} z = y_0\}$; тоді $z = x + iy_0$, $z - z_0 = x - x_0$ і

$$f'(z_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{u(x,y_0) + iv(x,y_0) - u(x_0,y_0) - iv(x_0,y_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x,y_0) - u(x_0,y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \to x_0} \frac{v(x,y_0) - v(x_0,y_0)}{x - x_0} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \tag{22.4}$$

(тут і надалі частинні похідні взяті в точці z_0).

Якщо наближатимемося до z_0 по вертикальній прямій $\{z : \operatorname{Re} z = x_0\}$, то $z - z_0 = i(y - y_0)$ і подібно отримаємо рівність

$$f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{22.5}$$

Прирівнюючи праві сторони рівностей (22.4) і (22.5), одержимо (22.2). Необхідність умов Коші-Рімана доведена.

Зазначимо, що одночасно виведено формули для обчислення похідної функції f (див. (22.4), (22.5)). Для доведення необхідності неперервність частинних похідних не використовували; можна не вимагати навіть їхнього існування в точці z_0.

Доведемо тепер достатність умов Коші-Рімана. З неперервності частинних похідних за відомою теоремою з математичного аналізу для повних приростів функцій u і v матимемо:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}), \quad \Delta x \to 0, \ \Delta y \to 0;$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}), \quad \Delta x \to 0, \ \Delta y \to 0.$$

Оскільки $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, то $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = |\Delta z|$, і, використовуючи умови Коші-Рімана (22.2), при $\Delta z \to 0$ маємо

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + o(|\Delta z|) = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y + o(\Delta z);$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + o(|\Delta z|) = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta y + o(\Delta z).$$

Оскільки $1/i = -i$, а $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$, то

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y)\right) + o(1) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + o(1) \quad (\Delta z \to 0).$$

З останньої рівності випливає існування границі (22.3), тобто f моногенна в z_0. Теорему доведено. □

Теорема 22.2.3. *Нехай функція $f = u + iv$ задана в області G і функції u і v мають в G неперервні частинні похідні. Для того, щоб f була аналітичною в G, необхідно і достатньо, щоб в G виконувалися умови Коші-Рімана.*

Доведення. Якщо функція f аналітична в області G, то вона моногенна в G, і за теоремою 22.2.2 виконуються умови Коші-Рімана. Навпаки, з виконання умов Коші-Рімана випливає, що f моногенна в кожній точці з G, тобто в кожній точці з G існує похідна $f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$. Однак функції $\frac{\partial u}{\partial x}$ і $\frac{\partial v}{\partial x}$ неперервні в G. Тому f' неперервна в G, тобто функція f аналітична в G. □

Наслідок 22.2.1. *Якщо функція f аналітична в області G і $(\forall z \in G)\{\operatorname{Im} f(z) = K_1\}$, то $(\forall z \in G)\{f(z) = K_2\}$, $K_1 = \text{const}$, $K_2 = \text{const}$.*

Доведення. Справді, якщо $v(x, y) \equiv K_1$, то з (22.2) випливає, що $u(x, y) \equiv \text{const}$. □

Вправа 22.2.2. *Довести, що функції $f(z) = z$, $f(z) = z^2$ аналітичні в $\mathbb{C}$, причому $z' = 1$, $(z^2)' = 2z$.*

22.3. Елементарні аналітичні функції

Вивчимо відображення, які виконують за допомогою аналітичних функцій. Для цих відображень правильний **принцип збереження області**: *якщо функція $f \not\equiv \text{const}$ аналітична в області G, то образом цієї області в разі відображення f є область.*

Кажуть, що відображення f має *сталий лінійний розтяг у точці* z_0, а число A називають *коефіцієнтом розтягу* f, якщо

$$\lim_{z\to z_0} \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|} = A > 0.$$

Якщо в разі відображення зберігається значення і напрям відліку кутів, то кажуть, що відображення має властивість *консерватизму кутів.*

Означення 22.3.1. Якщо функція f аналітична в точці $z_0 \in \mathbb{C}$ і $f'(z_0) \neq 0$, то кажуть, що відображення f *конформне в* z_0. Відображення називають *конформним у* $G \subset \mathbb{C}$, якщо воно конформне в кожній точці області G.

Неважко показати, що конформні відображення є відображеннями локальної подібності, тобто ці відображення в кожній точці мають сталий лінійний розтяг та властивість консерватизму кутів.

Досі ми говорили про конформні відображення обмеженої області на обмежену. Проте можна дати поняття конформного відображення околу точки z_0 на окіл точки w_0, якщо принаймні одна з них є ∞.

А. *Якщо* $z_0 = \infty$ *і* $w_0 = f(z_0) \neq \infty$, то відображення, виконуване функцією f, називають *конформним у* z_0, якщо в $z = 0$ є конформним відображення, виконуване функцією $w = f(1/z)$.

Б. *Якщо* $z_0 \neq \infty$ *і* $w_0 = f(z_0) = \infty$, то відображення, виконуване функіцією f, називається *конформним в* z_0, якщо в точці z_0 є конформним відображення, виконуване функцією $w = 1/f(z)$.

В. *Якщо,* $z_0 = \infty$ *і* $w_0 = f(z_0) = \infty$, то відображення, виконуване функцією f, називають *конформним в* z_0, якщо в точці $z = 0$ є конформним відображення, виконуване функцією $w = 1/f(1/z)$.

Основною теоремою про конформні відображення є така теорема Рімана, доведення якої досить складне, і тут не наведене.

Теорема 22.3.1 (теорема Рімана). *Нехай G і D — дві однозв'язні області з $\mathbb{C}$, відмінні від $\mathbb{C}$. Нехай $z_0 \in G$, $w_0 \in D$ і α — довільне число, $-\pi \leq \alpha < \pi$. Тоді існує єдина функція f, яка виконує конформне відображення $G \to D$ так, що $w_0 = f(z_0)$ і* $\arg f'(z_0) = \alpha$.

Означення 22.3.2. Функцію f називають *однолистою в області* G, якщо

$$(\forall z_1 \in G)(\forall z_2 \in G)\{z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)\},$$

тобто відображення, виконуване функцією f, є ін'єктивним.

Вправа 22.3.1. *Використовуючи принцип збереження області, довести* **принцип максимуму модуля**: *Якщо функція* $f \not\equiv \text{const}$ *аналітична в області* G, *то її модуль не набуває в* G *найбільшого значення.*

Ціла лінійна функція. *Цілою лінійною, або лінійною,* називають функцію $w = az + b$, де $a \neq 0$.

Обернена до цієї функції є теж лінійною, і оскільки $w' = a \neq 0$, то ціла лінійна функція конформно й однолисто відображає $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$.

Дві множини називають *подібними*, якщо їх можна сумістити, використовуючи тільки перетворення гомотетії (розтягу), повороту та паралельного перенесення (зсуву).

Теорема 22.3.2. *Ціла лінійна функція відображає кожну множину в подібну до себе, і навпаки, дві подібні множини можна однолисто відобразити одну в одну за допомогою цілої лінійної функції.*

Доведення. Нехай $a = |a|(\cos\ \alpha + i\sin\ \alpha)$. Функцію $w = az + b$ можемо розуміти як суперпозицію функцій $w_1 = |a|z$, $w_2 = w_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ і $w = w_2 + b$. Для функції $w_1 = |a|z$ маємо $|w_1| = |a| \cdot |z|$ і $\operatorname{Arg} w_1 = \operatorname{Arg}|a| + \operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg} z$. Отже, якщо точка z є на якомусь промені, що виходить з початку координат, то точка w_1 теж буде на цьому промені. Зміниться тільки в $|a|$ разів відстань до початку координат, тобто маємо розтяг. Далі, якщо $w_2 = w_1(\cos\ \alpha + i\sin\ \alpha)$, то $|w_2| = |w_1|$ і $\operatorname{Arg} w_2 = \operatorname{Arg} w_1 + \operatorname{Arg}(\cos\ \alpha + i\sin\ \alpha) = \alpha + \operatorname{Arg}\ w_1$, тобто всі точки повертаються на кут α. Нарешті, функція $w = w_2 + b$ виконує паралельне перенесення на вектор b.

Навпаки, довільні перетворення розтягу, повороту та зсуву виконувані цілими лінійними функціями. Тому дві задані подібні множини можна відобразити суперпозицією цілих лінійних функцій, тобто цілою лінійною функцією. Теорему 22.3.2 доведено. □

Степенева функція з натуральним показником. Так називають функцію $w = z^n = z \cdot z \cdot \ldots \cdot z$ (n множників), $n \geq 2$. Використовуючи означення похідної або формулу для похідної добутку, легко показати, що $w' = nz^{n-1}$. Звідси випливає, що $w = z^n$ — ціла функція і виконує відображення, конформне в кожній точці області $\{z : 0 < |z| < +\infty\}$.

Знайдемо області однолистості степеневої функції. Для цього треба знайти такі області G, для яких $(\forall z_1 \in G)(\forall z_2 \in G)\{z_1 \neq z_2 \Rightarrow z_1^n \neq z_2^n\}$. Оскільки

$$(z_1^n = z_2^n) \equiv (|z_1^n| = |z_2^n|\ \wedge\ \operatorname{Arg} z_1^n = \operatorname{Arg} z_2^n) \equiv (|z_1| = |z_2|\ \wedge\ n\operatorname{Arg} z_1 = n\operatorname{Arg} z_2) \equiv$$

$$\equiv (|z_1| = |z_2| \wedge n\arg z_1 = n\,arg\, z_2 + 2k\pi) \equiv (|z_1| = |z_2| \wedge \arg z_1 = \arg z_2 + 2k\pi/n),\ k \in \mathbb{Z},$$

то область G є областю однолистості для $w = z^n$, якщо вона не містить жодної пари точок з однаковими модулями і кратною $2\pi/n$ різницею аргументів. Зокрема, функція $w = z^2$ є однолистою в кожній півплощині, край якої проходить через початок координат (рис. 22.1, *б*).

Виведемо тепер формули переходу для відображення $w = z^n$. Нехай $w = \rho\, e^{i\theta}$, $z = r\, e^{i\varphi}$. Оскільки $\rho(\cos\,\theta + i \sin\,\theta) = r^n(\cos\,n\varphi + i \sin\,n\varphi)$, то одержимо

$$\rho = r^n, \quad \theta = n\varphi. \tag{22.6}$$

За допомогою формул переходу (22.6) легко довести, що образом області однолистості $\{z : \alpha < \arg z < \alpha + \pi/n\}$ (рис. 22.1, *а*), буде вся w-площина з розрізом по променю $\{w : \operatorname{Arg} w = n\alpha\}$ (рис. 22.2, *а*), а образом верхньої півплощини у разі відображення $w = z^2$ — вся w-площина з розрізом по додатній дійсній півосі (рис. 22.2, *б*).

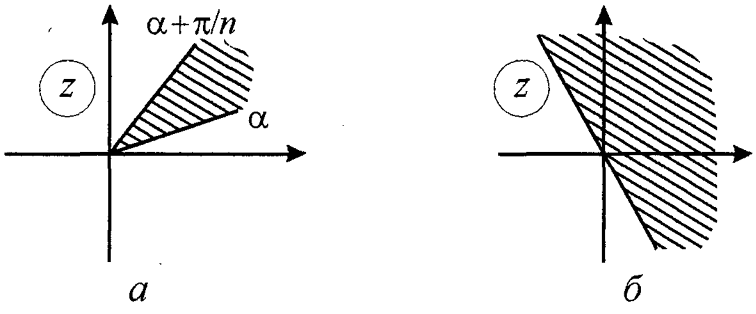


Рис. 22.1

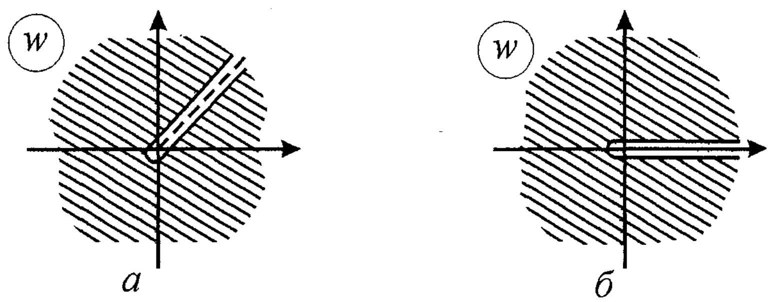


Рис. 22.2

Функцію $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ називають *многочленом.* Оскільки многочлен є суперпозицією лінійних і степеневих функцій, то він є цілою функцією. Функцію $f(z) = P(z)/Q(z)$, де P і Q — многочлени, називають *раціональною* (*дробово-раціональною*) функцією. Відображення, виконувані раціональними функціями, вивчимо тільки для окремих їхніх видів. Однією з найважливіших є функція Жуковського.

Функція Жуковського. Функцію $J(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ називають *функцією Жуковського.* Очевидно, що $J'(z) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{z^2}\right)$. Тому функція J є аналітичною в області $\{z : 0 < |z| < +\infty\}$ і відображення, виконуване функцією J, є конформним усюди в $\mathbb{C}$, за винятком точок $z = -1$ і $z = +1$.

Знайдемо області однолистості функції Жуковського. Припустимо, що точки $z_1 \neq z_2$ відображаються функцією J в одну точку. Тоді

$$(J(z_1) = J(z_2)) \equiv \left((z_1 - z_2)\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right) = 0\right) \equiv (z_1 z_2 = 1).$$

Отже, область G є областю однолистості для J тоді і тільки тоді, коли в ній немає двох точок $z_1 \neq z_2$ таких, що $z_1 z_2 = 1$. Звідси випливає, що областями однолистості функції J є, наприклад, області: а) $\{z : |z| < 1\}$, б) $\{z : |z| > 1\}$, в) $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, г) $\{z : \operatorname{Im} z < 0\}$ (рис. 22.3). Справді, якщо z_1 і z_2 — дві точки з внутрішності одиничного кола, то $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$ і $|z_1 z_2| < 1$. Для зовнішності одиничного кола аналогічно маємо $|z_1 z_2| > 1$. Якщо ж z_1 і z_2 — дві різні точки з верхньої півплощини, то $\arg z_j \in (0, \pi), j = 1, 2$, і $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) \neq 2\pi k$, тобто знову $z_1 z_2 \neq 1$. Для нижньої півплощини міркування аналогічні.

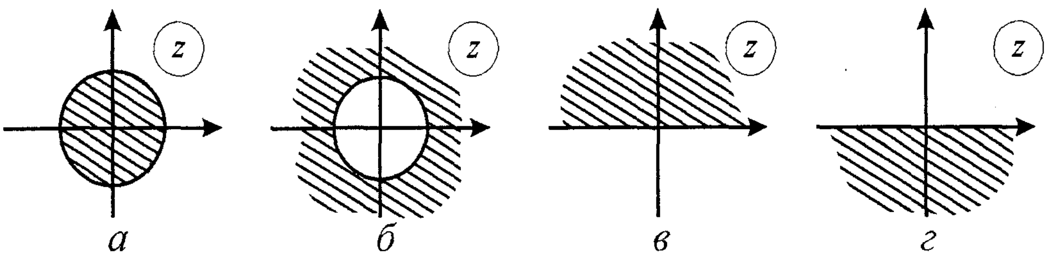


Рис. 22.3

Дослідимо, на що відображаються ці області однолистості. Оскільки

$$u + iv = \frac{1}{2}\left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \frac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi\right),$$

то для функції Жуковського маємо такі формули переходу:

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi; \quad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi. \tag{22.7}$$

Для того, щоб знайти образ зовнішності одиничного кола, зафіксуємо число $r_0 > 1$ і розглянемо коло $\{z\colon |z| = r_0\}$. Позначимо $a = \dfrac{1}{2}\left(r_0 + \dfrac{1}{r_0}\right)$ і $b = \dfrac{1}{2}\left(r_0 - \dfrac{1}{r_0}\right)$;

тоді з (22.7) випливає, що $u = a\cos\varphi$, $v = b\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Отримано параметричне рівняння еліпса, яке можна записати у вигляді

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1. \tag{22.8}$$

Оскільки $c^2 = a^2 - b^2 = 1$, то з (22.8) бачимо, що образами концентричних кіл з центром у початку координат і радіусом $r_0 > 1$ є еліпси з фокусами у точках ± 1, причому з огляду на рівність $\operatorname{sgn} v = \operatorname{sgn}\sin\varphi$ верхнє півколо переходить у верхній півеліпс. Коли r_0 наближається до одиниці, то еліпс наближається до відрізка $[-1, 1]$.

Отже, функція Жуковського відображає зовнішність одиничного кола на всю площину з розрізом уздовж відрізка $[-1, 1]$ (рис. 22.4, *а*). Край цієї області — коло $\{z : |z| = 1\}$ — переходить у відрізок $[-1, 1]$, який обходиться двічі, причому верхнє півколо переходить у верхній, а нижнє коло у нижній берег розрізу. Область $\{z : |z| > 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ переходить у верхню півплощину.

Аналогічно можна довести, що функція Жуковського виконує конформне і однолисте відображення внутрішності одиничного кола на всю площину з розрізом вздовж відрізка $[-1, 1]$, причому край області — коло $\{z : |z| = 1\}$ — переходить у цей відрізок, а область $\{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ переходить у нижню півплощину. Це можна було б також показати, використовуючи очевидну рівність $J(z) = J\left(\dfrac{1}{z}\right)$.

Для того, щоб знайти образ верхньої півплощини, запишемо

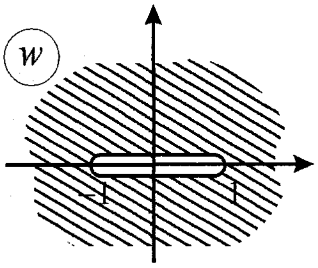
$$\{z : \operatorname{Im} z > 0\} = \{z : \operatorname{Im} z > 0, |z| > 1\} \cup \{z : \operatorname{Im} z > 0, |z| < 1\} \cup \{z : \operatorname{Im} z > 0, |z| = 1\}$$

і відображатимемо кожну з множин правої частини. Оскільки область $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0, |z| > 1\}$ переходить у верхню півплощину, область $\{z : \operatorname{Im} z > 0,\ |z| < 1\}$ — у нижню півплощину, а півколо $\{z :\ \operatorname{Im} z > 0,\ |z| = 1\}$ — у відрізок $[-1, 1]$, то образом верхньої півплощини є вся площина з розрізами вздовж променів $[1, +\infty)$ і $[-1, -\infty)$, які лежать на дійсній осі (рис. 22.4, *б*).

Знайдемо ще образи променів, що виходять з початку координат. Розглянемо спочатку промінь $\{z : \arg z = \varphi_0\}$, $\varphi_0 \ne \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Вилучимо з (22.7) параметр r при $\varphi = \varphi_0$, матимемо

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi_0} - \frac{v^2}{\sin^2\varphi_0} = 1,$$

тобто наш промінь переходить у гіперболу з фокусами в точках $z = 1$ чи $z = -1$ (глибше дослідження можете виконати самостійно). Промінь $\{z\colon \arg z = 0\}$ відображається (небієктивно) у промінь $\{w : |w| > 1, \arg w = 0\}$, промінь $\{z\colon \arg z = -\pi\}$ — у промінь $\{w : |w| > 1,\ \arg w = -\pi\}$, а промені $\{z\colon \arg z = \dfrac{\pi}{2}, |z| > 1\}$ і $\{z\colon \arg z = -\dfrac{\pi}{2}, |z| > 1\}$ переходять, відповідно, у промені $\{w : \arg w = \dfrac{\pi}{2}\}$ і $\{w : \arg w = -\dfrac{\pi}{2}\}$.



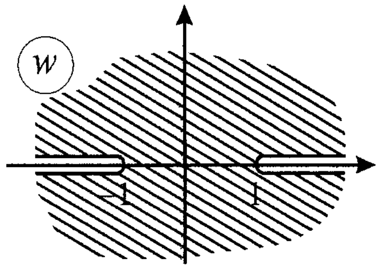


Рис. 22.4

Показникова функція. Функцію $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$ називають *показниковою*. Легко бачити таке: якщо $y = 0$, то $e^z = e^x$, і отримаємо показникову функцію, яку вивчали в курсі дійсного аналізу. З означення випливає, що $|e^z| = e^x > 0$. Отже, $e^z \neq 0$ в $\mathbb{C}$. Далі, $\operatorname{Arg} e^z = \{y + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$. З означення також випливає, що $e^z = e^x e^{iy}$, де $e^{iy} = \cos y + i\sin y$. Оскільки $e^{z+2\pi i} = e^x(\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)) = e^z$, то функція e^z періодична з періодом $2\pi i$.

Для функції $w = e^z$ маємо $u = e^x\cos y$ і $v = e^x\sin y$. Тому, обчислюючи часткові похідні, легко побачити, що вони задовольняють умови Коші-Рімана для всіх $z \in \mathbb{C}$. Отже, e^z — ціла функція. За формулою (22.4) маємо

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x\cos y + ie^x\sin y = e^z \neq 0,$$

тобто функція $w = e^z$ вионує відображення, конформне в $\mathbb{C}$.

Знайдемо області однолистості показникової функції. Оскільки при $z_1 \neq z_2$ виконується

$$(e^{z_1} = e^{z_2}) \equiv (e^{x_1}e^{iy_1} = e^{x_2}e^{iy_2}) \equiv (e^{x_1} = e^{x_2} \wedge y_1 = y_2 + 2\pi k) \equiv$$

$$\equiv (x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 + 2\pi k),\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

то область G є областю однолистості для ϵ^z тоді і тільки тоді, коли в ній немає двох різних точок з однаковими дійсними частинами й уявними частинами, які відрізняються на число, кратне 2π. Зокрема, кожна горизонтальна смуга завширшки 2π, тобто $\{z : \alpha < \operatorname{Im} z < \alpha + 2\pi\}$ буде областю однолистості функції ϵ^z.

Неважко показати, що формули переходу для функції e^z мають вигляд

$$\rho = e^x,\ \theta = y.$$

Тому образом смуги $\{z : \alpha < \operatorname{Im} z < \alpha + 2\pi\}$ є область $\{w : \alpha < \arg w < \alpha + 2\pi\}$, тобто площина з розрізом уздовж променя $\{w : \arg w = \alpha\}$ (рис. 22.5).

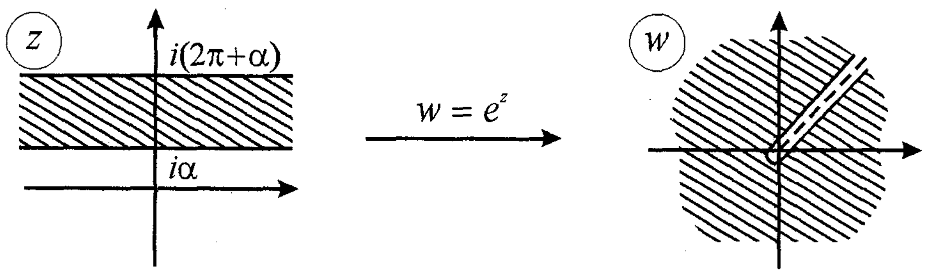


Рис. 22.5

З означення показникової функції випливає, що комплексне число, записане в тригонометричній формі $z = r(\cos\ \varphi + i\sin\ \varphi)$, можна коротше записати у так званій показниковій формі $z = re^{i\varphi}$.

Тригонометричні та гіперболічні функції. Розглянемо функції

$$\sin\ z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \quad \cos\ z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

та

$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z}), \quad \operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z}),$$

які називають, відповідно, *тригонометричними* і *гіперболічними* функціями. Якщо $z = x$, то згідно з означенням маємо

$$\sin\ z = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{1}{2i}(\cos\ x + i\sin\ x - \cos\ x + i\sin\ x) = \sin\ x$$

й аналогічно $\cos z = \cos x$, тобто одержуємо функції, які вивчають ще в середній школі. Тригонометричні та гіперболічні функції $\sin z, \cos z, \operatorname{sh} z$ і $\operatorname{ch} z$ є цілими функціями як суми суперпозицій лінійної і показникової функцій. З періодичності e^z випливає, що функції $\sin\ z$ і $\cos\ z$ є періодичними з періодом 2π, а функції $\operatorname{sh} z$ і $\operatorname{ch} z$ є періодичними з періодом $2\pi i$. З означень також випливає, що $\cos\ z$ і $\operatorname{ch} z$ є парними функціями, а $\sin\ z$ і $\operatorname{sh} z$ — непарними. Усі формули, відомі зі шкільного курсу тригонометрії, залишаються правильними і в комплексній площині.

Якщо тригонометричні функції $\cos\ x$ і $\sin\ x$ дійсної змінної є обмеженими, то в комплексній площині функції $\cos\ z$ і $\sin\ z$ є необмеженими. Справді, $|\cos\ iy| = \operatorname{ch} y \to +\infty (y \to \infty)$ і $|\sin\ iy| = |\operatorname{sh} y| \to +\infty (y \to \infty)$.

Для знаходження областей однолистості тригонометричних і гіперболічних функцій можемо використовувати ті самі методи, що й раніше. Для відшукання образів областей однолистості можна вивести формули переходу. Наприклад, для функції $w = \sin z$ такими будуть $u = \sin x \operatorname{ch} y$ і $v = \cos x \operatorname{sh} y$. Проте, знаючи вже властивості функції Жуковського, показникової та лінійної функцій, можемо вчинити значно простіше. Наприклад, оскільки

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{iz}}{i} + \frac{i}{e^{iz}}\right) = J\left(\frac{e^{iz}}{i}\right),$$

то функцію $w = \sin\ z$ можна розглядати як суперпозицію функцій: $w = J(w_3)$, $w_3 = \frac{1}{i}w_2$, $w_2 = e^{w_1}$, $w_1 = iz$. Якщо виконати ці відомі нам відображення, то побачимо, що образом вертикальної смуги $\{z : |\operatorname{Re} z| < \pi/2\}$ є вся площина з розрізами вздовж променів $[1, +\infty)$ та $[-1, -\infty)$, а образом верхньої півсмуги $\{z : |\operatorname{Re} z| < \pi/2,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ — верхня півплощина (рис. 22.6):

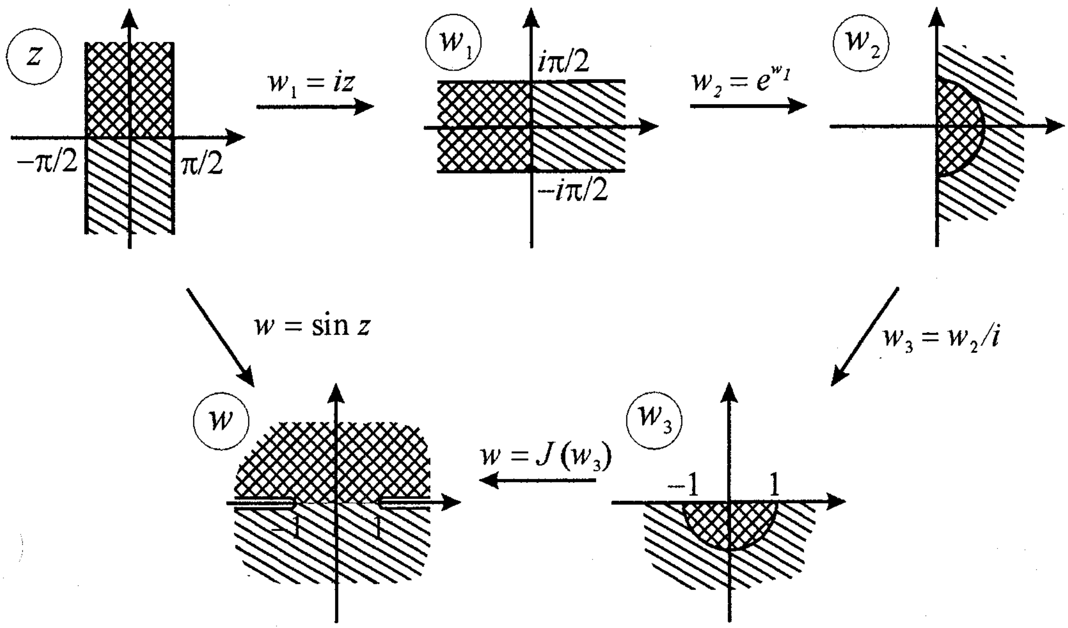


Рис. 22.6

Оскільки $\cos\ z = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$, то функцію $\cos z$ можна розглядати як суперпозицію функцій $\sin\ z$ і лінійної функції і цю обставину використовувати для знаходження образів відповідних множин.

Зазначимо: з наведених міркувань випливає, що функція $\sin z$ буде однолистою в смузі $\{z : |\operatorname{Re} z| < \pi/2\}$, а функція $\cos z$ є однолистою в смузі $\{z : 0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$.

Тригонометричні функції $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ і гіперболічні функції $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ визначають так:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z},\ \operatorname{ctg} z = \frac{\cos\ z}{\sin\ z},\ \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z},\ \operatorname{ctg} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Легко бачити, що ці функції не є цілими.

Дробово-лінійна функція. Дробово-лінійною називають функцію

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Очевидно, що обернена до дробово-лінійної функції є дробово-лінійною, суперпозиція дробово-лінійних функцій — дробово-лінійна. Якщо в означенні приймемо $c = 0$, то одержимо цілу лінійну функцію, яку вже вивчили. Тому надалі вважатимемо, що $c \neq 0$.

Теорема 22.3.3. *Дробово-лінійна функція конформно та однолисто відображає* $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$.

Доведення. Однолистість випливає з однозначності оберненої функції. Доведемо конформність. Якщо $z \neq -d/c, \infty$, то $w' = (ad - bc)(cz + d)^{-2} \neq 0$. Треба ще розглянути точки $z = -d/c$ та $z = \infty$. Для доведення конформності в точці $z = -d/c$, потрібно розглянути функцію $w = (cz + d)/(az + b)$, для якої $w'|_{z=-d/c} = (cd - ad)(az + b)^{-2}|_{z=-d/c} = c^2/(bc - ad) \neq 0$, що свідчить про конформність у точці $z = -d/c$. Якщо $z = \infty$, то розглядаємо функцію $w = (a/z + b)/(c/z + d) = (bz + a)/(dz + c)$, для якої $w'|_{z=0} = (bc - ad)/(c + dz)^2|_{z=0} \neq 0$, так що маємо конформність і в точці $z = \infty$. □

Теорема 22.3.4 (про кругову властивість). *Дробово-лінійна функція відображає коло в коло, круг у круг.*

Доведення. Оскільки

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}\left(1 + \frac{b/a - d/c}{z + d/c}\right),$$

то дробово-лінійна функція є суперпозицією цілих лінійних функцій та функції $w = 1/z$. Оскільки лінійна функція відображає коло в коло, круг у круг, бо ці множини подібні, то залишилось довести кругову властивість для функції $w = 1/z$. Нехай у розширеній z-площині задано замкнений круг $A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D \leq 0$. Оскільки $x + iy = 1/(u + iv)$, то $x = u/(u^2 + v^2)$ і $y = -v/(u^2 + v^2)$. Підставляючи ці формули в останню нерівність, маємо

$$A(\frac{u^2}{(u^2+v^2)} + \frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}) + \frac{Bu}{u^2+v^2} - \frac{Cv}{u^2+v^2} + D \leq 0,$$

звідки $D(u^2+v^2)+Bu-Cv+A \leq 0$, тобто отримали замкнений круг у розширеній w-площині. □

Теорема 22.3.5 (про три точки). *Нехай у розширеній z-площині задано три різні точки z_1, z_2, z_3, а в розширеній w-площині — три різні точки w_1, w_2, w_3. Тоді існує єдина дробово-лінійна функція L така, що $L(z_k) = w_k$ $(k = 1, 2, 3)$.*

Доведення. Якщо всі точки скінченні, то запишемо рівність

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}, \tag{22.9}$$

яка неявно задає шукану дробово-лінійну функцію, оскільки безпосередньою перевіркою легко переконатись, що точка z_k переходить у точку w_k $(k=1,2,3)$. Єдиність доводять від супротивного. Припустимо, що, крім (22.9), існує функція $w=(az+b)/(cz+d)$, яка має властивість, зазначену у формулюванні теореми. Тоді можемо записати $w_k=(az_k+b)/(cz_k+d)$, $k=1,2,3$. Легко перевірити таке: якщо ці значення $(w,w_1,w_2$ і $w_3)$ підставити в (22.7), то отримаємо тотожність. Ці елементарні операції залишаємо для самостійного аналізу.

Якщо ж одне з чисел z_1,z_2,z_3 чи з чисел w_1,w_2,w_3 дорівнює ∞, то в (22.9) чисельник і знаменник, у якому є це число, опускаємо. Наприклад, якщо $z_1\to w_1$, $z_2\to\infty$ і $\infty\to w_3$, то (22.9) набуває вигляду

$$\frac{w-w_1}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}.$$

Далі доведення таке, як і раніше. □

22.4. Елементарні багатозначні функції

Нехай E — деяка множина з $\mathbb{C}$. Якщо кожному $z\in E$ поставлено у відповідність деяку множину $F(z)$ комплексних чисел, то кажуть, що на E задана *багатозначна функція* F. Очевидно таке: якщо для кожного $z\in E$ множина $f(z)$ складається з одного елемента, то з наведеного означення одержимо означення функції $f\colon E\to\mathbb{C}$. З огляду на це функцію часто називають *однозначною функцією*. Зазначимо, що багатозначна функція не є числовою функцією, бо числу поставлена у відповідність множина. Прикладом багатозначної функції може слугувати $\operatorname{Arg} z$, $0<|z|<\infty$. Оскільки $\operatorname{Arg} z=\{\arg z+2\pi k\}$, $k\in\mathbb{Z}$, то $\operatorname{Arg} z$ є нескінченнозначною функцією.

Означення 22.4.1. Нехай в області G задана багатозначна функція F. Функцію f називають *однозначною гілкою* багатозначної функції F в області $D\subset G$, якщо f неперервна в D і $(\forall z\in D)\{f(z)\in F(z)\}$.

Знову розглянемо багатозначну в області $G=\{z:|z|<+\infty\}$ функцію $\operatorname{Arg} z$. За область D візьмемо всю z-площину з розрізом уздовж від'ємної дійсної півосі і розглянемо в D функцію $\arg z$. Оскільки $\arg z\in\operatorname{Arg} z$, то для того, щоб показати, що $\arg z$ є однозначною гілкою багатозначної функції $\operatorname{Arg} z$ в області D, треба довести неперервність функції $\arg z$ в D. Для цього зафіксуємо деяку точку $z_0\in D$. Нехай $K_r=\{z:|z-z_0|<r\}$ — круг, який лежить у D і, отже, не перетинається

з від'ємною дійсною піввіссю. Маємо $(\forall z \in K_r)\{|\arg z - \arg z_0| = \theta < \frac{\pi}{2}\}$ і за теоремою косинусів $|z - z_0|^2 = |z|^2 + |z_0|^2 - 2|z||z_0|\cos\theta$. Тоді

$$\cos\theta = \frac{-|z - z_0|^2 + |z|^2 + |z_0|^2}{2|z||z_0|} \to 1 \quad (z \to z_0),$$

тобто $\theta \to 0$ при $z \to z_0$. Отже, функція $\arg z$ є однозначною гілкою багатозначної функції $\operatorname{Arg} z$ в області D.

Наступна теорема, яку ми наводимо без доведення, свідчить про можливість вибору однозначної гілки багатозначної функції $\operatorname{Arg} z$ в області.

Теорема 22.4.1. *Для того, щоб в області G можна було вибрати однозначну гілку аргументу, необхідно і достатньо, щоб існувала однозв'язна область D така, що $G \subset D$ і $0 \notin D$.*

Корінь n-го степеня. Нехай $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. За означенням *коренем n-го степеня* називають багатозначну функцію $w = \sqrt[n]{z}$, $z \in \mathbb{C}$, яка кожному $z \in \mathbb{C}$ ставить у відповідність множину точок $w \in \mathbb{C}$ таких, що $w^n = z$.

Оскільки за формулою Муавра

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{Arg\, z}{n} + i\sin\frac{Arg\, z}{n}\right),$$

то вибрати однозначну гілку $\sqrt[n]{z}$ можна там, де можна вибрати однозначну гілку аргументу, тобто в кожній однозв'язній області, яка не містить початку координат. Нехай G — така область і в ній вибрано однозначну гілку $(\arg z)$ аргументу. Всі інші гілки аргументу можемо записати у вигляді $(\arg z) + 2\pi k$, $k \in Z \setminus \{0\}$. Тому однозначними гілками багатозначної функції $\sqrt[n]{z}$ є функції

$$(\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{(\arg z) + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{(\arg z) + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Розглянемо одну з них — $w = (\sqrt[n]{z})_k$. Це однозначна функція, обернена до якої є аналітична в усій w-площині функція $z = w^n$. Тому при $z \neq 0$ можемо знайти похідну

$$\frac{d}{dz}(\sqrt[n]{z})_k = \frac{dw}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{dw}} = \frac{1}{nw^{n-1}} = \frac{w}{nw^n} = \frac{1}{nz}(\sqrt[n]{z})_k,$$

тобто $(\sqrt[n]{z})_k$ — аналітична функція в G, яка виконує конформне відображення. Зазначимо, що брати похідну таким способом $(\sqrt[n]{z})' = (z^{1/n})' = (1/n)\ z^{1/n-1}$ не можна.

Формули переходу для функції $w = (\sqrt[n]{z})_k$ мають вигляд

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}. \tag{22.10}$$

Їх виводять аналогічно до формул переходу для степеневої функції з натуральним показником. За допомогою формул (22.10) неважко показати, що площина з розрізом уздовж додатної дійсної півосі переходить у разі відображення $w = (\sqrt{z})_0$ у верхню півплощину. З формул Муавра випливає рівність $(\sqrt{z})_1 = -(\sqrt{z})_0$.

Часто гілку кореня задають, фіксуючи певне його значення в заданій точці z. Тоді перш ніж використовувати формули (22.10), визначають число k. Припустимо, наприклад, що треба знайти образ області $\{z : 0 < \arg z < 2\pi\}$ у разі відображення гілкою $\sqrt{z}$ такою, що $\sqrt{z}|_{z=-1} = -i$. Нехай $0 < \varphi < 2\pi$. Тоді $\varphi = \pi$ (для $z = -1$) відповідає $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$ (для $w = -i$). Підставляючи ці значення в (22.10), одержимо $k = -1$. Формули (22.10) набувають вигляду $\rho = \sqrt{r}, \quad \theta = \dfrac{\varphi}{2} - \pi$ і шуканим образом є нижня півплощина.

Логарифм. *Логарифмом* називають багатозначну функцію $w = \operatorname{Ln} z$, яка кожному $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ставить у відповідність множину точок $w \in \mathbb{C}$ таких, що $e^w = z$. Оскільки $e^w \neq 0$, то $\operatorname{Ln} 0$ не існує. Запишемо $z = re^{i\varphi}$ та $w = u + iv$. Тоді

$$(e^{u+iv} = re^{i\varphi}) \equiv (e^u = r \wedge e^{iv} = e^{i\varphi}) \equiv (u = \ln r \wedge v = \varphi + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

тобто

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z. \tag{22.11}$$

Отже, однозначну гілку логарифма можна вибрати там, де можна вибрати однозначну гілку аргументу, тобто в кожній однозв'язній області, яка не містить початку координат. Функцію $\ln z = \ln|z| + i \arg z$ називають *головним значенням логарифма*. Усі інші гілки в області $\mathbb{C} \setminus \{z\colon z \le 0\}$ мають вигляд $(\ln z)_k = \ln|z| + i \arg z + 2k\pi i$. В області $\mathbb{C} \setminus \{z\colon z \ge 0\}$ можна вибрати однозначні гілки $(\ln z)_k = \ln|z| + i\arg_0 z + 2k\pi i$.

Покажемо, що всі гілки логарифма є аналітичними функціями. Нехай $w = (\ln z)_k$. Оберненою до цієї функції є ціла функція $z = e^w$, тому

$$\frac{d}{dz}(\ln z)_k = \frac{dw}{dz} = \frac{1}{\dfrac{dz}{dw}} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}.$$

Бачимо, що значення похідної не залежить від вибору гілки. Утім, це зрозуміло і без розрахунків, бо в області, де можна вибрати однозначну гілку логарифма, решта гілок відрізняються від вибраної сталими доданками. Цей факт записують у вигляді $(\operatorname{Ln} z)' = 1/z$. Кожна однозначна гілка логарифма виконує конформне та однолисте відображення. З (22.11) випливає, що для функції $w = (\ln z)_k$ формули переходу мають вигляд $u = \ln r, \quad v = \varphi + 2\pi k$. Перш ніж використовувати формули переходу, визначають число $k \in \mathbb{Z}$, використовуючи такий самий метод, як і для кореня.

Інші елементарні багатозначні функції. Через J^{-1} позначимо багатозначну функцію, яка кожному $z \in \mathbb{C}$ ставить у відповідність множину точок $w \in \mathbb{C}$ таких, що $J(w) = z$, де J — функція Жуковського. Оскільки $J(w) = \frac{1}{2}(w + \frac{1}{w})$, то, розв'язуючи квадратне рівняння, отримаємо $J^{-1}(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$, тобто J^{-1} — двозначна функція. Для знаходження образів областей у разі відображення однією з гілок багатозначної функції J^{-1} можна використовувати результати, наведені в 22.2.

Арксинусом називають багатозначну функцію $w = \operatorname{Arcsin} z$, яка кожному z ставить у відповідність множину точок $w \in \mathbb{C}$ таких, що $\sin w = z$. Розв'яжемо останнє рівняння, тобто рівняння $e^{iw} - e^{-iw} = 2iz$, отримаємо $w = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$. *Головним значенням* $\arcsin z$ називають ту гілку арксинуса, яку вибирають в області $G = \mathbb{C} \setminus \{z : \operatorname{Im} z = 0, \ |\operatorname{Re} z| \geq 1\}$ так, щоб $\sqrt{1 - z^2}|_{z=0} = 1$ і $\operatorname{Ln} 1 = 0$. Ця гілка однолисто відображає область G на смугу $\{w : |\operatorname{Re} z| < \frac{\pi}{2}\}$ (див. 22.2). Легко бачити, що функція $w = \arcsin z$ відображає однолисто верхню півплощину на півсмугу $\{w : \operatorname{Im} w > 0, \ |\operatorname{Re} w| < \frac{\pi}{2}\}$.

Нехай $\alpha \in \mathbb{C}$. *Степеневою функцією з показником* α називають багатозначну функцію $z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$. Бачимо, що гілку багатозначної функції z^α можна вибрати там, де можна вибрати однозначну гілку логарифма, а, отже, там, де можна вибрати однозначну гілку аргументу.

Теорема 22.4.2. *Для того, щоб z^α була однозначною функцією, необхідно і достатньо, щоб $\alpha \in \mathbb{Z}$.*

Доведення. Якщо z^α — однозначна функція, то $e^{\alpha \ln z} = z^\alpha = e^{\alpha(\ln z + 2\pi i)}$, звідки випливає, що $e^{2\pi i \alpha} = 1$, тобто $\alpha \in \mathbb{Z}$. Навпаки, якщо $\alpha \in \mathbb{Z}$, то $z^\alpha = e^{\alpha(\ln z + 2\pi i)} = e^{\alpha \ln z}$ і, отже, z^α — однозначна функція. □

Вправа 22.4.1. *Довести, що z^α — скінченнозначна функція тоді і тільки тоді, коли α — раціональне число.*

Використовуючи означення, можна знайти формули переходу для певної гілки багатозначної функції z^α. Таких формул аналізувати не будемо, а зазначимо таке: якщо $\alpha = m/n$ — раціональне число, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ і m/n — нескоротний дріб, то z^α можемо розуміти як суперпозицію $w = w_1^m$ і $w_1 = \sqrt[n]{z}$, а у разі відображення використовувати відомі вже прийоми.

Нарешті, нехай $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. *Показниковою функцією з основою a* називають функцію $a^z = e^{z \ln a}$, де $\ln a$ — головне значення логарифма. Ця функція як суперпозиція показникової і цілої лінійної функції є цілою.

Зазначимо таке: якщо вираз i^i розуміти як i^z при $z = i$, то $e^{i \ln i} = e^{-\pi/2}$, а якщо розуміти як z^i при $z = i$, то $i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i(i\pi/2 + 2\pi i k)} = e^{-\pi/2 - 2\pi k}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

22.5. Визначений інтеграл

Нехай $z = z(t),\ a \le t \le b$ — параметричне зображення деякої кривої C. Зробимо довільне розбиття проміжку $[a, b] : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ і позначимо $z_j = z(t_j)$, а $z = z(t),\ t_j \le t \le t_{j+1}$ — параметричне зображення кривої C_j. Тоді $C = \bigcup\limits_{j=0}^{n-1} C_j$. Таке розбиття кривої позначимо через τ. Число $|\tau| = \max\{|C_j| : 0 \le j \le n-1\}$ називають *діаметром розбиття* τ. Приймемо $\triangle z_j = z_{j+1} - z_j$.

Нехай на C задано функцію f. Виберемо на кожному C_j довільно точку N_j і утворимо інтегральну суму $\sigma(f, \tau) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} f(N_j)\triangle z_j$. Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{|\tau|\to 0} \sigma(f, \tau) = I$, то число I називають *інтегралом від функції f уздовж кривої C*. Існування границі тут означає, що

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall \tau,\ |\tau| < \delta)(\forall N_j \in C_j)\left\{ \Big|\sum_{j=0}^{n-1} f(N_j)\triangle z_j - I\Big| < \varepsilon \right\}.$$

Інтеграл від функції f уздовж кривої C позначають символом

$$I = \int\limits_C f(z)dz. \qquad (22.12)$$

Обчислення визначеного інтеграла (22.12) зводиться до обчислення криволінійних інтегралів другого роду, відомих з курсу дійсного аналізу. Нехай $f = u + iv$, $N_j = (\xi_j, \eta_j)$. Оскільки $\triangle z_j = \triangle x_j + i\triangle y_j$, то

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(N_j)\triangle z_j = \sum_{j=0}^{n-1}(u(\xi_j, \eta_j) + iv(\xi_j, \eta_j))(\triangle x_j + i\triangle y_j) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}(u(\xi_j, \eta_j)\triangle x_j - v(\xi_j, \eta_j)\triangle y_j) + i\sum_{j=0}^{n-1}(u(\xi_j, \eta_j)\triangle y_j + v(\xi_j, \eta_j)\triangle x_j).$$

У правій частині останньої рівності стоять інтегральні суми для інтегралів

$$\int\limits_C u(x, y)dx - v(x, y)dy, \quad \int\limits_C v(x, y)dx + u(x, y)dy. \qquad (22.13)$$

Тому існування обох інтегралів (22.13) є необхідною і достатньою умовою існування інтеграла (22.12). Переходячи до границі, маємо

$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_C u(x, y)dx - v(x, y)dy + i\int\limits_C v(x, y)dx + u(x, y)dy. \qquad (22.14)$$

Безпосередньо з означення або з формули (22.14) випливають такі властивості визначеного інтеграла:

1) $\int\limits_C Kf(z)dz = K\int\limits_C f(z)dz \quad (K \equiv \mathrm{const});$

2) $\int\limits_C (f_1(z) + f_2(z))dz = \int\limits_C f_1(z)dz + \int\limits_C f_2(z)dz;$

3) якщо $C = C_1 + C_2$, то

$$\int\limits_{C_1 \cup C_2} f(z)dz = \int\limits_{C_1} f(z)dz + \int\limits_{C_2} f(z)dz;$$

4) $\int\limits_C f(z)dz = -\int\limits_{C^-} f(z)dz;$

5) якщо f неперервна на C, то інтеграл (22.12) існує;

6) $|\int\limits_C f(z)dz| \leq \int\limits_C |f(z)|ds,$

де ds — диференціал дуги кривої C, а інтеграл праворуч є криволінійним інтегралом першого роду. Правильність цієї нерівності випливає з нерівності

$$\left|\sum_{j=0}^{n-1} f(N_j)\triangle z_j\right| \leq \sum_{j=0}^{n-1} |f(N_j)||C_j|.$$

У теорії аналітичних функцій диференціал дуги часто записують як $|dz|$. Тому цю нерівність можна записати у вигляді

$$\left|\int\limits_C f(z)dz\right| \leq \int\limits_C |f(z)||dz|,$$

звідки випливає таке: якщо $(\forall z \in C)\{|f(z)| \leq M\}$, то $\left|\int\limits_C f(z)dz\right| \leq M\int\limits_C ds = M|C|;$

7) якщо $C = (z = z(t),\ a \leq t \leq b)$ — гладка крива, то $\int\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_a^b f(z(t))z'(t)\,dt.$

Отже, обчислення інтеграла (22.12) зводиться до обчислення інтеграла, що має вигляд $\int\limits_a^b \varphi(t)dt$, де φ — комплекснозначна функція $[a,b] \to \mathbb{C}$. Припустимо, що ця функція неперервна і $\varphi(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$. Функцію Φ називають *первісною* для цієї функції φ, якщо $(\forall t \in [a,b])\{\Phi'(t) = \varphi(t)\}$. Позначимо $\Phi(t) = A(t) + iB(t)$. Тоді

$A'(t) = \alpha(t)$ і $B'(t) = \beta(t)$. Отже,

$$\int_a^b \varphi(t)dt = \int_a^b \alpha(t)dt + i\int_a^b \beta(t)dt = A(t)|_a^b + iB(t)|_a^b = \Phi(t)|_a^b,$$

тобто для комплекснозначних функцій дійсної змінної справджується формула Ньютона-Лейбніца. Цю формулу використаємо для доведення такої леми.

Лема 22.5.1. *Нехай $k \in \mathbb{Z}$ і $r > 0$. Тоді*

$$\int\limits_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^k dz = \begin{cases} 0, & k \neq -1, \\ 2\pi i, & k = -1. \end{cases}$$

Справді, рівняння кола $\{z : |z - z_0| = r\}$ можна записати у вигляді $z = z_0 + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Тому якщо $k \neq -1$, то

$$\int\limits_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^k dz = \int_0^{2\pi} r^k e^{ikt} ire^{it} dt = ir^{k+1}\int_0^{2\pi} e^{i(k+1)t}dt = \frac{r^{k+1}}{k+1}e^{i(k+1)t}\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Якщо ж $k = -1$, то

$$\int\limits_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^k dz = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

22.6. Інтегральні теореми та формули Коші

З'ясуємо, що аналітична в замкненій області функція визначена своїми значеннями на межі області (див. теорему 22.6.3) та що похідні аналітичної в області G функції є аналітичними в G функціями.

Теорема 22.6.1. *Нехай функція f аналітична в однозв'язній області G. Тоді $\int\limits_C f(z)dz = 0$ для кожної замкненої кривої $C \subset G$.*

Доведення. Нехай $f = u + iv$. З аналітичності функції f випливає, що часткові похідні функцій u і v неперервні і задовольняють умови Коші-Рімана (22.2). Запишемо рівність (22.14) для довільної замкненої кривої $C \subset G$, і до інтегралів у правій частині застосуємо відому з курсу дійсного аналізу теорему: якщо функції P і Q неперервні разом з першими частковими похідними в однозв'язній області G, то для того, щоб $\int\limits_C Pdx + Qdy = 0$ для кожної замкненої кривої $C \subset G$, необхідно і достатньо, щоб $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ в області G. Завдяки (22.2) для інтегралів (22.13) такі умови виконуються і з огляду на (22.14) теорему 22.6.1 доведено. □

Теорема 22.6.2. *Нехай область G обмежена скінченною кількістю замкнених жорданових кривих, а функція f аналітична в замиканні $\overline{G}$. Тоді* $\int\limits_{\partial G} f(z)dz = 0$.

Доведення. За умовою функція f аналітична в деякій області $D \supset \overline{G}$, тобто скрізь у D виконуються умови Коші-Рімана. Використовуючи ці умови тазастосовуючи до інтегралів у (22.14) формулу Гріна, маємо

$$\int\limits_{\partial G} f(z)dz = \int\limits_{\partial G} udx - vdy + i \int\limits_{\partial G} vdx + udy =$$

$$= \iint\limits_{G} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i \iint\limits_{G} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = 0.$$

□

Наслідок 22.6.1. *Якщо функція f аналітична в кільці $\{z : R_1 < |z| < R_2\}$, то інтеграл* $\int\limits_{|z|=r} f(z)dz$ *не залежить від* $r \in (R_1, R_2)$.

Доведення. Справді, нехай $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$. Застосовуючи до кільця $\{z : r_1 < |z| < r_2\}$ теорему 22.6.2, маємо

$$\int\limits_{|z|=r_2} f(z)dz - \int\limits_{|z|=r_1} f(z)dz = 0.$$

□

Теорема 22.6.3. *Нехай функція f аналітична в замкненій області $\overline{G}$, обмеженій скінченною кількістю замкнених жорданових кривих. Тоді*

$$(\forall\, z \in G)\left\{f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G} \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau\right\} \tag{22.15}$$

і функція f має в G похідні всіх порядків, які є аналітичними функціями в G і які обчислюють за формулою

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{\partial G} \frac{f(\tau)}{(\tau - z)^{k+1}} d\tau. \tag{22.16}$$

Доведення. Нехай z — довільна точка з G, а $\overline{K}_r$ — замкнений круг з центром у z, радіусом r, краєм C_r і такий, що $\overline{K}_r \subset G$. Позначимо $D_r = G \setminus \overline{K}_r$. Легко побачити, що функція $\psi(z,\tau)=\dfrac{f(\tau)}{\tau-z}$, як функція τ, є аналітичною в D_r. Тому за теоремою 22.6.2 і властивістю 4 визначених інтегралів

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{f(\tau)}{\tau-z}d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_r}\frac{f(\tau)}{\tau-z}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_r}\frac{f(\tau)}{\tau-z}d\tau=0,$$

звідки

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{f(\tau)}{\tau-z}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_r}\frac{f(\tau)}{\tau-z}d\tau. \tag{22.17}$$

Оскільки $\dfrac{f(\tau)-f(z)}{\tau-z}\to f'(z)$ $(\tau\to z)$, то величина $\dfrac{f(\tau)-f(z)}{\tau-z}$ є обмеженою в деякому околі точки $\tau=z$ і при $\tau\in C_r$, $0<r<r_0$, маємо $\left|\dfrac{f(\tau)-f(z)}{\tau-z}\right|\le K<+\infty$. Тому за лемою 22.5.1 і властивістю 6

$$\left|f(z)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{f(\tau)}{\tau-z}d\tau\right|=\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{C_r}\frac{f(z)}{\tau-z}d\tau-\int\limits_{C_r}\frac{f(\tau)}{\tau-z}d\tau\right|\le$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{C_r}\frac{f(\tau)-f(z)}{\tau-z}d\tau\right|\le\frac{1}{2\pi}K2\pi r\to0\ \ (r\to0).$$

З останнього співвідношення і з (22.17) випливає формула (22.15). Формулу (22.16) отримуємо з (22.15) почленним диференціюванням під знаком інтеграла. □

Формули (22.15) і (22.16) називають *інтегральними формулами Коші*. З огляду на теорему 22.4.2 можемо записати

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{f(\tau)}{\tau-z}d\tau=\begin{cases}f(z), & z\in G;\\ 0, & z\in\mathbb{C}\setminus\overline{G}.\end{cases}$$

Наслідок 22.6.2. *Якщо функції f_1 і f_2 аналітичні в замкненій області $\overline{G}$, обмеженій скінченною кількістю замкнених жорданових кривих, то*

$$(\forall z\in\partial G)\{f_1(z)=f_2(z)\}\Rightarrow(\forall z\in\overline{G})\{f_1(z)=f_2(z)\}.$$

Доведення. Щоб довести правильність цього наслідку, достатньо до функції $f=$ $=f_1-f_2$ застосувати теорему 22.6.3. □

Наслідок 22.6.3. *Якщо функція f аналітична в області G, то вона в G має похідні всіх порядків, які є аналітичними функціями в G.*

Доведення. Досить довести правильність цього твердження в кожній точці $z\in G$, для чого візьмемо замкнений круг $\overline{K}\subset G$ з центром у точці z і до нього застосуємо теорему 22.6.3. □

22.7. Функціональні ряди. Теорема Вейєрштрасса

Нехай $\{f_n\}$ — послідовність функцій, заданих на множині E. Розглянемо функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots, \quad z \in E. \tag{22.18}$$

Якщо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ збігається, то кажуть, що функціональний ряд (22.18) *збіжний у точці* z_0. Ряд (22.18) називають *збіжним на множині* E, якщо він збіжний у кожній точці $z \in E$. У цьому випадку через $f(z)$ позначимо суму ряду (22.18) в точці z. Те, що ряд (22.18) збіжний на E до функції f, означає, що

$$(\forall z \in E)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)\left\{\Big|\sum_{k=1}^{n} f_k(z) - f(z)\Big| < \varepsilon\right\}.$$

Ряд (22.18) називають *рівномірно збіжним до* f *на* E, якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(\forall z \in E)\left\{\Big|\sum_{k=1}^{n} f_k(z) - f(z)\Big| < \varepsilon\right\}.$$

Як бачимо, наведені означення нічим не відрізняються від аналогічних з курсу дійсного аналізу. Використовуючи нерівності (22.1), легко довести таку теорему.

Теорема 22.7.1. *Для того, щоб ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *був збіжним (рівномірно збіжним) на множині* E *до функції* f, *необхідно і достатньо, щоб були збіжними (рівномірно збіжними) на* E *до функцій* u *і* v, *відповідно, ряди* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *і* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, *де* $u_n = \operatorname{Re} f_n$, $u = \operatorname{Re} f$, $v_n = \operatorname{Im} f_n$, $v = \operatorname{Im} f$.

Ця теорема дає змогу переносити відомі з курсу дійсного аналізу теореми на випадок комплексної змінної. Наприклад, правильний критерій Коші.

Теорема 22.7.2. *Для того, щоб ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *був рівномірно збіжним на множині* E, *необхідно і достатньо, щоб*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(\forall m > 0)(\forall z \in E)\left\{\Big|\sum_{k=n+1}^{m+n} f_k(z)\Big| < \varepsilon\right\}.$$

Використовуючи цей критерій, неважко, як і в курсі дійсного аналізу, довести ознаку Вейєрштрасса.

Теорема 22.7.3. *Функціональний ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *абсолютно і рівномірно збіжний на множині* E, *якщо існує збіжний ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ *з додатними членами такий, що* $(\forall n \in N)(\forall z \in E)\{|f_n(z)| \le \alpha_n\}$.

Доведемо два аналоги відомих з курсу дійсного аналізу теорем.

Теорема 22.7.4. *Якщо функції* f_n *неперервні на множині* E *і ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *рівномірно збігається на* E *до функції* f, *то* f *— неперервна на* E *функція.*

Доведення. З рівномірної збіжності ряду (22.18) випливає рівномірна збіжність рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ до функцій u і v. Оскільки функції u_n та v_n є неперервними на E, то за відповідною теоремою з дійсного аналізу такими самими є функції u і v, а, отже, і f. □

Теорема 22.7.5. *Нехай* C *— крива, функції* f_n *неперервні на* C *і ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *рівномірно збігається на* C *до функції* f. *Тоді*

$$\int\limits_C f(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_C f_n(z)\,dz.$$

Доведення. За теоремою 22.7.4, функція f неперервна на C. Тому всі інтеграли існують. З рівномірної збіжності випливає, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(\forall z \in C)\left\{|f(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z)| < \varepsilon\right\}.$$

Отже, при $n > n_0$ маємо

$$\left|\int\limits_C f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{n} \int\limits_C f_k(z)\,dz\right| \le \left|\int\limits_C (f(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z))\,dz\right| \le |C| \cdot \varepsilon,$$

а це означає, що

$$\int\limits_C f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_C f_k(z)\,dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_C f_k(z)\,dz.$$

□

Сформулюємо без доведення теорему Веєрштрасса про ряди аналітичних функцій, яка не має аналога для рядів з дійсними неперервно диференційовними членами.

Теорема 22.7.6 (теорема Вейєрштрасса). *Нехай в області G задана послідовність $\{f_k\}$ аналітичних функцій, і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$рівномірно збіжний на кожному замкненому крузі $\overline{K} \subset G$ до функції f. Тоді:*

1) *функція f аналітична в G;*

2) *ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ можна почленно диференціювати, тобто*

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)}(z), \; n \in \mathbb{N}; \tag{22.19}$$

3) *ряди в (22.19) рівномірно збіжні на кожному замкненому крузі $\overline{K} \subset G$.*

22.8. Степеневі та узагальнені степеневі ряди

Функціональний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{22.20}$$

називають *степеневим рядом* (з центром у точці z_0). Очевидно, що він збіжний у точці z_0. Позначимо $\alpha = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ і до ряду (22.20) застосуємо ознаку Коші абсолютної збіжності числового ряду. Оскільки при $z \neq z_0$, справджується рівність $q = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n||z - z_0|^n} = \alpha|z - z_0|$, то при $\alpha = 0$ ряд (22.20) є абсолютно збіжним для всіх $z \in \mathbb{C}$. Якщо $\alpha = \infty$, то ряд (22.20) розбіжний всюди, крім точки z_0. Нарешті, якщо $0 < \alpha < +\infty$, то ряд (22.20) є абсолютно збіжним у $\{z : |z - z_0| < 1/\alpha\}$ і розбіжним у $\{z : |z - z_0| > 1/\alpha\}$.

Означення 22.8.1. Число R, $0 < R < +\infty$, називають *радіусом збіжності ряду* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, якщо він збіжний у $\{z : |z-z_0| < R\}$ і розбіжний у $\{z : |z-z_0| > R\}$. Якщо ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ збіжний у $\mathbb{C}$, то приймаємо $R = +\infty$, а якщо збіжний тільки в точці z_0, то приймаємо $R = 0$.

З наведених міркувань випливає *формула Коші-Адамара* для знаходження радіуса збіжності ряду (22.20)

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Круг $\{z : |z - z_0| < R\}$ називають *кругом збіжності*, а при $0 < R < +\infty$ коло $\{z : |z - z_0| = R\}$ називають *колом збіжності*. На колі збіжності ряд (22.20) може бути збіжним, розбіжним, збіжним тільки на деякій підмножині цього кола.

Теорема 22.8.1 (теорема Абеля). *Якщо ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *збіжний у точці* $z^* \neq$ $\neq z_0$, *то він абсолютно збіжний у крузі* $\{z : |z-z_0| < |z^*-z_0|\}$.

Доведення. Оскільки ряд (22.20) збіжний у z^*, то за означенням радіуса збіжності $|z^*-z_0| \leq R$, а оскільки ряд (22.20) абсолютно збіжний в $\{z : |z-z_0| < R\}$, то він є абсолютно збіжним і в крузі $\{z : |z-z_0| < |z^*-z_0|\}$. □

Теорема 22.8.2 (про рівномірну збіжність). *Якщо ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *має радіус збіжності* $R > 0$, *то в кожному замкненому крузі* $\{z : |z-z_0| \leq r\}$, $0 < r < R$, *він збіжний рівномірно.*

Доведення. Нехай z_1 — точка на колі $\{z : |z-z_0| = r\}$. У z_1 ряд збіжний абсолютно, тобто $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|r^n < +\infty$. Останній ряд є мажорантним у крузі $\{z : |z-z_0| \leq r\}$ для ряду (22.20). Застосування ознаки Вейєрштрасса завершує доведення теореми. □

Наслідок 22.8.1. *Сума ряду* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *в крузі збіжності є аналітичною функцією і цей ряд можна почленно диференціювати довільну кількість разів.*

Доведення. Справді, оскільки $a_n(z-z_0)^n$ — цілі функції і ряд (22.20) рівномірно збіжний на кожному замкненому крузі з області $\{z : |z-z_0| < R\}$, то за теоремою Вейєрштрасса його сума є аналітичною в цій області функцією і його можна почленно диференціювати. □

Наслідок 22.8.2. *Ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *можна почленно інтегрувати вздовж будь-якої кривої, яка лежить у крузі збіжності.*

Доведення. Справді, для кожної кривої C, що лежить у крузі збіжності, можна знайти таке $r \in (0, R)$, що $C \subset \{z : |z-z_0| \leq r\}$, тобто ряд (22.20) рівномірно збіжний на C, і залишилось застосувати теорему 22.7.5. □

Означення 22.8.2. Нехай $z_0 \in \mathbb{C}$. Ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = \cdots + \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots . \quad (22.21)$$

називають *узагальненим степеневим рядом.*

Головною і *правильною частинами* ряду (22.21) називають, відповідно, ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} \quad \text{і} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Узагальнений степеневий ряд називають *збіжним* (*рівномірно збіжним*) *на множині* E, якщо на E збіжні (рівномірно збіжні) його головна та правильна частини. Правильна частина є звичайним степеневим рядом. Позначимо через R_2 його радіус збіжності і припустимо, що $R_2 > 0$. Як відомо, у замкненому крузі $\{z : |z - z_0| \le r\}$, $0 < r < R_2$, правильна частина рівномірно збіжна. В головній же частині зробимо заміну $z - z_0 = 1/w$. Отримаємо степеневий ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{-k} w^k$. Нехай R' — його радіус збіжності, тобто він збіжний у крузі $\{w : |w| < R'\}$, причому рівномірно на кожному замкненому крузі з цього круга. Повертаючись до головної частини ряду (22.21), бачимо, що вона збіжна в області $\{z : |z - z_0| > 1/R' = R_1\}$ і рівномірно збіжна в кожній замкненій області $\{z : |z - z_0| \ge r\}, r > R_1$.

Числа R_1 і R_2 обчислюють за допомогою формул Коші-Адамара

$$R_1 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_{-n}|}, \quad R_2 = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Якщо $R_1 > R_2$, то ряд (22.21) ніде не збіжний, якщо ж $R_1 = R_2$, то він може бути збіжним хіба що на колі $\{z : |z - z_0| = R_1\}$, а якщо $R_1 < R_2$, то областю збіжності є кільце $\{z : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$, причому на межі цього кільця можуть бути точки збіжності. Надалі, розглядатимемо лише третій випадок і зауважимо, що в кожному замкненому кільці $\{z : r_1 \le |z - z_0| \le r_2\}, R_1 < r_1 < r_2 < R_2$, ряд (22.21) рівномірно збіжний, а отже, в кільці $\{z : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ задає аналітичну функцію і його можна почленно диференціювати довільну кількість разів.

Теорема 22.8.3 (теорема Лорана). *Аналітичну в кільці* $\{z : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ *функцію* f *можна єдиним способом розвинути в узагальнений степеневий ряд* $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$, *причому*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{f(\tau) d\tau}{(\tau - z_0)^{n+1}}, \tag{22.22}$$

де Γ_R *— довільне коло* $\{z : |z - z_0| = R\}$, $R_1 < R < R_2$.

Доведення. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $z_0 = 0$ (загальний випадок зводиться до цього заміною $z - z_0$ на z). Нехай z — довільна точка з кільця $\{z : R_1 < |z| < R_2\}$. Кола $\Gamma_{R'} = \{z : |z| = R'\}$ і $\Gamma_{R''} = \{z : |z| = R''\}$, $R_1 < R' < < R'' < R_2$, виберемо так, щоб точка z лежала в кільці $\{z : R' < |z| < R''\}$. Тоді за теоремою 22.6.3

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{R''}} \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{R'}^{-}} \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{R''}} \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{R'}} \frac{f(\tau)}{z - \tau} d\tau. \tag{22.23}$$

Якщо $\tau \in \Gamma_{R'}$, то $|\tau/z| < 1$ і

$$\frac{1}{z-\tau} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\tau/z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\tau}{z}\right)^n.$$

Останній ряд є рівномірно збіжним щодо $\tau \in \Gamma_{R'}$, бо мажорується рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty}(R'/|z|)^n,$$

де $R'/|z| < 1$. Оскільки функція f обмежена на $\Gamma_{R'}$, то помножимо цей ряд на $f(\tau)$ і почленно проінтегруємо:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{R'}} \frac{f(\tau)}{z-\tau}d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{R'}} f(\tau)\left(\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\tau}{z}\right)^n\right)d\tau = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}\int\limits_{\Gamma_{R'}} f(\tau)\tau^n d\tau =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{R'}} f(\tau)\tau^n d\tau\right)z^{-(n+1)} = \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{R'}}\frac{f(\tau)}{\tau^{n+1}}d\tau\right)z^n. \tag{22.24}$$

На колі $\Gamma_{R''}$ виконується нерівність $|z/\tau| < 1$ і, отже,

$$\frac{1}{\tau-z} = \frac{1}{\tau}\cdot\frac{1}{1-z/\tau} = \frac{1}{\tau}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\tau}\right)^n.$$

Тому, міркуючи, як і раніше, маємо

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{R''}}\frac{f(\tau)}{\tau-z}d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{R''}} f(\tau)\frac{1}{\tau}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\tau}\right)^n d\tau = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{R''}}\frac{f(\tau)}{\tau^{n+1}}d\tau\right)z^n. \tag{22.25}$$

Використовуючи тепер наслідок 22.6.1, отримуємо

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{R'}}\frac{f(\tau)}{\tau^{n+1}}d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{R''}}\frac{f(\tau)}{\tau^{n+1}}d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{R}}\frac{f(\tau)}{\tau^{n+1}}d\tau, \quad R_1 < R < R_2.$$

Підставимо (22.24) і (22.25) у (22.23):

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R}\frac{f(\tau)}{\tau^{n+1}}d\tau\right)z^n,$$

отже, можливість розвинення і формула (22.22) доведені.

Доведемо єдиність розвинення. Припустимо, від супротивного, що в кільці $\{z : R_1 < |z| < R_2\}$ для аналітичної функції f виконується

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Помножимо обидва ряди на $z^{-(m+1)}$ і проінтегруємо вздовж кола $\{z : |z| = R\}$, $R_1 < R < R_2$, почленно. Тоді

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n \int\limits_{|z|=R} z^{n-m-1} dz = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \int\limits_{|z|=R} z^{n-m-1} dz.$$

Застосуємо до інтегралів у цій рівності лему 22.5.1. Тоді $2\pi i c_m = 2\pi i a_m$, тобто $c_m = a_m$. Теорему доведено. □

Коефіцієнти (22.22) називають *коефіцієнтами Лорана*, а ряд (22.21) з такими коефіцієнтами — *рядом Лорана* функції f.

Нехай $\{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$ — проколений окіл точки $z_0 \neq \infty$. Якщо функція f аналітична в ньому, то її можна розвинути в ряд Лорана, бо цей окіл є частковим випадком кільця в теоремі 22.7.3 з $R_1 = 0$ і $R_2 = \delta$. Отримаємо таким способом розвинення функції f в ряд Лорана в околі точки z_0. Означення головної і правильної частини зберігаються.

Нехай тепер $z_0 = \infty$ і функція f аналітична в області $\{z : 1/\delta < |z| < +\infty\}$. *Рядом Лорана для функції f в околі точки $z = \infty$* називають ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n. \tag{22.26}$$

У цьому разі ряд, складений з членів з додатними показниками, називають *головною частиною ряду* (22.26), а ряд, що залишається після усунення головної частини, — *правильною частиною*. Можна сказати, що до головної частини розвинення функції f в ряд Лорана в околі точки $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ належать ті члени, які прямують до ∞, коли $z \to z_0$.

Якщо функція f аналітична в області $\{z : 0 < |z| < +\infty\}$, яку можна розуміти як проколений окіл і точки $z = 0$, і точки $z = \infty$, то в цій області можна розвинути функцію f у ряд (22.26), який є рядом Лорана для f і в околі точки $z = 0$, і в околі точки $z = \infty$, але з різними головними та правильними частинами. У цьому випадку член a_0, як для точки $z = 0$, так і для точки $z = \infty$ завжди належить до правильної частини. Наприклад, ряд Лорана $z + 1 + 1/z$ в околі точки $z = 0$ має головну частину $1/z$, а в околі точки $z = \infty$ головною частиною є z.

Теорема 22.8.4 (теорема Тейлора). *Аналітичну в крузі $\{z : |z - z_0| < R\}$ функцію f можна єдиним чином розвинути в цьому крузі в степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ з коефіцієнтами*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau - z_0| = r} \frac{f(\tau)}{(\tau - z_0)^{n+1}} d\tau = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (0 < r < R). \tag{22.27}$$

Доведення. Твердження теореми в точці z_0 перевіряють безпосередньо. Далі в кільці $\{z : 0 < |z - z_0| < R\}$ за теоремою Лорана функцію f розвивають у ряд Лорана з коефіцієнтами (22.22). Оскільки при $n < 0$ за теоремою 22.6.1 маємо

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau - z_0| = r} f(\tau)(\tau - z_0)^{|n| - 1} d\tau = 0,$$

то цей ряд складається тільки з правильної частини. Формула (22.27) випливає з (22.22) та інтегральної формули Коші. □

Означення 22.8.3. Функцію f називають *голоморфною в області* G, якщо для кожної точки $z_0 \in G$ існує круг $\{z : |z - z_0| < R\} \subset G$, у якому f можна розвинути в ряд Тейлора.

Теорема 22.8.5. *Функція f голоморфна в області G тоді і тільки тоді, коли вона в G аналітична.*

Доведення. Якщо функція f голоморфна, то за наслідком 22.8.1 вона є аналітичною. Якщо функція f аналітична в області, то за теоремою Тейлора в деякому околі кожної точки області можна розвинути в степеневий ряд, а отже, вона голоморфна. □

На завершення зробимо огляд **рівносильних означень** аналітичної функції. Для простоти обмежимося випадком однозв'язної області, хоч у більшості означень вимога однозв'язності є зайвою. Отже, *аналітичною функцією* в однозв'язній області називають функцію, що задовольняє одну з умов:

1) має в цій області неперервну похідну;

2) має в цій області похідну;

3) має неперервно диференційовні дійсну та уявну частини, які задовольняють умови Коші-Рімана;

4) може бути розвинена в степеневий ряд в околі кожної точки з області.

22.9. Нулі аналітичних функцій

Нехай функція f аналітична в області G. Точку $z_0 \in G$ називають *нулем функції* f, якщо $f(z_0) = 0$. Якщо $f(z_0) = \cdots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$ і $f^{(n)}(z_0) \neq 0$, то z_0 називають *нулем n-го порядку.*

Теорема 22.9.1 (про канонічне зображення). *Для того, щоб аналітична в області G функція f мала в точці $z_0 \in G$ нуль n-го порядку, необхідно і достатньо, щоб у деякому околі точки z_0 функцію f можна було зобразити у вигляді*

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z), \tag{22.28}$$

де φ — функція, аналітична в цьому околі, і $\varphi(z_0) \neq 0$.

Доведення. Якщо f аналітична в G і $z_0 \in G$ є її нулем n-го порядку, то існує окіл точки z_0, де функція f розвивається в ряд Тейлора, який у цьому випадку має вигляд

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^n (a_n + a_n(z - z_0) + \cdots), \quad a_n \neq 0.$$

Приймемо $\varphi(z) = a_n + a_{n+1}(z - z_0) + \cdots$, одержимо (22.28). Навпаки, якщо виконується (22.28), де φ — аналітична в околі z_0 функція і $\varphi(z_0) \neq 0$, то в цьому околі

$$\varphi(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + \cdots + b_n(z - z_0)^n + \cdots, \quad b_0 \neq 0.$$

Тому

$$f(z) = b_0(z - z_0)^n + b_1(z - z_0)^{n+1} + \cdots,$$

і, отже, f має в z_0 нуль n-го порядку. □

Зауваження 22.9.1. Кажуть, що аналітична в околі точки $z = \infty$ функція f *має в ∞ нуль n-го порядку*, якщо функція $g(z) = f(1/z)$ має нуль n-го порядку в точці $z = 0$. Це буде тоді і тільки тоді, коли $f(z) = \varphi(z)/z^n$, де φ — аналітична в деякому околі точки ∞ функція і $\varphi(\infty) \neq 0$.

Теорема 22.9.2 (про ізольованість нулів). *Нехай функція f аналітична в області G і $z_0 \in G$. Якщо z_0 є нулем функції f, то існує окіл точки z_0, в якому f не має інших нулів.*

Доведення. За попередньою теоремою виконується (22.28), де φ — аналітична, а отже, неперервна в деякому околі точки z_0 функція та $\varphi(z_0) \neq 0$. Тому в деякому околі точки z_0 виконується нерівність $\varphi(z) \neq 0$. □

Наслідок 22.9.1. *Якщо функція f аналітична в області G, то множина її нулів не має точки скупчення в G.*

Доведення. Справді, в протилежному випадку з огляду на неперервність функції f точка скупчення теж була б нулем функції f, що неможливо за теоремою 22.9.2. □

Зазначимо, що точка скупчення нулів може належати краю області G, про що свідчить приклад аналітичної в $\{z : |z| < 1\}$ функції $w = \sin(1/(1-z))$, нулі якої $z_k = 1 - 1/(\pi k) \to 1$ $(k \to +\infty)$.

Наслідок 22.9.2. *Нехай функція $f \not\equiv 0$ аналітична в області G, а E — компакт з G. Тоді на E функція f має скінченну кількість нулів.*

Доведення ґрунтується на попередньому наслідку і принципі компактності.

Наслідок 22.9.3 (теорема єдиності). *Якщо функції f і g аналітичні в області G, а множина $E \subset G$ має, щонайменше одну точку скупчення, яка належить до G, то*

$$(\forall z \in E)\{f(z) = g(z)\} \Rightarrow (\forall z \in G)\{f(z) = g(z)\}.$$

Доведення цього твердження ґрунтується на застосуванні до функції $\varphi = f - g$ наслідку 22.9.3. З нього випливають два такі твердження.

Наслідок 22.9.4. *Якщо функції f і g аналітичні в області G, і крива C лежить у G, то*

$$(\forall z \in C)\{f(z) = g(z)\} \Rightarrow (\forall z \in G)\{f(z) = g(z)\}.$$

Наслідок 22.9.5. *Якщо функції f і g аналітичні в області G, і область $D \subset G$, то*

$$(\forall z \in D)\{f(z) = g(z)\} \Rightarrow (\forall z \in G)\{f(z) = g(z)\}.$$

У 22.3 зазначено, що всі формули для тригонометричних функцій, відомі зі шкільного курсу математики, справджуються і в комплексній області. Ці формули перевіряють за допомогою алгебраїчних операцій над показниковими функціями. Однак їх можна довести одним стандартним способом. Пояснимо це на двох прикладах.

Приклад 22.9.1.

Покажемо, що $\sin^2 z + \cos^2 z = 1, z \in \mathbb{C}$. У лівому та правому боці стоять цілі функції. Оскільки вони рівні на дійсній осі, то за наслідком 22.9.5 вони рівні в $\mathbb{C}$.

Приклад 22.9.2.

Доведемо формулу $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Оскільки $\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2$ для всіх $x_1 \in \mathbb{R}$ і $x_2 \in \mathbb{R}$, то за наслідком 22.9.5 маємо $\cos(z_1 + x_2) = \cos z_1 \cos x_2 - \sin z_1 \sin z_2$ для всіх $z_1 \in \mathbb{C}$ за кожного фіксованого $x_2 \in \mathbb{R}$. Тепер, фіксуючи z_1, аналогічно одержимо шукану рівність.

22.10. Ізольовані особливі точки однозначного характеру

Нехай функція f аналітична в проколеному околі точки z_0, а в точці z_0 не аналітична. Будемо вважати, $z_0 \neq \infty$, оскільки вивчення поводження функції в околі точки ∞ заміною z на $1/z$ зводиться до вивчення поводження функції $f(1/z)$ в околі точки $z = 0$.

Означення 22.10.1. Якщо функція f аналітична в проколеному околі $\{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$ точки z_0, а в z_0 не визначена або не аналітична, то z_0 називають *ізольованою особливою точкою однозначного характеру, або особливою точкою, функції* f.

Якщо в цьому разі існує $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A \neq \infty$, то z_0 називають *усувною особливою точкою.*

Якщо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, то z_0 називають *полюсом.*

Якщо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не існує, то z_0 називають *істотно особливою точкою.*

Приклад 22.10.1.

Точка z_0 є усувною особливою точкою функції $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$; точка $z = 0$ — полюс функції $f(z) = 1/z$; точка $z = 0$ — істотно особлива точка функції $f(z) = \exp(1/z)$.

Теорема 22.10.1. *Нехай z_0 — ізольована особлива точка функції f. Такі три твердження еквівалентні:*

1) *z_0 є усувною особливою точкою функції f;*
2) *функція f обмежена в деякому околі точки z_0;*
3) *в розвиненні f в ряд Лорана в околі точки z_0 нема головної частини.*

Доведення. Якщо z_0 — усувна особлива точка функції f, то $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A \neq \infty$ і отже, f обмежена в деякому околі точки z_0. Тому $1 \Rightarrow 2$.

Доведемо, що $2 \Rightarrow 3$. Нехай

$$(\exists M > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z,\ 0 < |z - z_0| < \delta)\ \{|f(z)| < M\}.$$

Розвинемо функцію f в ряд Лорана (22.21) з коефіцієнтами (22.22). Тоді

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi}\left| \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{M}{r^n},$$

де $0 < r < \delta$. Якщо тепер $n < 0$, то, спрямовуючи $r \to 0$, маємо $a_n = 0$, тобто головної частини немає.

Нарешті, якщо в ряді (22.21) немає головної частини, то він є степеневим рядом, що збіжний у крузі без центра, а отже, і в усьому крузі, задаючи там аналітичну (отже, неперервну) функцію. Звідси випливає, що $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a_0$, тобто $3 \Rightarrow 1$. Теорему доведено. □

Зазначимо, що одночасно ми довели *нерівність Коші* для коефіцієнтів Лорана якщо функція f аналітична в кільці $\{z : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ і розвивається в ря Лорана (22.21), то

$$|a_n| \le M(r)r^{-n},$$

де $M(r) = \max\{|f(z)| : |z - z_0| = r\}, R_1 < r < r_2$. Надалі домовимося усуват усувну особливу точку, приймаючи $f(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

Теорема 22.10.2 (теорема Ліувілля). *Якщо ціла функція f обмежена в окол точки $z = \infty$, то $f(z) = \text{const}$.*

Доведення. Оскільки f — ціла функція, то її можна розвинути в ряд Тейлора з цен тром у точці $z = 0$ і радіусом збіжності $R = +\infty$. Цей же ряд можна розуміт як ряд Лорана функції f в околі точки $z = \infty$. А оскільки за теоремою 22.10. в цьому ряді немає головної частини, тобто немає членів з додатними степенями з то $f(z) \equiv \text{const}$. [

Наслідок 22.10.1 (основна теорема алгебри). *Кожний многочлен степеня $n \in \mathbb{N}$ має принаймні один нуль.*

Доведення. Справді, якби це було не так, то функція $f(z) = \dfrac{1}{P_n(z)}$, де P_n — мно гочлен, була б цілою. Оскільки $P_n(z) = a_n z^n + \cdots + a_0 = a_n z^n(1 + o(1))$ при $z \to \infty$ тобто $f(z) \to 0$ $(z \to \infty)$, то за теоремою 22.10.2 $f(z) \equiv \text{const}$, тобто $P_n(z) \equiv \text{const}$ що неможливо. [

Нехай z_0 — полюс функції f. Тоді $f(z) \to \infty$ $(z \to z_0)$, тобто існує окіл точки z_0 де $f(z) \ne 0$. Звідси випливає, що функція $g(z) = 1/f(z)$ є аналітичною в деяком проколеному околі точки z_0 і $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = 0$. Отже, z_0 є усувною особливою точкою функції g, і g має в z_0 нуль. Звідси, полюс функції f є нулем функції g. Том природне таке означення: *порядком полюса функції f в точці z_0* називають порядо нуля функції g в z_0. Наприклад, функція $w = 1/\sin z$ в точках $z_n = \pi n, n \in \mathbb{Z}$, ма полюси першого порядку. Зауважимо, що точка $z = \infty$ не є ізольованою особливою точкою функції $w = 1/\sin z$, а є граничною точкою полюсів.

Теорема 22.10.3 (про канонічне зображення). *Для того щоб аналітична в про коленому околі точки z_0 функція f мала в z_0 полюс n-го порядку, необхідно і до статньо, щоб*

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z - z_0)^n}, \tag{22.29}$$

де функція ψ — аналітична в деякому околі точки z_0 і $\psi(z_0) \ne 0$.

Доведення. Якщо f має в z_0 полюс n-го порядку, то функція $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ має в z_0 нуль n-го порядку, і за теоремою 22.9.1 $g(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$, де φ — аналітична в деякому околі точки z_0 функція і $\varphi(z_0) \neq 0$. Звідси випливає зображення (22.29) з $\psi(z) = \dfrac{1}{\varphi(z)}$.

Навпаки, якщо маємо зображення (22.29), то для функції g отримуємо зображення (22.28) з $\varphi(z) = \dfrac{1}{\psi(z)}$, тобто g має в z_0 нуль n-го порядку, отже, f в z_0 має полюс n-го порядку. □

Теорема 22.10.4. *Точка z_0 є полюсом n-го порядку аналітичної функції f тоді і тільки тоді, коли ряд Лорана для f в околі z_0 має вигляд*

$$\begin{aligned} &f(z) = a_{-n}(z - z_0)^{-n} + \cdots + a_0 + \cdots + a_k(z - z_0)^k + \cdots, \quad a_{-n} \neq 0, \ z_0 \neq \infty; \\ &f(z) = a_n z^n + \cdots + a_0 + \cdots + a_{-k} z^{-k} + \cdots, \quad a_n \neq 0, \ z_0 = \infty. \end{aligned} \tag{22.30}$$

Доведення. Нехай $z_0 \neq \infty$ є полюсом n-го порядку функції f. Тоді за теоремою 22.10.5 правильна рівність (22.29), де ψ — аналітична в деякому околі точки z_0 функція і $\psi(z_0) \neq 0$. Розвинемо функцію ψ в ряд Тейлора

$$\psi(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots, \quad c_0 \neq 0.$$

Тому

$$f(z) = \frac{c_0}{(z - z_0)^n} + \frac{c_1}{(z - z_0)^{n-1}} + \cdots, \quad c_0 \neq 0,$$

і отримаємо (22.30), де $a_k = c_{n+k}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Навпаки, нехай у деякому околі точки $z_0 \neq \infty$ виконується (22.30). Тоді

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^n}(a_{-n} + a_{-n+1}(z - z_0) + \cdots) = \frac{\psi(z)}{(z - z_0)^n}, \quad a_{-n} \neq 0,$$

де $\psi(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z - z_0) + \cdots$, тобто ψ — аналітична в цьому околі функція і $\psi(z_0) \neq 0$. Отримано зображення (22.29), і за теоремою 22.10.3 функція f має в z_0 полюс n-го порядку.

Якщо $z = \infty$, то цей випадок зводиться до попереднього заміною z на $1/z$. Теорему доведено. □

Безпосередньо з означення істотно особливої точки і теорем 22.10.1 та 22.10.4 випливає таке твердження:

Теорема 22.10.5. *Точка z_0 є істотно особливою точкою аналітичної функції f тоді і тільки тоді, коли в головній частині ряду Лорана функції f в околі точки z_0 є нескінченно багато членів.*

Теорема 22.10.6 (теорема Сохоцького-Казораті). *Якщо z_0 — істотно особлива точка аналітичної функції f, то, яке б не було $A \in \overline{\mathbb{C}}$, існує послідовність $z_n \to z_0$ $(n \to \infty)$ така, що $f(z_n) \to A$ $(n \to \infty)$.*

Доведення. Нехай спочатку $A = \infty$. Тоді у жодному проколеному околі точки z_0 функція f не може бути обмеженою, бо в протилежному випадку z_0 була б усувною особливою точкою. Оскільки z_0 — ізольована особлива точка, то для всіх досить великих $n \in \mathbb{N}$ функція f є аналітичною в проколеному околі $\{z : 0 < |z-z_0| < 1/n\}$. У кожному такому околі $(\exists z_n)$ $\{|f(z_n)| > n\}$, тобто існує послідовність $\{z_n\}$ така, що $z_n \to z_0$ і $f(z_n) \to \infty$.

Якщо ж $A \neq \infty$, то можливі два варіанти: або в кожному проколеному околі точки z_0 рівняння $f(z) = A$ має корені, або існує проколений окіл точки z_0, у якому $f(z) \neq A$. У першому випадку через z_n позначимо один з коренів рівняння $f(z) = A$ в $\{z : 0 < |z - z_0| < 1/n\}$ і цим назвемо потрібну нам послідовність. У другому випадку нехай $\{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$ — проколений окіл, де $f(z) \neq A$. Розглянемо в ньому функцію $F(z) = \dfrac{1}{f(z) - A}$. Вона є аналітичною в цьому проколеному околі, і оскільки не існує границі $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$, то не існує границі $\lim\limits_{z\to z_0} F(z)$, тобто z_0 — істотно особлива точка функції F. Тому за розглянутим вище випадком існує послідовність $\{z_n\}$ така, що $z_n \to z_0$ і $F(z_n) \to \infty$. Оскільки $f(z) = A + 1/F(z)$, то $f(z_n) \to A$ $(n \to \infty)$. Теорему доведено. □

Зауважимо, що з теорем 22.10.1 і 22.10.2 випливає таке: якщо ціла функція не є тотожно сталою, то вона має в z_0 або полюс, або істотно особливу точку. У першому випадку вона — многочлен того самого степеня, який порядок полюса (див. теорему 22.10.3); у другому випадку її називають *трансцендентною цілою функцією.* Прикладами таких цілих функцій є e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\mathrm{sh} z$, $\mathrm{ch} z$.

22.11. Лишки. Основна теорема про лишки та її застосування

Нехай $z_0 \neq \infty$ — ізольована особлива точка однозначного характеру аналітичної функції f. Отже, функція f аналітична в проколеному околі $\{z : 0 < |z-z_0| < \delta\}$.

Означення 22.11.1. *Лишком функції f у точці z_0* називають величину

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} f(z)dz, \quad 0 < r < \delta.$$

За наслідком 22.6.1 лишок від r не залежить.

Нехай тепер $z_0 = \infty$ — ізольована точка однозначного характеру для функції f, тобто f аналітична в деякому проколеному околі $\{z : R < |z| < +\infty\}$.

Означення 22.11.2. *Лишком функції f в точці ∞* називають величину

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} f(z)dz, \quad R < r < \infty.$$

Якщо розвинемо в проколеному околі $\{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$ функцію f в ряд Лорана (22.21) з коефіцієнтами a_n, що визначені формулами (22.22), і в (22.22) візьмемо $n = -1$ то легко отримаємо рівність

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1}. \tag{22.31}$$

У випадку, коли $z_0 = \infty$, аналогічно маємо

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -a_{-1}. \tag{22.32}$$

Формули (22.31) і (22.32) можна було б уважати означеннями лишків. З них випливає, що лишок в усувній особливій точці $z_0 \neq \infty$ дорівнює нулю. Якщо ж $z_0 = \infty$ є усувною особливою точкою, то лишок не обов'язково дорівнює нулю, бо член a_{-1}/z входить у правильну (а не в головну) частину ряду Лорана.

Зауваження 22.11.1. Якщо функція f має в ∞ нуль принаймні другого порядку, то $a_{-1} = 0$, отже, $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0$. Якщо ж f має в ∞ нуль першого порядку, то $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = a_{-1} \neq 0$.

Якщо z_0 — істотно особлива точка, то для обчислення лишку треба використовувати формули (22.31) і (22.32).

У випадку, коли z_0 — полюс, можна вивести спеціальну формулу для обчислення лишку. Нехай $z_0 \neq \infty$ і $f(z) = (z - z_0)^m \psi(z)$, де функція $\psi(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + \cdots$ аналітична в деякому околі точки z_0, $b_0 \neq 0$. Оскільки $b_k = \psi^{(k)}(z_0)/k!$ і $a_{-1} = b_{m-1}$, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\psi^{(m-1)}(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z - z_0)^m f(z))\Big|_{z=z_0} =$$

$$= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z - z_0)^m f(z)). \tag{22.33}$$

Якщо $z_0 \neq \infty$ — полюс першого порядку, то з (22.33)

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Якщо $f = \psi/\varphi$ і φ має в z_0 нуль першого порядку, а $\psi(z_0) \neq 0$, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{(z - z_0)\psi(z)}{\varphi(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{(z - z_0)\psi(z)}{\varphi(z) - \varphi(z_0)} = \frac{\psi(z_0)}{\varphi'(z_0)}.$$

Введеними формулами не можна користуватися, коли точка ∞ буде полюсом функції f. Однак, якщо перейдемо до функції $f(1/z)$ і проробимо аналогічну до розглянутого випадку процедуру, то знайдемо формулу для обчислення лишку, коли $z_0 = \infty$ є полюсом m-го порядку:

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z\to 0}\left(-\frac{1}{(m+1)!}\cdot\frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}}\left(z^m f\left(1/z\right)\right)\right).$$

Зауважимо, що з означення лишку випливає рівність

$$\operatorname*{res}_{z=z_0}\sum_{j=1}^{n} f_j(z) = \sum_{j=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_0} f_j(z).$$

Також зазначимо: якщо функція f парна, то її лишки в 0 і ∞ дорівнюють нулю. Справді, якщо запишемо $f(z) = \frac{1}{2}(f(z) + f(-z))$, то побачимо, що в ряді Лорана функції f в околі $z = 0$ або $z = \infty$ нема непарних степенів z, отже, $a_{-1} = 0$.

Вправа 22.11.1. *Нехай f — аналітична в околі точки ∞. Довести, що*

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} z(f(\infty) - f(z)).$$

Теорема 22.11.1 (основна теорема про лишки). *Нехай функція f аналітична в замкненій області $\overline{G}$, обмеженій скінченною кількістю замкнених жорданових кривих, за винятком скінченної кількості ізольованих точок $z_1, z_2, \cdots, z_q \in G$. Тоді*

$$\int_{\partial G} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{q}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

Доведення. Побудуємо круги K_j з центрами в z_j так, щоб $\overline{K}_j \subset G$ для всіх $j = 1, 2, \cdots, q$ і $\overline{K_j} \cap \overline{K_l} = \varnothing$ при $j \neq l$. Нехай $D = G \setminus \bigcup_{j=1}^{q}\overline{K_j}$. Тоді за теоремою 22.6.2 маємо $\int_{\partial D} f(z)dz = 0$. Звідси легко одержуємо, що

$$0 = \int_{\partial G} f(z)dz - \sum_{j=1}^{q}\int_{\partial K_j} f(z)dz = \int_{\partial G} f(z)dz - 2\pi i\sum_{j=1}^{q}\operatorname*{res}_{z=z_j} f(z).$$

□

Використовуючи теорему 22.11.1, легко довести таке твердження.

Теорема 22.11.2. *Нехай функція f аналітична в $\mathbb{C}$, за винятком скінченної кількості точок $z_1, z_2, \cdots, z_{q-1}$, і нехай $z_q = \infty$. Тоді*

$$\sum_{k=1}^{q}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = 0.$$

Доведення. Візьмемо круг K з центром у $z = 0$ так, щоб він містив усі точки $z_1, z_2, \cdots, z_{q-1}$. За теоремою 22.11.1

$$\sum_{k=1}^{q-1} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K} f(z)dz.$$

З іншого боку,

$$\operatorname*{res}_{z=z_q} f(z) = \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial K} f(z)dz.$$

З цих двох рівностей випливає потрібна формула. □

Застосуємо основну теорему про лишки до обчислення деяких інтегралів.

Інтеграли від тригонометричних функцій. Нехай R — раціональна функція двох змінних, $m \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{Z}_+$, а

$$I = \int\limits_0^{2\pi} R(\cos m\theta, \sin n\theta) d\theta,$$

причому підінтегральна функція за жодних θ не дорівнює ∞. Зробимо заміну $z = e^{i\theta}$. Тоді $dz = ie^{i\theta}d\theta\,, d\theta = \dfrac{dz}{iz}$,

$$\cos m\theta = \frac{1}{2}(e^{im\theta} + e^{-im\theta}) = \frac{1}{2}(z^m + z^{-m}), \quad \sin n\theta = \frac{1}{2i}(e^{in\theta} - e^{-in\theta}) = \frac{1}{2i}(z^n - z^{-n}).$$

Отже, ми одержуємо

$$I = \int\limits_{|z|=1} Q(z)dz, \quad Q(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2}(z^m + z^{-m}), \frac{1}{2i}(z^n - z^{-n})\right).$$

Зрозуміло, що Q — раціональна функція, особливими точками якої є полюси, які позначимо через b_j. На колі $\{z : |z| = 1\}$ особливих точок немає. Тому за теоремою 22.11.1

$$I = 2\pi i \sum_{|b_j|<1} \operatorname*{res}_{z=b_j} Q(z).$$

Обчислення невластивих інтегралів. Правильна така теорема.

Теорема 22.11.3. *Нехай функція f аналітична в замкненій півплощині $\{z\colon \operatorname{Im} z \geq 0\}$, за винятком скінченної кількості точок, і в ∞ має нуль принаймні другого порядку. Тоді*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dx = 2\pi i \sum_{Imz_k>0} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z), \tag{22.34}$$

де $\{z_k\}$ *— множина особливих точок функції* f *у півплощині* $\{z : Imz > 0\}$.

Доведення. Візьмемо $R > R_0$ настільки великим, щоб усі точки множини $\{z_k\}$ містилися в області $\{z : \mathrm{Im} z > 0,\ |z| < R\}$, і нехай C_R — крива $z = \mathrm{R}e^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi$. Тоді за теоремою 22.11.1

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{Imz_k>0} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \tag{22.35}$$

Оскільки $f(z) = \varphi(z)z^{-m}, m \ge 2$, де функція φ аналітична в околі точки ∞ і $\varphi(\infty) \ne 0$, то

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \le MR^{-2}\pi R = \pi M R^{-1} \to 0 \quad (R \to +\infty).$$

Далі,

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx,$$

тому з (22.35) отримуємо (22.34). □

Вправа 22.11.2. *Нехай функція* f *аналітична у замкненій півплощині* $\{z : Imz \ge$ $\ge 0\}$, *за винятком скінченної кількості точок* $z_1, z_2, \cdots, z_n$ *з півплощини* $\{z : Imz >$ $> 0\}$ *і полюсів першого порядку* $x_1, x_2, \cdots, x_m$, *які лежать на дійсній осі;*

$$J = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}dx = \lim_{R\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to 0} J_{R,\varepsilon},$$

де $a > 0$, $\varepsilon_k > 0$, $\varepsilon = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_m$,

$$J_{R,\varepsilon} = \int_{I_{R,\varepsilon}} f(x)e^{iax}dx, \quad I_{R,\varepsilon} = [-R, R] \setminus \bigcup_{k=1}^{m} (x_k - \varepsilon_k, x_k + \varepsilon_k);$$

$\max\{|f(z)| : z \in C_R\} = \alpha_R \to 0 \quad (R \to +\infty)$, *де* C_R *крива* $z = Re^{i\varphi}, 0 \le \varphi \le \pi$. *Довести, що*

$$J = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} (f(z)e^{iaz}) + \pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{res}_{z=x_k} (f(z)e^{iaz}). \tag{22.36}$$

Для доведення цієї вправи використовують таку лему.

Лема 22.11.1 (лема Жордана). *Нехай функція f аналітична в замкненій верхній півплощині $\{z : Imz \geq 0\}$, за винятком скінченної кількості точок, і $\max\{|f(z)| : z \in C_R\} = \alpha_R \to 0$ $(R \to \infty)$, де C_R — крива $z = Re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$. Тоді якщо $a > 0$, то*

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{C_R} f(z)e^{iaz}dz = 0.$$

Використовуючи формулу (22.36) отримаємо такі твердження.

Наслідок 22.11.1. *Якщо функція f задовольняє умови леми Жордана і на дійсній осі не має особливих точок, а число $a > 0$, то*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k}(f(z)e^{iaz}).$$

Наслідок 22.11.2. *Нехай f задовольняє умови наслідку 22.11.1 і $\operatorname{Im} f(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}$. Тоді при $a > 0$ маємо*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ax dx = \operatorname{Re}\{2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k}(f(z)e^{iaz})\}$$

та

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin ax dx = \operatorname{Im}\{2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k}(f(z)e^{iaz})\}.$$

Наслідок 22.11.3. *Нехай $a > 0$. Тоді*

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x}e^{iax}dx = i\pi; \qquad \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin ax}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

Доведення. Справді, якщо візьмемо $f(z) = 1/z$ і зауважимо, що $\operatorname*{res}_{z=0}(1/z) = 1$, то з (22.36) отримаємо першу рівність.

Оскільки $\sin ax = \operatorname{Im} e^{iax}$, то при $a > 0$ за наслідком 22.11.2

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin ax}{x}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x}dx = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x}e^{iax}dx = \frac{\pi}{2}.$$

$\square$

Список літератури

1. *Банах С.* Дифференциальное и интегральное исчисление. — М., 1958.
2. *Гольберг А. А., Шеремета М. М., Заболоцький М. В., Скасків О. Б.* Комплексний аналіз. — Л., 2002.
3. *Давидов М. О.* Курс математичного аналізу. — К., 1990—1991. — Ч. 1, 2.
4. *Дороговцев А. Я.* Математичний аналіз. — К., 1993. — Ч. 1, 2.
5. *Зорич В. А.* Математичний аналіз. — М., 1981. — Ч. 1, 2.
6. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х.* Математический анализ. — М., 1979. — Т. 1, 2.
7. *Кудрявцев Л. Д.* Математический анализ. — М., 1988. — Т. 1, 2.
8. *Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г., Калайда А. Ф.* Математический анализ. — К., 1983—1985. — Ч. 1, 2.
9. *Ляшко І. І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К.* Математичний аналіз. — К., 1992—1993. — Ч. 1, 2.
10. *Мордкович А. Г., Солодовников А. С.* Математический анализ. — М., 1990.
11. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. — М., 1975. — Т. 1, 2.
12. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М., 1970. — Т. 1, 2.
13. *Шкіль М. І.* Математичний аналіз. — К., 1994—1995. — Ч. 1, 2.