**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**
**UKRAJNA OKTATÁSI ÉS TUDOMÁNYOS MINISZTÉRIUMA**

**Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці ІІ**
**II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola**

**Кафедра математики та інформатики**

**Matematika és Informatika Tanszék**

Kulin Judit., dr. Kucsinka Katalin, Román Erika, Papp Gabriella

# МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
**До практичних занять з дисципліни**
**Математичного аналізу**
**І. Семестр**

# Módszertani segédlet
# Matematikai analízis
# gyakorlati foglalkozásaihoz
# I. félév

Beregszász, 2021

УДК 372.8.517(439.23)

Jóváhagyta a II. RFKMF Tudományos Tanácsa
( jegyzőkönyv száma №8 27. 09. 2021 р )

Bíráló:
dr. Sztojka M. – a II RFKMF Matematika és Informatika tanszékének docenese

Módszertani segédlet. Matematikai analízis gyakorlati foglalkozásaihoz I. félév / összeállították: Kulin Judit., dr. Kucsinka Katalin, Román Erika, Papp Gabriella – Beregszász, 2021. – 67 с.

A kiadvány a Matematikai analízis első fejezeteit öleli fel. A halmazokkal, számsorozatokkal, ill. függvények folytonosságával és differenciálhatóságával ismerkedhet meg az olvasó. Minden fejezet elején meg található egy rövid elméleti áttekintés, majd típus feladatok megoldása segíti a tananyag elsajátítását. Ezt követően feladatokat találunk, majd a fejezet végén az elméleti ismeret felmérésére szolgáló kérdésekkel találkozhatunk.

A 014. Középfokú Oktatás (Matematika) képzési program hallgatóinak ajánljuk.

ТЕОРІЯ МНОЖИН ..... 5
HALMAZELMÉLET ..... 5
Típus feladatok megoldása: ..... 6
Вправи для самостійного розв’язання: ..... 7
Feladatok ..... 7
Теоретичні питання ..... 10
Elméleti kérdések ..... 10
ЗАГАЛЬНЕ ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ (ВІДОРАЖЕННЯ) ..... 11
RELÁCIÓ ..... 11
Típus feladatok megoldása: ..... 12
Вправи для самостійного розв’язання: ..... 13
Feladatok ..... 13
Теоретичні питання ..... 15
Числові множини ..... 16
SZÁMHALMAZOK ..... 16
Típus feladatok megoldása: ..... 18
Вправи для самостійного розв’язування: ..... 19
Feladatok ..... 19
Теоретичні питання ..... 21
Elméleti kérdések ..... 21
ГРАНИЦЯ ЧИСЛОВОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ ..... 23
SZÁMSOROZATOK HATÁRÉRTÉKE ..... 23
Típus feladatok megoldása: ..... 24
Вправи для самостійного розв’язання: ..... 26
Feladatok ..... 26
Теоретичні питання ..... 28
Elméleti kérdések ..... 28
ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ ..... 30
VALÓS FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ..... 30
Típus feladatok megoldása: ..... 32
Вправи для самостійного розв’язування: ..... 34
Feladatok ..... 34
Теоретичні питання ..... 37
Elméleti kérdések ..... 37
НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ ..... 38
A FÜGGVÉNYEK FOLYTONOSSÁGA ..... 38
Típus feladatok megoldása: ..... 41
Вправи для самостійного розв’язання: ..... 41
Feladatok: ..... 41
Теоретичні питання ..... 46
Elméleti kérdések ..... 46
ПОХІДНА ФУНКЦІЇ ..... 47
A DERIVÁLTFÜGGVÉNY ..... 47
Típus feladatok megoldása: ..... 48
Вправи для самостійного розв’язання: ..... 50
Теоретичні питання ..... 53
Elméleti kérdések ..... 53
ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ..... 54
Застосування похідної ..... 54
A DERIVÁLT ALKALMAZÁSA ..... 54

Típus feladatok megoldása: 56
Вправи для самостійного розв’язування: 56
Feladatok 56
Теоретичні питання 60
Elméleti kérdések 60
FÜGGVÉNYVIZSGÁLAT 61
Повне дослідження функції 61
Típus feladatok megoldása: 62
Вправи для самостійного розв’язування: 64
Feladatok 64
Теоретичні питання 67
Elméleti kérdések 67

# ТЕОРІЯ МНОЖИН

# HALMAZELMÉLET

***Alapfogalmak és jelölésük***

A halmaz, az elem, egy elem eleme egy halmaznak és a tulajdonság fogalmakat alapfogalomnak tekintjük.

A halmazokat általában latin ábécé nagybetűivel, az elemeket általában latin kisbetűkkel jelöljük:

$a \in A$ (olv. az $a$ eleme az $A$ halmaznak); $a \notin A$ (olv. az $a$ nem eleme az $A$ halmaznak).

Ha $A$ egy halmaz, akkor bármely $x$ elemre vagy az igaz, hogy $x$ eleme $A$-nak, vagy az, hogy $x$ nem eleme $A$-nak.

***Főbb meghatározások***

1. Az $A$ és $B$ halmaz egyenlő, ha az $A$ és a $B$ elemei ugyanazok: $A = B$.
2. Az $A$ halmaz a $B$ halmaz részhalmaza, ha az $A$ halmaz minden eleme a $B$ halmaznak is eleme: $A \subset B$.
3. Az $A$ halmaz a $B$ halmaz valódi részhalmaza, ha az $A$ halmaz minden eleme a $B$ halmaznak is eleme, de a két halmaz nem egyenlő: $A \subset B$ és $A \neq B$.
4. Az üres halmaz az a halmaz, melynek egyetlen eleme sincs: Ø.

***Műveletek halmazokkal***

1. Az $A$ és $B$ halmaz <u>*egyesítésén*</u> vagy <u>*unióján*</u> mindazon elemek halmazát értjük, amelyek vagy $A$-nak, vagy $B$-nek (vagy mindkettőnek) az elemei:
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\}.$$
2. Az $A$ és $B$ halmaz <u>*metszetén*</u> mindazon elemek halmazát értjük, amelyek elemei $A$-nak és $B$-nek is:
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\}.$$
3. Az $A$ és $B$ halmaz *különbségén* mindazon elemek halmazát értjük, amelyek az $A$-nak elemei, és nem elemi $B$-nek:
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}.$$
4. Ha az $A \subset H$ ($H$ alaphalmaz), akkor az $A$ halmaz $H$-ra vonatkozó <u>*kiegészítő*</u> vagy <u>*komplementer*</u> halmazán azt a halmazt értjük, amely a $H$ halmaz azon elemit tartalmazza, amelyek nem elemei az $A$ – nak:
$$\overline{A} = A^c = H \setminus A = \{x \mid x \notin A \text{ és } x \in H\}.$$
5. Az $A$ és $B$ halmaz <u>*diszjunkt*</u>, ha a metszetük üres halmaz:
$$A \cap B = \emptyset.$$
6. Az $A$ halmaz összes részhalmazainak halmazát az $A$ halmaz <u>*hatványhalmazának*</u> nevezzük:
$$P(A) = \{X \mid X \subset A\}.$$

***Alapazonosságok:***

Ha $A, B, C \subset H$ tetszőleges halmazok, akkor:

1. $A \cup A = A$; $A \cap A = A$ (idempotencia);
2. $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$ (kommutativitás);

3. $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$;
$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ (asszociatitivitás);
4. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ (disztributivitás);
5. $\overline{\overline{A}}=A$; $\overline{\emptyset}=H$; $\overline{H}=\emptyset$;
6. $A\cup\overline{A}=H$; $A\cap\overline{A}=\emptyset$;
7. $A\cup H=H$; $A\cap\emptyset=\emptyset$;
8. $A\cup\emptyset=A$; $A\cap H=A$;
9. $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ (de Morgan-azonosság);
10. $A\cup(A\cap B)=A$; $A\cap(A\cup B)=A$ (beolvasztási szabály).

## *Típus feladatok megoldása:*

1. Legyen A = {3 pozitív többszörösei } és B ={2-vel osztható pozitív számok}. Adja meg a halmazokat másképpen is! Határozza meg a halmazok metszetét, egyesítését és különbségéit !
<u>Megoldás:</u>
elemei felsorolásával: $A$ = {3; 6; 9; 12; … }, $B$ ={2; 4; 6; 8; … }.
közös tulajdonság megadásával: $A=\{x|x=3k,\ k\in N\}$, $B=\{x|x=2k,\ k\in N\}$.
$A\cap B=$ {2-vel is és 3-mal is osztható pozitív számok}= {6 pozitív többszörösei}= $\{x|x=6k,\ k\in N\}$.
$A\cup B=$ {2-vel vagy 3-mal osztható pozitív számok}= $\{x|x=2k,\ vagy\, x=3k, k\in N\}$.
$AB=$ { 3-mal osztható, de 2-vel nem osztható pozitív számok}= {3 páratlan többszörösei pozitív többszörösei}= $\{x|x=6k-3,\ k\in N\}$.
$BA=$ {2-vel osztható, de 3-mal nem osztható pozitív számok}= {minden páros szám kivéve 6 többszöröseit}= $\{x|x=2k,\ k\neq 3n,\ k,n\in N\}$.
2. Bizonyítsa be, hogy ha A, B és C tetszőleges halmazok, akkor
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$!
<u>*Bizonyítás:*</u>
Igazoljuk, hogy a két oldalon álló halmazok elemei megegyeznek..
Ha $x\in A\cap(B\cup C)$, akkor a metszett meghatározása értelmében $x\in A$ és $x\in B\cup C$ halmaznak is. Az unió meghatározása miatt viszont, $x\in B$ vagy $x\in C$. Tehát $x\in A$ és ($x\in B$ vagy $x\in C$). Vagyis ($x\in A$ és $x\in B$) vagy ($x\in A$ és $x\in C$). Ami azt jelenti, hogy $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$. Ezzel igazoltuk, hogy a két halmaz elemei megegyeznek.
3. Hozza egyszerűbb alakra a $\overline{(A/\overline{B})\cap\overline{A\cap\overline{\overline{B}}}}/A$!
<u>*1. megoldás:*</u>
De Morgan –féle azonosságot alkalmazva
$$\left(\overline{(A/\overline{B})}\cup\overline{\overline{A\cap\overline{\overline{B}}}}\right)/A=\left(\overline{A\cap B}\cup\left(A\cap\overline{B}\right)\right)/A=\left(\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)\right)/A=$$
$$=\left(\left(\overline{A}\cup\overline{B}\cup A\right)\cap\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\right)/A=\left(H\cap\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\right)/A=\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)/A=\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\cap\overline{A}=$$
$$=\overline{A}$$

<u>2. megoldás.</u>

Alkalmazzuk az $A/B = A \cap \overline{B}$ azonosságot:

$$\overline{(A \cap B) \cap (\overline{A} \cup B)} \cap \overline{A} = \left(\overline{A \cap B} \cup \overline{\overline{A} \cup B}\right) \cap \overline{A} = \left(\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \cup \left(A \cap \overline{B}\right)\right) \cap \overline{A} =$$
$$= \overline{A}$$

**4.** Igazolja, hogy $\sqrt{7}$ irracionális szám!

Alkalmazzunk indirekt bizonyítási eljárást. Tehát tegyük fel, hogy $\sqrt{7}$ racionális szám, vagyis felírható két relatív prímszám hányadosaként: $\sqrt{7} = \frac{a}{b}$, ahol $a, b \in N$, és $\text{lnko}(a;b) = 1$. Akkor viszont $a^2 = 7b^2$, tehát egy négyzetszámnak osztódnia kell 7-tel, ez csak abban az esetben lehetséges, ha *a* 7 többszöröse, viszont akkor az egyszerűsítés után *b*-nek is osztódnia kell 7-tel.

$a^2 = 7b^2 \Rightarrow (7d)^2 = 7b^2 \Rightarrow 7d^2 = b^7$.

Ami ellentmond annak, hogy *a* és *b* relatív prím. Tehát, nem helytálló a feltételezésünk, vagyis $\sqrt{7}$ irracionális szám.

## *Вправи для самостійного розв'язання:*

## *Feladatok*

1. Adja meg az *A* halmazt elemei felsorolásával:
   1) $A = \{\text{Azon természetes számok, melyek oszthatóak héttel, és nem nagyobbak mint } 35\}$;
   2) $B = \{x \in Z \mid x^2 - x - 12 \le 0\}$; 3) $C = \{20 - \text{tól kisebb prímszámok}\}$;
   4) $D = \left\{x \in Z \mid \frac{1}{4} \le 2^x < 5\right\}$; 5) $E = \left\{x \in Z \mid \frac{1}{9} \le 3^x < 10\right\}$;
   6) $F = \left\{x \in N \mid \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{x} \le 1\right\}$; 7) $G = \{x \in R \mid \cos^2 2x = 1,\ 0 < x < 2\pi\}$!
2. Legyen $A, B \text{ és } C \subset H$. Írja fel, a halmazokra értelmezet műveletek segítségével a *H* azon elemeinek halmazát, amelyek
   1) csak a B halmaznak elemei;
   2) pontosan két halmaznak elemei;
   3) nem elemei mindhárom halmaznak;
   4) legfeljebb egy halmaznak elemei;
   5) legalább egy halmaznak elemei;
   6) legalább két halmaznak elemei;
   7) mind a három halmaznak elemei!
3. Legyen $A, B \subset H$, $H = \{x \mid -1 \le x \le 10,\ x \in Z\}$, $A = \{1;2;3;4;5;9\}$, $B = \{0;1;2;3;8\}$. A következő halmazokat adja meg elemeik felsorolásával:
   1) $C_1 = A \cap B$; 2) $C_2 = A \cup B$; 3) $C_3 = \overline{A \cup B}$; 4) $C_4 = \overline{A \cap B}$;
   5) $C_5 = \overline{A}$; 6) $C_6 = \overline{B}$; 7) $C_7 = A \cup H$; 8) $C_8 = A \cap H$
   9) $C_9 = \overline{A} \cup B$; 10) $C_{10} = B \cap \overline{A}$; 11) $C_{11} = \overline{A} \cup \overline{B}$; 12) $C_{11} = \overline{A} \cap \overline{B}$!
4. Legyen $M = \{1;2;3;4;5;6\}$. Az *A*, *B* és *C* halmazok az *M* halmaz részhalmazai, melyekről tudjuk, hogy $A \cap B = \{2\}$; $(A \cup B) \cap C = \{5;6\}$, $A \backslash C = \{2;3;4\}$; $C \backslash B = \{1;5\}$. Határozza meg az *A*, *B* és *C* halmazokat!

5. Határozza meg $A$ és $B$ halmazok metszetét, ha:

1) $A=\left\{x \middle| x\in Z,\ \frac{(2x-10)(x^2-5x+6)}{x^2}>0\right\}$, $B=\{x|x\in N,\ \log_5(6x+36)\le 3\}$;

2) $A=\left\{x \middle| x\in R,\ \frac{x^2-5x+6}{x-4}<0\right\}$, $B=\left\{x \middle| x\in R,\ \frac{x-1}{x+2}\ge 1\right\}$;

3) $A=\{x|x\in R,\ \sqrt{x+2}>x\}$; $B=\left\{x \middle| x\in R,\ \frac{1}{\sqrt{x+2}}<\frac{1}{x}\right\}$;

4) $A=\{x|x\in R,\ \cos x\le 0{,}5\}$; $B=\{x|x\in R,\ \sin x>0{,}5\}$;

5) $A=\{x|x\in R,\ 2^{2x}-6\cdot 2^x+8\ge 0\}$; $B=\{x|x\in R,\ \log_{0,5}(x-1{,}5)>1\}$!

6. Határozza meg az $A$ és $B$ halmazokat, ha tudja, hogy $A\cup B=\{1;2;3;4;5\}$, $A\cap B=\{3;5\}$, $A\backslash B=\{1\}$, $B\backslash A=\{2;4\}$!

7. Legyen $H=\{\text{Egy könyvtár összes könyve}\}$, $B=\{\text{Természettudományi könyvek}\}$, $C=\{\text{Magyar nyelvű könyvek}\}$, $D=\{\text{Matematika könyvek}\}$. Milyen könyvek lesznek az alábbi halmazokban:

1) $B\setminus\overline{D}$; 2) $C\cap B$; 3) $B\cap D$; 4) $\overline{B}\cup D$;
5) $B\cup D$; 6) $\overline{B\cap C}$; 7) $\overline{C}\setminus\overline{D}$; 8) $C\cap D$?

8. Jelentse a $H$ alaphalmaz a főiskola hallgatóinak összességét, $A$ a felsőfokú nyelvvizsgával rendelkező diákokat, $B$ *a* líceumot végzetteket, $C$ pedig a lányokat, $D$ *a* kékszemű diákokat. Kik tartoznak a következő halmazokba:

1) $(C\setminus D)\cap A$; 2) $B\cap C\cap A$; 3) $\left(\left(\overline{B}\cap C\right)\cup\left(\overline{A}\cap\overline{\overline{C}}\right)\cap D\right)$;
4) $\left(B\cap\left(D\setminus\overline{A}\right)\right)\setminus(A\cap C)$; 5) $A\cap\overline{A\cap\overline{B}}\cap\overline{B\cap\overline{D}}$;
6) $(A\setminus(B\cap C))\cup\left(\overline{B}\cap(C\setminus D)\right)$?

9. Jelentse $H$, mint alaphalmaz, a valós számok halmazát, $N$ a természetes számokat, $P$ a páros számokat, $T$ a tízzel osztható számokat, $R$ a racionális számokat. Adja meg szavakkal a következő kifejezések jelentését:

1) $(N\cap T)\setminus\overline{P}$; 2) $R\setminus(N\cap P)$; 3) $\overline{P\cup T}\cup(H\setminus N)$; 4) $\left(H\cap\overline{R}\right)\cup T$!

10. Jelentse $H$, mint alaphalmaz, a valós számok halmazát, $N$ a természetes számokat, $P$ a páros számokat, $T$ a tízzel osztható számokat, $R$ a racionális számokat. Írja fel halmazműveleti jelekkel a következőket:
1) a páratlan és a nullára végződő páros számok;
2) az irracionális számok és a páros természetes számok;
3) a negatív egész számok;
4) a két egész szám hányadosaként felírható számok, a nulla és a pozitív egészek kivételével!

11. Legyenek $A$, $B$ és $C$ a $H$ halmaz tetszőleges részhalmazai. A következő összefüggések közül melyek igazak és melyek nem:

1) $A\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\setminus C$;
2) $A\cap B\cap C=A\cap B\cap(B\cup C)$;
3) $\left(A\setminus\left(A\setminus\overline{B}\right)\right)\cup B=A\cup B$;
4) $(A\cup B)\setminus A=B$;
5) $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cap(B\setminus C)$?

12. Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket, ha $A$, $B$ és $C$ a $H$ halmaz tetszőleges részhalmazai:

1) $(A\cup B)\cap\left(A\cup\overline{B}\right)$; 2) $(A\cup B)\cap(B\cup C)$;

3) $(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup B)\cap(A\cup\overline{B})$.; 4) $\overline{(\overline{A}\cup\overline{B})\setminus\overline{\mathrm{B}\setminus\overline{\overline{\mathrm{A}}}}\setminus\overline{\mathrm{A}}}$;

5) $\overline{A\cup C}\setminus(\mathrm{C}\cap\overline{\overline{\mathrm{A}}\cup B})$; 6) $\overline{\overline{A\setminus\overline{\mathrm{B}}}\cup A}\cup\overline{B\cup(A\setminus\mathrm{B})}$;

7) $(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})$; 8) $(\overline{A}\setminus\mathrm{B})\cup\overline{(A\setminus\mathrm{C})\cup B}$;

9) $(A\setminus\mathrm{B})\cup(B\setminus\mathrm{A})\cup\overline{(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)}$;

10) $\overline{\overline{A\setminus\overline{\mathrm{B}}}\cup B}\cup(A\cap B)\cup(A\cap\overline{\overline{A}\cup B})$!

13. Legyen $A=\{x\,|\,x=2n,n\in N\}$, $B=\{x|\,x\in N,x<4\}$, $C=\{x|\,x\in N,x>2\}$. Adja meg az $X=(A\setminus(\mathrm{B}\cap\mathrm{C}))\cup((A\setminus\mathrm{B})\setminus\mathrm{C})$ halmaz elemeit!
14. Állapítsa meg, hogy *A* és *B* diszjunkt halmazok-e:
    1. $A=\{100-\text{tól kisebb négyzetszámok}\}$;
    $B=\{x\in N|\ \ x=10k,k\in N\}$;
    2. $A=\{\text{paralelogrammák}\}$;
    $B=\{\text{téglalapok}\}$;
    3. $A=\{x\in R||x-3|=6\}$;
    $B=\{x\in Z|-3<x\le 5\}$;
    4. $A=\{x\in R||x-3|=6\}$;
    $B=\{x\in Z|-3\le x\le 5\}$;
    5. $A=\{x\in N|x^4+x=0\}$;
    $B=\{x\in Z|x^2-1=0\}$
15. Adja meg az $A=\{x\in N|\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}\ge 0\}$ halmaz hatványhalmazát!
16. Adja meg az $A=\{x\in N|\ |x|<|x+1|-|2x-4|\}$ halmaz hatványhalmazát!
17. Bizonyítsa be, hogy a metszet jobbról disztributív a kivonásra!
18. Bizonyítsa be, hogy az unió jobbról disztributív a kivonásra!
19. Bizonyítsa be, a de Morgan azonosságokat!
20. Határozza meg az *A* és *B* halmaz metszetét, egyesítését és különbségeit:
    1) $A=\{x\in N|x^2-x\le 0\}$, $B=\{x\in N|x^2-4x+3\le 0\}$;
    2) $A=\left\{x\in R|\dfrac{(x^2-5x+6)}{x-4}<0\right\}$, $B=\left\{x\in R|\dfrac{x-1}{x+2}\ge 1\right\}$;
    3) $A=\{x\in N|\sqrt{x+2}>x\}$, $B=\{x\in N||x-4|<3\}$;
    4) $A=\{x\in R|4^x-6\cdot 2^x+8\ge 0\}$, $B=\left\{x\in R|\log_{\frac{1}{2}}(x-1{,}5)>1\right\}$!
21. Hány se öttel, se héttel nem osztható háromjegyű szám van?
22. Egy osztály 30 tanulója közül 13-an felvételiznek matematikából, 8-an fizikából, 5 tanuló matematikából és fizikából is. Hányan nem felvételiznek egyik említett tárgyból sem?
23. Egy érettségiző osztályban 14 tanuló ukrán nyelvből, 18 tanuló magyar nyelvből és 15 tanuló matematikából is fog vizsgázni. Ukrán nyelvből és matematikából 9 tanuló, matematikából és magyar nyelvből 11, magyar nyelvből és ukrán nyelvből 7 tanuló fog vizsgázni. Mindhárom tárgyat 5 tanuló választotta. 9 tanuló csak történelem vizsgát választott. Hány tanulója van az osztálynak?
24. A főiskola földrajzszakos hallgatónak 3 terepgyakorlatott szerveztek. 64-en a Kárpátokban, 40-en a Krímen és 88-an Magyarországon voltak. Akik pontosan két terepgyakorlaton vettek részt, pontosan háromszor annyian voltak, mint akik mind a

három gyakorlaton ott voltak. Hány olyan hallgató van, aki pontosan egy gyakorlaton vett részt, ha a főiskolán 137 földrajzszakos hallgató tanul.

## *Теоретичні питання*

## *Elméleti kérdések*

1. Legyen X egy nemüres halmaz, A, B $\subset$ X. Definiálja az A és a B halmazok unióját .
2. Legyen X egy nemüres halmaz, A, B $\subset$ X.
3. Definiálja az A és a B halmazok metszetét Fogalmazza meg a de Morgan azonosságokat

# ЗАГАЛЬНЕ ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ (ВІДОРАЖЕННЯ)

# RELÁCIÓ

***Alapfogalmak és jelölésük***

1. Az $A$ és $B$ két nem üres halmaz elemeiből készíthető $(a;b)$ alakú szimbólum rendezett párt jelöl, ha $a$ az $A$ halmaz eleme és $b$ a $B$ halmaz eleme, és $(a;b) = (c;d)$ pontosan akkor, ha $a = c$ és $b = d$.
2. Az $(x;y) \in F$ vagy $xFy$ az $x$ $F$ relációban áll az $y$-nal, vagy $F$ $x$-hez hozzárendeli $y$-t kijelentést jelöli..

***Főbb meghatározások***

1. Az $A$ és $B$ nem üres halmazok elemeiből készíthető rendezett párok halmazát $A$ és $B$ <u>*Descartes-féle szorzatának*</u> nevezzük:
$$A \times B = \{(a;b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$
2. Az $A \times B$ halmaz egy $F$ részhalmazát $A$ és $B$ közötti <u>*(binér) relációnak*</u>, vagy $A$-ból $B$-be való <u>*leképzésnek*</u> nevezzük:
$$F \subset A \times B.$$
3. Az $F \subset A \times B$ reláció <u>*inverze*</u> alatt az $F^{-1} \subset B \times A$ relációt értjük.
$$F^{-1} = \{(y;x) \in B \times A \mid (x;y) \in F\}.$$
4. Az $F$ reláció <u>*értelmezési tartománya*</u> az $A$ halmaz azon elemeinek halmaza, melyek mindegyikéhez létezik a $B$ halmaznak olyan eleme, mellyel relációban áll:
$$D_F = \{x \mid x \in A \text{ és } \exists y \in B, \text{ amelyre } (x;y) \in F\}.$$
5. Az $F$ reláció <u>*értékkészlete*</u> a $B$ halmaz azon elemeinek halmáza, melyek mindegyikéhez létezik az $A$ halmaznak olyan eleme, mellyel relációban áll:
$$R_F = \{y \mid y \in B \text{ és } \exists x \in A, \text{ amelyre } (x;y) \in F\}.$$
6. Az $A$ halmazon értelmezett $F \subset A \times A$ reláció <u>*ekvivalencia reláció*</u>, ha minden $x,\ y,\ z \in A$ esetén a reláció reflexív, szimmetrikus és tranzitív:
   a) $xFx$;
   b) ha $xFy$, akkor $yFx$
   c) ha $xFy$ és $yFz$, akkor $xFz$.
7. Az $A$ halmazon értelmezett $F \subset A \times A$ reláció -- <u>*rendezési reláció*</u>, ha minden $x,\ y,\ z \in A$ esetén a reláció reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív és lineáris:
   a) $xFx$;
   b) ha $xFy$, és $yFx$, akkor $x = y$;
   c) ha $xFy$ és $yFz$, akkor $xFz$;
   d) $xFy$ vagy $yFx$.
8. Az $A$ halmazon értelmezett $F \subset A \times A$ reláció <u>*félig rendezés (részben rendezésnek)*</u>, ha minden $x,\ y,\ z \in A$ esetén a reláció reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív:
   a) $xFx$;
   b) ha $xFy$, és $yFx$, akkor $x = y$;
   c) ha $xFy$ és $yFz$, akkor $xFy$;
9. Az $A$, $B$, $C$ és $D$ halmazokon értelmezett $F \subset A \times B$ és $G \subset C \times D$ relációk <u>*kompozíciójának*</u> nevezzük a $G \circ F = A \times D$ relációt:
$$G \circ F = \{(x;z) \mid x \in A, z \in D \text{ és } \forall y \in B \cap C, \text{teljesül, hogy } xFy \text{ és } yGz\}.$$

## *Típus feladatok megoldása:*

1. ***Adja meg az*** $A=\left\{x \middle| \frac{x-15}{x-12}\le 0,\ x\in N\right\}$ ***és B =*** $\{$ ***egyjegyű prímszámok*** $\}$ ***halmazok Descartes szorzatait!***

   Adjuk meg a halmazokat elemeik felsorolásával:

   $A=\{13;\ 14;\ 15\},\ B=\{2;\ 3;\ 5;7\}$

   $A\times B=\{(13;2),(13;3),(13;5),(13;7),(14;2),(14;3),(14;5),(14;7),(15;2),(15;3),(15;5),(15;7)\}$

   $B\times A=\{(2;13),(3;13),(5;13),(7;13),(2;14),(3;14),(5;14),(7;14),(2;15),(3;15),(5;15),(7;15)\}$.

2. ***Igazolja, hogy*** $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$***, ha A, B és C tetszőleges halmazok!***

   Igazoljuk, hogy az két halmaz elemei azonosak:

   $(x;y)\in(A\cap B)\times C \Leftrightarrow x\in(A\cap B)\ és\ y\in C \Leftrightarrow (x\in A\ és\ x\in B)\ és\ y\in C \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow (x\in A\ és\ y\in C) és\ (x\in B\ y\in C) \Leftrightarrow (x;y)\in A\times C\ és\ (x;y)\in B\times C \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow (x;y)\in(A\times C)\cap(B\times C)$.

3. ***Ábrázolja*** $A\cap B$ ***halmaz elemeit, ha*** $A=\{(x;y)\in R^2 | y>x^2\}$ ***és*** $B=\{(x;y)\in R^2 | x-y<4\}$***!***

   Ábrázoljuk a két halmaz elemeit, közös koordináta síkon:

4. ***Adjon meg egy az*** $A=\{x|\ x^2-9\le 0, x\in Z\}$ ***és*** $B=\{x|\ \log_4(x^2+39)=3\}$ ***halmazokon értelmezett relációt! Határozza meg a reláció értelmezési tartományát, értékkészletét! Adja meg a reláció inverzét!***

   Adjuk meg a halmazokat elemeik felsorolásával:

   $A=\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$;

   $B=\{5;\ -5\}$.

   $F\subset A\times B$, ezért $F=\{(-3;-5),(-2;-5),(-1;-5),(-1;5),(1;5),(2;5),(3;5)\}$.

   $D_F\ =\ A=\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$.

   $R_F=B=\{5;\ -5\}$.

   $F^{-1}=\{(-5;-3),(-5;-2),(-5;-1),(5;-1),(5;1),(5;2),(5;3)\}$.

5. ***Határozza meg az*** $A=\left\{x \middle| x=\frac{n}{n+3}, n\in N\right\}$ ***halmaz suprémumát és infimumát!***

   Igazoljuk, hogy az $A$ halmaz korlátos. Mivel $n\in N$, ezért a halmaz minden eleme pozitív, és mert $n<n+3$ ezért az a halmaz a pozitív valódi törtek halmaza, vagyis $\forall n\in N,\ 0<\frac{n}{n+3}<1$. Tehát az $A$ halmaz korlátos.

   Vegyük figyelembe az $\frac{n}{n+3}=\frac{n+3-3}{n+3}=1-\frac{3}{n+3}$ átalakítást!

   Ebből láthatjuk, hogy $\sup A=1, \inf A=\min A=\frac{1}{1+3}=\frac{1}{4}$.

   Alkalmazhatjuk a következő azonosságokat is:

$\sup(A+B)=\sup A+\sup B;$

$\inf(A+B)=\inf A+\inf B;$

$\sup(-B)=-\inf B;$

$\inf(-B)=-\sup B.$

$B=\{1\},\ \ C=\left\{x \middle| x=\dfrac{3}{n+3}, n\in N\right\}.$

$\sup B=\inf B=\min B=\max B=1$, mert a $B$ halmaz egyelemű.

$\sup C=\max C=\dfrac{3}{1+3}=\dfrac{3}{4}.$

$\sup A=\sup(B-C)=\sup B-\inf C=1-0=1;$

$\inf A=\inf(B-C)=\inf B-\sup C=1-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}.$

6. ***<u>Bizonyítsa be, hogy az egész együtthatós egyváltozós polinomok halmaza megszámlálható!</u>***

   Legyen $a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n,\ a_0\neq 0$ n-ed fokú polinom. Rendeljük minden polinomhoz az együtthatókból képezhető szám ($n$ + 1) –eseket.: $(a_0;\ a_1,\ ....\ a_n),\ a_0\neq 0$. Ez egy bijektív leképezés az $n$-ed fokú polinom és az egész számok megszámolhatóan véges részhalmaza között. Így az $n$-ed fokú polinomok halmaza megszámolható. De ez azt jelenti, hogy a nulladfokú, első fokú, stb polinomok halmazai is megszámolhatók. És megszámolható halmazok egyesítése megszámolható.

## *Вправи для самостійного розв'язання:*

## *Feladatok*

1. Adja meg az $A=\{x|\ x^3-x^2+12x=0,\ \mathrm{x}\in R\}$ és $B=\{x|x^2-2\leq 0,\ \mathrm{x}\in \mathrm{Z}\}$ Descartes-féle szorzatát!
2. Adja meg $A^2$-et, ha $A=\{1;-3;5\}$!
3. Adja meg $B^2$-et, ha $B=\{x\in R|1-x^2=-x^3-x^2+3x+3\}$!
4. Az alábbi halmazokból képezze az $A\times B,\ B\times A,\ A^2,\ B^2$ Descartes-féle szorzatokat:
   1. $A=\{n\in Z|-4<n<0\}$ és $B=\{n\in Z\|n|<2\}$;
   2. $A=\{n\in N|-10<n<3\}$ és $B=\{n\in Z\|n-2|<2\}$!
5. Legyen $A=\{a,b\},\ B=\{c,\ b,\ a\}$. Írja fel az $(A\times B)\cap(B\times A)$ és az $(A\times B)\setminus(B\times A)$ halmazok elemeit.
6. . Szemléltesse az $XY$ sík pontjaival az $R^2$ következő részhalmazait:

   1) $A=\{(x,y)\in R^2|\ \ x+y-5=0\}$;

   2) $B=\{(x,y)\in R^2|\ \ x+y-5<0\}$;

   3) $C=\{(x,y)\in R^2|\ \ x^2+y^2=4\}$;

   4) $D=\{(x,y)\in R^2|\ \ x^2+y^2\geq 4\}$;

   5) $E=\{(x,y)\in R^2|\ \ x+x^3=y+y^3\}$;

   6) $F=\{(x,y)\in R^2|\ \ x^4-y^4=0\}$;

7) $G=\{(x,y)\in R^2 \mid \ x>0,\ y>0,\ x+y<4\}$;

8) $H=\{(x,y)\in R^2 \mid \ y\le 2\sqrt{x}\}$!

7. Szemléltesse az *XY* sík pontjaival az $A\cap B,\ A\cup B,\ A\setminus B,\ B\setminus A$ halmazokat:

1) $A=\{(x,y)\in R^2 \mid \ 2x-y\ge 0\}$, $B=\left\{(x,y)\in R^2 \mid \ -\frac{1}{2}x+y\ge 0\right\}$;

2) $A=\{(x,y)\in R^2 \mid \ x-y\ge 0\}$, $B=\{(x,y)\in R^2 \mid \ |x|+|y|<2\}$;

3) $A=\{(x,y)\in R^2 \mid \ y\ge \sqrt{x}\}$, $B=\{(x,y)\in R^2 \mid \ (x-2)^2+(y-4)^2<4\}$;

4) $A=\{(x,y)\in R^2 \mid \ y+3x^2\le 3\}$, $B=\{(x,y)\in R^2 \mid \ y\ge 3x^2-3\}$;

5. $A=\{(x,y)\in R^2 \mid \ \lg(x+y)\le \lg(2x-y)\}$, $B=\{(x,y)\in R^2 \mid \ (x-4)(y-4)\ge 0\}$!

8. Ábrázolja a $Z\times R$ és $R\times Z$ halmazokat a síkon!

9. Legyen $A=\{(x,y)\in R^2 \mid \ y=ax+b\}$ és $B=\{(x,y)\in R^2 \mid \ y=cx+d\}$. Mit mondhatunk az *a*, *b*, *c* és *d* paraméterekről, ha tudjuk, hogy

1) $A\setminus B=A$; 2) $A\setminus B=\emptyset$;

3) $A\cap B=\{(0;0)\}$; 4) $\{(1,0),(0,1)\}\subset A\cap B$.?

10. Szemléltesse egy koordinátarendszerben az $(A\cap B)\cup C$ és az $A\cap(B\cup C)$ halmaz elemeit, ha $A=\{(x,y)\in R^2 \mid \ y^2+x^2-8x-8y+16\le 0\}$, $B=\{(x,y)\in R^2 \mid \ y\ge |x-4|+4\}$ és $C=\{(x,y)\in R^2 \mid \ y\le -|x-4|+4\}$!

11. Legyenek *A*, *B*, *C* és *D* adott halmazok. Bizonyítsa be, hogy:

1) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$;

2) $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$;

3) $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$!

12. Határozza meg az alábbi *F* reláció értelmezési tartományát, értékkészletét és inverzét:

1) $A=\{-3;2;4;6;8\}$, $B=\{0;1;4;5;6\}$, $F\subset A\times B$, és *xFy* akkor és csak akkor, ha *x* + *y* = 6;

2) $A=\{0;7;9\}$, $B=\{0;5;6\}$, $F\subset A\times B$, és *xFy* akkor és csak akkor, ha *xy* = 0!

13. Döntse el, hogy az alábbi relációk közül melyek ekvivalencia relációk, félig rendezések, rendezési relációk:

1) $F\subset N\times N$, és *xFy* akkor és csak akkor , ha *y* osztója *x*-nek;

2) $F\subset Z\times Z$, és *xFy* akkor és csak akkor , ha *y* osztója *x*-nek;

3) $F\subset N\times N$, és *xFy* akkor és csak akkor , ha *y* – *x* osztható 3-mal;

4) *A* egy adott sík egyeneseinek halmaza, $F\subset A\times A$, és *xFy* akkor és csak akkor ha *x* párhuzamos *y*-nal;

5) *A* egy adott sík háromszögeinek halmaza, $F\subset A\times A$, és *xFy* akkor és csak akkor ha *x* hasonló *y*-nal;

6) *A* egy adott sík köreinek halmaza, $F\subset A\times A$, és *xFy* akkor és csak akkor ha *x* és *y* koncentrikusak, és x sugarának hossza nem nagyobb, mint y sugarának hossza;

7) *A* egy adott sík egyeneseinek halmaza, $F\subset A\times A$, és *xFy* akkor és csak akkor, ha *x* párhuzamos *y*-nal!

14. Adjon meg egy rendezési relációt az $N^2$ halmazon!

15. Adjon meg egy ekvivalencia relációt az $A=\{x;y;z\}$ halmazon!

## *Теоретичні питання*

## Elméleti kérdések

1. Definiálja a következő fogalmakat: reláció, reláció értelmezési tartománya és értékkészlete
2. Adja meg a függvény definícióját.
3. Hogyan értelmezzük halmaz függvény által létesített képét?
4. Mikor nevezünk egy függvényt invertálhatónak?
5. Mi a bijekció definíciója?

# Числові множини

# SZÁMHALMAZOK

***Alapfogalmak és jelölésük:***

*R* -- valós számok halmaza
*N* -- természetes számok halmaza
*Z* – egész számok halmaza
*Q* -- racionális számok halmaza
*I* – irracionális számok halmaza
*C* – komplex számok halmaza

***Főbb meghatározások:***

A v*alós számok* halmaza rendezett teljes test, tehát a következő axiómákkal jellemezhető:

1. Értelmezve van rajta az összeadás művelete, mely kielégíti a következő axiómákat
   kommutatív: $x+y=y+x$, $\forall x,y\in R$;
   asszociatív: $(x+y)+z=x+(y+z)$, $\forall x,y,z\in R$;
   létezik nullelem: $\exists 0\in R$, úgy hogy $\forall x\in R$, $x+0=x$;
   létezik additív inverz, ellentett elem: $\forall x\in R$ esetén $\exists(-x)\in R$, úgy hogy, $x+(-x)=0$.
2. Értelmezve van rajta a szorzás művelete, mely kielégíti a következő axiómákat
   kommutatív: $x\cdot y=y\cdot x$, $\forall x,y\in R$;
   asszociatív: $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$, $\forall x,y,z\in R$;
   létezik egységelem: $\exists 1\in R, 1\neq 0$, úgy hogy $\forall x\in R$, $1\cdot x=x$;
   létezik multiplikatív inverz, reciprok elem : $\forall x\in R$, $x\neq 0$, $\exists\frac{1}{x}\in R$, úgy hogy, $x\cdot\frac{1}{x}=1$.
   disztributív: $(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$, $\forall x,y,z\in R$.
3. Értelmezve van egy rendezési reláció, mely:
   reflexív: $x\leq x$, $\forall x\in R$;
   antiszimmetrukus: ha $x,y\in R$, $x\leq y$ és $y\leq x$, akkor $x=y$;
   tranzitív: ha $x,y,z\in R$, $x\leq y$ és $y\leq z$, akkor $x\leq z$;
   trichotóm: $\forall x,y\in R$, $x<y$, vagy $x=y$, vagy $y<x$.
4. A rendezést a műveletekkel az alábbi szabályok kapcsolják össze:
   ha $x,y,z\in R$ és $x\leq y$, akkor $x+z\leq y+z$;
   ha $x,y,z\in R$, $x\leq y$ és $z\geq 0$, akkor $x\cdot z\leq y\cdot z$.
5. Dedekind folytonossági elv (teljességi axióma): a rendezett test teljes ha bármely nem üres , felülről korlátos részhalmazának létezik pontos felső korlátja, tehát ha *A* és *B* a valós számok nem üres részhalmazai, akkor $\forall a\in A$ és $\forall b\in B$ elemekre, melyekre $a\leq b$, $\exists\xi\in R$, úgy hogy $a\leq\xi\leq b$.

***A valós számok részhalmazai***:
*Természetes számok halmazának* nevezzük a valós számok halmazának azon $N\subset R$ részhalmazát, melyre:
1. $1\in N$;
2. $\forall n\in N$ esetén $n+1\in N$.
*Egész számoknak halmazának* nevezzük a valós számok halmazának azon $Z\subset R$, részhalmazát, melyre:
1. $0\in Z$;

2. $\forall z \in Z$ esetén $z \in N$ vagy $-z \in N$.

<u>Racionális számoknak halmazának</u> nevezzük a valós számok halmazának azon részhalmazát, $Q \subset R$, melyre ha $x \in Q$, akkor $x = \frac{p}{q}$, ahol $p \in Z$ és $q \in N$.

<u>A racionális számok halmaza rendezett test.</u>

Az $I = R \setminus Q$ halmazt az <u>irracionális számok</u> halmazának nevezzük.

Minden valós szám felírható <u>végtelen tizedes tört</u> alakban: a racionális számok <u>végtelen szakaszos tizedes tört alakban</u>, az irracionálisak <u>végtelen</u> <u>nem szakaszos tizedes tört alakban.</u>

A <u>plusz végtelen</u> $(+\infty)$és a <u>mínusz végtelen</u> $(-\infty)$ olyan valós számok melyekre igaz, hogy:

1. $x + (\pm\infty) = \pm\infty,\ \forall x \in R$;
2. $x - (\pm\infty) = \mp\infty,\ \forall x \in R$;
3. $\pm\infty + (\pm\infty) = \pm\infty$;
4. $x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty,\ \forall x \in R^+$;
5. $x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$;
6. $\pm\infty \cdot (\pm\infty) = +\infty$;
7. $\pm\infty \cdot (\mp\infty) = -\infty$;
8. $\frac{x}{\pm\infty} = 0,\ \forall x \in R$.

Az $x \in R$ valós szám <u>abszolút értékének</u> nevezzük, az $|x| = \begin{cases} x, ha\ x \geq 0 \\ -x, ha\ x < 0 \end{cases}$ összefüggéssel értelmezett számot.

***A teljes indukció módszere:***

1. lépés: Keressen olyan természetes számot melyre az állítás teljesül.
2. lépés: Feltételezze, hogy n-re igaz az állítás, majd bizonyítsa be, hogy ebből ($n$ + 1)-re is következik (öröklődik) az állítás érvényessége.

***Az abszolút érték tulajdonságai:***

1. $|x| > 0$;
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
3. $|x| = |-x|$;
3. $\big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$ (háromszög egyenlőtlenség);
4. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;
5. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

Az $M$ ($m$) számot az $A \subset R$ halmaz <u>maximumának (minimumának)</u> nevezzük, ha bármely $x \in A$ elemre igaz, hogy $x \leq M$, $(x \geq m)$ és $M$ ($m$) elemei az $A$ halmaznak: $M$ = max $A$; $m$ = min $A$.

A $k$ ($K$) valós számot az $A \subset R$ halmaz <u>alsó (felső)</u> korlátjának nevezzük, ha bármely $x \in A$ elemre igaz, hogy $x \geq k$, $(x \leq K)$.

Egy halmazt <u>korlátos</u>, ha létezik alsó és felső korlátja is.

Az $N$ ($n$) számot az $A \subset R$ halmaz <u>szuprémimának (infimumának)</u> nevezzük, ha bármely $x \in A$ elemre igaz, hogy $x \leq N$, $(x \geq n)$ és $N$ ($n$) bármely környezetében van A-beli elem: $N$ = sup $A$; $n$ = inf $A$. inf $A$ a legnagyobb alsó korlát, sup $A$ a legkisebb felső korlát.

Az $a$ számot az $A \subset R$ halmaz <u>torlódási helyének</u> nevezzük, ha az $a$ szám bármelyik környezete az $A$ halmaz végtelen sok elemét tartalmazza.

$$\sup N = \sup Z = \sup Q = \sup R = \infty.$$
$$\inf N = \min N = 1.$$
$$\inf Z = \inf Q = \inf R = -\infty.$$

<u>*Végesnek*</u> nevezzük azokat a halmazokat, melyek elemszáma véges, vagyis kölcsönösen egyértelműen leképezhetők a természetes számok $\{1, 2; 3; ...; n\}$ részhalmazára.

*Megszámlálhatók* azok a halmazok, melyek kölcsönösen egyértelműen leképezhetők a természetes számok halmazára.

<u>*Kontinium számosságúak*</u> azok a halmazok melyek nem képezhetők le a teremészetes számok halmazára, nem ekvivalensek vele.

## *Típus feladatok megoldása:*

**1.** Igazolja az $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ állítást a teljes indukció módszerével!

Ellenőrizzük $n = 1$ esetre:

$1^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$. Ez igaz, mert 1 = 1.

Feltételezzük, hogy az állítás igaz $n = k$-ra is: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

Igazoljuk, hogy $n = k + 1$ esetben is igaz állítást kapunk, vagyis

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k(2k+1)+6(k+1))}{6} =$$
$$= \frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2+7k+8)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Az állítást igazoltuk.

**2.** Bizonyítsa be, hogy $5^n + 2\cdot 3^{n-1} + 1$ osztható 8-cal, bármilyen természetes szám is az n!

Ellenőrizzük $n = 1$ esetre:

$5^1 + 2\cdot 3^{1-1} + 1 = 8$. Ez igaz, mert8 osztható 8-cal.

Feltételezzük, hogy az állítás igaz $n = k$-ra is: $5^k + 2\cdot 3^{k-1} + 1$ is osztható 8-cal.

Igazoljuk, hogy $n = k + 1$ esetben is igaz állítást kapunk, vagyis $5^{k+1} + 2\cdot 3^k + 1$ is többszöröse a 8 –nak.

$$5^{k+1} + 2\cdot 3^k + 1 = 5\cdot 5^k + 2\cdot 3^{k-1+1} + 1 = 5\cdot 5^k + 6\cdot 3^{k-1} + 1 =$$
$$= 5(5^k + 2\cdot 3^{k-1} + 1) - 4\cdot 3^{k-1} - 4 = 5\cdot(5^k + 2\cdot 3^{k-1} + 1) - 4\cdot(3^{k-1} + 1).$$

A kapott különbség osztható 8-cal, mivel a kisebbítendő olyan szorzat melynek egyik tényezője az indukciós feltétel alapján osztható 8-cal, a kivonandó egyik tényezője négy a másik viszont $k$ bármely értékére páros, így ez a szorzat is osztható 8-cal.

3. Igazolja, hogy $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ !

Alkalmazzuk a valós számok tulajdonságait:

$$\frac{ab+cd}{bd} = (ab+cd)\cdot(bd)^{-1} = ab\cdot(bd)^{-1} + cb\cdot(bd)^{-1} = ab(b^{-1}\cdot d^{-1}) + cd(b^{-1}\cdot d^{-1}) =$$
$$= (ad^{-1})(bb^{-1}) + (cb^{-1})(dd^{-1}) = (ad^{-1})\cdot 1 + (cb^{-1})\cdot 1 = \frac{a}{d} + \frac{c}{b}.$$

## *Вправи для самостійного розв'язування:*

## *Feladatok*

1. Igazolja, hogy az $X \subset R$, $X = \{a + b\sqrt{3} \in R | a, b \in Q\}$ halmaz a szokásos R-beli összeadással és szorzással testet alkot! Mutassa meg, hogy $Q \neq X \neq R$!

2. Az alábbi számok közül melyek racionálisak? A racionális számokat írja fel közönséges tört alakban:

1) $\sqrt{10}$; 2) 1,025; 3) 3,(6); 4) 2,(13); 5) 3, 020020002…; 6) 5,4(23); 7) 12,123(9); 8) 3,341565656…;

9) $\sqrt{\frac{144}{625}}$; 10) $\sqrt{28+10\sqrt{3}} - \sqrt{28-10\sqrt{3}}$; 11) $\sqrt{28+10\sqrt{3}} + \sqrt{28-10\sqrt{3}}$!

3. Igaz-e, hogy két irracionális szám összege irracionális?
4. Igaz-e, hogy két irracionális szám szorzata irracionális szám?
5. Igaz-e, hogy két irracionális szám összege racionális szám?
6. Igaz-e, hogy két irracionális szám szorzata racionális szám?
7. Igazolja, hogy $\sqrt{5}$ irracionális szám!
8. Igazolja, hogy $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ irracionális szám!
9. Igazolja, hogy $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ és $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$ egymás reciprokai!
10. Igazolja, hogy $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ és $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ egymás reciprokai!
11. Határozza meg az alábbi halmazok maximumát, minimumát, szuprémumát, infimumát. Állapítsa meg, korlátosak-e!

1) $A = [-8;4]$;

2) $D = \{-1;0;1;2;3;4;...\}$;

3) $B = \left\{2; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \frac{5}{4}; ...; \frac{n+1}{n}; \right\}$;

4) $E = \left\{\frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; .....\right\}$;

5) $F = \{x \in Q | x^2 - 5x + 6 < 0\}$;

6) $M = \{x \in Q | \sqrt[3]{x+2} < 4\}$;

7) $N = \{x \in R | \sin x - \cos 2x \geq 0\}$

8) $G = \left\{n \in N \left| \frac{5^{n+1} + (-1) \cdot 2}{5^n} \right.\right\}$;

9) $H = \left\{n \in N \left| \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right.\right\}$.

12. Igaz-e a válós számok bármely két *A* és *B* korlátos részhalmazára, hogy:

1) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$, ha $A + B = \{a + b | a \in A \text{ és } b \in B\}$;

2) $\sup(A-B) = \sup A - \sup B$, ha $A - B = \{a - b | a \in A \text{ és } b \in B\}$;

3) $\sup(A-B) = \sup A + \inf B$, ha $A - B = \{a - b | a \in A \text{ és } b \in B\}$;

4) $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$, ha $A + B = \{a + b | a \in A \text{ és } b \in B\}$;

5) $\inf(A-B)=\inf A-\inf B,$ ha $A+B=\{a-b|a\in A \text{ és } b\in B\}$;

6) $\inf(A\cup B)=\min\{\inf A;\ \inf B\}$;

7) $\sup(A\cup B)=\max\{\sup A;\ \sup B\}$;

8) $\inf(A\cdot B)=\inf A\cdot\inf B,$ ha $A\cdot B=\{a\cdot b|a\in A \text{ és } b\in B,\ a,b>0\}$;

9) $\sup(A\cdot B)=\inf A\cdot\inf B,$ ha $A\cdot B=\{a\cdot b|a\in A \text{ és } b\in,\ a,b<0\}$.

13. Oldja meg az alábbi egyenleteket:

1) $|5x-4|=26$; 2) $|x^2-4x+3|=1$;

3) $|x-4|+|x+4|=8$; 4) $|2x-6|+|x-1|-|4+x|=9$;

5) $\sqrt{(5x-3)^2}=3-5x$; 6) $\sqrt{25^2+20x+4}+|x-6|=1$

7) $\dfrac{\sqrt{x^2+6x+9}}{|x-1|}=8$ 8) $\left|\dfrac{\sqrt{x^2-16x+64}}{x+3}\right|=1$!

14. Oldja meg a következő egyenlőtlenségeket:

1) $|5x-4|\le 26$; 2) $x^2-25\ge 0$;

3) $3x^2-27<0$; 4) $x^2-|x|-12<0$;

5) $|x^2-x|<x$; 6) $|x^2-2x-3|<3x-3x$;

7) $x^2-|5x+8|>0$; 8) $x^2+3|x|+2>6x|x|$;

9) $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2+2x+1}\le\sqrt{x^2+4x+4}$;

10). $\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2-6x+9}\ge\sqrt{x^2-2x+1}$!

15. Határozza meg az alábbi halmazok számosságát:

1) a racionális számok halmaza;

2) az egész számok halmaza;

3) $A=\{x|x=2n, n\in N\}$;

4) $B=\{x|x=5^n, n\in N\}$;

6) $C=\{x|x\in[0;1]\}$;

7) $A=\{(x;y)|x\in Z \text{ és } y\in Z\}$

16. Igazolja a következő állításokat:

1) $3+5+...+2n+1=n^2+2n$;

2) $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+\dfrac{1}{9\cdot 13}+...+\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\dfrac{n}{4n+1}$;

3) $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

4) $1^3+2^3+3^3+...+n^3=(1+2+3+...+n)^2$;

5) $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;

6) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+n(n+1)=\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$;

7) $1+2+2^2+2^3+..+2^{n-1}=2^n-1$;

8) $1-\dfrac{1}{2!}-\dfrac{2}{3!}-...-\dfrac{n-1}{n!}=\dfrac{1}{n!}$;

9) $1!1+2!2+...+n!n=(n+1)!-1$;

10) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$ ;

11) $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^{k-1}$ !

17. Bizonyítsa be, hogy $n^3 + 5n$ osztható 6-tal, bármilyen természetes szám is az *n*!
18. Bizonyítsa be, hogy $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ osztható 8-cal, bármilyen természetes szám is az *n*!
19. Igazolja, hogy $7^n + 3^{n+1}$, osztható 4-gyel!
20. Igazolja, hogy $7^n + 3n - 1$, osztható 9-cel!
21. Igazolja, hogy $7 \cdot 5^{2n-1} + 2^{3n+1}$, osztható 17-tel!
22. Igazolja, hogy $5 \cdot 9^{n-1} + 2^{4n-3}$, osztható 7-tel!
23. Igazolja, hogy $6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}$, osztható 17-tel!
24. Igazolja az alábbi egyenlőtlenségeket:

1) $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{n^2} > 1$, ha $n \geq 2$;

2) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$, ha $n \geq 2$;

3) $\frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{4^n}{n+1}$, ha $n \geq 2$;  4) $(1+x)^n \geq 1 + nx$, ha $x \geq -1$;

5) $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$, ha $a_n \in R^+, \forall n - re$;

6) $(a_1 + a_2 + ... + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} ... + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$, ha $a_n \in R^+, \forall n - re$!

25. Adja meg képletettel a következő összegeket!

1) $1 + 3 + 5 + .. + (2n-1)$;

2) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$;

3) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

4) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + .. + \sin n\alpha$;

5) $\cos\alpha + \cos 2\alpha + .. + \cos n\alpha$ !

26. Bizonyítsa be a halmazműveletek disztributív tulajdonságát kettőnél több halmazra.
27. Bizonyítsa be a de Morgan azonosságot tetszőleges számú halmaz esetében!
28. Igazolja, hogy egy *n* elemű halmaz részhalmazainak a száma $2^n$!

## *Теоретичні питання*

## *Elméleti kérdések*

1. Ismertesse a teljességi axiómát
2. Definiálja az egész számok halmazát.
3. Definiálja a racionális számok halmazát
4. Definiálja az irracionális számok halmazát
5. Fogalmazza meg a Bernoulli–egyenlőtlenséget.
6. Ismertesse a valós számok axióma rendszerét.
7. A szám abszolút rétéke és az abszolút érték tulajdonságai.
8. Adja meg a teljes matematikai indukció fogalmát.

9. Mondja ki a végtelen halmazok részhalmazának számosságéról szóló tételt.
10. Milyen a racionális számok halmazának számossága?
11. Milyen a valós számok halmazának számossága?
12. Mondja ki a megszámlálható számosságú vagy véges halmazok uniójának számosságáról szóló tételt
13. Adja meg a halmaz korlátosságának szükséges és elégséges feltétele.
14. Mondja ki az egymásba skatulyázott szakaszokról szóló tételt.
15. Egy korlátos halmaznak hány legkisebb felső ( legnagyobb alsó) korlátja létezik?

# ГРАНИЦЯ ЧИСЛОВОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

## SZÁMSOROZATOK HATÁRÉRTÉKE

***Főbb meghatározások:***

1. <u>*Sorozatnak*</u> nevezzük a természetes számok halmazán vagy annak egyik részhalmazán értelmezett egyértelmű leképzést, függvényt: $F \subset N \times R$; f: $N \to R$.Jelölések: $a : n \to a(n)$; $(a_n)$; $\{a_n\}$.
2. A <u>*sorozat megadható*</u>:
   általános tagjának képletével;
   tagjai felsorolásával;
   rekurzív képlettel.
3. A sorozatok tulajdonságai:
   Az $(a_n)$ számsorozat <u>*alulról korlátos*</u>, ha létezik olyan K valós szám, amelynél a sorozat minden tagja nagyobb vagy egyenlő: $\exists K,\ \forall n \in N,\ a_n \geq K.$
4. Az $(a_n)$ számsorozat <u>*felülről korlátos*</u>, ha létezik olyan k valós szám, amelynél a sorozat minden tagja kisebb vagy egyenlő: $\exists k,\ \forall n \in N, a_n \leq k.$
5. Az $(a_n)$ számsorozat <u>*korlátos*</u>, ha létezik alsó és felső korlátja is:
   $\exists M,\ \forall n \in N, |a_n| < M.$
6. Az $(a_n)$ számsorozat <u>*monoton növekvő*</u>, ha $\forall n \in N$ -re $a_n < a_{n+1}$.
7. Az $(a_n)$ számsorozat <u>*monoton csökkenő*</u>, ha $\forall n \in N$ -re $a_n > a_{n+1}$.
8. A sorozat <u>*konvergens*</u>, és az *A*-hoz konvergál, ha bármilyen $\varepsilon > 0$ értékre a sorozatnak véges sok tagja van az *A* szám $\varepsilon$ környezetén kívül:
   $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n > n_0, |a_n - A| < \varepsilon$.
9. Az $n_0$ <u>*küszöbszámnak*</u> nevezzük.
10. A nem konvergens sorozatot <u>*divergens*</u> sorozatnak nevezzük.
11. <u>*Nullsorozatnak nevezzük*</u> azokat a sorozatokat, melyek határértéke 0.

***Főbb tételek:***

1. Két konvergens sorozat összege, különbsége, szorzata és hányadosa is konvergens sorozat.
2. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *és* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B,\ B \neq 0,$ *akkor*:
   1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$;
   2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$;
   3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$;
   4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$;
   5) $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot a_n = cA$;
   6) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{A}$.
3. A sorozat konvergens, ha korlátos és monoton.
4. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$.

5. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.
6. Rendőr elv: Ha $(a_n), (b_n)$ *és* $(c_n)$ olyan sorozat, amelyre $a_n \le b_n \le c_n$ és $(a_n)$ *és* $(c_n)$ konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$, akkor a $(b_n)$ sorozat is konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.
7. Ha $(a_n)$ *és* $(b_n)$ olyan sorozat, amelyre $a_n \le b_n$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
8. Ha $(a_n)$ *és* $(b_n)$ olyan sorozat, amelyre $a_n \ge b_n$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \ge \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

***Nevezetes sorozatok határértékei:***

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 1, \text{ ha } q = 1, \\ 0, \text{ ha } |q| < 1, \\ \infty, \text{ ha } q > 1, \\ \text{nem létezik, ha } q < -1. \end{cases}$

## *Típus feladatok megoldása:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[3]{n} + \sqrt[5]{n^{10}+1}}{\sqrt[3]{8n^3+1}}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2(n^2+4)} - \sqrt{n^4+4n^2-6}}{2n}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2+4+...+2n}{n+3} - n\right)$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{4n^2+n+7}{4n^2+n+5}\right)^{2-3n}$.

a) Mivel $\frac{\infty}{\infty}$, ezért a nevezőben kiviszünk $n^2$ szorzót a zárójel elé, a számlálóból pedig $n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} + \sqrt[5]{1+\frac{1}{n^{10}}}\right)}{\sqrt[3]{8+\frac{1}{n^3}} \cdot n} = \lim_{n\to\infty} n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} + \sqrt[5]{1+\frac{1}{n^{10}}}\right)}{\sqrt[3]{8+\frac{1}{n^3}}} = \infty \cdot \frac{1}{2} = \infty$$

b) $\infty - \infty$, a számlálót és a nevezőt is megszorozzuk a konjugáltjával:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2(n^2+4)}-\sqrt{n^4+4n^2-6}\right)\left(\sqrt{n^2(n^2+4)}+\sqrt{n^4+4n^2-6}\right)}{2n\left(\sqrt{n^2(n^2+4)}+\sqrt{n^4+4n^2-6}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n^2+4)-(n^4+4n^2-6)}{2n\left(\sqrt{n^2(n^2+4)}+\sqrt{n^4+4n^2-6}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{2n\left(\sqrt{n^2(n^2+4)}+\sqrt{n^4+4n^2-6}\right)}=0.$$

c) Alakalmazzuk $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$, mivel 2, 4, … , $2n$ számok számtani sorozatot alkotnak, ahol $a_1=2,\quad a_n=2n$, akkor

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+2n}{2}\cdot n\cdot\frac{1}{n+3}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(1+n)-n(n+3)}{n+3}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{n+3}=\left\{\frac{-\infty}{\infty}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{n\left(1+\frac{3}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2}{\left(1+\frac{3}{n}\right)}=-2.$$

d) vizsgáljuk a kifejezés alapját:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+n+7}{4n^2+n+5}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{1}{n}+\frac{7}{n^2}}{4+\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}=\frac{4+0+0}{4+0+0}=1.$$

Így, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+n+7}{4n^2+n+5}\right)^{2-3n}=\left\{1^\infty\right\}.$

$$A=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4n^2+n+7}{4n^2+n+5}-1\right)^{2-3n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4n^2+n+7-4n^2-n-5}{4n^2+n+5}\right)^{2-3n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{4n^2+n+5}\right)^{2-3n}.$$

*Használjuk fel/* $\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$, ekkor

$$A=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{4n^2+n+5}\right)^{\frac{4n^2+n+5}{2}}\right]^{\frac{(2-3n)2}{4n^2+n+5}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2(2-3n)}{4n^2+n+5}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\left(\frac{2}{n}-3\right)}{n\cdot\left(4+\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}}=e^{\frac{-6}{4\cdot\infty}}=e^0=1.$$

Тут $\alpha=\frac{2}{4n^2+n+5}$, $\lim_{n\to\infty}\alpha=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{4n^2+n+5}=0$.

Vagyis, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{4n^2+n+5}\right)^{\frac{4n^2+n+5}{2}}=e$.

## *Вправи для самостійного розв'язання:*

## *Feladatok*

1. Adja meg a következő sorozatok első öt tagját!

1) $a_n = \frac{24}{n}$; 2) $a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$; 3) $a_n = \sin\frac{\pi}{4}n$;

4) $a_n = \left(\cos\frac{\pi n}{2}\right)^{\left|\sin\frac{\pi n}{2}\right|}$; 5); $a_n = 1 - \frac{1}{n^2}$; 6) $a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$;

7) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$; 8) $a_n = 1 + (-1)^{n-1}\frac{1-n}{n!}$; 9) $a_n = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$;

10) $a_n = n^n$; 11) $a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$; 12) $a_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}k$;

13) $a_n = \begin{cases} 5, \text{ ha } n = 2k, \text{ ahol } k \in N, \\ n+1, \text{ ha } n = 2k-1, \text{ ahol, } k \in N; \end{cases}$

14) $a_n = \begin{cases} \left[n + \frac{n+1}{n}\right], \text{ ha } n \text{ páros}, \\ -\left[n + \frac{n+1}{n}\right], \text{ ha } n \text{ páratlan}; \end{cases}$

15) $a_n = \begin{cases} 3^n, \text{ ha } n = 2k, \text{ ahol } k \in N, \\ \frac{1}{3^n}, \text{ ha } n = 2k-1, \text{ ahol, } k \in N! \end{cases}$ Adja meg a következő sorozatokat általános tagjával:

1) $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \ldots\ldots;$ 2) $\frac{1}{5}; \frac{2}{6}; \frac{3}{7}; \ldots\ldots;$ 3) 1; -1, 1; -1; … ;

4) $i, -1; -i, 1, \ldots;$ 5) 0,7; 0,77; 0,777; 0,7777; … ;

6) $1\cdot 5,\ 2\cdot 5^2,\ 3\cdot 5^n, \ldots;$ 7) $\frac{3}{2}; \frac{9}{3}; \frac{27}{4}; \ldots;$ 8) $1; \frac{1}{3^2}; \frac{1}{5^2}; \frac{1}{7^2}; \ldots$

9) $1; 2\frac{1}{4}; 2\frac{7}{9}; 3\frac{1}{16}; 3\frac{6}{25}; \ldots;$ 10) $\frac{1}{1+1}; \frac{1\cdot 2}{2^2+1}; \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3^3+1}; \ldots.!$ Írja fel az alábbi sorozatokat rekurzívan:

1) 3; 6; 9; 12; …; 2) 1; 2; 3; 5; 8; 13;…; 3) $\sqrt{2}; \sqrt{2+\sqrt{2}}; \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}; \ldots\ldots!$

4. Vizsgálja a következő sorozatokat monotonitás és korlátosság szempontjából:

1) $a_n = \frac{24}{n}$; 2) $a_n = \frac{3n-1}{5n+1}$; 3) $a_n = \frac{6-n}{5n-1}$;

4) $a_n = \frac{10n-5}{2n}$; 5) $a_n = \frac{7n+3}{2n+1} - \frac{10n+1}{12n+6} + \frac{4-5n}{12n+6}$;

6) $a_n = \frac{n+2n^2}{5n+1}$; 7) $a_n = \frac{3n-2n^2}{6+1n}$; 8) $a_n = \frac{7^{n+1}-1}{7^n}$;

9) $a_n = (-1)^n \cdot 7^{-n}$; 10) $a_n = \frac{11^n}{n!}$; 11) $a_n = \frac{n!}{n^n}$;

12) $a_n = \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2+7n+6}$; 13) $a_n = \frac{1+2+3+\ldots+n}{n+4} - \frac{n}{2}$;

14) $a_n = \dfrac{1^3 + 2^3 + ... + n^3}{1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + .... + n(n+1)(n+2)}$;

15) $a_n = \dfrac{1+\cos n\pi}{2}$; 16) $a_n = \dfrac{1^2 + 2^2 + ... + n^2}{n+1} - \dfrac{(n-1)^2}{5}$ !

5. Az *a*, *b*, *c* és *d* mely értékeinél lesz az $a_n = \dfrac{an+b}{cn+d}$ sorozat növekvő?

6. Igazolja a következő sorozatok határértékét, és határozza meg az $\varepsilon$ =0,01 értékhez tartozó küszöbszámot:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{24}{n} = 0$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{18n-3}{5+2n} = 9$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n-30}{12+6n} = \dfrac{5}{6}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n-5}{23-3n} = -2$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\dfrac{1}{n^2}\right) = 0$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2n^2+1} = \dfrac{1}{2}$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-3n+1}{3n^2+7n+8} = \dfrac{2}{3}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+1}{2^n} = 1$; 11) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{35n} = 0$; 12) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n n^2}{5n^5+16} = 0$;

13) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+..+n}{n^2+9n+8} = \dfrac{1}{2}$; 14) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5} = 1$!

7. Határozza meg a következő sorozatok határértékét:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{3n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{9n+2}{n+247}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{72-5n}{3+8n}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{89-11n}{6-3n}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{n^2}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2n}{4+n^2+n^3}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{18n^2+2n^5}{8-n^6-7n^4}$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{32n-62n^2+3n^3}{3n^4+23}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+5}{n}$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sin n!}{n^2+1}$; 11) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{16-n+9n^2-4n^6}{3+13n+5n^5}$;

12) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^8+99n^6-35n^4-5n^2+6}{78-n-n^3-n^5+6n^7}$; 13) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n-5)^4-5n^5}{n^3-(4n-6)^5}$;

14) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^3}{n^2+1} - \dfrac{3n^2}{3n-1}\right)$; 15) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}$; 16) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n(n-4)}}{\sqrt{5+(1+n)^2}}$;

17) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{3+5+...+7}}{3n-7}$; 18) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+...+n}{\sqrt{9n^2+1}}$; 19) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+13}}{\sqrt[5]{n^{10}+7n}-8}$;

20) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n+5n^9}+(n-2)(n+4)}{(2+3n)^3}$; 21) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{C_n^3}{6n^3-5n+12}$; 22) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{C_n^4+n^4+5n}{C_n^{n-3}}$ !

8. Határozza meg a következő sorozatok határértékét:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5\cdot 3^n}{3^n-2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{11^n+7^{n+2}}{11^{n-1}}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+5^{-n+2}}{5^{n+1}+2^{-n}}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{-n}+e^n}{e^n-e^{-n}}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n}\right)$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)$;

7); $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+n^2}-n\right)$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n^2-6n+3}-\sqrt{3n^2+4n-5}\right)$; 10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+3)(n-1)}-\sqrt{(n-3)(n+1)}\right)$;

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{n^2}\right)$; 12) $\lim\limits_{n\to 1}\dfrac{1-\sqrt[5]{n}}{1-\sqrt[3]{n}}$ !

9. Határozza meg a következő sorozatok határértékét:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^5$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{11}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{4n}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{n}\right)^{n}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{4n}\right)^{n}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{11}{n}\right)^{n}$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{3n}\right)^{n}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{6n}\right)^{n}$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{11n}\right)^{n}$; 11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n}$; 12) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2-n}{n}\right)^{n}$;

13) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+10}\right)^{n}$; 14) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-4}{2+3n}\right)^{n}$; 15) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n-2}{8+4n}\right)^{2n}$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5-12n}{12n+1}\right)^{\frac{n}{3}}$; 15) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}$; 17) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n-25}{5n+20}\right)^{n+5}$;

18) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+12\right)^{n}$; 19) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$; 19) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln(n+3)-\ln n)$;

20) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln n-\ln(n+2))$;21) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^{n}$; 22) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+3}{n^2+12}\right)^{\frac{3}{2}n^2}$ !

## *Теоретичні питання*

## *Elméleti kérdések*

1. Legyen $(x_n)$ $n\in N$ egy valós számsorozat. Mit értünk azon, hogy az $(x_n)$ $n\in N$ sorozat konvergens?
2. Legyen $(x_n)$ $n\in N$ egy valós számsorozat. Mit értünk azon, hogy az $(x_n)$ $n\in N$ sorozat Cauchy–sorozat?
3. Ismertesse a valós számsorozatokra vonatkozó Cauchy–féle konvergenciakritériumot.
4. Ismertesse a Bolzano–Weierstrass–féle kiválasztási tételt.
5. Fogalmazza meg a Rendőr–elvet.
6. A számsorozatok fogalma és megadási módjai
7. Mit nevezünk korlátos sorozatnak?
8. Milyen összefüggéséket ismer s sorozat korlátossága és konvergenciája között?
9. 0 sorozatok, műveletek 0-sorozatokkal és konvergens sorozatokkal
10. Vizsgálja az alábbi sorozatokat! Ha konvergens, akkor mi akkor számítsa ki a határértékét!
    a) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$
    b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$
    c) $\lim\limits_{n\to\infty} n^a$

11. Az e szám. Következmények.
12. Részsorozatok. Bolzano-Weietsrass-féle kiválasztási tétel

# ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

# VALÓS FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE

***Főbb meghatározások***:

***Heine-féle meghatározás***:

Az $f: M \to R,\ \ M \subset R$ függvény határértéke az $x = a$ helyén az *A* szám, ha bármely $x = a$-hoz konvergáló $(x_n),\ \ x_n \in M$ abszcissza sorozathoz tartózó függvényértékek $(f(x_n))$ sorozata az *A*-hoz tart: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Az $f: M \to R,\ \ M \subset R$ függvény határértéke az $x = a$ helyén végtelen, ha bármely $x = a$-hoz konvergáló $(x_n),\ \ x_n \in M$ abszcissza sorozathoz tartózó függvényértékek $(f(x_n))$ sorozata a végtelenhez tart: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Az $f: M \to R,\ \ M \subset R$ függvény határértéke az *A* szám, ha bármely végtelenbe tartó $(x_n),\ \ x_n \in M$ abszcissza sorozathoz tartózó függvényértékek $(f(x_n))$sorozata az *A*-hoz tart: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

Az $f: M \to R,\ \ M \subset R$ függvény határértéke végtelen, ha bármely végtelenbe tartó $(x_n),\ \ x_n \in M$ abszcissza sorozathoz tartózó függvényértékek $(f(x_n))$sorozata az végtelenhez tart: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.

***Cauchy szerinti meghatározások:***

Az $f: M \to R,\ \ M \subset R$ függvény határértéke az $x = a$ helyén az *A* szám, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ hogy bármely az *a* szám $\delta$ környezetéből vett abszcisszához tartózó függvényérték az *A* szám $\varepsilon$ környezetéhez tartozik: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, ha $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$, hogy ha $0 < |x - a| < \delta$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Az $f: M \to R,\ \ M \subset R$ függvény határértéke az $x = a$ helyén plusz végtelen, ha bármely *K* számhoz létezik olyan $\delta > 0$ hogy bármely az *a* szám $\delta$ környezetéből vett abszcisszához tartózó függvényérték nagyobb mint K: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, ha $\forall K,\ \exists \delta > 0$, hogy ha $0 < |x - a| < \delta$, akkor $f(x) > K$.

Az $f: M \to R,\ \ M \subset R$ függvény határértéke az $x = a$ helyén minusz végtelen, ha bármely *K* számhoz létezik olyan $\delta > 0$ hogy bármely az *a* szám $\delta$ környezetéből vett abszcisszához tartózó függvényérték kisebb, mint K: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, ha $\forall K,\ \exists \delta > 0$, hogy ha $0 < |x - a| < \delta$, akkor $f(x) < K$.

Az $f: M \to R,\ \ M \subset R$ függvény határértéke a plusz végtelenben *A*, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan *K* szám, hogy bármely az $x > K$ abszcisszánál a függvényérték az A szám $\varepsilon$ környezetéhez tartozik: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$, ha $\forall \varepsilon > 0,\ \exists K$, hogy ha $x > K$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Az $f: M \to R,\ \ M \subset R$ függvény határértéke a plusz végtelenben plusz végtelen, ha bármely $K$ számhoz létezik olyan $N$ szám, hogy bármely az $x > K$ abszcisszánál a függvényérték nagyobb, mint $N$: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, ha $\forall K, \exists N$, hogy ha $x > N$, akkor $f(x) > K$.

Az $f: M \to R,\ \ M \subset R$ függvény <u>*bal oldali határértéke*</u> az $x = a$ helyén az $A$ szám, ha bármely $x = a$-hoz konvergáló $(x_n)$, $x_n \in M$ és $x_n < a$, abszcissza sorozathoz tartózó függvényértékek $(f(x_n))$ sorozata az $A$-hoz tart: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A$.

Az $f: M \to R,\ \ M \subset R$ függvény <u>*jobb oldali határértéke*</u> az $x = a$ helyén az $A$ szám, ha bármely $x = a$-hoz konvergáló $(x_n)$, $x_n \in M$ és $x_n > a$, abszcissza sorozathoz tartózó függvényértékek $(f(x_n))$ sorozata az $A$-hoz tart: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A$.

Az $f: M \to R,\ \ M \subset R$ függvény <u>*bal oldali határértéke*</u> az $x = a$ helyén az $A$ szám, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ hogy bármely az $a$ szám $\delta$ környezetéből vett abszcisszához tartózó függvényérték az $A$ szám $\varepsilon$ környezetéhez tartozik: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A$, ha $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, hogy ha $0 < a - x < \delta$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Az $f: M \to R,\ \ M \subset R$ függvény <u>*jobb oldali határértéke*</u> az $x = a$ helyén az $A$ szám, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ hogy bármely az $a$ szám $\delta$ környezetéből vett abszcisszához tartózó függvényérték az $A$ szám $\varepsilon$ környezetéhez tartozik: Az $f: M \to R,\ \ M \subset R$ függvény az $x = a$ pontjában, ha $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, hogy ha $0 < x - a < \delta$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$.

***Főbb tételek:***

Ha $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ *és* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B,\ B \neq 0,$ *akkor*:

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = A + B$;

2); $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x) = A - B$

3) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = A \cdot B$;

4) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{A}{B}$;

5) $\lim\limits_{x\to a} c \cdot f(x) = c \lim\limits_{x\to a} f(x) = cA$.

***Nevezetes határértékek:***

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$;

## *Típus feladatok megoldása:*

1. Igazolja a definíció alapján, hogy a következő függvény határértékét $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{15x^2-60x+45}{x-3}=30$. Adott $\varepsilon$ értékhez határozza meg a $\delta(\varepsilon)$ értéket.

   **Megoldás:** $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta(\varepsilon)>0$ , ha $0<|x-3|<\delta$, akkor

   $$\left|\frac{15x^2-60x+45}{x-3}-30\right|<\varepsilon,$$

   $$\left|\frac{15x^2-60x+45}{x-3}-30\right|=\left|\frac{15(x-3)(x-1)}{x-3}-30\right|=|15(x-1)-30|=$$

   $=15|x-1-2|=15|x-3|<\varepsilon$.Отже, $0<|x-3|<\dfrac{\varepsilon}{15}\Rightarrow\delta(\varepsilon)=\dfrac{\varepsilon}{15}$.

2. Határozza meg a következő határértékeket!

   a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{2x+2}-16}{\sin(x^2+2x)}$;

   b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-x+1}-1}{\mathrm{tg}\pi x}$;

   c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x^3 2^x}{1+x^3 5^x}\right)^{\frac{1}{\mathrm{arctg}^3 x}}$;

   d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)^{\frac{1}{\mathrm{tg}x}}$;

   e) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}}$.

Megoldás:

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{4^{2x+2}-16}{\sin(x^2+2x)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{16(16^x-1)}{\sin(x^2+2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{16x\ln 16}{x^2+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{16\ln 16}{x+2}=8\ln 16=32\ln 2.$$

b) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2-x+1}-1}{tg\pi x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{matrix} x-1=t \\ x=t+1 \\ t\to 0\ \ при\ \ x\to 1\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{(t+1)^2-(t+1)+1}-1}{tg\pi(t+1)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{t^2+t+1}-1}{tg\pi t}==\lim_{t\to 0}\frac{\left(1+(t^2+t)\right)^{\frac{1}{3}}-1}{tg\pi t}$$

ha a számlálót és nevezőt felcseréljük ekvivalens kifejezésekkel, akkor a következőt kapjuk

$$\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{3}\left(t^2+t\right)}{\pi t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{3\pi}(t+1)=\frac{1}{3\pi}$$

c) Könnyen belátjató $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x^3 2^x}{1+x^3 5^x}\right)^{\frac{1}{\mathrm{arctg}^3 x}}=\left\{1^{\infty}\right\}$.

Jelöljük $A$ –val a keresett határértéket, ekkor :

$$A=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1+x^3 2^x}{1+x^3 5^x}-1\right)^{\frac{1}{arctg^3 x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x^3(2^x-5^x)}{1+x^3 5^x}\right)^{\frac{1}{arctg^3 x}}==\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{arctg^3 x}\ln\left(1+\frac{x^3(2^x-5^x)}{1+x^3 5^x}\right)}$$

Most használjunk ekvivalens kifejezést az *arctgx* kifejezés helyett

$$A=\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{arctg^3 x}\cdot\frac{x^3(2^x-5^x)}{1+x^3 5^x}}=\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^3}\cdot\frac{x^3(2^x-5^x)}{1+x^3 5^x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-5^x}{1+x^3 5^x}}=e^0=1.$$

d) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^{\frac{1}{tgx}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\right)^{\frac{1}{tgx}}==\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{x^2}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}=\frac{1}{2^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0.$$

e) $$\lim_{x\to 1}\left(tg\frac{\pi x}{4}\right)^{\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}}=\left\{1^{\infty}\right\}=\left\{\begin{matrix} x-1=t, \\ x=t+1, \\ t\to 0,\quad x\to 1\end{matrix}\right\}=\lim_{t\to 0}\left(tg\left(\frac{\pi t}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right)^{\frac{\ln(5+2t)}{\ln(1-t)}}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1+tg\frac{\pi t}{4}}{1-tg\frac{\pi t}{4}}\right)^{\frac{\ln(5+2t)}{\ln(1-t)}}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1+\frac{\pi t}{4}}{1-\frac{\pi t}{4}}\right)^{\frac{\ln(5+2t)}{-t}}=\lim_{t\to 0}\left(1+\frac{1+\frac{\pi t}{4}}{1-\frac{\pi t}{4}}-1\right)^{\frac{\ln(5+2t)}{-t}}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(1+\frac{\frac{\pi t}{2}}{1-\frac{\pi t}{4}}\right)^{\frac{\ln(5+2t)}{-t}}=\lim_{t\to 0} e^{\frac{\ln(5+2t)}{-t}\cdot\ln\left(1+\frac{\frac{\pi t}{2}}{1-\frac{\pi t}{4}}\right)}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(5+2t)}{-t}\cdot\frac{\frac{\pi t}{2}}{1-\frac{\pi t}{4}}}=e^{-\frac{\pi}{2}\ln 5}=$$

$$=\left(e^{\ln 5}\right)^{-\frac{\pi}{2}}=5^{-\frac{\pi}{2}}.$$

## *Вправи для самостійного розв'язування:*

## *Feladatok*

1. Igazolja a következő függvények határértékét!

1) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)=1$; 2) $\lim\limits_{x\to 6}(2x-5)=7$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}(7x-1)=6$; 4) $\lim\limits_{x\to 2}(2x+6)=10$;

5) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}=6$; 6) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-25}{x+5}=6$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x+5}=2$; 8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$.

2. Határozza meg a következő függvények határértékét a Heine meghatározás alapján!

1) $\lim\limits_{x\to 0}(10x+4)$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+5}{x-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x}{3-x^2}$.

3. Az $f(x)=\dfrac{5}{2-x}$ függvény az $x$ = 2 helyen nincsen értelmezve. Közelítse meg a 2-t először az $x_n=1+\dfrac{n}{n+1}$ sorozattal, majd az $x_n=2+\dfrac{1}{n}$ és határozza meg e megfelelő függvényértékek sorozatának határértékét. Értelmezze az eredményt!

4. Határozza meg a következő határértékeket!

1) $\lim\limits_{x\to 4}\lg(5x^2+3x+8)$; 2) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}9^x(6x-1)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2+3}{3x+12}$; 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1+tgx}{2+\cos 2x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^4+3}+\sqrt[5]{x}}{x^2-5x-6}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sqrt{x}+9x^7-3}{x+\sin 5x}$;

7) $\lim\limits_{x\to -12}\dfrac{x^2-144}{x+12}$; 8) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}$;

9) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$; 10) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-2x-15}{2x^2+8x+6}$;

11) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-2x^2+x-1}{x^3-x^2+3x-3}$; 12) $\lim\limits_{x\to 27}\dfrac{x-27}{\sqrt[3]{x}-3}$;

13) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x+2}{-x^3+4x-1}$; 14); $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$

15) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{2-\sqrt{x-1}}$; 16) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{x+1}-3}{8-x}$;

17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}$; 18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-3}{\sqrt{13+x^2}-4}$;

19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$; 20) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{4x+8}-\sqrt{7x-1}}$

21) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x^7-1}$; 22). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt[3]{x}\right)\left(1-\sqrt[4]{x}\right)}{(1-x)^3}$;

23) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x^m-1}(n,m\in N)$; 24) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}(n,m\in N)$!

5. Adja meg a következő végtelenben vett határértékeket!

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3+12x^2-5x+8}{10x^3-4x^2+3x-9}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^4-x^2-5x+8}{3x^3-4x^4+3x-9}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+5x}{5x^4-4x^2+3}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(3x^2+6\right)\left(3x^2-2\right)}{(x+7)\left(4x^2-9\right)}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+6)^7}{(x-5)^5(x+4)^2}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+3)^{10}}{(x+11)^6(4x+5)^4}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(5x+3)^{45}(2x-5)^{55}}{(x-12)^{50}(10x+3)^{50}+3^{50}}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)\left(x^2+1\right)\ldots\left(x^n+1\right)}{\left[(nx)^n+1\right]^{\frac{n+1}{2}}}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^6+2x^3+4}}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+4}}{\sqrt{x^3+5}}$;

11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{x^7+15x^3-9}}{\sqrt{x+31}}$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^9+4x^6+3}}{x^3+\sqrt{x^6+x^2+10}}$;

13) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3}-5x\right)$; 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(8x+\sqrt{x^2+9}\right)$;

15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+x}\right)$; 16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2-3x}-4\right)$.

6) Határozza meg a következő határértékeket! Alkalmazza a nevezetes határértékeket!

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 11x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 10x}{7x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin nx}{\sin mx}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x\cos x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2-x}{\sin 4x}$; 8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 5x}{\cos 4x-\cos 6x}$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-\cos 3x}{1-\cos x}$;

11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{mx}$;

13) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{1+2x}\right)^x$; 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-8}{7+3x}\right)^{6x}$;

15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x-1}{5+6x}\right)^{x+6}$;  16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{1+x}\right)^{\frac{x+4}{2}}$;

17) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7x^2+5}{10+7x^2}\right)^{14x^2}$;  18) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+7}{x^3+2}\right)^{\frac{x^3+1}{5}}$;

19) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}$;  20) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(x+1)-\ln x)$.

7. Határozza meg a következő határértékeket!

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3tgx)^{ctgx}$;  2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_5(1+x)}{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{4x+\sqrt[9]{x^9+9}}$;  4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{\cos 4x-\cos 6x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{2-x}-\frac{12}{8-x^3}\right)$;  6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$;

7) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sin(x^2-7x+10)}{x-5}$;  8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin tgx}{\sin x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0} xctgx$;  10) ;

11) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^{100}+(x+2)^{100}+(x+3)^{100}+...+(x+100)^{100}}{x^{100}+100^{100}}$;

12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{x}$;  13) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$;

14) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x+b)+\sin(x-b)}{2x}$;  15) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cos x+10\left(x^2-5x+1\right)\right)$.

16) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}$;  17) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-tg^2 x}$;

18) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+3}{3x-1}$;  19) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$;

20) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-2)^4+3x^4}{5x^4+(x+3)^4}$;  21) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{5+x^2}-3}$; 22) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 7x-\cos 3x}{1-\cos 2x}$;

23) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3}{2x^2-1}\right)^{\frac{x^2}{4}}$; 24) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8x^2+1}{x+3}$;

25) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{x^2-5x+4}+\frac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right)$;  26) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-1)^5+3x^5}{15x^5-2(x+3)^5}$;

27) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}$;  28) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\cos 5x-\cos 3x}$;

29) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+3}{4x-5}\right)^{3x-1}$  30) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}$ !

## *Теоретичні питання*

## *Elméleti kérdések*

1. Adja meg a függvény meghatározását.
2. Ábrázolja 6 elemi függvény grafikonját!
3. Definiálja a függvény határértékét.
4. Mondja ki  a a határértékre vonatkozó átviteli elvet..
5. Definiálja a függvény egyoldali határértékét (jobb és bal oldali).
6. Az egyoldali és kétoldali határérték közötti kapcsolat (tétel)
7. Függvények összegének, szorzatának és hányadosának határétéke.
8. Rendezési tételek. Rendőr-elv.
9. Első nevezetes határérték $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$. Következmények.
10. Második nevezetes határérték $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ és következményei.
11. Mit lehet mondani monoton növekedő függvény határértékéről?
12. Mit lehet mondani monoton csökkenő függvény határértékéről?

# НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

## A FÜGGVÉNYEK FOLYTONOSSÁGA

***Alapfogalmak és jelölésük:***

1. $D_f$ -- értelmezési tartomány;
2. $R_f$ -- értékkészlet;
3. $f(x)$-- az $x$ argumentumhoz tartozó helyettesítési érték, függvényérték.
4. $R^+ = \{x | x > 0,\ x \in R\}$.
5. $R^- = \{x | x < 0,\ x \in R\}$.
6. $Z^- = \{x | x < 0,\ x \in Z\}$.

Főbb meghatározások

1. Az $A$ és $B$ nem üres halmazok között megadott egyértelmű leképezést <u>*függvénynek*</u> nevezzük: az $F \subset A \times B$ reláció függvény, ha $(x; y) \in F$ és $(x; z) \in F$ esetén $y = z$ teljesül.
2. Az $F \subset A \times B$ reláció <u>*függvény*</u>, ha $\forall x \in D_F$ esetén létezik pontosan egy $y \in B$, úgy hogy $(x; y) \in F$.
3. <u>*Invertálható függvénynek*</u> nevezzük a kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést. Az $F \subset A \times B$ reláció <u>*invertálható*</u>, ha az $F^{-1}$ reláció is függvény.
4. Az $f^{-1}$ függvényt az *f* függvény <u>*inverz függvényének (inverzének)*</u> nevezzük.
5. <u>*Egyváltozós valós függvénynek*</u> nevezzük azt a függvényt, melynek az értelmezési tartománya és értékkészlete is a valós számok egy részhalmaza.
6. A függvény <u>*grafikonjának (gráfjának, görbéjének, ábrájának)*</u> nevezzük a kétdimenziós koordináta-rendszer $(x;\ f(x)),\quad x \in D_f$ pontjainak halmazát.
7. <u>*Összetett függvénynek*</u> (<u>*függvények kompozíciójának*</u>) nevezzük az $f \circ g$ függvényt: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, ha $R_g \subset D_f$. A *g* függvényt <u>*belső*</u> függvénynek az *f* függvényt <u>*külső*</u> függvénynek nevezzük.
8. Függvényt <u>*megadása*</u> annyit jelent, hogy meghatározzuk az értelmezési tartományát és az értékkészletét tartalmazó halmazt, valamint a leképzést (hozzárendelési szabályt) az alábbi módok valamelyikén: *y = f(x)* (<u>*explicit*</u> alak); *f(x;y) = 0* (<u>*implicit*</u> alak); $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \varphi(t) \end{cases}$ (*paraméteres* alak); $r = \rho(\varphi)$ (*polárkoordinátás* alak).
9. Bármely valós szám felírható egy tőle nem nagyobb egész szám <u>*(egészrész)*</u> és egy tört szám <u>*(törtrész)*</u> összegeként: $x = [x] + \{x\}$
10. <u>*Elemi függvények:*</u>

    a) <u>*Hatványfüggvények:*</u>

    $$f : R \to R,\ \ f(x) = x^\alpha,\ \alpha \in N;$$
    $$f : R \setminus \{0\} \to R,\ \ f(x) = x^\alpha,\ \alpha \in Z^-;$$
    $$f : R \setminus R^- \to R^+,\ \ f(x) = x^\alpha,\ \alpha \in Q$$

    <u>*b) Exponenciális függvény:*</u>

    $$f : R \to R^+,\quad f(x) = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1.$$

    <u>*c)*</u> <u>*Logaritmus függvény:*</u>

    $$f : R^+ \to R,\quad f(x) = \log_a x,\ \alpha > 0,\ \alpha \neq 1.$$

    <u>*d)*</u> <u>*Trigonometrikus függvények*</u>:

$$f: R \to [-1;1], \quad f(x) = \sin x, \quad f(x) = \cos x,$$

$$f: \left( R \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \right\} \right) \to R, \quad f(x) = tgx,$$

$$f: (R \setminus \{\pi k, k \in Z\}) \to R, \quad f(x) = ctgx$$

*e)* *Árkuszfüggvények (a trigonometrikus függvények inverzei)*:

$$f: [-1;1] \to \left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right], \quad f(x) = arc\sin x;$$

$$f: [-1;1] \to [0;\pi], \quad f(x) = arc\cos x;$$

$$f: R \to \left( -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right), \quad f(x) = arctgx;$$

$$f: R \to (0;\pi), \quad f(x) = arcctgx.$$

d) *Hiperbolikus függvények:*

$$f: R \to [1;\infty], \quad f(x) = chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$f: R \to R, \quad f(x) = shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

$$f: R \to [-1;1], \quad f(x) = thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}};$$

$$f: R \setminus \{0\} \to R \setminus [-1;1], \quad f(x) = cthx = \frac{chx}{shx} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

*f)* *Polinomfüggvények:*

$$f: R \to R, \quad f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = P(x), \ (n \in N \cup 0).$$

*g)* *Racionális törtfüggvény (két polinom hányadosa):*

$$f: (R \setminus \{x | Q(x) \neq 0\}) \to R, \quad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

*h) Szakaszonként lineáris függvények:*

*Abszolútérték – függvény*:

$$f: R \to (R \setminus R^-), \quad f(x) = |x| = \begin{cases} x, & ha \ x \geq 0, \\ -x, & ha \ x < 0. \end{cases}$$

*Szignumfüggvény, előlőjelfü gvény*

$$f: R \to \{-1;0;1\}, \quad f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & ha \ x > 0, \\ 0, & ha \ x = 0, \\ -1, & ha \ x < 0. \end{cases}$$

*Egészrész – függvény*:

$$f: R \to Z, \quad f(x) = [x];$$

*Törtrész – függvény*:

$$f: R \to [0;1), \quad f(x) = \{x\}.$$

11. *Függvénytranszformációk:*

| A függvényérték transzformációi | Az argumentum transzformációi |
|---|---|

| | |
|---|---|
| *f(x) + c,* a függvény képe az *y* tengellyel párhuzamosan *c* egységgel eltolódik | *f(x- c),* a függvény képe az *x* tengellyel párhuzamosan *c* egységgel eltolódik |
| *-f(x),* a függvény képe az *x* tengelyre tükröződik | *f(-x),* a függvényképe az *y* tengelyre tükröződik |
| *cf(x),* a függvény képe az *y* tengellyel párhuzamosan *c*-szeresére megnyúlik, ha *c* > 1; zsugorodik, ha 0 < *c* < 1 | *f(cx),* a függvény képe az *x* tengellyel párhuzamosan $\frac{1}{c}$-szeresére megnyúlik, ha 0 < *c* < 1; zsugorodik, ha *c* > 1 |

***Főbb meghatározások***

Az $f: M \to R,\ \ M \subset R$ függvény az $x = a,\ a \in M$ pontjában <u>*folytonos*</u>, ha bármely $x = a$-hoz konvergáló $(x_n),\ \ x_n \in M$ abszcissza sorozathoz tartózó függvényértékek $(f(x_n))$ sorozata az $f(a)$-hoz tart: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Az $f: M \to R,\ \ M \subset R$ függvény az $x = a,\ a \in M$ pontjában <u>*folytonos*</u>, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ hogy bármely az *a* szám $\delta$ környezetéből vett abszcisszához tartózó függvényérték az $f(a)$ $\varepsilon$ környezetéhez tartozik: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, ha

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$, hogy ha $0 < |x - a| < \delta$ *és* $x \in M$ akkor $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Egy függvény értelmezési tartományának egy pontjában folytonos, ha a függvény pontbeli határértéke megegyezik helyettesítési értékével.

A függvényt <u>*folytonos függvénynek*</u> nevezzük, ha értelmezési tartományának minden pontjában folytonos.

Az $f: M \to R,\ \ M \subset R$ függvény az $x = a,\ a \in M$ pontban nem folytonos, akkor az *a* pontot a függvény <u>*szakadási helyének*</u> nevezzük.

Az $f: M \to R,\ \ M \subset R$ függvénynek az $x = a$ pontjában nem folytonos, de létezik véges jobb és bal oldali határértéke, akkor a szakadás <u>*elsőfajú*</u>, ha $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A$, akkor a <u>*szakadás megszüntethető.*</u>

Az $f: M \to R,\ \ M \subset R$ függvénynek az $x = a$ pontjában nem folytonos és $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty$ *és* $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \pm\infty$, akkor a szakadás <u>*másodfajú*</u>.

Az $f: M \to R,\ \ M \subset R$ függvény az $x = a,\ a \in M$ pontjában <u>*egyenletesen folytonos*</u>, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ hogy bármely az $a, b \in M$

ha $0 < |a - b| < \delta$ *és* $x \in M$ akkor $|f(a) - f(b)| < \varepsilon$.

***Főbb tételek:***

Ha az *f(x)* és *g(x)* függvény folytonos az *a* pontban, akkor $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ és $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(a) \neq 0$) is folytonos az *a* pontban.

Ha az *f(x)* és *g(x)* függvény folytonos az *a* pontban és *f(x)* folytonos a *g(a)* helyen, akkor .az $f(g(x))$ összetett függvény is folytonos az *a* pontban.

Minden elemi függvény folytonos függvény az értelmezési tartományán.

Weierstrass tétel: Egy adott zárt intervallumon folytonos függvény, ezen az intervallumon korlátos, és felveszi maximumát és minimumát.

Bolzano tétel: Ha az $f(x)$ függvény folytonos az $[a;b]$ intervallumon $f(a)$, $f(b)$ különböző előjelűek, akkor létezik olyan $c$ pont, melyre $f(c)=0$, tehát a függvény $f(a)$ és $f(b)$ közé eső minden értéket felvesz.

A folytonos bijektív függvény szigorúan monoton és inverz függvénye is folytonos.

## *Típus feladatok megoldása:*

Vizsgálja a függvény folytonosságát és szerkessze meg a grafikonját:

$$y=\begin{cases} x-2, & -2<x<0, \\ 2x \quad , & 0\le x<1, \\ 3-x, & 1<x\le 3. \end{cases}$$

Az $y=x-2,\ y=2x,\ y=3-x$ függvények folytonosak, tehát szakadása csak két folytonos függvény metszéspontjában lehet. Ezért vizsgáljuk az $x=0$ és $x=1$ pontokban a folytonosságot

a) $A^+=\lim\limits_{x\to+0} y=\lim\limits_{x\to+0} 2x=0$,

$A^-=\lim\limits_{x\to-0} y=\lim\limits_{x\to-0}(x-2)=-2$,

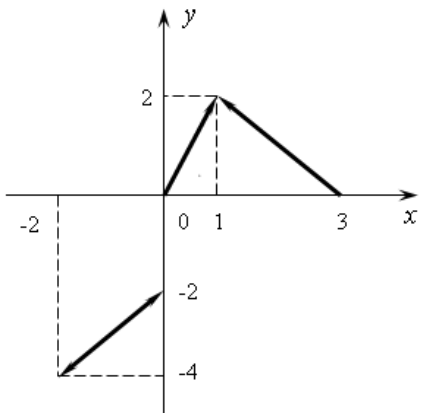
$f(0)=2x\big|_{x=0}=0$.

Mivel $A^+\ne A^-$, de mindkét egyoldali határérték véges, ezért az $x=0$ pont ugrás $h=A^+-A^-=+2$.

б) $A^+=\lim\limits_{x\to1+0} y=\lim\limits_{x\to1+0}(3-x)=2$.

$A^-=\lim\limits_{x\to1-0} y=\lim\limits_{x\to1-0} 2x=2$.

$A^+=A^-$, az $x=1$ pontban a függvény nincs értelmezve, ezért ez megszüntethető szakadási pont lesz




## *Вправи для самостійного розв'язання:*

## *Feladatok:*

1. Határozza meg $f(-2)$ és $f(2)$ értéket, ha:
   1) $f(x)=ax+b,\ f(0)=2,\ f(1)=3$;
   2) $f(x)=ax^2+bx+c,\ f(1)=1,\ f(-1)=2,\ f(2)=3$;
   3) $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,\ f(0)=2,\ f(-1)=0,\ f(1)=-3,\ f(2)=5$;
   4) $f(x)=a+bc^x,\ f(0)=15,\ f(2)=30,\ f(4)=90$!

2. Igazolja, hogy:

1) $f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)=0$, ha $f(x)=ax^2+bx+c$;

2) $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$, ha $f(x)=\frac{1}{2}\left(5^x+5^{-x}\right)$!

3. Legyen $f, g: R\to R$, $h: R/\{0\}\to R$, $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = \frac{1}{x}$, továbbá $A=\{-1,0,1\}$, $B=[0,1]$, $C=[-1,1]$, $D=(0,1)$, $E=[-2,0)$.

Határozza meg $f(A)$, $f(B)$, $g(B)$, $g(C)$, $h(D)$, $h(E)$, $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(C)$, $g^{-1}(C)$, $g^{-1}(A)$, $g^{-1}(E)$, $h^{-1}(C)$ és $h^{-1}(E)$ értékeinek halmazát!

4. Az alábbi függvények közül melyek invertálhatók:

1.) $h(x)=2x+1$; 2) $f(x)=2x^2+1$; 3) $g(x)=\frac{1}{x}$; 4) $h(x)=\frac{1-x}{1+x}$?

Abban az esetben, ha a függvény invertálható, adja meg az inverz függvény képletét!

5. Határozza meg az alábbi függvények értelmezési tartományát:

1) $f(x)=\frac{3}{x^2-169}$;

2) $f(x)=\frac{5}{(x^4-16)(x+20)}$;

3) $f(x)=\sqrt{4x^2-1}$;

4) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{(x-5)(x+6)}}$;

5) $f(x)=\sqrt[6]{\frac{1}{49-x^2}}$;

6) $g(x)=\frac{\sqrt{3x-2}}{x^2-x-2}$;

7) $h(x)=\sqrt{\frac{x-2}{5-2x}}$;

8) $f(x)=\sqrt{\frac{x^2-x-12}{x+9}}$;

9) $f(x)=\log_5\left(x^2-121\right)$;

10) $g(x)=\lg\frac{x+3}{x+1}$;

11) $h(x)=\sqrt{\log_2(x+7)}$;

12) $f(x)=\sqrt{9-2\sqrt{x}}$;

13) $f(x)=\sqrt[4]{\log_4\left(x-x^2\right)}$;

14) $f(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\frac{x-1}{3x+5}}$;

15) $f(x)=\log_7\frac{x+7}{(2x+6)(12-3x)}+\sqrt[5]{x+5}$;

16) $h(x)=\frac{\lg x}{\sqrt{x^2-2x-63}}$;

17) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}+\arcsin\frac{x-2}{x}$;

18) $f(x)=\lg\sin(x-3)+\sqrt{16-x^2}$;

19) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}-3}$;

20) $f(x)=\log_2\log_3\log_4 x$;

21) $f(x)=\frac{\sin x}{2x^3-3x^2-2x}$;

22) $f(x)=\sqrt{\frac{x-3}{x+3}}+\sqrt{\frac{2-x}{\sqrt{1+x}}}$;

23) $f(x)=\frac{|\sin x|}{\sin x}$;

24) $f(x)=\sqrt{\cos\sqrt{x}}$;

25) $f(x)=\arcsin\frac{x+3}{4}$;

26) $f(x)=\arccos\left(\frac{x}{4}-1\right)$;

27) $f(x)=\lg(10x+10)+\arcsin\frac{x-4}{3}$;

28) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}+\arccos\frac{x-2}{x}$;

29) $f(x)=13^{\arcsin(x-1)}$;  30) $f(x)=\sqrt{\arccos(\lg x)}$!

6. Az alábbi *f* és *g* függvényekre adja meg az $f\circ g$ és $g\circ f$ függvényeket, ha léteznek:
   1) $f(x)=\log_5 x$ és $g(x)=x-3$;
   2) $f(x)=\lg x$ és $g(x)=|x+6|$;
   3) $f(x)=\lg x$ és $g(x)=x^5-1$;
   4) $f(x)=x^3+4x^2-5x$ és $g(x)=2\cos x+8$;
   5) $f(x)=5^x$ és $g(x)=\sin x$;
   6) $f(x)=tgx$ és $g(x)=\frac{1}{x}$;
   7) $f(x)=7^x+1$ és $g(x)=\arcsin x$;
   8) $f(x)=\lg x$ és $g(x)=x-x^2-4$!
7. Az alábbi *f, g* és *h* függvényekre adja meg az $f\circ g\circ h$, $f\circ f\circ f$ és $h\circ g\circ f$ függvényeket:
   1) $f(x)=\ln x$, $g(x)=\sin x$ és $h(x)=\frac{1}{x^2}$;
   2) $f(x)=\sqrt{x-6}$, $g(x)=10^x$ és $h(x)=\frac{1}{\sin x}$;
8. Adja meg az $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ függvény *n* kompozícióját!
9. Adja meg az alábbi függvények inverzét:
   1) $f(x)=4x+6$;  2) $f(x)=3(4-2x)$;
   3) $f(x)=\sqrt{1-x^3}$;  4) $f(x)=\frac{2x+6}{2x-8}$;
   5) $g(x)=\left(\frac{x+1}{1+x}\right)^2-1$;  6) $f(x)=x^3-3x^2+3x+4$;
   7) $f(x)=5^{3x-2}$;  8) $f(x)=2^{\frac{x}{x-1}}$;
   9) $f(x)=th(x)$;  10) $f(x)=ch(x)$!
10. Az *a, b, c* és *d* paraméterek mely értékeinél lesz az $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ függvény inverze $f^{-1}(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$?
11. Határozza meg az alábbi függvények értékkészletét:
   1) $f(x)=\frac{3x+2}{x-2}$  2) $f(x)=\frac{5x+9}{7x-5}$;
   3) $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$;  4) $f(x)=\frac{x}{1+9x^2}$;
   5) $f(x)=\frac{x^2+x+2}{2+x^2-x}$;  6) $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$;
   7) $f(x)=\sqrt{-x^2+x+2}$;  8) $f(x)=\sqrt{x^2+7x-30}$;
   9) $f(x)=2^x+4^x$;  10) $f(x)=2^x+2^{-x}$;

11) $f(x)=\dfrac{1}{2-\cos 3x}$; 12) $f(x)=\dfrac{1}{5+\sin 4x}$;

13) $f(x)=shx$; 14) $f(x)=cthx$ !

12. Alkalmazza a transzformációs lépéseket és ábrázolja a következő függvényeket:

1) $f(x)=|x+4|-3$; 2) $f(x)=-\sqrt{x+3}+4$;

3) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}-3$; 4) $f(x)=4^{x-3}$;

5) $f(x)=-2|x-5|+5$; 6) $f(x)=2\sqrt[4]{-x}+4$;

7) $f(x)=-2\sin 2x+2$; 8) $f(x)=3\cos\dfrac{x}{3}-3$;

9) $f(x)=-3\left\{\dfrac{x}{2}+3\right\}+3$; 10) $f(x)=-\log_3(x+3)$!

Ábrázolja a következő függvényeket:

1) $f(x)=|x^2-4x+3|$; 2) $f(x)=\sqrt{(x+3)^2}$;

3) $f(x)=|\sin x|$; 4) $f(x)=\sin|x|$;

5) $f(x)=|x|^{\sqrt{\cos x-1}}$; 6) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$;

7) $h(x)=[\cos x]$; 8) $f(x)=2^{|x-1|+x}$;

9) $f(x)=x^2+x+\sqrt{(x^2+1)^2-4x^2}$;

10) $f(x)=\operatorname{sgn}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)$; 11) $f(x)=\left|\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|$;

12) $f(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$; 13) $f(x)=\left(\sqrt{\ln x-1}\right)^2+1$;

14) $f(x)=2+[x]-[x]^2, M=\{x|-2\le x\le 3\}$; 15) $h(x)=\dfrac{x^2}{\operatorname{sgn}(x^2-1)}, M=\{x|-3<x<3\}$;

16) $\begin{cases} x=1-t \\ y=1-t^2 \end{cases}$; 17) $\begin{cases} x=t+\dfrac{1}{t} \\ y=t+\dfrac{1}{t^2} \end{cases}$;

18) $\begin{cases} x=5\sin t \\ y=5\cos t \end{cases}$, ; 19) $\begin{cases} x=10\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$;

20) $\begin{cases} x=cht \\ y=sht \end{cases}$; 21) $\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$;

22) $r=\varphi$; 23) $r=2(1+\cos\varphi)$;

13. Állapítsa meg, folytonosak-e az alábbi függvények az *a* helyen!

1) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$; $a=3$; $a=-1$;

2) $f(x)=tgx$; $a=\dfrac{\pi}{3}$; $a=\dfrac{\pi}{2}$;

3) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$; $a=1$; $a=-1$;

4) $f(x)=\dfrac{1+\sin x}{1-\cos 2x}$; $a=\dfrac{\pi}{3}$; $a=\dfrac{\pi}{2}$;

5) $f(x)=\dfrac{2}{3-3^{\frac{4}{8-x}}}$; $a=8$; $a=4$;

6) $f(x)=\sqrt[6]{10-\sqrt{x^3+9}}-x^5$; $a=3$; $a=10$!

14. Folytonos –e az $f(x)=\begin{cases}-x, & \text{ha } x\le -1,\\ x^2, & \text{ha } -1<x<2,\\ x, & \text{ha } x<0<2,\\ 2, & \text{ha } x\ge 2.\end{cases}$ függvény. Készítsen vázlatos ábrát!

15. A $p$ paraméter mely ételkénél lesz az alábbi függvény folytonos? Készítsen vázlatos ábrát:

1) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & \text{ha } x\le \dfrac{\pi}{2},\\ p-x, & \text{ha} x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$;

2) $f(x)=\begin{cases}p, & \text{ha } x=-2;\\ \dfrac{x^2-4}{x+2}, & \text{ha } x\ne -2\end{cases}$;

3) $f(x)=\begin{cases}p, & \text{ha } x=-1;\\ \dfrac{x+1}{x^3+1}, & \text{ha } x\ne 1\end{cases}$;

4) $f(x)=\begin{cases}p, & \text{ha } x=0;\\ \dfrac{\sin 5x}{3tg\,2x}, & \text{ha } 0<x\le \dfrac{\pi}{6}\end{cases}$!

16. Határozza meg az $A$ és $B$ értéket úgy, hogy az $f(x)=\begin{cases}x+3, & \text{ha} x\le 0,\\ A\cos x+B, & \text{ha } 0<x\le \pi,\\ (x-\pi)^2+1, & \text{ha } x>0\end{cases}$

függvény, folytonos legyen. Készítsen vázlatos ábrát!

17. Állapítsa meg, milyen szakadása van az alábbi függvényeknek:

1) $f(x)=\dfrac{5}{x-5}$; 2) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2-x}$;

3) $f(x)=tgx$; 3) $f(x)=\dfrac{10}{5x^2-5}$;

5) $f(x)=\dfrac{(x-3)^2}{x^2-5x+6}$; 6) $f(x)=\dfrac{x^4-81}{x^3-27}$;

7) $f(x)=7^{\frac{7}{x+7}}$ 8) $f(x)=\dfrac{5}{5+5^{\frac{1}{x}}}$;

9) $f(x)=\dfrac{12}{2^{3x-2}-16}$; 10) $f(x)=\dfrac{2}{2^{\frac{14}{x+6}}-4}$;

11) $f(x)=\dfrac{|x+5|}{x^2-25}$; 12) $f(x)=\dfrac{\sin x}{|\sin x|}$;

13) $f(x)=(x^2+1)sngx$; 14) $f(x)=\sec x$;

15) $f(x)=\dfrac{1}{\{x\}}$; 16) $g(x)=\dfrac{1}{\ln|x|}$;

17) $f(x)=\begin{cases}4x+5, \text{ ha } x\le -1\\ \dfrac{1}{x+2}, \text{ha } x>-1\end{cases}$; 18) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{2x+4}, \text{ ha } x\le 1\\ e^{x+\frac{1}{x}}, \text{ha } x>1\end{cases}$!

18. Létezik-e valós gyöke az alábbi egyenletnek az adott intervallumon:
    1) $x^3+2x-6=0,\ [1;2]$; 2) $x^3-15x^2+6=0,\ [0;2]$;
    3) $x^4-3x-3=0,\ [1;2]$; 4) $x^4-4x+1=0,\ [-1;0]$;
    5) $3x+e^x=0,\ [-1;0]$; 6) $tgx-\cos x=0;\ \left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$?
19. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket:
    1) $x(2x+6)(x-11)(5x+5)\le 0$;
    2) $(x^2-11x+30)(x-5)^2(4x+3)>0$;
    3) $\dfrac{x^2+6x+4}{x^2+8x+9}<1$; 4) $1+\dfrac{x-4}{x-3}>\dfrac{x-2}{x-1}$;
    5) $\sin 2x-\cos 2x<0$; 6) $\lg(x+1)-\lg(2x-1)\ge \lg(x-1)-\lg(2x+1)$!
20. Igazolja, hogy minden páratlan fokszámú többtagnak, legalább egy valós gyöke van!
21. Igazolja, hogy az $\dfrac{2}{x-5}+\dfrac{1}{x-8}+\dfrac{10}{x-23}=0$ két valós gyöke van, melyek hozzá tartoznak az (5;8) és (8;23) intervallumokhoz!

## *Теоретичні питання*

## *Elméleti kérdések*

1. Mit nevezünk 0-függvénynek?
2. Mit nevezünk növekedési rendnek?
3. Definiálja a függvény pontbeli folytonosságát!
4. Szakadási pontok és osztályozásuk
5. Soroljon fel 5 nevezetes határértékek következményt (pl: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$ )
6. Mondja ki a Bolzano-Cauchy két tételt.
7. Mondja ki aWeierstrass tételt és következnényét.
8. Milyen függvény nevezünk egyenletesen folytonos függvénynek?
9. Mondja ki a Cantor tételt
10. Inverz függvények. (2 lemma és 1 tétel)

# ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

# A DERIVÁLTFÜGGVÉNY

***Főbb jelölések:***

*f*.-- $f : M \to R, \quad M \subset R$.

$\Delta f$ -- az $f : M \to R, \quad M \subset R$ függvény növekménye;

$\Delta x$ -- az argumentum növekménye.

***Főbb meghatározások:***

Az $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}$, $\left(x \in D_f \setminus \{a\}\right)$az *f*(*x*) függvény $a \in D_f$ pontjához tartozó <u>*differenciahányados-függvényének* (*különbségi hányados-függvényének*) nevezzük.</u>

A függvény <u>*differenciálható*</u> az értelmezési tartományának egyik belső pontjában, ha létezik az ehhez a ponthoz tartozó differenciahányados függvény véges határértéke, ha nem létezik, akkor a függvény nem differenciálható.

A $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a}$ <u>számot az *f* függvény *a* ponthoz tartozó *deriváltjának*</u> nevezzük.

***Deriválási szabályok:***

1. Ha az *f* = *f(x)* és *g* = *g(x)* függvények deriválhatók, akkor:

a) bármely $C \in R$esetén *Cf* is deriválható az *a* pontban és

$$(Cx)' = Cx';$$

b) $f + g$ is deriválható az *a* pontban és

$$(f+g)' = f' + g';$$

c) $fg$ is deriválható az *a* pontban és

$$(fg)' = f'g + fg';$$

d) a $g(a) \neq 0$ esetben a $\dfrac{f}{g}$ is deriválható az *a* pontban és

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2};$$

2. Ha *g* függvény deriválható az *x* pontban és az *f* deriválható a $g(x)$pontban, akkor az $f \circ g$ összetett függvény is deriválható és

$$(f \circ g)' = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

3. Ha az *f* függvény deriválható az *x* pontban és $f(x) \neq 0$és $f^{-1}$ folytonos az $f(x)$pontban, akkor $f^{-1}$ is deriválható és

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

4. Ha az *f* és *g* függvények deriválhatók, akkor $f^g$ is deriválható és

$$\left(f^g\right)' = f^g\left(g' \ln f + \frac{gf'}{f}\right).$$

Paraméteres alakban adott függvény deriválása:

$$f'(x)=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Polárkoordinátás alakban adott függvény deriválása:

$$f'(x)=\frac{r'(\varphi)\sin\varphi+r(\varphi)\cos\varphi}{r'(\varphi)\cos\varphi-r(\varphi)\sin\varphi}.$$

**Elemi függvények deriváltfüggvényei:**

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| C | 0 |
| $x^n,\ n\in R$ | $nx^{n-1},\ n\in R$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $tgx$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ |
| $ctgx$ | $-\frac{1}{\sin^2 x}$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $a^x, a\in R^+$ | $a^x\ln a,\ \ a\in R^+$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\log_a x,\ \ a\in R^+/\{1\}$ | $\frac{1}{x\ln a}$ |
| $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $arctgx$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| $shx$ | $chx$ |
| $chx$ | $shx$ |
| $thx$ | $\frac{1}{ch^2x}$ |
| $cthx$ | $-\frac{1}{sh^2x}$ |

## *Típus feladatok megoldása:*

**1. A definíció alapján határozza meg az $f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$ függvény derivált függvényét!**

Először határozzuk meg az $x=x_0$ helyen.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x_0^2+1}}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\left(\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x_0^2+1}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}+\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)\left(x_0^2+1\right)}+\sqrt[3]{\left(x_0^2+1\right)^2}\right)}{\left(x-x_0\right)\left(\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}+\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)\left(x_0^2+1\right)}+\sqrt[3]{\left(x_0^2+1\right)^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\left(x^2-x_0^2\right)}{\left(x-x_0\right)\left(\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}+\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)\left(x_0^2+1\right)}+\sqrt[3]{\left(x_0^2+1\right)^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{x+x_0}{\left(\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}+\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)\left(x_0^2+1\right)}+\sqrt[3]{\left(x_0^2+1\right)^2}\right)}=\frac{2\cdot x_0^2}{3\cdot\sqrt[3]{\left(x_0^2+1\right)^2}}$$

Így az értelmezési tartomány tetszőleges pontjában az $f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$ függvény derivált függvénye $f'(x)=\dfrac{2x}{3\cdot\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}}$.

**2. A definíció alapján határozza meg az $f(x)=\cos x$ függvény derivált függvényét!**

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cdot\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}=1\cdot\cos x=\cos x.$$

***3. Differenciálható-e az $f(x)=|x|$ függvény?***

A meghatározás értelmében:

$$f'(x)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0+0}\frac{|x|-|x_0|}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0+0}\frac{x-x_0}{x-x_0}=1;$$

Viszont $f'(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0-0}\dfrac{|x|-|x_0|}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0-0}\dfrac{x_0-x}{x-x_0}=-1$.

Mivel a jobb és a bal oldali határértékek nem egyenlők, így az $f(x)=|x|$ nem differenciálható az $x = 0$ helyen.

***3. Határozza meg az alábbi függvények deriváltjait:***

***a)*** $f(x)=4\sin x+x^7+11arctgx-20\sqrt[7]{x}$; ***b)*** $f(x)=x^6\cdot tgx$; ***c)*** $f(x)=\dfrac{2x+6}{4x^2-4}$,

***d)*** $f(x)=\ln\sqrt{x^3+5}$; ***e)*** $f(x)=x^x$.

a) $f'(x)=\left(4\sin x+x^7+11arctgx-20\sqrt[7]{x}\right)'=(4\sin x)'+\left(x^7\right)'+11(arctgx)'-20\left(\sqrt[7]{x}\right)'=$
$=4\cos x+7x^6+\dfrac{11}{1+x^2}-\dfrac{20}{7\cdot\sqrt[7]{x^6}}$;

b) $f'(x)=\left(x^6\cdot tgx\right)'=\left(x^6\right)'\cdot tgx+x^6\cdot(tgx)'=6x^5\cdot tgx+\dfrac{x^6}{\cos^2 x}$;

c) $f(x)=\dfrac{2x+7}{4x^2-4}=\dfrac{(2x+7)'\cdot(4x^2-4)-(4x^2-4)'(2x+7)}{(4x^2-4)^2}=\dfrac{2(4x^2-4)-8x(2x+7)}{(4x^2-4)}=$

$=\dfrac{8x^2-8-16x^2-56x}{(4x^2-4)^2}=\dfrac{-8x^2-56x-8}{(4x^2-4)^2}$;

d) $f'(x)=\left(\ln\sqrt{x^3+5}\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^3+5}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x^3+5}}\cdot 3x^2=\dfrac{3x^2}{2(x^3+5)}$;

e) Ahhoz meg határozzuk a függvény deriváltját, vegyük mind a két oldal természetes alapú logaritmusát:

$\ln f(x)=\ln x^x=x\cdot\ln x$.

$(\ln f(x))'=(x\cdot\ln x)'\Rightarrow\dfrac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=1\cdot\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}$;

$f'(x)=x^x\cdot(\ln x+1)$.

## *Вправи для самостійного розв'язання:*

**Feladatok**

1. A definíció alapján határozza meg az alábbi függvények derivált függvényét:

   1) $f(x)=5x^2$; 2) $f(x)=x^3-3x$;

   3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$; 4) $f(x)=\dfrac{3}{x^3}$;

   5) $f(x)=\sqrt{x}$; 6) $f(x)=\sqrt[3]{x}$;

   7) $f(x)=\sin 5x$; 8) $f(x)=\cos 3x$;

   9) $f(x)=\sqrt[4]{x^2+5x+9}$; 10) $f(x)=tg^3(3x+5)$!

2. Deriválja az alábbi függvényeket:

   1) $f(x)=x^7+5x^9-3x$; 2) $f(x)=9x^{11}-25x^4-6x^2+5$;

   3) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{x^5}{5}-1{,}5x^2+\log_3 81$; 4) $f(x)=\dfrac{x}{a}+\dfrac{a}{x}-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{a^2}{x^2}-a^3$;

   5) $f(x)=\sqrt{x}+5\sqrt[4]{x}+\sin 6$; 6) $f(x)=10\sqrt{x^7}-6\sqrt[4]{x}+5\sqrt[5]{x^2}-2007$;

   7) $f(x)=\sqrt{x^3\sqrt{x^7}}-\sqrt[9]{\sqrt[4]{16x^3}}+x^{-5}$; 8) $f(x)=\dfrac{7}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[5]{x}}+4x^6\cdot x^{11}$;

   9) $f(x)=(3x^3-5)(12x-x^7)$; 10) $f(x)=(x^3-5)^2(1+x^2)$;

   11) $f(x)=\dfrac{5x+8}{10-x}$; 12) $f(x)=\dfrac{ax+b}{dx+c}$;

   13) $f(x)=\dfrac{3x^2-5}{x-6}$; 14) $f(x)=\dfrac{7x^2}{(x+1)^2}$;

   15) $f(x)=(15-x^2)\sqrt{x-\sqrt{6}}$; 16) $f(x)=\dfrac{(2x-5)^2}{\sqrt{3+x}}$;

   17) $f(x)=\sqrt[4]{(3-x^6+2x)^3}$; 18) $f(x)=\dfrac{1}{(4x^3-2)^5}$;

   19) $f(x)=\sin x\cdot 5^x$; 20) $f(x)=\log_5 x\cdot arctgx$;

21) $f(x)=e^{4x}(5x+shx)$;

22) $f(x)=\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)\cos 2x$;

23) $f(x)=tg^4(5x-6)$;

24) $f(x)=th(6x-8)\sin^5(5^x)$;

25) $f(x)=\ln^4(x^3-4x^4)$;

26) $f(x)=\ln\ln\frac{x+\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}$;

27) $f(x)=arctg\frac{1}{x}\cdot(4+e^{-2x})$;

28) $f(x)=arctg\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2+4}}$;

29) $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$;

30) $f(x)=\sin\cos^2 tg^3 x$;

31) $f(x)=4\sqrt[3]{ctg^2 x}+\sqrt[3]{ctg^8 x}$

32) $f(x)=\sqrt[5]{\ln\sin\frac{x+3}{4}}$;

33) $f(x)=sh2^{2x}+2^{shx}+\sqrt{(x^2-5x+6)(x^2+3x-10)}$;

34) $f(x)=x\sqrt{a^2-x^2}-a^2\arccos\frac{x}{a}$;

35) $f(x)=x^x$;

36) $f(x)=x^{\cos(3x+5)}$;

37) $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x+5}$;

38) $f(x)=(\ln x)^{x^2}$;

39) $f(x)=\left(\frac{5x+4}{e^x-\ln 32}\right)^x$;

40) $f(x)=tgx^{(x^2+\sqrt{4})}$;

41) $f(x)=\ln\cos arctg\frac{5x-6}{x+6}$;

42) $f(x)=sh\sqrt[5]{\frac{x^2-4x+e^4}{x^2+4x+e^4}}$;

43) $f(x)=\sqrt[3]{\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}}+(\arcsin(10x+\lg 20))^3+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$;

44) $f(x)=(shx^2)^{shx}+\frac{\sin\sqrt{x}}{x^2+\cos x}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin 2x}$;

45) $f(x)=\frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}+ch(x+chx^2)+\sin^2 x^2\cdot(\sin x+\cos^2 x)$;

46) $\begin{cases} x=3\sin 2t-\sin 3t, \\ y=3\cos 2t+\cos 3t; \end{cases}$

47) $\begin{cases} x=4\cos t \\ y=5\sin t \end{cases}$;

48) $\begin{cases} x=\arccos t^2 \\ y=t\sin\sqrt{t} \end{cases}$;

49) $\begin{cases} x=2^{\cos^2 t^3} \\ y=tarctg\frac{3}{1-2\sqrt{t}} \end{cases}$;

50) $\begin{cases} x=e^{2t}\cos^2 t \\ y=e^{2t}\sin^2 t \end{cases}$;

51) $\begin{cases} x=\arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ y=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$;

52) $r=6\varphi$;

53) $r=a(1+\cos\varphi)$;

54) $r=2^{\frac{\varphi}{2\pi}}$!

3. Határozza meg a deriváltfüggvény helyettesítési értékét a megadott pontban:

1) $f(x)=\frac{1}{x}+5x^2+\frac{1}{7}x^7$; $a=1$;

2) $f(x)=\cos^2 x+tgx;\ a=\frac{\pi}{4}$;

3) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}};\ \ a=0$;

4) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right);\ a=0$;

5) $f(x)=\arccos e^x;\ a=0$;

6) $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}};\ a=1$;

7) $f(x)=arctg\frac{2x}{1-x^2};\ a=2$;

8) $f(x)=e^x\sin\sqrt{x^2+1};\ a=1$;

9) $f(x)=(x-3)(x+1)^2(x+3)^3+(x+2)(x-5)^3;\ a=0$;

10) $f(x)=\ln\left(1+\sin^2 x\right)-2\sin x\cdot arctg\cos x;\ a=\pi$!

4. Oldja meg az $f'(x)\le g'(x)$, ha $f(x)=\frac{2}{x}$ és $g(x)=x-x^3$!
5. Oldja meg az $f'(x)>g'(x)$, ha $f(x)=5^x+4\ln 5$ és $g(x)=\frac{1}{2}\cdot 5^{2x+1}$!
6. Oldja meg az $f'(x)>g'(x)$ egyenlőtlenséget, ha $f(x)=\frac{x-5}{x+5}$ és $g(\mathrm{x})=\frac{x^2-2}{x^2+2}$!
7. Oldja meg az $f'(x)\le g'(x)$ egyenlőtlenséget, ha $f(x)=\frac{2x+7}{2x-5}$ és $g(\mathrm{x})=\frac{4x+3}{5x+2}$!
8. Oldja meg az $f'(x)=g'(x)$ egyenletet, ha $f(x)=(x+2)(x-5)$ és $g(\mathrm{x})=(x+2)(x-9)$ !
9. Oldja meg az $f'(x)=g'(x)$ egyenletet, ha $f(x)=\sin 2x$ és $g(\mathrm{x})=4\cos x$!
10. Oldja meg az $f'(x)\le g'(x)$ egyenlőtlenséget, ha $f(x)=5^x+4x\ln 5$ és $g(\mathrm{x})=\frac{1}{2}\cdot 5^{2x+1}$ !
11. Oldja meg az $\frac{f'(x)}{g'(x)}>0$ egyenlőtlenséget, ha $f(x)=\frac{2^x}{\ln 2}-4x+10$ és $g(\mathrm{x})=\frac{2}{3}x^3+3x-\sin 4$!
12. Mutassa meg, hogy az $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ függvény esetén fenn áll az $f(x)+xf'(x)=\cos x$ egyenlőség!
13. Mutassa meg, hogy az $f(x)=e^{tg\frac{x}{2}}$ függvény esetén fenn áll az $f(x)\cdot\ln f(x)-f'(x)\cdot\sin x=0$ egyenlőség!
14. Igazolja, hogy $f(x)+f'(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}=0$, ha $f(x)=\ln x$!
15. Páros vagy páratlan az alábbi függvény deriváltfüggvénye:

1) $f(x)=5x^7-4x^5+\frac{1}{x}-9$;  2) $f(x)=\frac{x^6}{6}+3x^8+\cos x$;

3) $f(x)=tg^2x-x\cdot\sin x$;  4) $f(x)=5x^{11}-\frac{x}{\sin x}$?

## *Теоретичні питання*

## *Elméleti kérdések*

1. Legyen $D \subset R$ nemüres, nyílt halmaz, $x_0 \in D$ és $f : D \to R$ függvény. Mit értünk azon, hogy az f függvény differenciálható az $x_0$ pontban?
2. Ismertesse az összeg differenciálási szabályát.
3. Ismertesse a szorzat differenciálási szabályát.
4. Ismertesse a hányados differenciálási szabályát.
5. Ismertesse az összetett függvény differenciálási szabályát.

# ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ

## Застосування похідної

## A DERIVÁLT ALKALMAZÁSA

***Az érintő egyenlete***

1. Az *f* függvény *a* helyen vett deriváltja az *a* helyen a függvény görbéjéhez húzott érintő meredekségével egyenlő:**Hiba! Érvénytelen beágyazott objektum.**
2. A függvény görbéjéhez a $P(a; f(a))$ ponton átmenő <u>*érintő*</u> egyenlete:

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

3. A függvény görbéjéhez a $P(a; f(a))$ pontba húzott <u>*normális*</u> egyenlete:

$$y = -\frac{1}{f'(a)}(x-a) + f(a).$$

4. Két *f(x)* és *g(x),* a *P* pontban egymást metsző <u>*síkgörbe hajlásszöge*</u> a két görbéhez a metszéspontba húzott érintők által bezárt, derékszögnél nem nagyobb szög, melyet az alábbi képlettel határozhatunk meg:

$$tg\varphi = \left|\frac{f'(a) - g'(a)}{1 + g'(a)f'(a)}\right|.$$

**Differenciál**

1. Ha az *f(x)* függvény differenciálható, az $x = a$ pontban, akkor az $df(a) = f'(a)(x-a) = f'(a)dx$ számot a függvény <u>*differenciáljának*</u> nevezzük.
2. A differenciál nem más, mint a függvény lineáris korrekciója, tehát:

$$f(a+\Delta x) \approx f(a) + df(a) = f(a) + f'(a)(x-a).$$

3. A differenciál mértani értelmezése: a differenciál mutatja az ordináta érték változását az $x = a + \Delta x$ pontban a függvény $P(a; f(a))$ pontba húzott érintőjéig.

**l'Hospitál szabály**

***Főbb tételek:***

Legyenek az *f* és *g* függvények az *a* hely valamely környezetében differenciálhatók (nem feltétlenül az *a*-ban) és folytonosak az adott pontban, melyekre $f(a) = g(a) = 0$ és ha $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték létezik és véges , akkor a $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ határérték is létezik és:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Legyenek az *f* és *g* függvények az *a* hely valamely környezetében differenciálhatóak (nem feltétlenül az *a*-ban) és folytonosak az adott pontban, melyekre $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ és ha $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték létezik és véges , akkor a $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ határérték is létezik és:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Legyenek az $f$ és $g$ függvények az $(a;\infty)$ intervallumon differenciálhatóak, melyekre $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$ (vagy $\pm\infty$) valamint a $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték létezik és véges , akkor a $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ határérték is létezik és:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Az l'Hospitály szabály alkalmazása „$0\cdot\infty$", „$\infty-\infty$", „$0^0$", „$\infty^0$", „$1^\infty$" típusú határozatlan kifejezésekre:

1. „$0\cdot\infty$" típus:
   Ha $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ és $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$, akkor
   $$\lim_{x\to a}(f(x)g(x))=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}.$$
2. „$\infty-\infty$" típus:
   Ha $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ és $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, akkor
   $$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)f(x)}}.$$
3. „$0^0$" típus:
   Ha $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0,(f(x)>0)$ és $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, akkor
   $$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=\lim_{x\to a}e^{g(x)\ln f(x)}=\lim_{x\to a}e^{\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}}=e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}}.$$
4. „$\infty^0$" típus:
   Ha $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ és $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, akkor
   $$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=\lim_{x\to a}e^{g(x)\ln f(x)}=\lim_{x\to a}e^{\frac{g(x)}{\frac{1}{\ln f(x)}}}=e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{\ln f(x)}}}.$$
5. „$1^\infty$" típus:
   Ha $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$ és $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, akkor
   $$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=\lim_{x\to a}e^{g(x)\ln f(x)}=\lim_{x\to a}e^{\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}}=e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}}.$$

**KÖZÉPÉRTÉKTÉTELEK**

Rolle-tétel (olv.: Roll): Ha az $f$ függvény az $[a;b]$ intervallumban folytonos és belsejében differenciálható és $f(a)=f(b)$, akkor van az intervallumnak legalább egy olyan belső $c$ pontja, amelyben $f'(c)=0$.

Lagrange-féle középértéktétel (olv. Lagránzs): Ha az $f$ függvény az $[a;b]$ intervallumban folytonos és belsejében differenciálható, akkor van az intervallumnak legalább egy olyan belső $c$ pontja, amelyre $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Cauchy-féle középértéktétel: Ha az $f$ és $g$ függvény az $[a;b]$ intervallumban folytonos és belsejében differenciálható, és $g'(x) \neq 0$ akkor van az intervallumnak legalább egy olyan belső $c$ pontja, amelyben $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

## ***Típus feladatok megoldása:***

Határozza meg az alábbi határértékeket:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{3x}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

**Megoláds**

**1)** Mivel a $\sin 5x$ és $3x$ függvények folytonosak és differenciálhatóak az $x = 0$ pontban és $\lim\limits_{x\to 0} \sin 5x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} 3x = 0$, ezért, alkalmazhatjuk a l'Hospitály szabályt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin 5x)'}{(3x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{5\cos 5x}{3} = \frac{5}{3}.$$

Vannak olyan esetek is, amikor többször szükséges a l'Hospitály szabályt alkalmazni

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^x - e^{-x} - 2x\right)'}{(x - \sin x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^x + e^{-x} - 2\right)'}{(1 - \cos x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = = \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)'}{(\sin x)'} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2.$$

## ***Вправи для самостійного розв'язування:***

## ***Feladatok***

1. Határozza meg az alábbi függvények grafikonjához a megadott abszcisszájú pontban húzható érintőjének és normálisának egyenletét!
   1. $f(x) = x^4 + 5x^3 - 10x - 6$, $a = 1$;
   2. $f(x) = 4x^7 - 7x^4 + 5x - \lg 5$, $a = 0$;
   3. $f(x) = (x+1)\sqrt[3]{7-x}$, $a = -1$;
   4. $f(x) = \frac{8}{4+x^2}$, $a = 2$;

5) $f(x)=\dfrac{x+3}{2x-11}$, $a$ = -2;

6) $f(x)=\sqrt{2x+3}$, $a$ = 3;

7) $f(x)=x\ln x$, $a$ = e$^2$;

8) $f(x)=\sin 2x+\cos 3x$, $a = \pi$;

9) $\begin{cases} x=r(t-\sin t) \\ y=r(1-\cos t), \quad t=\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$;

10) $\begin{cases} x=4\cos t, \\ y=2\sin 2t, \quad A(2\sqrt{3};\sqrt{3}) \end{cases}$;

11) $\begin{cases} x=t^3-2t^2+2, \\ y=t^2-3t+3, \quad A(1;1) \end{cases}$;

12) $\begin{cases} x=\dfrac{3t}{1+t^3}, \\ y=\dfrac{3t}{1+t^3}, \quad t=1 \end{cases}$.

2. Határozza meg azt a ponton, amelyben az $f(x)=x^2-3x+5$ parabolához húzott érintő párhuzamos a $2x + 2y - 5 = 0$ egyenessel!
3. Határozza meg azt a ponton, amelyben az $f(x)=\dfrac{3}{x}$ hiperbolához húzott érintő merőleges az $x - 3y - 4 = 0$ egyenesre!
4. Határozza meg azt a ponton, amelyben az $f(x)=\dfrac{x+4}{x-2}$ függvény grafikonjához húzott érintő párhuzamos a $6x + 5y - 5 = 0$ egyenessel!
5. Határozza meg azt a ponton, amelyben az $f(x)=\dfrac{x+4}{x-2}$ függvény grafikonjához húzott érintő merőleges a $x - 2y + 5 = 0$ egyenesre!
6. Határozza meg az $f(x)=\dfrac{2}{x}$ függvény grafikonjához az $x_1=1$ és $x_2=2$ abszcisszájú pontjait összekötő húrral párhuzamos érintőjét!
7. Határozza meg az $f(x)=x^2+4x-5$ függvény grafikonjához az $x_1=1$ és $x_2=2$ abszcisszájú pontjait összekötő húrral párhuzamos érintőjét!
8. Határozza meg azt a pontot, melyben az $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x-7$ és az $f(x)=2x^2-3x+5$ függvények grafikonjaihoz húzott érintők párhuzamosak!
9. Milyen szög alatt metszi az $f(x)=\ln x$ függvény grafikonja az abszcissza tengelyt; az $y$ = 1 egyenest?
10. Milyen szög alatt metszik egymást az $f(x)=x^3+x^2-3$ és az $f(x)=x^2+4x-3$ függvények grafikonjai?
11. Milyen szög alatt metszik egymást az $f(x)=\dfrac{1}{x}$ és az $f(x)=\sqrt{x}$ függvények grafikonjai?
12. Milyen szög alatt metszik egymást az $f(x)=x^2$ és az $f(x)=\sqrt{2-x^2}$ függvények grafikonjai?

13. Határozza meg az $a$ paraméter értékét úgy, hogy az $f(x)=x^3-48x+a$ függvény grafikonja érintse az abszcissza tengelyt!
14. Határozza meg az $p$ paraméter értékét úgy, hogy az $y = px + 9$ egyenes érintse az $f(x)=2x-x^2$ függvény grafikonját!
15. Határozza meg az $f(x)=\dfrac{2x^3+3x}{x^2+1}$ aszimptótájával párhuzamos érintőjét!
16. Határozza meg az $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ aszimptótájával párhuzamos érintőjét!
17. Igazolja, hogy az $f(x)=2x^5+3x^3+4x-5$ függvény bármelyik pontjába húzott érintője hegyes szöget zár be az abszcissza tengellyel!
18. Határozza meg a $p$ paraméter értékét úgy, hogy az $f(x)=px^2+4x-7$ függvény grafikonjához $x = 2$ pontba húzott érintő 45°-os szöget zárjon be az abszcissza tengellyel!
19. Mutassa meg, hogy az $f(x)=\dfrac{1+3x^2}{x^2+3}$ függvény grafikonjához az egységnyi pontba húzott érintők az origóban metszik egymást!
20. Igazolja, hogy a $\rho=5(1+\cos\varphi)$ és a $\rho=5(1-\cos\varphi)$ görbék derékszögben metszik egymást!
21. Határozza meg a $b$ és a $c$ paraméter értékét, úgy hogy az $f(x)=2x^2+bx+c$ függvény grafikonja az $x = 3$ abszcisszájú pontban érintse az $y = 2x + 8$ egyenest!
22. Határozza meg az $a$, $b$ és a $c$ paraméter értékét, úgy hogy az $f(x)=ax^2+bx+c$ függvény grafikonja az $x = 4$ abszcisszájú pontban érintse az $y = 17x - 45$ egyenest és áthaladjon a $M(2;1)$ koordinátájú ponton!
23. Határozza meg az alábbi függvények közelítő értékét a megadott helyen:
    1) $f(x)=x^6$, $x=0{,}96$; 2) $f(x)=x^{10}$, $x=1{,}002$;
    3) $f(x)=\sqrt{x}$, $x=4{,}001$; 4) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x=27{,}002$;
    5) $f(x)=\cos x$, $x=60°2'$; 6) $f(x)=\sin x$, $x=30°12'$;
    7) $f(x)=\sin x$, $x=45°20'$; 8) $f(x)=\ln x$, $x=1{,}02$!
24. Határozza meg a következő kifejezések közelítő értékét:
    1) $\sqrt[3]{8{,}0001}$; 2) $\cos 60°1'$; 3) ln 1,2; 4) arctg 1,05;
    5) $\sqrt{101}$; 6) $\sqrt[5]{33}$; 7) arcsin 0,707; 8) $\sqrt{\dfrac{(3{,}046)^2-8}{(3{,}046)^2+7}}$!
25. Mennyivel növekszik a $3^5$ kifejezés értéke, ha az alapot 0,002-del növeljük?
26. Mennyivel növekszik a $2^4$ kifejezés értéke, ha az alapot 0,003-del növeljük?
27. Határozza meg az alábbi határértékeket:
    1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^5-4x^4+3x^2-x+1}{3x^4-5x^2+2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x^4-2x^3+3x-5}{x^5+3x^2-2x-2}$;
    3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2+x}{x^2}$;
    5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 5x}{x^2}$; 6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 7x-\cos 3x}{1-\cos 2x}$;
    7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\sin 2x^2}{\ln\sin x^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_2\cos mx}{\ln\cos nx}$;
    9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\ln x}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$;

11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4+x}-2+x}{x^2}$;

12) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+e^x}{2x^3+e^{2x}}$;

13) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2-arctgx}}{\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x-1}{x+1}}$;

14) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\pi-2arctgx}$;

15) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$;

16) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$;

17) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$;

18) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-ctg^2x\right)$;

19) $\lim\limits_{x\to0}x^{\sin x}$;

20) $\lim\limits_{x\to0}(\sin x)^x$;

21) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{\sin 2x}$;

22) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tgx}$;

23) $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\ln x}$;

24) $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$;

25) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x\cdot\ln(x-a)}{\ln\left(e^{2x}-e^{2a}\right)}$;

26) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}+2x^3-\cos 2x}{x^2-\sin^3 x}$;

27) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$;

28) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot e^{-x}$;

29) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$;

30) $\lim\limits_{x\to1}(x-1)ctg\,\pi(x-1)$

31) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\left(e^x+1\right)-2\left(e^x-1\right)}{x^3}$;

32). $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x-\sin 2x}{6x-tg\,6x}$;

33) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right)$;

34) $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2e^{\frac{1}{x^2}}\right)$;

35) $\lim\limits_{x\to1}(\ln x\ln(x-1))$;

36) $\lim\limits_{x\to0}(\ln x\,tgx)$;

37) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx-x}{x-\sin x}$;

38) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{-x}-1+x^4}{\sin 2x}$;

39) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-arctgx}{x^3}$;

40) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x}{\cos 5x-\cos 3x}$;

41) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^x-1-x\ln 2}{(1-x)^m-1+mx}$;

42) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$!

28. Ellenőrizze le a Roll-tétel érvényességét a megadott intervallumon:

1) $f(x)=x^3+7x^2+4x-11$, ha $x\in[-2;1]$;

2) $f(x)=\ln\cos x$, ha $x\in\left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{3}\right]$;

3) $f(x)=x^4-5x^2+4$, ha $x\in[-1;1]$;

4) $f(x)=e^{x^2-2x+2}$, ha $x\in[0;2]$;

5) $f(x)=\dfrac{8-x^2}{x^4}$, ha $x\in[-2;2]$;

6) $f(x)=tgx$, ha $x\in[0;\pi]$!

29. Igazolja, hogy az $x^3-12x+a=0$ egyenletnek nincsen két különböző gyöke a $(-1;2)$ intervallumon!
30. Igazolja, hogy az $x^5+5x-13=0$ egyenletnek csak egy valós gyöke van!
31. Igazolja, hogy az $e^{x-1}+x-2=0$ egyenletnek csak egy valós gyöke van! Oldja meg az egyenletet grafikusan.
32. Igazolja, hogy az $f(x)=x^3+3x^2+9x-12$ egyenletnek csak egy valós gyöke van!
33. Igazolja, hogy az $f(x)=x^{2n}+px+q$ egyenletnek nem lehet kettőnél több valós gyöke!
34. Ellenőrizze le a Lagrange-tétel érvényességét a megadott intervallumon:
    1) $f(x)=5x^2+10x-1$, ha $x\in[-1;1]$;
    2) $f(x)=x^3-3x+1$, ha $x\in[0;3]$;
    3) $f(x)=2x^3-7x^2+2x+2$, ha $x\in[0;1]$;
    4) $f(x)=x+\cos x$, ha $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$;
    5) $f(x)=\ln x$, ha $x\in[\sqrt{e};e]$;
    6) $f(x)=\sqrt{2x+5}$, ha $x\in[-2;2]$!
35. Lágrange-tétel alapján bizonyítsa be az alábbi egyenlőtlenségeket:
    1) $|\sin\alpha-\sin\beta|\le|\alpha-\beta|$;
    2) $arctg\, x-arctg\, y\le x-y$, bármely $x>y$ esetén!
36. Ellenőrizze le a Couchy-tétel érvényességét a megadott intervallumon:
    1) $f(x)=x^3,\ \varphi(x)=x^2+1$, ha $x\in[1;2]$;
    2) $f(x)=x^2,\ \varphi(x)=x^3$, ha $x\in[-1;1]$;
    3) $f(x)=\sin x,\ \varphi(x)=1+\cos x$, ha $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$;
    4) $f(x)=e^x,\ \varphi(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$, ha $x\in[-2;2]$;
    5) $f(x)=\ln(1+x^2),\ \varphi(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, ha $x\in[1;4]$;
    6) $f(x)=\cos x,\ \varphi(x)=\sin x$, ha $x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]$.
37. Írja fel az $f(x)=x^3-5x+6$ és $\varphi(x)=2x^2+4$ függvényekre Couchy-tételét a $[0;1]$ intervallumon! Határozza meg a $c$ értékét!
38. Írja fel az $f(x)=x^5+3x^3+4$ és $\varphi(x)=4x^4-3x^2-3$ függvényekre Couchy-tételét a $[0;1]$ intervallumon! Határozza meg a $c$ értékét!

## *Теоретичні питання*

## *Elméleti kérdések*

1. Mondja ki a L'Hospital szabályt
2. Írja fel a függvény adott pontjába szerkesztett az érintőjének egyenletét!
3. Írja fel a függvény adott pontjába szerkesztett az normális egyenletét!
4. Mondja ki a Fermat tételt!
5. Mondja ki a Rolle tételt!
6. Mondja ki a Lagrange tétel!
7. Mondja ki a Cauchy tétel

# FÜGGVÉNYVIZSGÁLAT

# Повне дослідження функції

***Főbb meghatározások:***

Az *f* függvény értelmezési tartományának azon $a$ pontjait, melyekre $f(a)=0$, a függvény *zérushelyeinek* nevezzük.

Az *f* függvény értelmezési tartományának egy intervallumában *korlátos felülről* ha van olyan *K* szám, hogy az intervallum minden *x* pontjában $f(x)\le K$ teljesül.

Az *f* függvény értelmezési tartományának egy intervallumában *korlátos alulról* ha van olyan *K* szám, hogy az intervallum minden *x* pontjában $f(x)\ge K$ teljesül.

Az *f* függvény értelmezési tartományának egy intervallumában *korlátos* ha van olyan *K* szám, hogy az intervallum minden *x* pontjában $|f(x)\le K|$ teljesül.

Az *f* függvény értelmezési tartományának egy intervallumában *monoton növekvő,(szigorúan monoton növekvő),* ha az intervallum bármely $x_1$ és $x_2$ helyén, amelyre $x_1 < x_2$, $f(x_1)\le f(x_2)$, $(f(x_1)< f(x_2))$ teljesül.

Az *f* függvény értelmezési tartományának egy intervallumában *monoton csökkenő, (szigorúan monoton csökkenő),* ha az intervallum bármely $x_1$ és $x_2$ helyén, amelyre $x_1 < x_2$, $f(x_1)\ge f(x_2)$, $(f(x_1)> f(x_2))$ teljesül.

Az *f* függvény értelmezési tartományának egy intervallumában *konvex*, ha az intervallum bármely $x_1$ és $x_2$ helyén teljesül az $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ egyenlőtlenség.

Az *f* függvény értelmezési tartományának egy intervallumában *konkáv*, ha az intervallum bármely $x_1$ és $x_2$ helyén teljesül az $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\ge\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ egyenlőtlenség.

Az *f* függvény értelmezési tartományának $a$ helyén *helyi (lokális) maximuma* van, ha $a$-nak van olyan környezete, amelynek minden *x* pontjában $f(x)\le f(a)$.

Az *f* függvény értelmezési tartományának $a$ helyén *helyi (lokális) minimuma* van, ha $a$-nak van olyan környezete, amelynek minden *x* pontjában $f(x)\ge f(a)$.

Az *f* függvény értelmezési tartományának $a$ pontját, a függvény *kritikus pontjának* nevezzük, ha $f'(x)=0$ vagy a függvény nem differenciálható az adott pontban.

Az *f* függvényt *periodikusnak* nevezzük, ha létezik olyan $p\ne 0$, hogy az értelmezési tartomány bármely *x* pontjára *x* + *p* is az értelmezési tartományba tartozik és $f(x+p)=f(x)$. A *p* számot a függvény periodusának nevezzük.

Az *f* függvényt párosnak nevezzük, ha az értelmezési tartomány bármely $a$ pontjára, $-a\in D_f$ és $f(-a)=f(a)$.

Az *f* függvényt páratlannak nevezzük, ha az értelmezési tartomány bármely $a$ pontjára, $-a\in D_f$ és $f(-a)=-f(a)$.

A függvénygörbe azon pontját, amelynél a görbe alakot vált *inflexiós* pontnak nevezzük.

A függvény *aszimptótájának* nevezzük azt az egyenest, amelyet a grafikon tetszőleges pontossággal megközelíti: $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-y)=0$.

***Főbb tételek:***

Ha az *f* függvény az $(a;b)$ intervallumon differenciálható, és az intervallum minden *x* pontjára teljesül, hogy

a) $f'(x)>0$, akkor *f* szigorúan monoton növekvő;

b) $f'(x)\ge 0$, akkor *f* monoton növekvő;

c) $f'(x) < 0$, akkor *f* szigorúan monoton csökkenő;

d) $f'(x) \le 0$, akkor *f* monoton csökkenő.

Ha az $[a;b]$ intervallum bármely pontjába húzott érintő a görbe alatt (fölött) van, akkor az adott intervallumon a függvény konvex (konkáv).

Ha az *f* függvény az $(a;b)$ intervallumon kétszer differenciálható, és az intervallum minden *x* pontjára teljesül, hogy

a) $f''(x) \ge 0$, akkor *f* függvény az adott intervallumon konvex;

b) $f''(x) \le 0$, akkor *f* függvény az adott intervallumon konkáv.

Az *f* differenciálható függvény $a$ kritikus pontja a függvény lokális szélsőértékhelye, ha az $a$ pont környezetében a deriváltfüggvény előjelet vált:

a) ha a deriváltfüggvény pozitívból negatívba megy át, akkor maximuma van;

b) ha a deriváltfüggvény negatívból pozitívba megy át, akkor minimuma van.

Ha az *f* függvény kétszer differenciálható, akkor inflexiós pontja van ott ahol $f''(x) = 0$ és $f''$ előjelet vált.

Az $x = a$ függőleges aszimptota, ha a $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ vagy $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ végtelen.

Az $y = a$ vízszintes aszimptota, ha a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$ vagy $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$.

Az $y = kx + b$ ferde aszimptota, ha a következő határértékek léteznek:

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{f(x)}{x} = k \text{ és } \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \left(f(x) - kx\right) = b.$$

## ***Típus feladatok megoldása:***

Vizsgálja a következő függvényt: $f(x) = \frac{2x^3}{x^2-1}$

Megoldás:

1. Értelmezési tartomány: $x \ne \pm 1$ vagy $(-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$.

2. Metszéspontok a koordináta tengelyekkel:

Ha $x = 0$, akkor $y = 0$,

ha $y = 0$, akkor $x^3 = 0$, vagyis $x = 0$.

Tehát a koordináta tengyelyekkel való metszéspont: $O(0,0)$.

3. A függvény páratlan, mivel

$$f(-x) = \frac{2(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = -\frac{2x^3}{x^2 - 1} = -f(x)$$

4. Nem periodikus

5. Folytonosság

A $2x^3$ és $x^2 - 1$ függvények folytonosak, ezért szakadási helyet a nevező zérus pontjaiban keressük:

$$\lim_{x \to 1 \pm 0} \frac{2x^3}{x^2 - 1} = \frac{2}{\pm 0} = \pm\infty,$$

$$\lim_{x \to -1 \pm 0} \frac{2x^3}{x^2 - 1} = \frac{-2}{\mp 0} = \pm\infty.$$

Vagyis az x=1 és x=-1 pontok a függvény másod fajú szakadási pontjai;

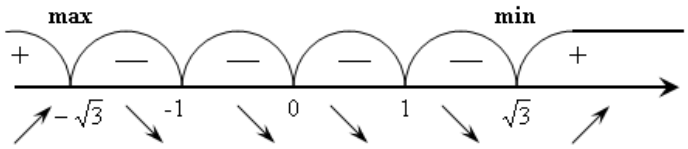
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^3}{x^2 - 1} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^3}{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \pm\infty$$

6. A monotonitás vizsgálatához vizsgáljuk az $y = f(x)$ függvény deriváltját:

$$y' = \frac{\left(2x^3\right)'\left(x^2-1\right)-2x^3\left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{6x^2\left(x^2-1\right)-2x^3 2x}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{2x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

A függvény kritikus pontjai $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$, $x_{4,5} = \pm 1$. Mivel a függvény nincs értelmezve az $x = \pm 1$ pontokban, ezért az $x_{4,5} = \pm 1$ pontokban nincs a függvénynek szélsőértéke.

Határozzuk meg a függvény első rendű deriváltjának előjel tartási intervallumait




Innen kapjuk a szélső érétkeket:

$$y_{\max} = y(-\sqrt{3}) = \frac{2(-\sqrt{3})^3}{(-\sqrt{3})^2-1} = -\frac{6\sqrt{3}}{2} = -3\sqrt{3},$$

$$y_{\min} = y(\sqrt{3}) = \frac{2(\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3})^2-1} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

7. Az alaki tulajdonság vizsgálatához keressük meg a függvény másodrendű deriváltját:

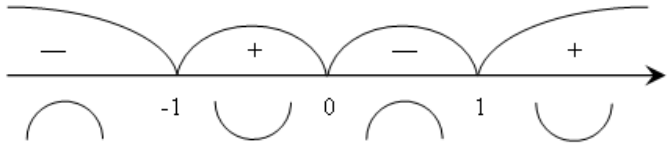
$$y'' = \left(\frac{2x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}\right)' =$$

$$= \frac{\left(4x\left(x^2-3\right)+4x^3\right)\left(x^2-1\right)^2-2\left(x^2-1\right)2x\cdot 2x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^4} =$$

$$= \frac{\left(8x^3-12x\right)\left(x^2-1\right)-8x^3\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^3} = \frac{4x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}.$$

A lehetséges inflexiós pontok: $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 1$, de $x = \pm 1$ nem tartozik az értelmezési tartományhoz. Vizsgáljuk az $x_1 = 0$ pontot.

Vizsgáljuk a második derivált előjel tartási intervallumait




$y = f(0) = 0$ inflexiós pont;
a $(-\infty; -1) \cup (0; 1)$ a függvény konkáv;
a $(-1; 0) \cup (1; \infty)$ a függvény konvex.

8. Aszimptota

Függőleges aszimptota $x = \pm 1$, mivel $x = \pm 1$ pontok az $y = \dfrac{2x^3}{x^2-1}$ függvény másodfajú szakadási pontjai.

Meghatározzuk a ferde aszimptotákat

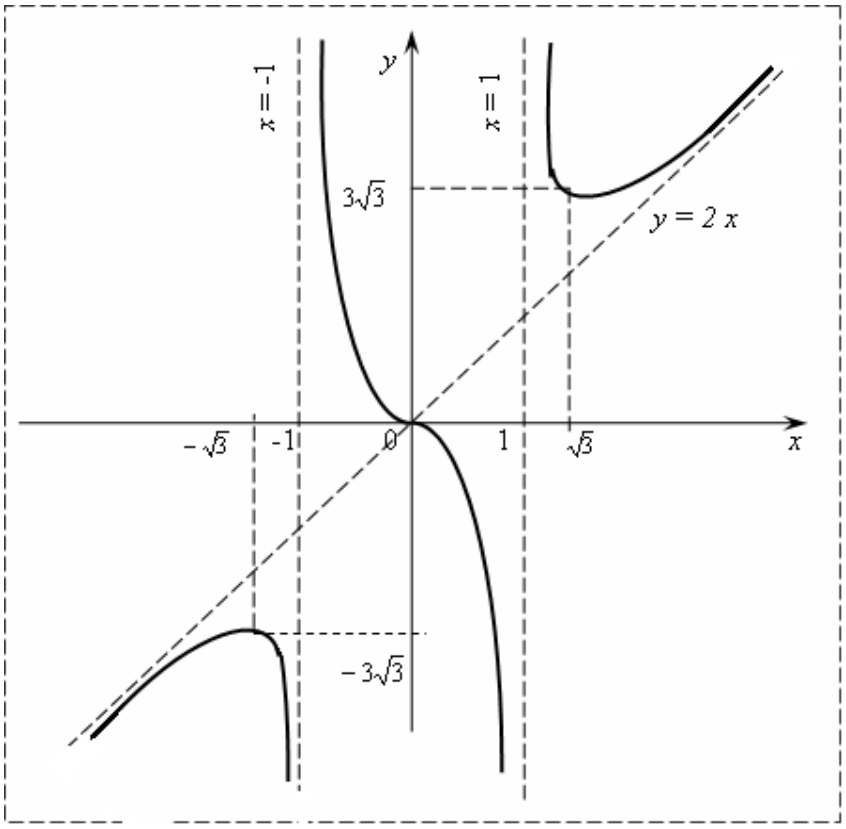
$$k_{1,2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3}{x\left(x^2-1\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3}{x^3\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = 2,$$

$$b_{1,2} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^3}{\left(x^2-1\right)} - k_{1,2}\cdot x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3-2x\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x^2-1} = \frac{2}{\pm\infty} = 0.$$

ferde aszipmtota egyenlete $y = 2x$ (ha $x \to +\infty$, és ha $x \to -\infty$ is).

:




## *Вправи для самостійного розв'язування:*

## *Feladatok*

1. Határozza meg az alábbi függvények szélsőértékeit az adott intervallumon:

1. $f(x) = \frac{x^4}{4} - 8x^2;\ x \in [-1;2];$
2. $f(x) = 2x^4 - 8x\ ;\ x \in [-2;1];$
3. $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1;\ x \in [-2;2];$
4. $f(x) = x^5 + 20x^2 + 3;\ x \in [-1;1];$
5. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 8x - 2;\ x \in [-4;2];$
6. $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x - 9;\ x \in [-3;0];$
7. $f(x) = \sqrt{100 - x^2}; x \in [-6;8];$
8. $f(x) = x + 2\sqrt{x};\ x \in [0;4];$

9. $f(x)=3^{x^2+1}; x\in[-1;5]$; 10. $f(x)=\ln(x^2+e); x\in[-\sqrt{e};2\sqrt{e}]$;

11. $f(x)=\cos x-\sin^2 x+6; x\in[0;\pi]$; 12. $f(x)=2tgx-tg^2x; x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$.

2. Határozza meg a következő függvények szélsőértékét:

1. $f(x)=3x^3-x^2-7x$; 2. $f(x)=x^3-3x^2+2x-7$; 3. $f(x)=3x^3-2x^2+3x-2$;

4. $f(x)=x+\frac{25}{x^2}$; 5. $f(x)=\frac{x^2}{4}+\frac{9}{x^2}$; 6. $f(x)=\frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$;

7. $f(x)=\sqrt{3x-x^3}$; 8. $f(x)=\frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$; 9. $f(x)=x+\sqrt{x+1}$;

10. $f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2+2x+1}$; 11. $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2+64}$; 12. $f(x)=(x-5)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$;

13. $f(x)=\arcsin 2x-\frac{4}{1-x^2}$; 12. $f(x)=\arccos x+\frac{x}{x^2-1}$; 15.

$f(x)=arctgx+\frac{\ln(1+x^2)}{2}$;

16. $f(x)=shx$; 17. $f(x)=chx$; 18. $f(x)=xe^{-x}$;

19. $f(x)=\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\cos 2x}{2}$; 20. $f(x)=e^x\cos x$; 21.

$f(x)=\sin x+\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{7}\sin 7x$;

22. $f(x)=(x-3)(x-5)(x+6)(x+8)+\log_5 125$.

3. Határozza meg a következő függvények aszimptotáinak egyenletét:

1. $f(x)=\frac{x+2}{4x-5}$; 2. $f(x)=\frac{2x^2+x+4}{x^2-5x-1}$; 3. $f(x)=\frac{3x^2+2}{3x-2}$;

4. $f(x)=x+2arctgx$; 5. $f(x)=\frac{1-x^3}{x^2}$; 6. $f(x)=\frac{\ln x}{x}$;

7. $f(x)=\sqrt{x^2-5x+3}$; 8. $f(x)=\sqrt[3]{x^3+2}$; 9. $f(x)=\sqrt{\frac{2x^4+5}{x^2+3}}$ !

4. Vizsgálja a következő függvényeket az alábbi szempontok szerint és ábrázolja őket:

1. Értelmezési tartomány
2. Értékkészlet
3. Metszéspontok a koordináta tengelyekkel
4. Paritás
5. Periodicitás
6. Folytonosság (a függvény határértéke a szakadási helyeken és a végtelenben)
7. Monotonitás (szélsőértékhely, a függvény növekedésének és fogyásának intervallumai)
8. Alaki tulajdonság (inflexiós pont, milyen intervallumokon konkáv illetve konvex a függvény)
9. Aszimptota
10. Grafikon!

1 $f(x)=2x^2-x^3$; 2. $f(x)=x^2-x^3$; 3. $f(x)=\frac{x^3-9x}{10}$;

4. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{4}{3}$; 5. $f(x)=\frac{2}{3}x^3-x^2-\frac{4}{3}$; 6. $f(x)=x^3+x^2$;

7. $f(x)=-x^3+3x+2$; 8. $f(x)=x^3-3x^2+4$; 9.

$f(x)=2x^3-3x^2+5$;

10. $f(x)=x^4-2x^2+1$; 11. $f(x)=0{,}25x^4-2x^2$; 12. $f(x)=x^2(1-x)^2$;

13. $f(x)=\frac{x}{9-x^2}$; 14. $f(x)=\frac{x^3}{4-x^2}$; 15. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$;

16) $f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$; 17) $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$; 18) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$;

19) $f(x)=\frac{2x}{x^3-8}$; 20) $f(x)=\frac{5x}{x^2-4}$; 21) $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$;

22) $f(x)=\frac{x}{4}+\frac{4}{x}$; 23) $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$; 24) $f(x)=\frac{2}{x^2+2x}$;

25) $f(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$; 26) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$; 27) $f(x)=\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}$;

28) $f(x)=\sqrt{x^3-x}$; 29) $f(x)=\sqrt{x^2-x^4}$; 30) $f(x)=\sqrt{x^2(1-x)}$;

31) $f(x)=x^2e^x$; 32) $f(x)=x^2e^{-x}$; 33) $f(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$;

34) $f(x)=x^2e^{\frac{1}{x}}$; 35) $f(x)=thx$; 36) $f(x)=cthx$;

37) $f(x)=x+\ln(x^2-1)$; 38) $f(x)=x\ln x$; 39) $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$;

40) $f(x)=x+\cos x$; 41) $f(x)=x\cos x$; 42) $f(x)=\sin 2x+2\cos x$;

43) $f(x)=4x^3+15x^2+12x+1$;44) $f(x)=-x^3+3x^2+9x-11$ 45) $f(x)=x^3-6x^2+9x-4$.

5. Milyen $p$ érték mellet lesz az $f(x)=px^3-x^2+(p-6)x+(p+3)^3$ fogyó az egész szám egyenesen?
6. Milyen $k$ érték mellet lesz az $f(x)=6kx+3\sin x-3k\sin 2x-\sin 3x$ növekedő az egész szám egyenesen?
7. Oldja meg a következő feladatokat!
   1. Ossza a 48-at két részre úgy, hogy szorzatuk maximális legyen!
   2. Ossza a 16-ot két részre úgy, hogy a részek négyzeteinek összege minimális legyen!
   3. Egy láda térfogata $V=1764\ cm^3$, alapéleinek aránya 3 : 4. Milyen méretek mellett készíthető el egy ilyen láda a legkevesebb anyag felhasználásával?
   4. Egy felül nyitott, négyzet alapú doboz készítéséhez 1 m$^2$ területű lemezt használhatunk fel. Hogyan válasszuk meg a doboz méreteit, hogy térfogata a legnagyobb legyen?
   5. A nyitott medence térfogata 288 m$^3$, szélessége kétszer nagyobb a hosszánál. Milyen méretek mellett lesz a legkisebb az anyagszükséglet a medence kicsempézéséhez?
   6. Egy téglalap kerülete 2$c$. Mikor lesz a területe maximális?
   7. Milyennek kell lennie a 2$p$ kerületű egyenlő oldalú háromszög oldalainak, ahhoz, hogy az alapra húzott magasság körüli forgatás által a legnagyobb térfogatú kúpot kapjuk?
   8. Mennyi az R sugarú gömbbe írható, legnagyobb térfogatú kúp magassága?
   9. A szabályos háromoldalú hasáb térfogata V. Milyennek kell lennie az alapélnek ahhoz, hogy a teljes felszíne minimális legyen?
   10. Az R sugarú gömbbe írjunk maximális térfogatú hengert!
   11. Igazolja, hogy adott átfogójú derékszögű háromszögek közül legnagyobb területű az egyenlő szárú!
   12. Az R sugarú gömbbe írjunk hengert úgy, hogy a teljes felszíne a lehető legnagyobb legyen?
   13. Az R sugarú gömb köré írjunk minimális térfogatú kúpot!

14. Az R sugarú gömbbe írjunk maximális térfogatú kúpot!
15. Határozza meg az $y = x^2 - 4$ parabola azon pontját, amelyik legközelebb van az origóhoz!

## *Теоретичні питання*

## *Elméleti kérdések*

13. Adja meg a függvény pontbeli növekedésének fogyásának feltételeitSzélsőérték létezésének feltételeit!
14. A függvény alaki tulajdonságai (Konvexitás)
15. Aszipmtota
16. Teljes függvényelemzés