

**MINISZTERSTVO OSVITI I NAUKI UKRAINI
UKRAJNA OKTATÁSI ÉS TUDOMÁNYOS
MINISZTERIUMA**

**Закарпатський угорський інститут
імені Ференца Ракоці II
II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola**

**Кафедра математики та інформатики
Matematika és Informatika Tanszék**

Papp Gabriella, Román Erika, Román István

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
До Проективної геометрії**

**Módszertani segédlet
Projektív geometriához**

Beregszász, 2021

УДК 372.8.514(439.23)

Jóváhagyta a Matematika és Informatika tanszék
2021. augusztus 25-én összehívott értekezlete(jegyzőkönyv
száma № 1)

Bíráló:

dr. Kucsinka Katalin – a II RFKMF Matematika és
Informatika tanszékének tanszékvezetője.

Módszertani segédlet. Projektív geometriához
/ összeálították: Papp Gabriella, Román Erika,
Román István – Beregszász, 2021. – 55 c.

A 014. Középfokú Oktatás (Matematika) képzési program
hallgatóinak ajánljuk.

Tartalomjegyzék

Előszó	5
A műszaki rajzok betűi és számjegyei	6
A projektív tér és tulajdonságai	10
1. Térelemek és kölcsönös helyzeteik. Térelemek hajlásszöge és távolsága	10
1.1. Térelemek	10
1.2. Térelemek kölcsönös helyzete	11
1.3. Térelemek távolsága.....	12
1.4. Térelemek hajlásszöge	13
2. Vetítési módok, elvek. Térelemek ábrázolása, Monge-féle képsíkrendszer	15
2.1. Vetítési módok, elvek.....	15
2.2. Térelemek ábrázolása	17
2.3. Monge-féle képsíkrendszer	20
Projektív transzformációk	29
1. Térelemek transzformációja. Két általános síkidom metszészvonala.....	29
1.1. Térelemek transzformációja	29
1.2. Síkídom és egyenes dőléspontjának szerkesztése	33
1.3. Két általános síkidom metszészvonala.....	37

2. Síklapú testek transzformációja. Síklapú testek metszése síkkal	45
2.1. Síklapú testek transzformációja	45
2.2. Síklapú testek metszése egyenessel	46
2.3. Síklapú testek metszése síkkal	48
Ajánlott szakirodalom	54

Előszó

A Projektív geometria című jegyzet a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola matematika szakos elsőéves hallgatói számára készült. Célja a projektív geometria elsajátításához szükséges elméleti és gyakorlati tudnivalók összefoglalása.

A projektív geometria a műszaki rajz alaptörvényeit tanítja, a térbeli alakzatok síkban való ábrázolásával foglalkozik. A háromdimenziós alakzatokat a rajzlap kétdimenziós síkjában kell ábrázolni. Ehhez szükséges ismerni a műszaki ábrázolás szabályait.

A jegyzet minden fejezete tartalmazza a legfontosabb tudnivalókat, melyek ismerete elengedhetetlen a kitűzött feladatok megoldásához. Minden témakört egy feladatsor zár, melyek különböző szerkesztésekre és transzformációkra adnak utasítást.

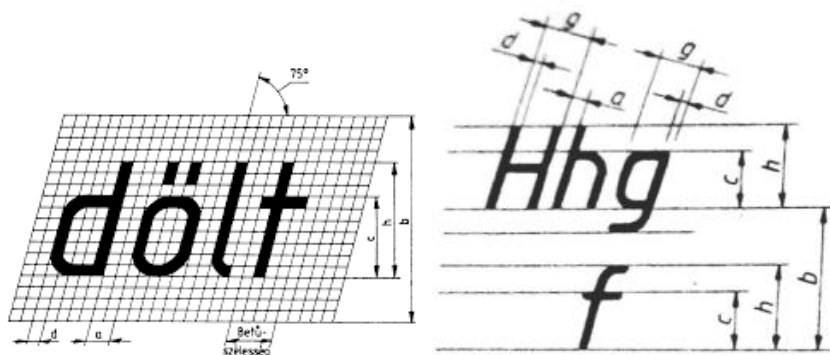
Az összeállítás során felhasználtuk az ajánlott szakirodalmakat.

A műszaki rajzok betűi és számjegyei

A műszaki rajzok ábráinak fontos kiegészítését jelentik a rajzok feliratai, ezért a rajzon található szöveget és méretszámokat úgy kell írni, hogy azokat könnyen és félreérthetetlenül lehessen olvasni. Célszerű tehát a betűk és számok alakját előíró szabályok bevezetése.

A műszaki rajz felirataira vonatkozó szabvány mind az álló, mind a 75° -os szögben dőlő írás alkalmazását megengedi. Ezen túlmenően mindkét változatban „A” típusú és „B” típusú betűket és számokat rögzít. Mi a rajzainkon a „B” típusú betűket fogjuk alkalmazni, ezért az „A” típusú betűk arányainak ill. méreteinek ismertetésétől eltekintünk.

A betűk és számok relatív méretei vagy az írásnagyság (h) – amely alatt a nagybetű magassági méretét kell érteni – vagy pedig a vonalvastagság (d) függvényében fejezhetők ki.



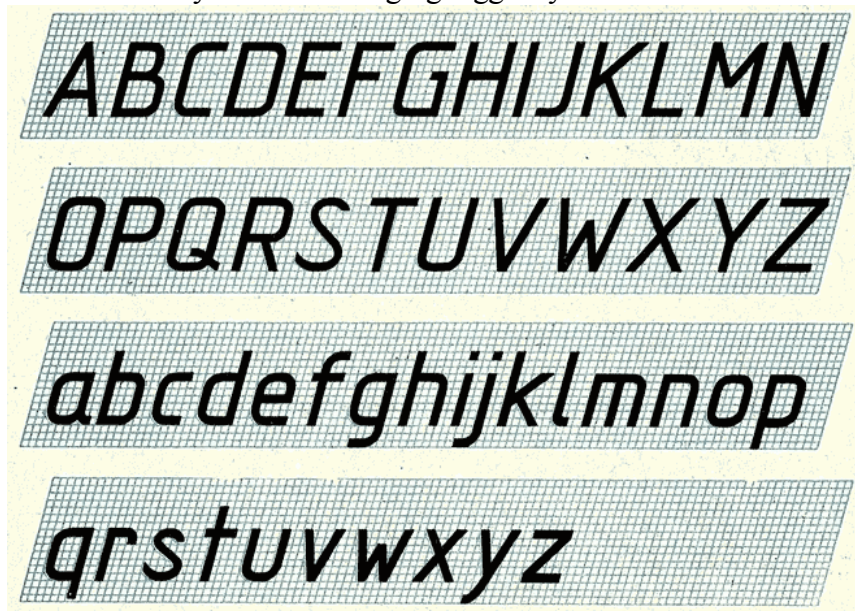
1. ábra. Betűk méretezése

A nagybetűk és az arab számok belső magassága $0,5h$ ($5d$). A kisbetűk magassága (c) $0,7h$ ($7d$), felső és alsó elemei a sorközök felhasználásával készülnek és $0,3h$ -val ($3d$) léphetik túl a sort alul és felül. A vonalvastagság $0,1h$ -val egyenlő. A betű (g) szélességét úgy kell megválasztani, hogy $0,6h$ -val vagy $6d$ -val legyen egyenlő, bár ez egyes betűk esetében $0,1h - 0,9h$ ($d - 9d$) között változik. A betűk és számok közötti távolság (a) a szavakban $0,2h$ -val ($2d$), a szavak és

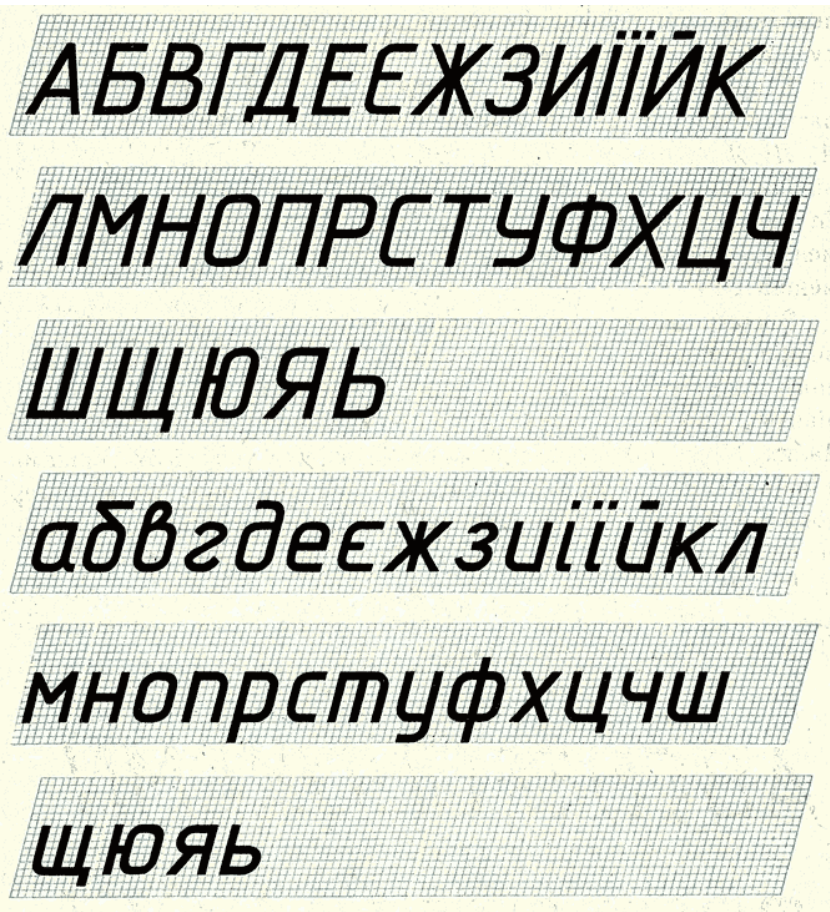
számok között $0,6h$ -val ($6d$) egyenlőnek tekinthető. A sorok alsó vonalai közötti távolságot $1,7h$ -nak ($17d$) vesszük.

Közepes nagybetűk magassága 10 egység, nagybetűk és az arab számok belső magasságai 5 egységnyiek, kisbetűké 7 egység, fölfelé és lefelé nyúlása 3 egység, vonalvastagság 1 egység, betűk szélessége 1-9 egység között változó, legkisebb betűköz 2 egység, legkisebb szóköz 6 egység, sortávolság 17 egység.

A betűk alakját, valamint az ékezetek elhelyezését a 2. és 3. ábrán (dőlt írás) láthatjuk. Ugyanitt leolvashatók a betűk szélességi méretének arányai a vonalvastagság függvényében.

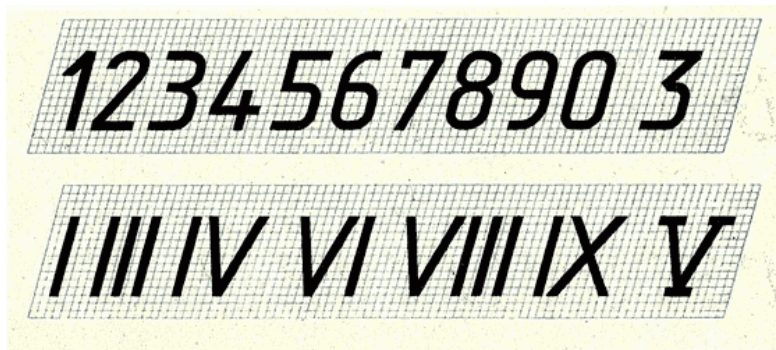


2. ábra. Magyar ABC betűi



3. ábra. Ukrán ABC betűi

Az arab és római számok alakját és szélességi arányait a 4. ábra tartalmazza, a római számok írásához a betűk írása szolgálatja az alapot.



4. ábra. Arab és római számok

Feladat

Szabványbetűk elkészítése!

A projektív tér és tulajdonságai.

1. Térelemek és kölcsönös helyzeteik. Térelemek hajlásszöge és távolsága

1.1. Térelemek

PONT:



- a pont alapfogalom és alapelem;
- a pont a sík legegyszerűbb, kiterjedés nélküli eleme.

EGYENES:

egy bizonyos irányban elhelyezkedő végtelen sok pont, egydimenziós végtelen kiterjedésű alakzat;

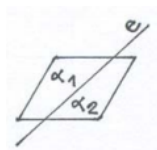
az egyenest bármely pontja két félegyenesre osztja;

az egyenes két pontja által határolt, véges hosszúságú részét szakasznak nevezzük, a szakasz hosszát a két pont távolságának adja.

SÍK:



- kiemelkedések, bemélyedések és görbületek nélkül elhelyezkedő végtelen sok pont, kétdimenziós végtelen kiterjedésű alakzat;



- a síkot bármely egyenese két félsíkra osztja.

1.2. Térelemek kölcsönös helyzete

1. *Pont és pont:*
 - (a) a két pont egybeesik
 - (b) a két pont különböző
2. *Pont és egyenes:*
 - (a) a pont illeszkedik az egyenesre
 - (b) a pont nem illeszkedik az egyenesre
3. *Pont és sík:*
 - (a) a pont illeszkedik a síkra
 - (b) a pont nem illeszkedik a síkra
4. *Egyenes és egyenes:*
 - (a) a két egyenes egybeesik (minden pontjuk közös)
 - (b) a két egyenes párhuzamos (egyetlen közös pontjuk sincs, de van közös síkjuk)
 - (c) a két egyenes metsző (van pontosan egy közös pontjuk)
 - (d) a két egyenes kitérő (nincsenek egy síkban)
5. *Egyenes és sík:*
 - (a) az egyenes illeszkedik a síkra (az egyenesnek minden pontja a síknak is pontja)
 - (b) az egyenes párhuzamos a síkkal (az egyenesnek a síkkal nincs közös pontja)
 - (c) az egyenes metszi a síkot (pontosan egy közös pont létezik)
6. *Sík és sík:*
 - (a) a két sík egybeesik (minden pont és minden egyenes közös)
 - (b) a két sík párhuzamos (egyetlen közös pontjuk sincs)
 - (c) a két sík metszi egymást (pontosan egy egyenes a közös pontok halmaza)

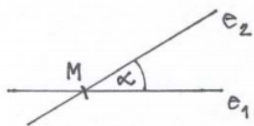
1.3. Tételek távolsága

(Bármilyen illeszkedés esetén a távolság triviálisan nulla.)

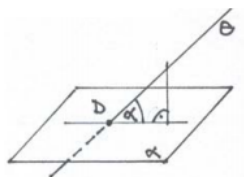
1. *Pont és pont*: A két pont által meghatározott szakasz hossza.
2. *Pont és egyenes*: Tekintve a pont és az egyenes síkját, húzzunk merőlegest a pontból az egyenesre. Az egyenes és a merőleges metszéspontjának az eredeti ponttól való távolsága a keresett távolság.
3. *Pont és sík*: Állítsunk merőlegest a pontból a síkra. A sík és a merőleges metszéspontjának az eredeti ponttól való távolsága a keresett távolság.
4. *Egyenes és egyenes*:
 - (a) Metsző egyenesek távolsága 0.
 - (b) Párhuzamos egyenesek távolsága: Válasszunk ki egy pontot valamely egyenesről. A keresett távolság ezen pont és a másik egyenes távolsága.
 - (c) Kitérő egyenesek távolsága: Vegyük azt az egyenest, amely mindkét egyenest metszi és mindkét egyenesre merőleges. Ez az egyenes mindig létezik, és normáltranszverzálisnak nevezzük. A normáltranszverzálisnak az egyik, illetve a másik egyenessel alkotott metszéspontját tekintve (1-1 db), a keresett távolság e két pont távolsága.
5. *Egyenes és sík*:
 - (a) Ha az egyenes és a sík metsző, a távolságuk 0.
 - (b) Ha az egyenes a síkkal párhuzamos, tekintsünk egy tetszőleges pontot az egyenesről. A keresett távolság a pont és a sík távolsága.
6. *Sík és sík*:
 - (a) Metsző síkok távolsága 0.
 - (b) Ha a két sík párhuzamos, tekintsünk egy tetszőleges pontot az egyik síkról. A keresett távolság a pont és a másik sík távolsága.

1.4. Térelemek hajlásszöge

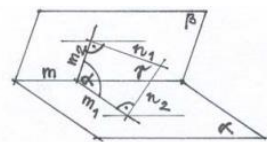
Megjegyzés: Két térelem szöge megállapodás szerint kisebb vagy egyenlő, mint 90° .



Két egyenes szögén az irányvektoraik szögét értjük.



Egyenes és sík szöge a sík normálvektorának és az egyenes irányvektorának szögének pótszöge.



Két sík szöge a normálvektoraik szöge.

Két merőleges tétele: Egy egyenes pontosan akkor merőleges egy síkra, ha annakkét, az egyenes és a sík metszéspontján áthaladó egyenesére merőleges

Végtelenben fekvő térelemek:

Logikailag egységet teremthetünk, ha elfogadjuk, hogy minden egyenesnek egyetlenegy végtelenben fekvőpontja van.

Párhuzamos egyenesek végtelenben lévő pontja közös. Ez a közös pont a párhuzamos egyenesek metszéspontja.

A sík végtelenben lévő pontjai a síkra illeszkedő egyenesek végtelenben lévő pontjai.

E végtelenben lévő pontok halmaza a sík egyetlen végtelenben lévő egyenesére.

Párhuzamos síkok végtelenben fekvő egyenesére közös.

A tér végtelenben lévő pontjai, illetve egyenesei egy síkra illeszkednek, a tér egyetlen végtelenben lévő síkjára.

Mértani hely fogalma:

Mértani helynek nevezzük azoknak a pontoknak a halmazát, amelyek bizonyos feltételeket kielégítve helyezkednek el a térben.

A mértani hely pontja a feltételeket kielégítő elhelyezkedésű összes pont, de nem pontja egyetlenegy olyan pont sem, amely nem tesz eleget a feltételeknek

2. Vetítési módok, elvek. Térelemek ábrázolása, Monge-féle képsíkrendszer

2.1. Vetítési módok, elvek

Nézzük meg, hogyan keletkezik szemünkben a kép?

A valóság formáit szemünk ideghártyájára a szemlencse optikai úton vetíti. Ez a vetítődőkép **kétdimenziós síkképa** valóság háromdimenziós térformáiról.

A tárgyról visszaverődő fénysugarak vetítik a szem ideghártyájára a képet úgy, hogy a sugarak a szemlencsében metszik egymást.

A fénysugarak metszéspontja a **vetítési középpont**. Ugyanígy keletkezik a fényképezőgéppel készített kép is.

A szemünk és a fényképezőgép a külvilág formáiról úgynevezett **perspektivikus** képet készít. A kép keletkezéséhez (egy pontban metsződő) **vetítősugarakk** kellene, melyek a képet egy képfelfogó felületre (rendszerint sík felületre) a **KÉPSÍK**-ra vetítik.

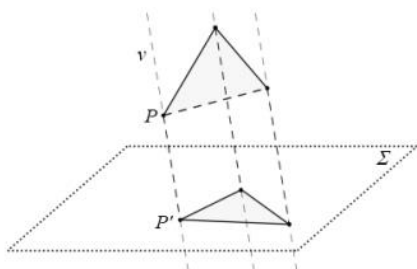
Az alakzat síkbeli képéhez a **vetítés (projekció)** módszerével jutunk.

A kép keletkezésének három elengedhetetlen feltétele:

- a tárgy
- a vetítősugár (vetítőegyenes)
- és egy rendszerint sík felület = a képsík

A tárgy és a képsík pontjait a **VETÍTŐ-EGYENESEK** rendelik egymáshoz. A tárgy egy pontjának a képe ott van, ahol a rajta átmenő vetítősugár dőli a képsíkot.

A vetítésnek két alapvető módja:



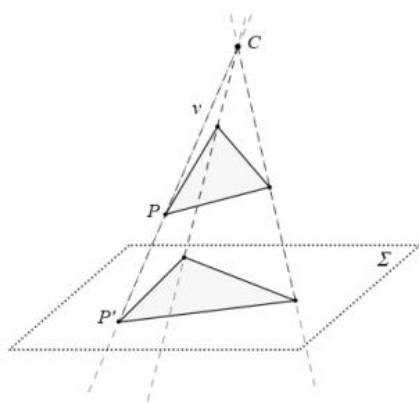
Párhuzamos vetítések:

A térbeli pontokat egy iránnyal párhuzamosan vetítjük asíkra/síkokra.

Tulajdonságai:

- egyenestartó
- párhuzamosságtartó

- aránytartó



Centrális vetítések: A térbeli pontokat a tér egy pontjából (a centrumból) vetítjük síkra/síkokra. Tulajdonságai:

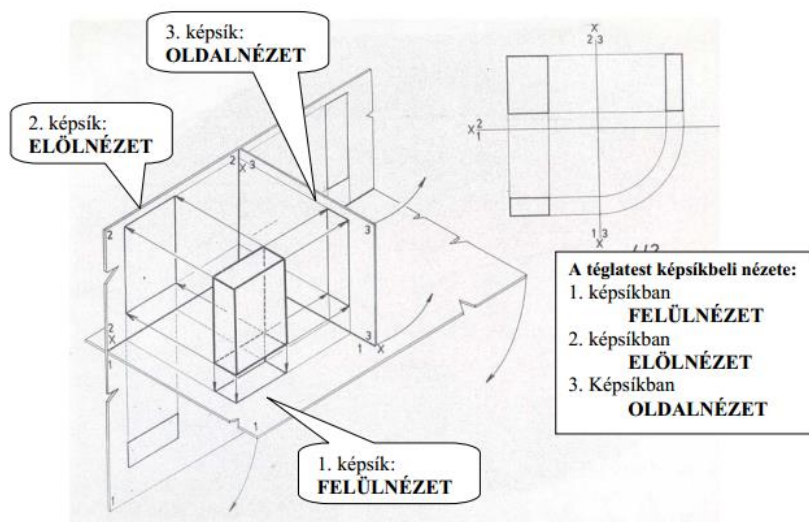
- egyenestartó
- kettősviszony-tartó

Megjegyzés: Az egyenestartás azt jelenti, hogy kollineáris pontok képei kollineárisak. Ebbe

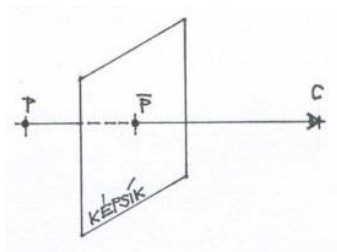
beleértjük azt is, hogy egy egyenes képe speciálisan ponttá is fajulhat.

Merőleges, párhuzamos sugarú vetítés

A merőleges sugarú vetítés két, három, sokszor több képsíkot használ egy vetítési rendszerben. A képsíkok páronként merőlegesek egymásra. A vetületek törvényszerűgeometriai rendben kapcsolódnak egymáshoz. Ezek a síkok merőleges sugarú vetítési rendszer **alap-képsíkjai**. A képsíkok egymást ún. **képsík-tengelyekben** metszik. A tengelyeket „x”betűvel jelöljük. A képsíkoknak száma van. A képsíkok számát a tengelyek mellé írjuk. A képsíkokat a tengelyek kettészelik, így beszélünk pozitív és negatív képsíkfelületekről. A függőleges, velünk szemben álló képsík a **második képsík**. A vízszintes az **elsőképsík**. A második képsík pozitív fele a tengely felett van, az elsőpozitív fele felénk áll. Ugyanígy felénk áll a **harmadik** – mindkettőre merőleges – **képsík** pozitív fele.



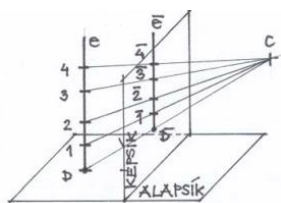
2.2. Tételek ábrázolása



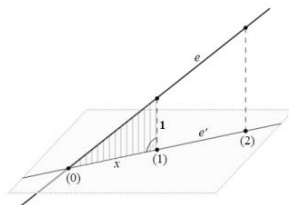
1. Pont vetülete: pont

A pont vetülete, a pontot a középponttal (szemmel) összekötő egyenesnek a képsíkkal alkotott metszéspontja (dőféspontja).

2. Egyenes vetülete: pont, egyenes



centrális vetítés



párhuzamos,
merőleges irányú vetítés

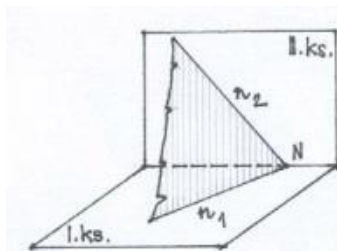
3. Sík ábrázolása

Egy sík képe a párhuzamos, merőleges irányú vetítés során az egész képsíkot adná. Ezért nem minden pontjának a képét adjuk meg, hanem a következő (elemítérgeometriából jól ismert) lehetőségek közül választunk: a síkot megadhatjuk

- 3 különböző pontjával,
- 1 pontjával és egy arra nem illeszkedő egyenesével,
- 2 metsző egyenesével,
- 2 párhuzamos egyenesével.

A gyakorlatban főként két speciális párhuzamos egyenesével adjuk meg a síkot.

1. **Nyomvonal:** a sík és a képsík metszésvonala.



A nyomvonal (**n**) a síknak olyan egyenese, amely valamelyik képsíkban fekvő egyenes, tehát egyik képe a képtengelyre esik. A nyomvonalak a képtengelyen metszik egymást. A metszéspont a síknak és a képsíknak (tehát 3 síknak) a közös pontja. A

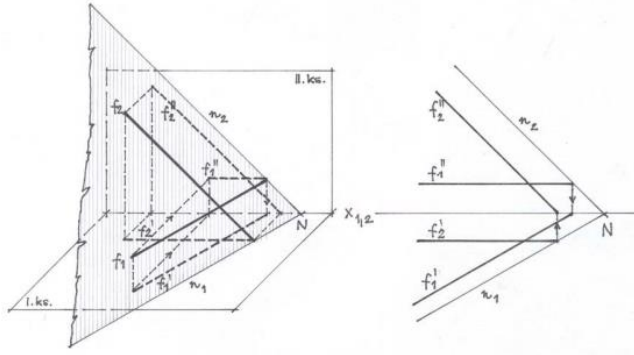
képtengelyen lévő pontot a sík tengelypontjának nevezzük és a jele: **N**. Ez nem más, mint az egyenes nyompontja (az egyenesnek a képsíkkal alkotott metszéspontja = dőféspontja), ebből következik, hogy a sík valamennyi egyenesének nyompontja rajta van a sík nyomvonalán.

2. **Fővonal:** (főegyes) a síknak olyan egyenesei, amelyek valamelyik síkkal párhuzamosak.

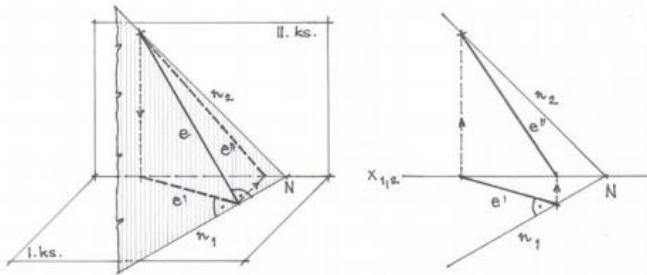
Az első képsíkkal párhuzamos fővonal első (horizontális) fővonala második képsíkkal párhuzamos a második (vertikális) fővonal.

Mivel a fővonal a képsíkkal és a nyomvonallal párhuzamos egyenes, ezért egyik vetülete a képtengellyel, másik vetülete a nyomvonallal párhuzamos képegyes. A nyomvonal tulajdonképpen a képsíkra illeszkedő fővonalnak is tekinthető.

Kivétel a vetítősík, melynek egyik fővonala a képsíkra merőleges egyenes, illetve a profilsík, melynek mind az első, mind a második fővonala merőleges az ellenkezőnévképsíkra.



3. **Esésvonal:** a sík fő-, és nyomvonalára merőleges egyenest esésvonalnak nevezzük

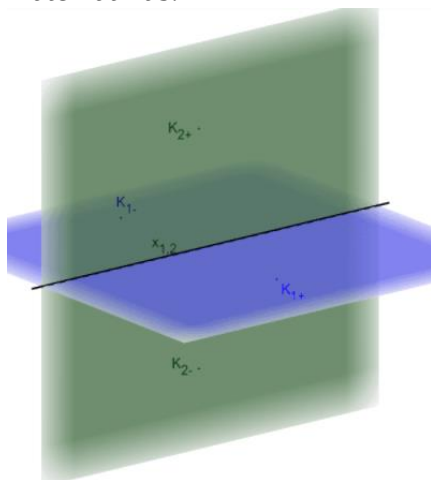


Az esésvonal lehet elsőés második esésvonal. A sík elsőesésvonalai a sík elsőfővonalaira és nyomvonalaira merőlegesek. A második esésvonalak ennek megfelelően a sík második fővonalaira és nyomvonalaira merőlegesek.

Mivel az esésvonal képsíkkal párhuzamos egyenesre merőleges, ezért egyik képe a fővonallal párhuzamos képsíkon a fővonal/nyomvonal képére merőlegesen vehetőfel. A hiányzó másik képe szerkeszthető.

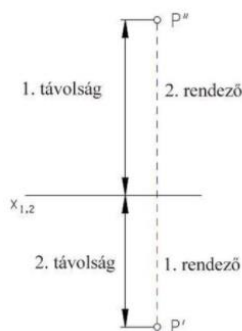
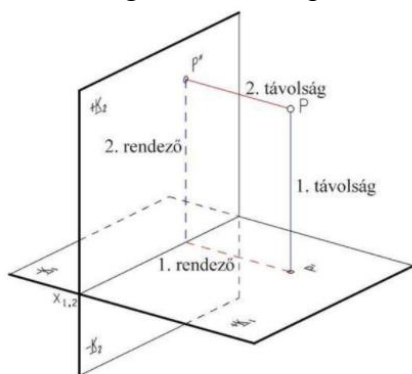
2.3. Monge-féle képsíkrendszer

A **Monge-projekció** egy kétképsík, párhuzamos vetítési eljárás. Megalkotója Gaspard Monge (1746-1818) francia matematikus.



Rögzítsünk a térben két egymásra merőleges síkot. Legyen az egyik a K_1 *első képsík*, a másik a K_2 *második képsík*. A két képsík metszévonalára az $x_{1,2}$ ún. *képsíktengely*. A képsíkok a teret 4 térfelületre osztják, amelyeket I., II., III. és IV. térfelületnek hívunk. (Az I. térfelületet mindkét képsík pozitív félsíkja határolja.)

Vetítsük a tér pontjait merőlegesen ezekre a képsíkokra. Így egy tetszőleges P pont K_1 -re eső merőleges vetületét a P pont *első képének* nevezzük és P' -vel jelöljük, hasonlóan a K_2 -re eső merőleges vetület a P'' *második kép*. A $\overrightarrow{PP'}$ és $\overrightarrow{PP''}$ egyenes rendre egy első és egy második vetítőegyenes. (Az első képet szokás felülnézetnek, míg a másodikképet előlnézetnek is nevezni.)

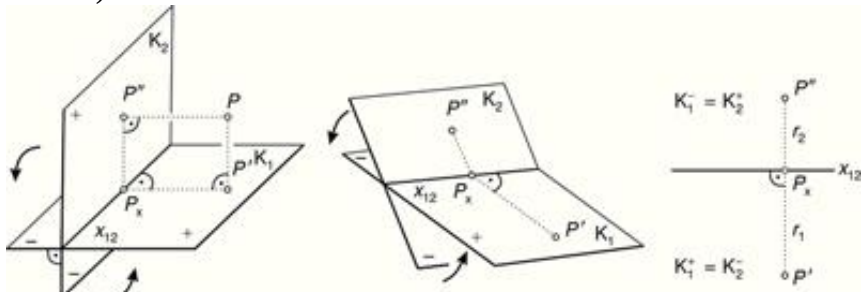


A cél azonban az, hogy egyetlen síkban (a rajz síkjában) ábrázolhassuk a tér pontjait. Ezért „hajtsuk össze” a két síkot: fektessük a K_2 pozitív félsíkját K_1 negatív félsíkjába, és K_2 negatív félsíkját a K_1 pozitív félsíkjába, így a két képsíkot (és minden pont kétképét) már egyetlen síkban látjuk.

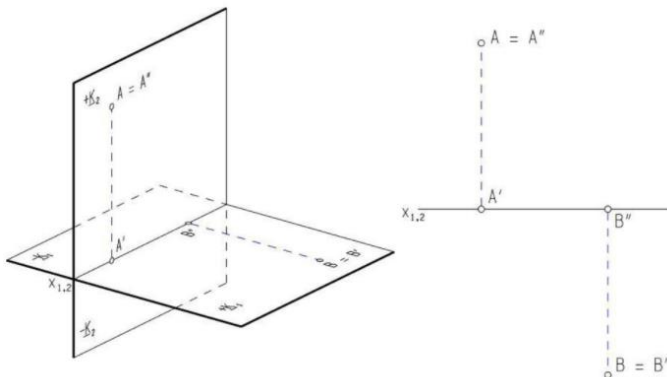
Mivel mindkét képsíkra a vetítés iránya merőleges, ezért a képsíkok „összehajtása” után egy P pont P' és P'' képei egy egyenesen ($\overline{P'P''}$) helyezkednek el, ez a P ponthoz tartozó *rendező* (*egyenes*). – Vegyük észre, hogy a P pont távolsága a K_1 képsíktól a $\overline{PP''}$ szakasz hossza, míg a P K_2 -től való távolságát a $\overline{PP'}$ szakasz hossza.

Pont ábrázolása

a)

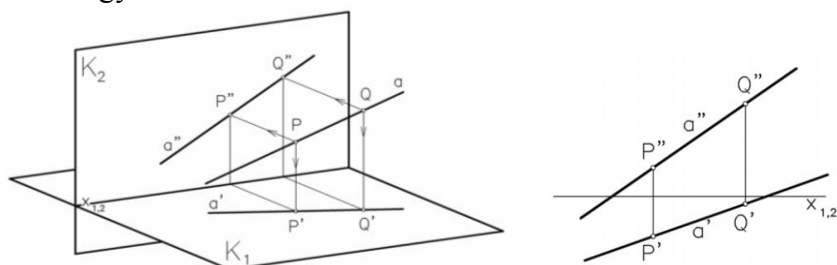


b)



Az „A” pont a II. tértetűgyedben található. A vetítések elvégezve a képsíkokon megkapjuk az A' és A'' pontokat. Mivel most a K_2 képsík mögött vagyunk, és A' rajta fekszik az $x_{1,2}$ egyenesen, a képsíkok egyesítése után is az $x_{1,2}$ -re és „föle” kerül. A „B” pont a IV. tértetűgyedben található, így hasonlóképpen végezzük a vetítést.

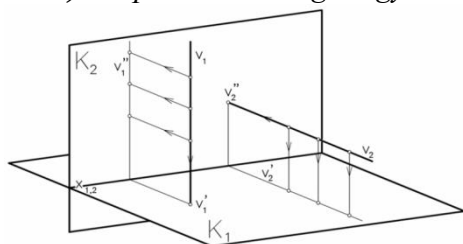
Egyenes ábrázolása



Egy egyenest a térben két pontja egyértelműen meghatározza. Ennek felhasználásával fogjuk az egyenest ábrázolni. Ha az egyenes két pontját vesszük, akkor a pontok első képeinek összekötő egyenese lesz az egyenes első képe és a pontok második képeinek egyenese lesz az egyenes második képe. (Mindezeket egy általános helyzetű egyenesre mondhatjuk.)

A képsíkokhoz képest speciálisan elhelyezkedő egyenesek:

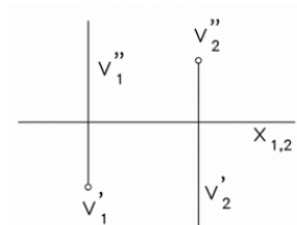
a) Képsíkra merőleges egyenes



Vetítőegyes:

merőleges valamelyik képsíkra, ez a tulajdonság magában hordozza azt, hogy a másik képsíkkal párhuzamos. Azon a képsíkon, amelyre

merőleges, a vetülete egyetlen pont, a másik képe pedig az $x_{1,2}$ -re merőleges egyenes. A vetítőegyes csupa egymáshoz képest fedőpontból áll.

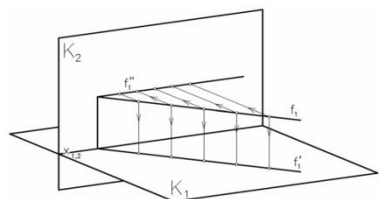


A vetítőegyenesek azért is különlegesek, mert csak egy vetítősíkjuk van. A v_1 első vetítőegyenese csak a második vetítősíkja adható meg. Ha a v_1 pontjaira első vetítőegyeneseket illesztünk, akkor ezek egybeesnek, és nem tudnak síkot meghatározni. A v_1'

kép emiatt egy pont lesz. Hasonlóan látható, hogy v_2'' is egy pont lesz a megfelelő képsíkon.

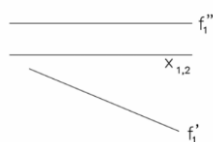
b) *Képsíkkal párhuzamos egyenes*

Főegyenes:

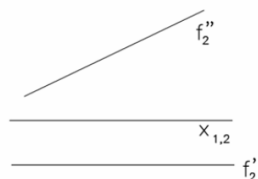
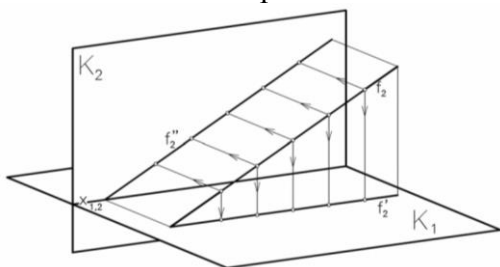


egyszerre első és második főegyenes, ennek mindkét képe párhuzamos az $x_{1,2}$ -vel.

Olyan egyenes, amely párhuzamos valamelyik képsíkkal. Az egyik képe párhuzamos az $x_{1,2}$ -vel, a másik tetszőleges helyzetű lehet, csak az $x_{1,2}$ -re merőleges nem. Van olyan egyenes is, amely



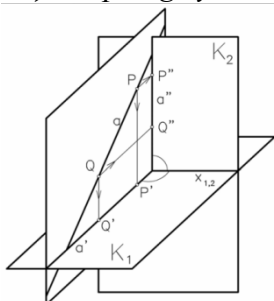
Az f_1 mindig K_1 -gyel párhuzamos egyenest jelent. Ennek az egyenesnek minden pontja egyenlő távolságra van a K_1 -től, emiatt az f_1'' az $x_{1,2}$ -vel párhuzamos lesz.



Az f_2 mindig K_2 -vel párhuzamos egyenest jelent. Ennek az egyenesnek minden pontja egyenlő távolságra van a K_2 -től, emiatt az f_2' az $x_{1,2}$ -vel párhuzamos lesz.

c) *Képtengelyre merőleges egyenes*

Profilegyenes:



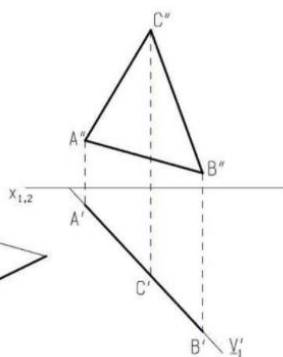
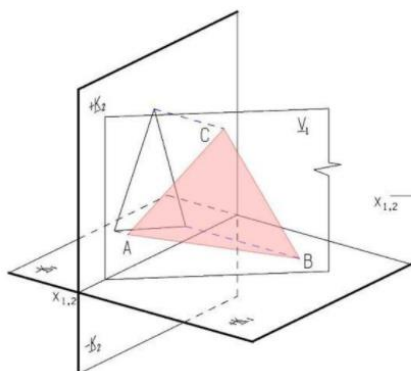
Olyan egyenes, melynek a két vetítősíkja ugyanaz a mindkét képsíkra merőleges sík.

Ezért a profilegyenest mindig két pontjával, pontosabban azok képeivel fogjuk megadni.

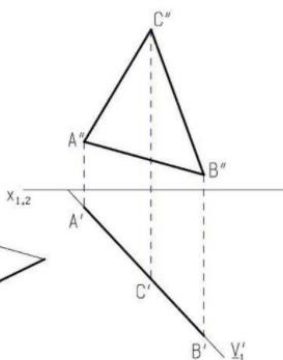
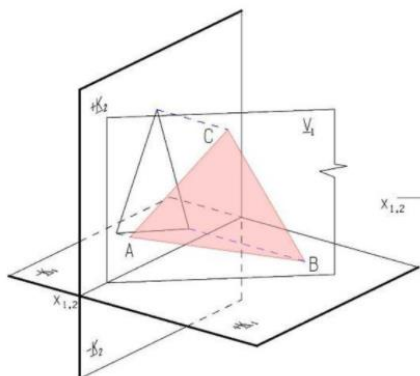
Sík ábrázolása

a) *Képsíkra merőleges sík*

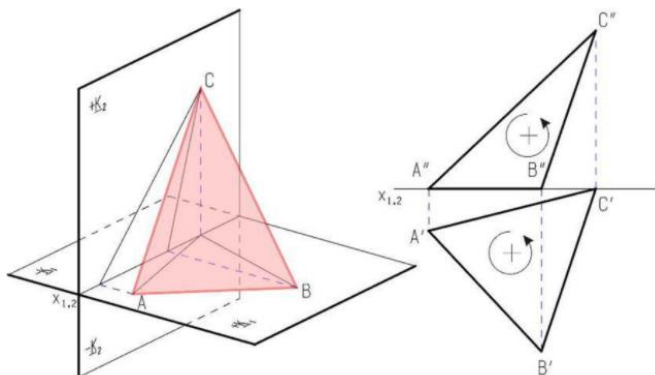
1.



2.



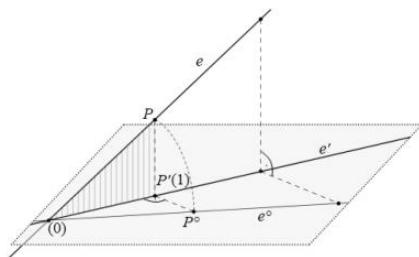
b) Általános helyzetű, dőlt sík



FELADATOK

Feladat: Adott egy tetszőleges e egyenes a térben. Vetítősík segítségével forgassuk le ezt az egyenest!

Megoldás:



Az egyenes leforgatása egy térbeli, tengely körüli forgatás, ahol a forgatás szöge $\pm 90^\circ$, tengelye az e' . Nyilvánvaló, hogy ekkor az egyenes nyompontja fixpontja a forgatásnak.

Az ábrán a P pont az egyenes 1-es kótájú pontja. Ez a pont a forgatás során egy e' -remerőleges síkban mozog egy olyan körön, amelyek középpontja $P'(1)$, sugara pedig 1egység. A P pont leforgatottját P° -tal jelöljük, az e forgatott képe e° .

1. Legyen adott két sík két-két szintvonalával úgy, hogy a szintvonalak párhuzamosak egymással (de a két sík nem párhuzamos). Szerkesszük meg a két sík metszéspontját!

Segítség: Tekintsünk egy olyan vetítősíkot, amely mindkét síkból 1-1 esésvonalattartalmaz és forgassuk azt le. Így a két

esésvonal metszéspontja a keresett metszésvonal egy pontja. A metszésvonal pedig párhuzamos a síkok szintvonaláival.

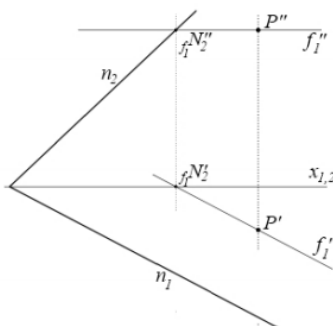
2. Adott egy egyenes két pontjával. Szerkesszük az egyenesre (tetszőleges helyre) egy 5 cm hosszúságú szakaszt!
3. Adott egy egyenes e' vetülete és nyompontja. Határozzuk meg az egyenest (egyújabb pontjával) úgy, hogy képsíkszöge 30° legyen!

Segítség: „Forgassuk le” az egyenes vetítősíkját, és szerkesszünk olyan derékszögűháromszöget, amelynek egy szöge 30° és az azzal szemköztes oldal 1 egység.

4. Legyen adott egy egyenes e' vetülete és tetszőleges P pontja. Határozzuk meg az egyenes nyompontját úgy, hogy képsíkszöge 30° legyen!
5. Legyen adott egy sík szintvonaláival és egy rá nem illeszkedő P pont. Állítsunk merőlegest P -ből a síkra!
6. (Összetett feladat) Szerkesszünk adott síkon álló egyenes gúlát, melynek alapja 4 cm oldalú négyzet, magassága 5 cm!

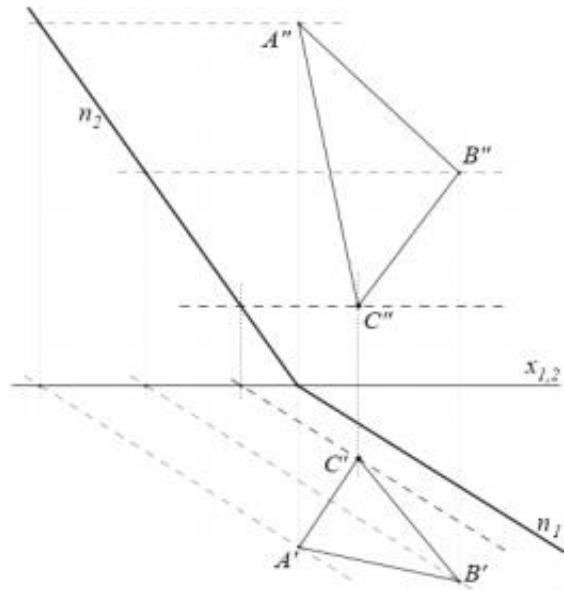
Feladat: Legyen adott egy sík nyomvonaláival. Szerkesszük meg egy tetszőlegessíkbeli P pont képét!

Megoldás:



Feladat: Legyen adott egy sík nyomvonaláival. Szerkesszük meg egy tetszőlegessíkbeli ABC háromszög képét!

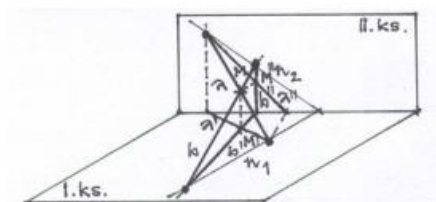
Megoldás:



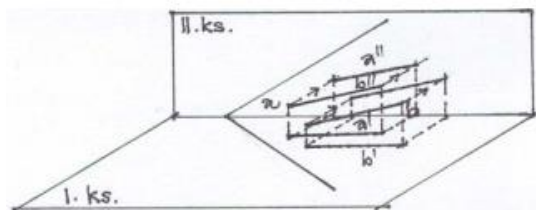
7. Adott egy sík nyomvonalával és egy P pont P'' második képe. Határozzuk meg aP' első képet úgy, hogy P síkbeli legyen!
8. Adott egy sík nyomvonalával és egy e egyenes e' első képe. Határozzuk meg e'' -t úgy, hogy e a síkkal párhuzamos legyen!
9. Szerkesszünk $ABCD$ síkbeli(!) négyszöget!
10. Szerkesszük meg egy $ABC\Delta$ háromszög síkjának nyomvonalait!
11. Legyen adott P pont és e egyenes képeikkel. Határozzuk meg a közössíkjuk nyomvonalait!
12. Legyen adva e és f metsző egyenespár. Szerkesszük meg a síkjukban lévő tetszőleges pont képeit nyomvonalak (vagy fővonalak) használata nélkül!

13. Adott egy sík nyomvonalai. Szerkesszük meg azokat a pontjait, amelyek a K_1 képsíktól 3 cm-re vannak! (fővonal szerkesztése)
14. Határozzuk meg egy általános helyzetű egyenes metszéspontját a koincidenciasíkkal és a szimmetriasíkkal!
15. Határozzuk meg egy általános helyzetű sík metszésvonalát a koincidenciasíkkal és a szimmetriasíkkal!
16. Nevezd meg és ábrázold az általános helyzetű síkot!

a)



b)



Projektív transzformációk

1. Térelemek transzformációja. Két általános síkidom metszésvonala.

1.1. Térelemek transzformációja

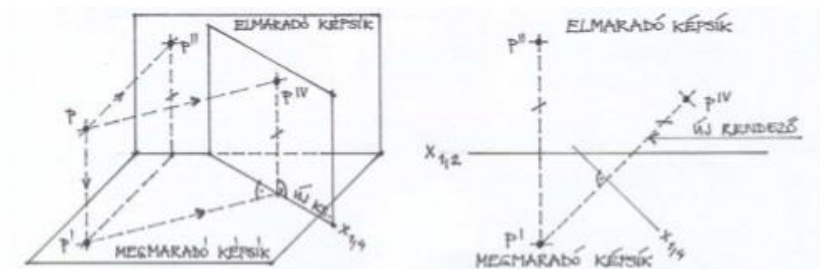
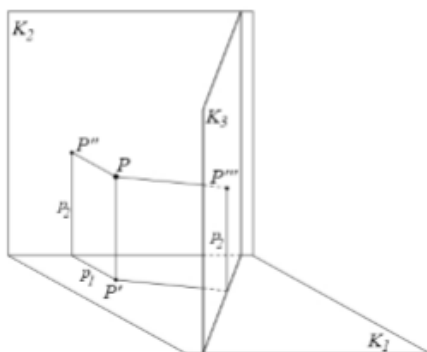
Az új képsík alkalmazását, a térelemek térbeli alakzatok új képsíkon lévő vetületeinek előállítását *transzformációnak* nevezzük. Minden mértani alakzat bizonyos pontok összességének tekinthető, ha a pont transzformációját ismerjük, bármely alakzat transzformált képe megszerkeszthető.

A képsíktranszformáció célja, hogy új képsík(ok) bevezetésével egy általános helyzetű objektumot speciális helyzetbe hozzunk, vagy fordítva.

Új képsík bevezetése: Egy első vagy egy második vetítősíkot kinevezünk új képsíknak, majd erre a vetítősíkra merőlegesen vetítjük az objektum pontjait. Ezután elhagyjuk azt a képsíkot, amelyre vonatkozóan az új képsík nem vetítősík helyzetű. Egy tetszőleges P pontnak ekkor egy harmadik képe keletkezik, amelyet P''' -vel jelölünk. További képsíkok analóg módon vezethetők be, egy P pont negyedik, ötödik stb. képe a P^{IV} , P^V , ... pont.

Pont transzformációja

Egy tetszőleges P pont esetén, ha azt például egy első vetítősíkra (a leendő K_3 harmadik képsíkra) vetítjük, egy P''' -vel jelölt új képét kapjuk, ahol P''' távolsága a K_1 képsíktól megegyezik a P K_1 -től való távolságával ($d(P''', K_1) = d(P, K_1) = |p_2|$). A P'' -t *elmaradó képnek*, p_1 -gyel jelölt szakaszt *elmaradó rendezőnek* nevezzük.

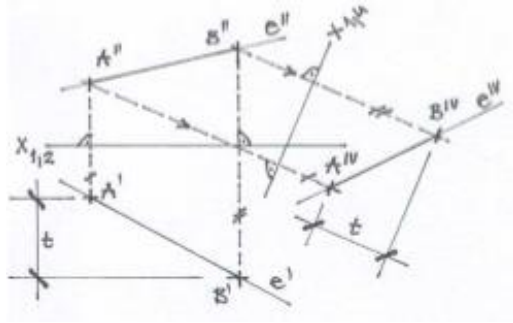


Egyenes transzformációja

Egy egyenest két pontjával transzformálhatjuk. Alkalmas új képsíkok bevezetésével

- (első lépésben) egy egyenes képsíkkal párhuzamos helyzetbe hozható,
- (második lépésben) egy egyenes képsíkra merőleges (vetítő) helyzetbe hozható.

Ezekkel a lépésekkel elérhető, hogy például egy egyenest valódi nagyságban lássunk (első lépés). A vetítősugar helyzetű egyenesek esetében (második lépés) könnyen szerkeszthetők például egy mértani testtel alkotott metszéspontjai.

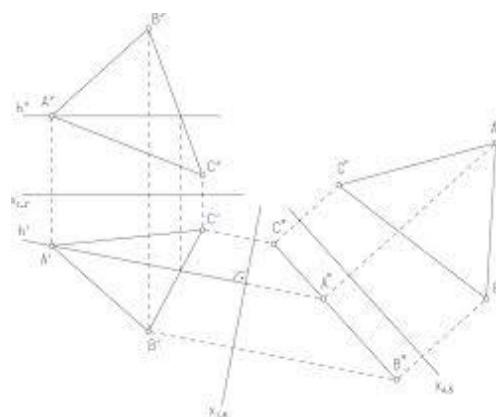


Sík transzformációja

Egy síkot szintén pontjai segítségével transzformálunk. Tetszőleges helyzet esetén 3 pontjával kell meghatározni az új képeket, ha azonban rendelkezésre állnak a nyomvonalak (mint a sík egyenesei), úgy kevesebb pontis elég. (Felhasználva, hogy a nyomvonalak a képsíktengelyen metszik egymást.) Alkalmas új képsíkok bevezetésével

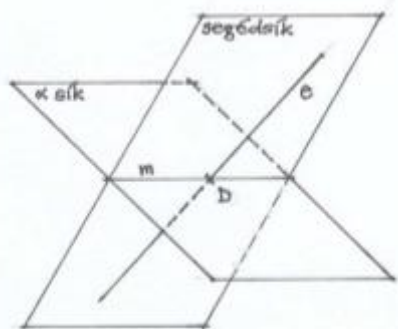
- (első lépésben) egy sík képsíkra merőleges (vetítő) helyzetbe hozható,
- (második lépésben) egy sík képsíkkal párhuzamos helyzetbe hozható.

Ezekkel a lépésekkel elérhető, hogy például egy sík és egy mértani test metszetét egyszerűbben szerkeszthessük (első lépés). Egy képsíkkal párhuzamos sík esetében pedig a megfelelő képen mindent valódi nagyságban látunk (második lépés).



1.2.Síkidom és egyenes dőféspontjának szerkesztése

Sík és egyenes dőféspontja: a két térelem közös pontja



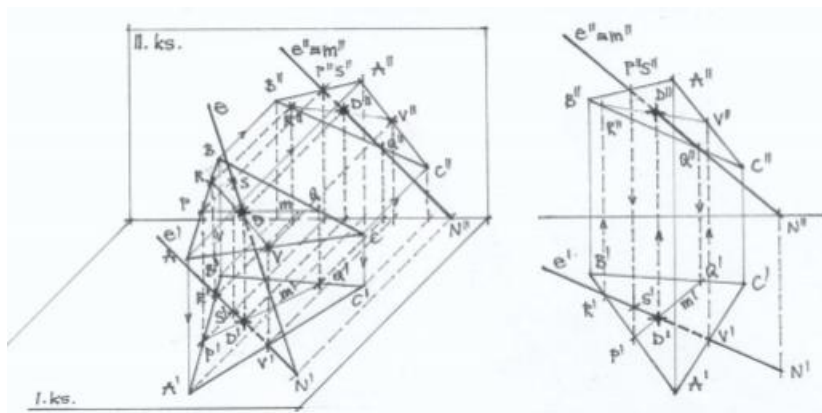
Általános helyzetű sík és egyenes esetében, úgy oldjuk meg a feladatot, hogy az egyenesen tetszőleges segédsíkot fektetünk, amely az adott síkot (α sík) metszi. A metszésvonal (m) és az egyenes (e) közös pontja a keresett **dőféspont** (D).

Mivel a segédsík tetszőleges állású lehet, a gyakorlatban olyan síkot célszerű választani, melynek a metszésvonala az adott síkkal (α sík) könnyen és gyorsan megszerkeszthető. Ilyen sík az adott egyenesre illeszkedő vetítősík.

Síkidom és egyenes dőféspontjának szerkesztése:

- a) *Általános térelemek esetén:* általános helyzetű sík és általános helyzetű egyenes

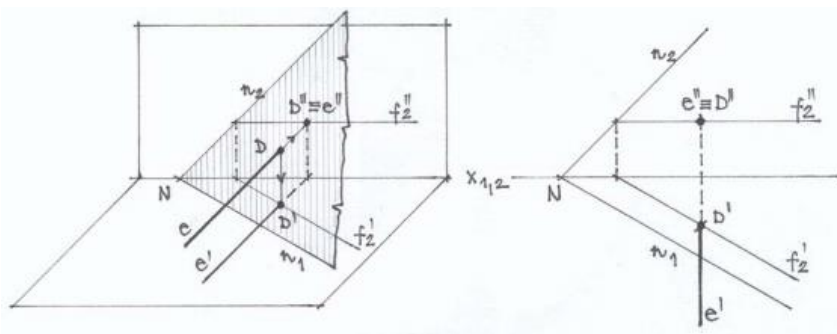
Segédsíkként az egyenesre második vetítősíkot illesztünk. Ennek második képe egybeesik az egyenes második képével. ($P'' + Q'' = m''$) Ez egyúttal a síkidom síkjával alkotott metszésvonalnak is a második képe. Az m metszésvonal első képét (m') mint a síkban fekvő egyenes hiányzó képét szerkesztettük meg. A metszésvonal első képének és az egyenes első képének metszéspontja a keresett D (D') dőféspont első képe. A dőféspont (D'') második képét rendezővel jelöljük ki az e egyenes (e'') második képén.



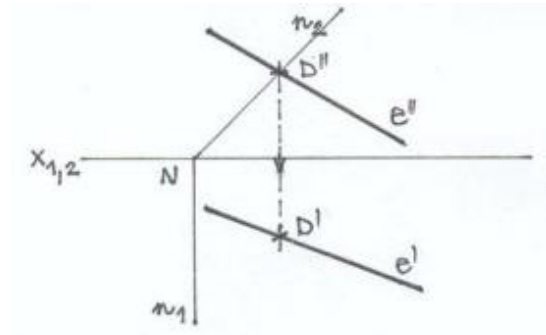
b) Különleges térelemek esetén:

1. Általános sík és második képsíkra merőleges egyenes

Az első és második képsíkban nyomvonalaival adott az általános helyzetű sík ($n'; n''$), az egyenes különleges helyzetű, merőleges a második képsíkra. Ezért az egyenes második képe ponttá fajul. A hiányzó D' dőléspont meghatározásához a sík D'' pontjára illeszkedő fővonalat (f'') használjuk.

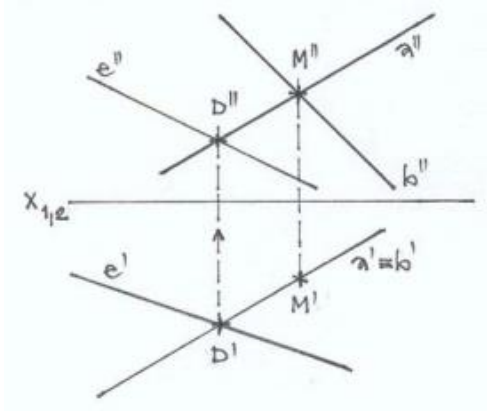


2. Második vetítősík és általános helyzetű egyenes



Nyomvonalaival adott a második vetítősík (n' ; n'') és az egyenes első és második képe (e' ; e''). A dőléspont a második képsíkon adott (D''), a hiányzó elsőképe (D') rendezővel kitűzhető.

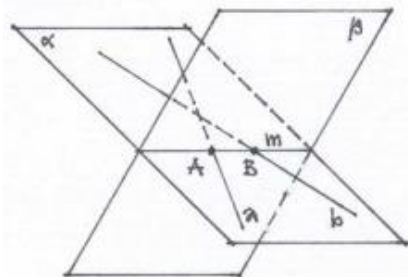
3. Metsződő egyenespár által adott első vetítősík és általános helyzetű egyenes



Előzőhöz hasonló a feladat megoldása, csak itt a dőléspont második képe (D'') a hiányzó kép, mely az elsőképsíkból bocsátott rendezővel szerkeszthetünk meg.

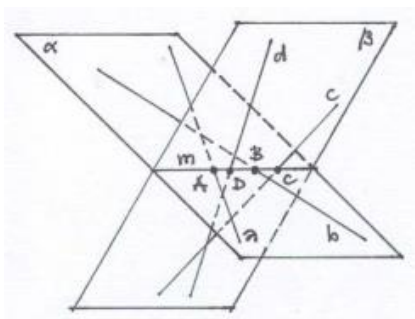
Két sík metszésvonala: Két sík közös egyenese. A metszésvonal meghatározott, ha két pontja ismert. Általános

esetben két sík metszésvonalának meghatározását visszavezetjük egyenes és sík dőléspontjának meghatározására.

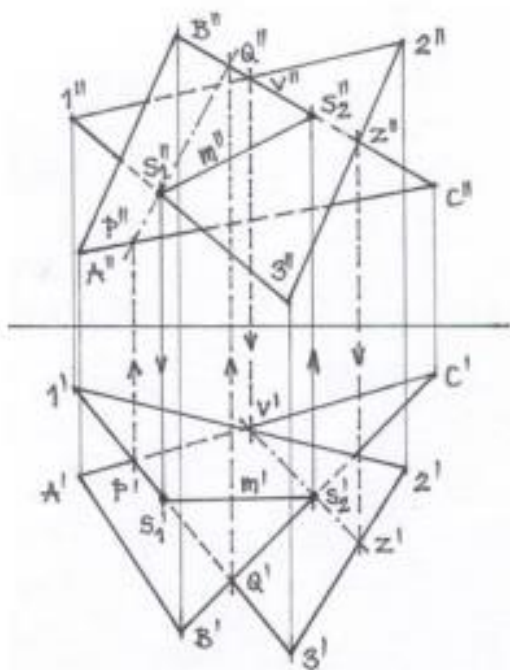


A két sík közül az egyik, pl. α sík tartóegyeneseinek (a és b egyenesek) dőléspontját szerkesztjük meg a β síkkal (A és B dőléspontok). A két pont egyértelműen meghatározza a két sík metszésvonalát.

Az egymást metsző síkok a , b illetve c , d tartóegyenesei közül bármelyik kettőnek (pl.: a és b , c és d , a és c , b és d) megszerkeszthető a dőléspontja a rá nem illeszkedő síkkal. A dőléspontok (A, B, C, D) mindegyik esetben illeszkednek a metszésvonalra.



1.3. Két általános síkidom metszésvonala



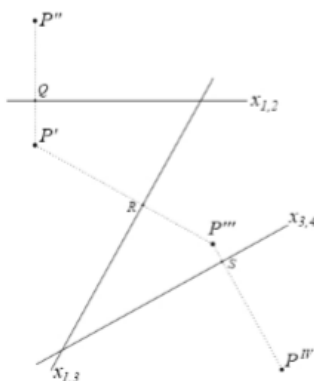
A szerkesztés menete leolvasható az ábráról. A két általános síkot három nem egy egyenesbe eső pontjával határoztuk meg. (α síkot: $1,2,3$ pontjával; a β síkot: A,B,C pontjával adtuk meg.) Szerkesztendő a két sík metszésvonala. Ha megszerkesztjük a metszésvonal két pontját, ezeket összekötve megkapjuk a keresett metszésvonalat. Válasszuk az *I. ks.*-ban az α sík $1',3'$ élét, mint egyenest és szerkesszük meg az A,B,C háromszöggel a

dőféspontját: az $1',3'$ él metszi az A',C' élet a P' pontban, és metszi a B',C' élet a Q' pontban. Ezeket a metszéspontokat felvetítve a *II. ks.*-ba, A'',C'' élen P'' pontot, a B'',C'' élen a Q'' pontot kapjuk. A P'' és Q'' pontokat összekötő egyenes metszi az $1'',3''$ élet, ez a metszéspont nem más, mint az $1'',3''$ élnek az A'',B'',C'' síkkal alkotott dőféspontja (S_1''), illetve a keresett metszésvonal egyik pontja. A metszésvonal másik pontjának (S_2'') meghatározásához a *II. ks.*-ban B'',C'' él, mint egyenes és az $1,2,3$ háromszög, mint sík dőféspontjának szerkesztése az előzőekben leírt módon. Majd *I. ks.*-ban S_1', S_2' illetve a *II. ks.*-ban S_1'', S_2'' összekötésével megkaptuk a két adott sík metszésvonalát

FELADATOK

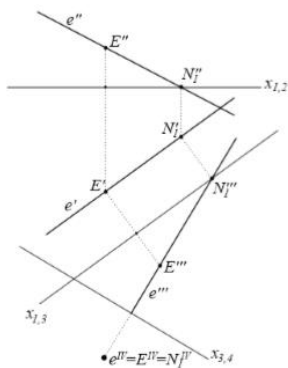
Feladat: Legyen adott egy P pont két képével. Vezessünk be egy tetszőleges harmadik, majd egy negyedik képsíkot, és határozzuk meg a P''' - és P^{IV} képeket!

Megoldás:



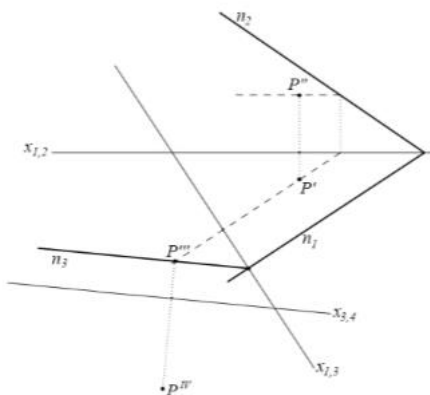
Feladat: Adott egy egyenes két képével. Alkalmas új képsíkokat bevezetve, hozzuk az egyenest vetítő helyzetbe!

Megoldás:



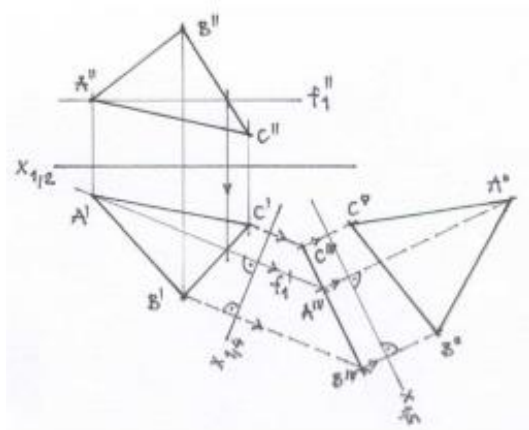
Feladat: Adott egy sík nyomvonalai. Alkalmas új képsíkok bevezetésével hozzuk a síkot képsíkkal párhuzamos helyzetbe!

Megoldás:



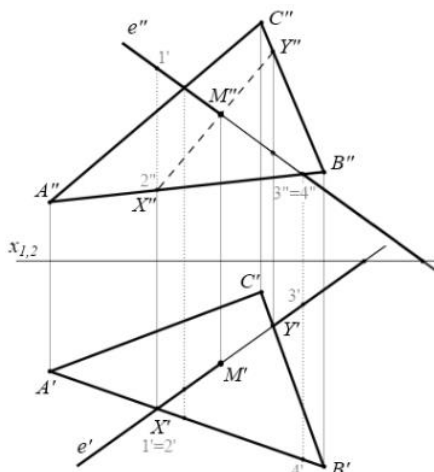
Feladat: Adott egy általános helyzetű háromszög alakú síkidom. Szerkesztendő a háromszög negyedik majd ötödik képe!

Megoldás:



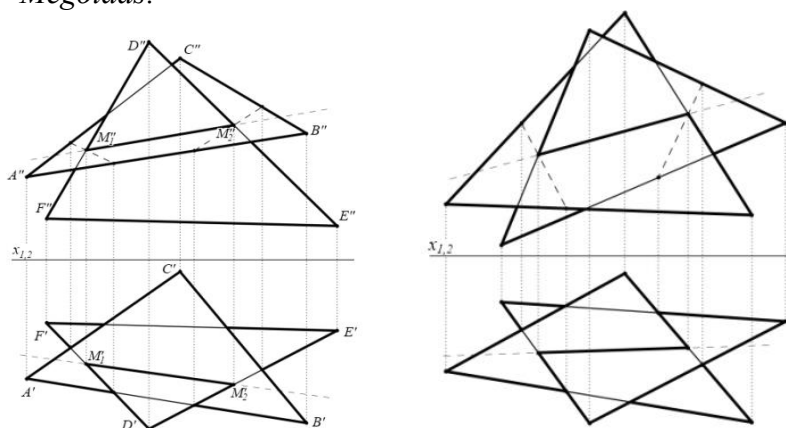
Feladat: Adott egy $ABCD$ háromszög és egy e egyenes képeikkel. Szerkesztendő aháromszög és az egyenes közös pontja!

Megoldás:



Feladat: Adottak ABC és DEF háromszögek különböző síkokban. Szerkesszük meg a két háromszög metszévonalát!

Megoldás:

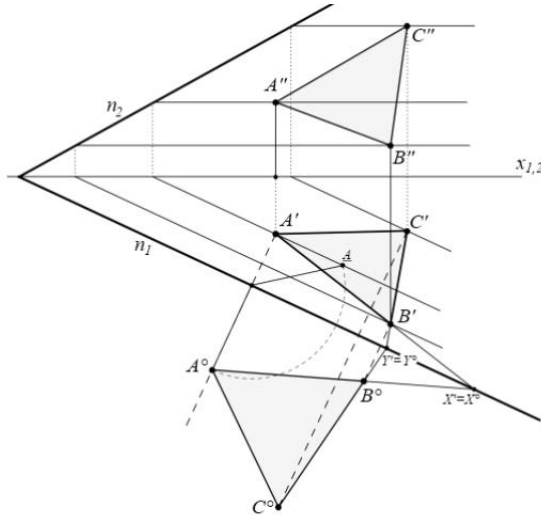


2 db metszéspont (teljes áthatás)

1 db metszéspont (bemetszés)

Feladat: Adott egy sík nyomvonalai. Szerkesszünk a síkban tetszőleges oldalhosszúságú szabályos háromszöget!

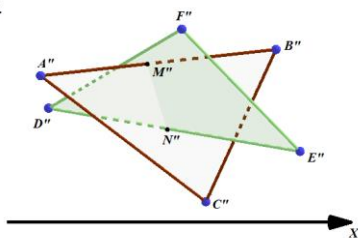
Megoldás:



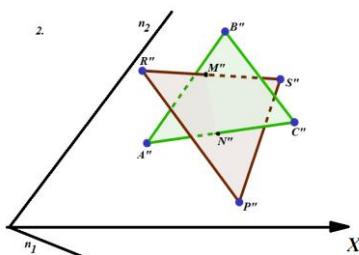
1. Szerkesszük meg egy tetszőleges pont harmadik és negyedik képét két új képsík bevezetésével úgy, hogy első lépésben a K1 képsíkot hagyjuk el!
2. Hozzunk egy általános helyzetű egyenest képsíkra merőleges helyzetbe úgy, hogy első lépésben a K1 képsíkot hagyjuk el!
3. Hozzunk egy általános helyzetű síkot képsíkkal párhuzamos helyzetbe úgy, hogy első lépésben a K1 képsíkot hagyjuk el!
4. Adott egy sík nyomvonalai. Szerkesszünk a síkban tetszőleges oldalhosszúságú egyenlő szárú háromszöget!

5. Szerkesszük meg egy tetszőleges háromszög harmadik és negyedik képét két új képsík bevezetésével úgy, hogy első lépésben a K1 képsíkot hagyjuk el!
6. Szerkesszük meg egy tetszőleges háromszög és téglalap metszsvonalának harmadik és negyedik képét, ahol a háromszögegyik csúcsa átdöfi a téglalapot!
7. Szerkesszük meg egy derékszögű háromszög és téglalap egymásba metszésének (1 db metszéspont) harmadik és negyedik képét!
8. Szerkesszük meg egy derékszögű háromszög és egy ötszög metszsvonalának harmadik és negyedik képét!
9. Szerkesszük meg a következőképpen megadott metszsvonalak első, harmadik és negyedik képét!

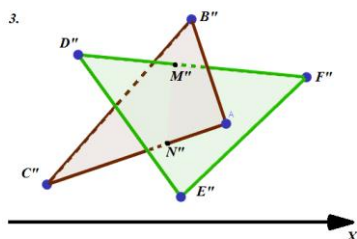
1.



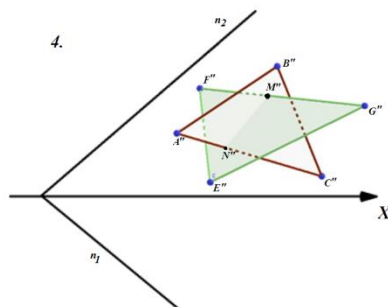
2.

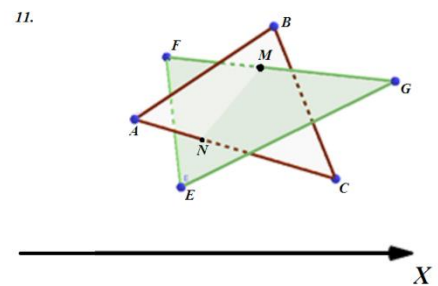
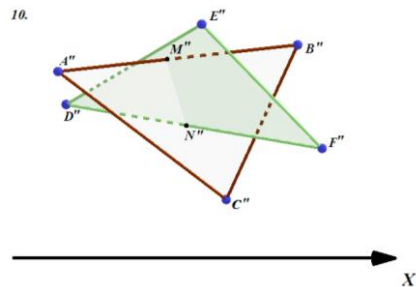
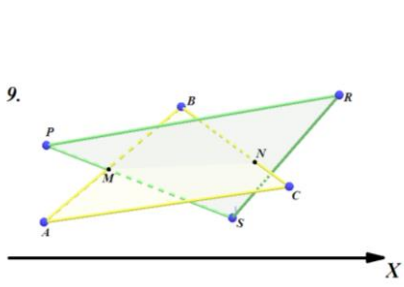
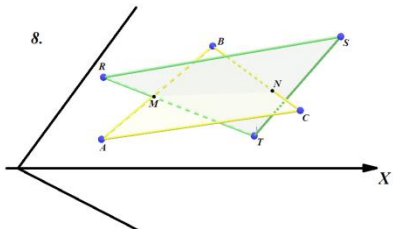
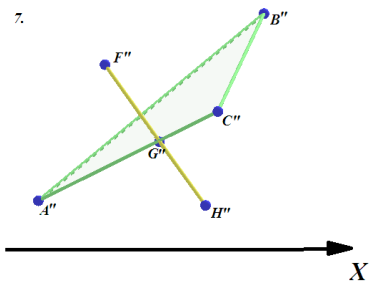
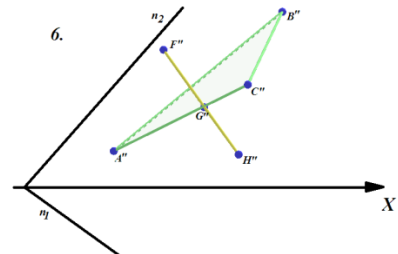
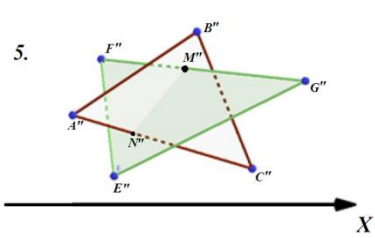


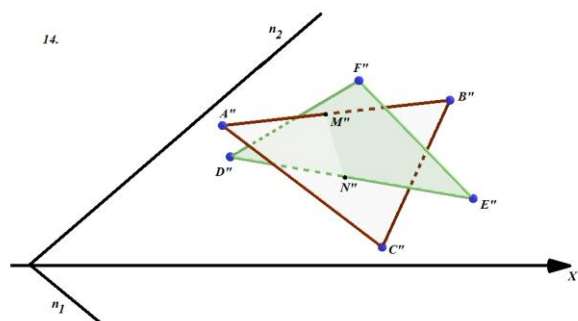
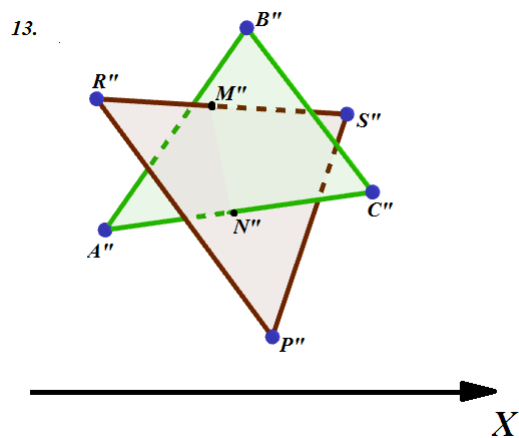
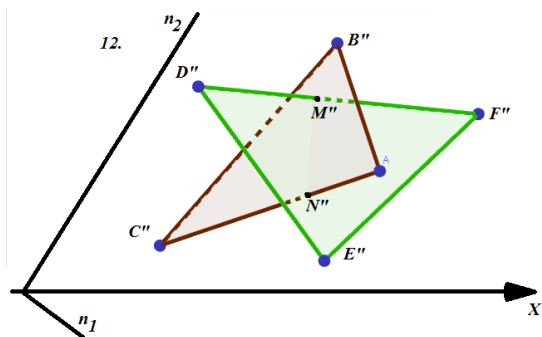
3.



4.







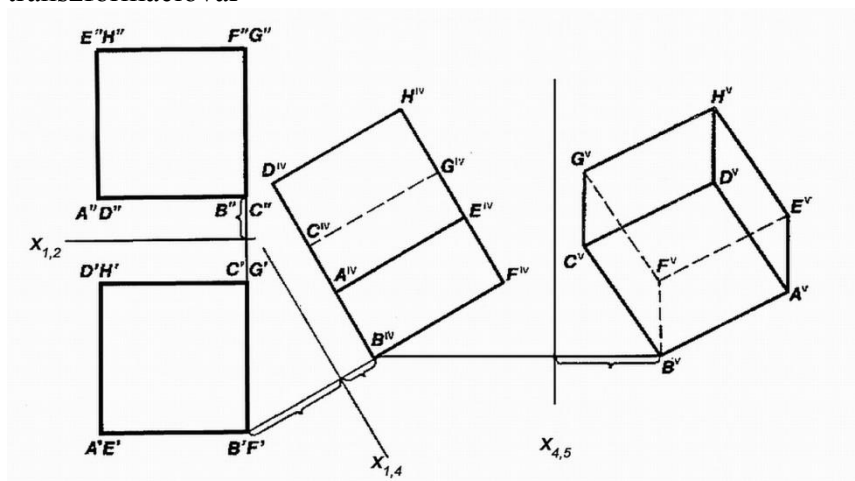
2. Síklapú testek transzformációja. Síklapú testek metszése síkkal

2.1. Síklapú testek transzformációja

Valójában a testet határoló síkidomok, egyenes szakaszok és pontok új képét kell megszerkeszteni, a már ismert eljárások szerint.

Példaként nézzünk meg egy a képsíkhoz képest különleges helyzetű kocka általános helyzetének megfelelő térhatású képének szerkesztését.

A kocka adott első és második képén látható, hogy az egymással párhuzamos oldallapok síkjai főállásúak, mindkét képsíkra merőlegesek, profilsíkok. Bizonyos csúcspontok, élek fedik egymást. Ezeket a fedéseket kell megszüntetnünk a transzformációval



Első lépésben a kocka **I.** képsíkra merőleges éleit és a rajtuk lévő csúcspontoknak a **II.** képsíkra jelentkező fedését szüntetjük meg, oly módon, hogy úgy vesszük fel a **IV.** képsíkot, hogy a kocka egyik oldallapjával sem legyen párhuzamos. Az alakzat megszerkesztésével láthatjuk, hogy az alaplap és a fedőlap még

mindig fedésben vannak (egyenesként látszódnak), mert a **IV.** képsíkra merőlegesek a kocka élei.

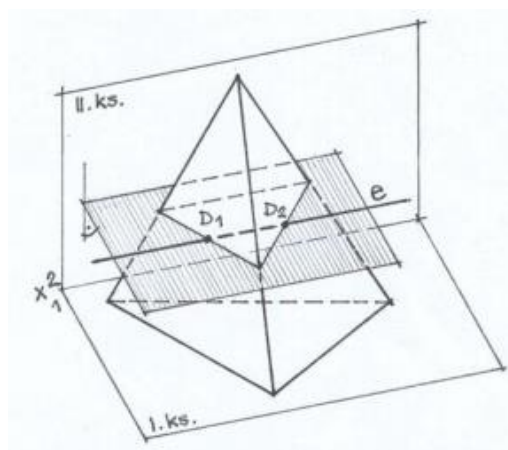
Második lépésben ezek fedését megszüntetendő olyan újabb képsíkot, az **V.** képsíkot vesszük fel, mely az alaplap és a fedőlap síkjával nem párhuzamos és a **IV.** képsíkra merőleges. Ezen az új, **V.** képsíkon az alakzat képét megszerkesztve az élek, csúcspontok fedése megszűnik, így ezen a vetületen már térhatást keltő képet kapunk a kockáról.

2.2. Síklapú testek metszése egyenessel

Síklapú testnek, poliédernek a tér síkszögekkel körülhatárolt részét nevezzük. A síklapú testet *lapjai*, lapjait *élei*, az éleket pedig a síklapú test *csúcsai* határolják. A lapok sokszögek, melyeknek belsőszögei a poliéder élszögei. Az egy élben találkozó két lap által bezárt szög a poliéder *lapszöge*. Az egy csúcspontot alkotó lapok *testszöglet* alkotnak. A testszöglet nyitott alakzat.

A síklapú testeket **éleik és csúcspontjaik vetületeivel** ábrázoljuk.

A műszaki gyakorlatban a leggyakrabban előforduló síklapú test a **hasáb** és a **gúla**.



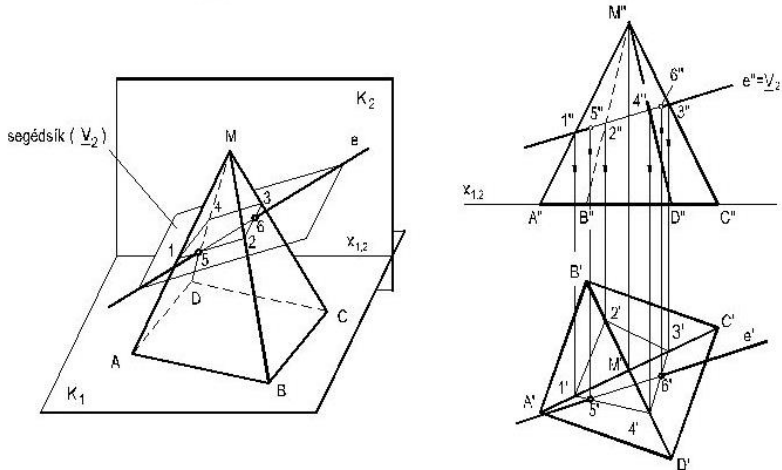
A szerkesztés

menete: az egyenesre, egy a II. ks.-ra merőleges segédsíkot illesztünk, a segédsík a test lapjait egyenesekben metszi (a segédsík az egész testet elmetjszi, ezért

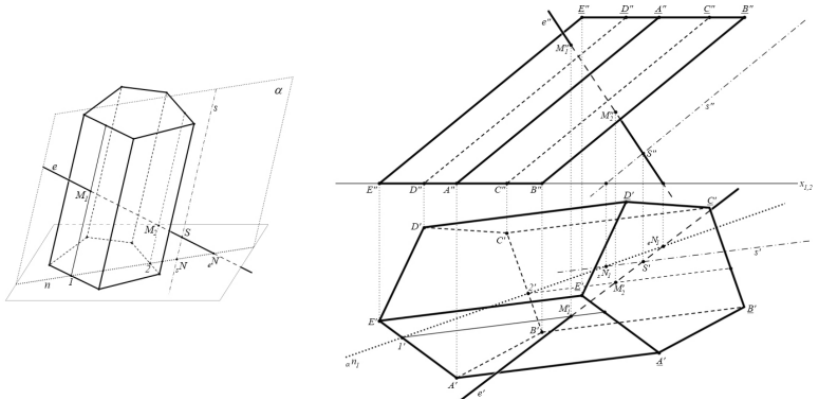
megszerkesztjük a teljes metszetsokszöget), ezek a metszéspontok kijelölik az egyenesen a dőféspontokat. Egyszerű

gúla és hasábok esetében az egyenesek a testet két pontban döfik. Az egyik síklapon behatol az egyenes a testbe ($\mathbf{D}_1$), egy másik síklapján pedig elhagyja azt ($\mathbf{D}_2$).

Gúla metszése egyenessel



Hasáb metszése egyenessel



2.3. Síklapú testek metszése síkkal

A síklapú test felületét a metszősík sokszögvonalanban, a testet sokszögben metszi. A sokszögnek annyi csúcspontja és oldala van, ahány élet, illetve lapot metsz a metszősík. A sokszögmetszet, röviden síkmetszet megszerkesztéséhez a:

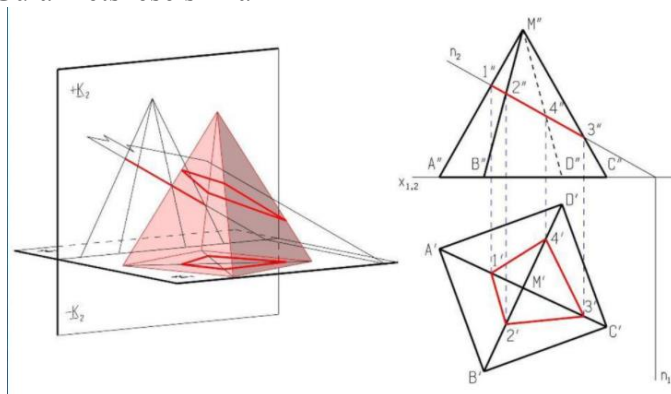
- a.) ÉLMÓDSZERT, és a
- b.) LAPMÓDSZERT használjuk.

a.) **ÉLMÓDSZER:** Az élmódszer alkalmazásakor a metszősík és az élek metszéspontjait (dőféspontjait) szerkesztjük meg. (Sík és egyenes dőféspontjára vezetjük vissza a szerkesztést!)

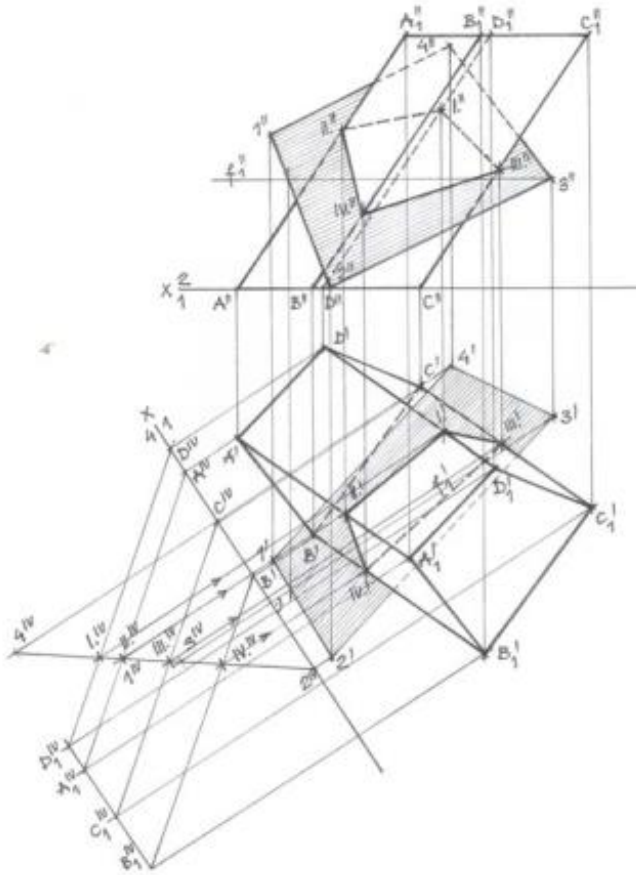
A metszéspontok (dőféspontok) a síkmetszet csúcspontjait adják. A csúcspontokat összekötő szakaszok adják a síkmetszet oldaléleit.

b.) **LAPMÓDSZER:** A lapmódszer alkalmazásakor a metszősík és a lapok metszésvonalait szerkesztjük meg. (Azaz két sík metszésvonalát szerkesztjük!). A metszésvonalak adják a síkmetszet oldalait.

Gúla metszése síkkal



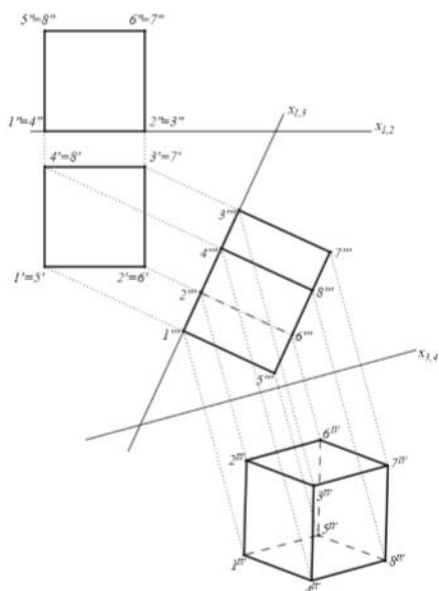
Hasáb metszése síkkal



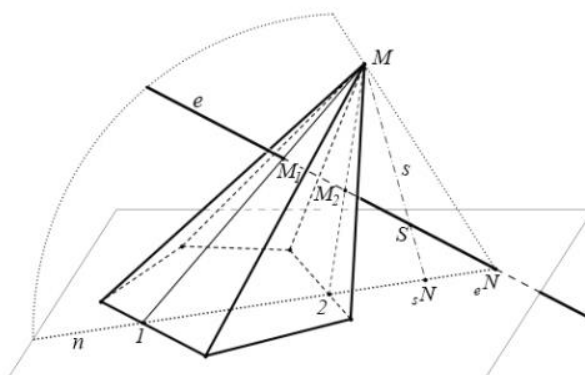
FELADATOK

Feladat: Adott egy K_1 képsíkon álló kocka, amelynek egyik oldala párhuzamos a K_2 képsíkkal. Szerkesztendő a kocka egy harmadik, majd egy negyedik képe (láthatóság szerint)!

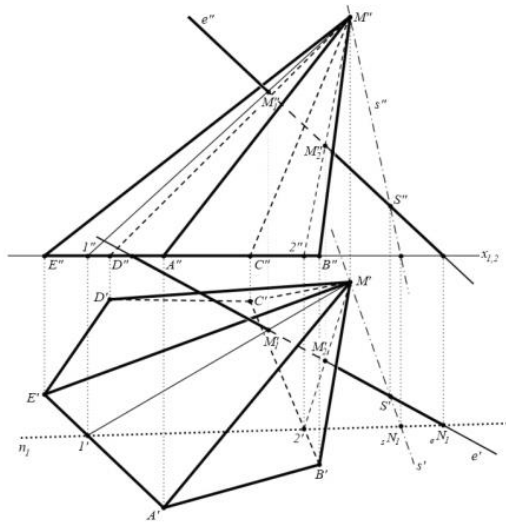
Megoldás:



Feladat: Adott egy ötszög alapú ferde gúla, amelynek alapja K_1 -ben fekszik és egye egyenes. Szerkesztendő (láthatósággal együtt) az egyenes gúlával való metszése!

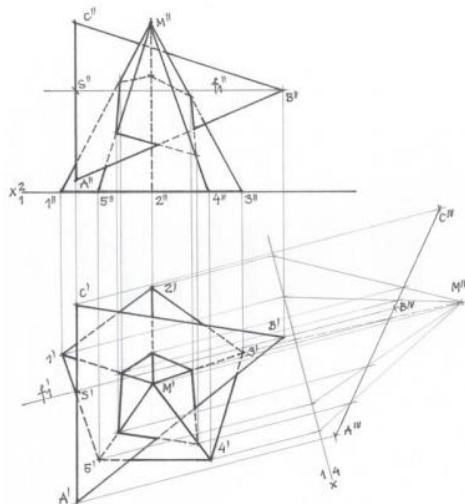


Megoldás:



Feladat: Adott az alaplapjával az I. ks.-on álló, szabályos ötszög alapú gúla, három pontjával adott általános helyzetű metszősík. Szerkesztendő: a gúla és a sík metszéspontja, valamint képük a harmadik képsíkban.

Megoldás:



3. Adott az alaplapjával az elsőképsíkon álló háromszög alapú gúla és egy általános helyzetű egyenes. Szerkesztendő: az egyenes és a gúla dőféspontja.
4. Adott az alaplapjával az elsőképsíkon álló háromszög alapú gúla és egy a II. ks.-ra merőleges egyenes. Szerkesztendő: az egyenes és a gúla dőféspontja.
5. Adott egy ötszög alapú ferde hasáb, amelynek alapja K_1 -beli, valamint egy e egyenes. Szerkesztendők (láthatósággal együtt) a közös pontok!
6. Adott az alaplapjával az I. ks.-ra illeszkedő háromszög alapú ferde hasáb, és az általános helyzetű egyenes I. és II. vetülete. Szerkesztendő: a hasáb és az egyenes dőféspontja.
7. Legyen adott egy K_1 képsíkon álló ferde gúla és egy első vetítő egyenes. Szerkesztendők a metszéspontok!
8. Legyen adott egy K_1 képsíkon álló ferde hasáb és egy második vetítő egyenes. Szerkesztendők a metszéspontok!
9. Legyen adott egy K_2 képsíkon álló ferde gúla és egy, a csúcsára nem illeszkedő egyenes. Szerkesztendők a metszéspontok!
10. Legyen adott egy K_2 képsíkon álló ferde hasáb és egy egyenes. Szerkesztendők a metszéspontok!
11. (nehezebb feladat) Adott egy tetszőleges képsíkon álló ferde gúla és egy csúcsán átnem menő egyenes. Szerkesszük meg a gúla és az egyenes közös pontjait!
12. Adott az alaplapjával az I. ks.-on álló, négyszög alapú ferde hasáb, négy pontjával adott általános helyzetű metszősík. Szerkesztendő: a hasáb és a sík metszéspontja, valamint képük a harmadik képsíkban.
13. Legyen adott egy ferde gúla, amelynek alapja a K_1 képsíkban van, valamint egy, a gúlát metsző sík. Szerkesszük meg a síkmetszetet!
14. Legyen adott egy K_1 képsíkon álló ferde hasáb és egy azt metsző sík. Szerkesztendő a síkmetszet!
15. Legyen adott egy K_1 képsíkon álló ferde gúla és egy második vetítő sík. Szerkesztendő a síkmetszet!

16. Legyen adott egy K_2 képsíkon álló ferde hasáb és egy azt metsző sík. Szerkesztendő a síkmetszet!
17. (nehezebb feladat) Adott egy tetszőleges képsíkon álló ferde gúla és egy másik, a gúlát metsző sík. Szerkesszük meg a gúla és a sík közös pontjait!

Ajánlott szakirodalom

- 1) Bancsik Zs., Juhász I, Lajos S.: Ábrázoló geometria szemléletesen – elektronikus könyv, 2007.
(http://193.6.8.43/segedlet/dokumentumok/Abrazolo_geometria_szemleletesen.pdf)
- 2) Bácsó Sándor, Hoffman Miklós: Fejezetek a geometriából – Eger, 2003
- 3) Dr. Zigány Ferenc: Ábrázoló geometria – Bp., Tankönyvkiadó, 1962
- 4) Gerőcs László, Vancsó Ödön (szerk): Matematika – Akadémiai kiadó, 2016, ISBN: 978 963 05 9767 8, ISSN 2732-0650,
- 5) Kovács Zoltán, Schwarcz Tibor: Projektív geometriai feladatok – Nyiregyháza: Bessenyei GyörgyKvk.
- 6) Lőrincz Pál, Petrich Géza: Ábrázológeometria – Bp, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2003 cop.1998
- 7) Szőkefalvi Nagy Gyula Dr.: A geometriai szerkesztések elmélete – Bp., Akadémiai Kiadó, 1968
- 8) Георгиевский О.В.: Начертательная геометрия. Сборник задач с решениями типовых примеров – Москва, 2002
- 9) Чекмарев А.А., Верховский А.В., Пузиков А.А.: Начертательная геометрия. Инженерная и машинная графика – Москва: Высш. шк., 2001
- 10) <http://abrazolottanitok.blogspot.com/>
- 11) <http://aries.ektf.hu/~hz/pdf-tamop/pdf-01/html/ch07.html>

- 12) <https://disted.edu.vn.ua/courses/learn/451>
- 13) 2 . <https://mersz.hu/gerocs-vancso-matematika>
(https://mersz.hu/dokumentum/m97m__1)
- 14) <https://slideplayer.hu/slide/15163344/>
- 15) <https://slideplayer.hu/slide/15526089/>
- 16) <http://www.sze.hu/~szabof/elsoea.htm>
- 17) http://193.6.8.43/segedlet/dokumentumok/Abrazolo_geometria_szemleletesen.pdf
- 18) http://www.kge.bme.hu/hun/JB00_Szabvanyiras.pdf