МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
UKRAJNA OKTATÁSI ÉS TUDOMÁNYOS MINISZTÉRIUMA

Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці ІІ
II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Кафедра математики та інформатики

Matematika és Informatika Tanszék

dr. Kucsinka Katalin, Kulin Judit., Román Erika, Papp Gabriella

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять та до контрольної роботи
з дисципліни
Теорія ймовірностей і математична статистика
І. Семестр

Módszertani segédlet
Valószínűségszámítás és matematikai statisztika gyakorlati foglalkozásaihoz és zárthelyi dolgozatokhoz
I. félév

Beregszász, 2021

УДК 372.8.519.2(439.23)

Jóváhagyta a II. RFKMF Tudományos Tanácsa
(jegyzőkönyv száma №8 27. 09. 2021 р)

Bíráló:
dr. Sztojka M. – a II RFKMF Matematika és Informatika tanszékének docenese

Módszertani segédlet Valószínűségszámítás és matematikai statisztika gyakorlati foglalkozásaihoz és zárthelyi dolgozatokhoz I. félév / összeálították: dr. Kucsinka Katalin, Kulin J., Román Erika, Papp Gabriella – Beregszász, 2021. – 82 c.

Ez a könyv a elsősorban II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola matematika szakos hallgatói számára oktatott valószínűségszámítási tananyaghoz készült. Hasznos lehet azonban azoknak a nem matematika szakos olvasóknak is, akik valószínűségszámítást tanulnak vagy csak egyszerűen érdeklődnek e tudományág iránt. A feladatgyűjtemény összeállításakor fontos szempont volt a valószínűségszámításban klasszikusnak számító feladatok bemutatásán kívül a mindennapi életünkben előforduló véletlen események szemléltetése a matematika szemszögéből
Az első hat fejezet az adott részben megtalálható feladatok megoldásához szükséges elméleti résszel kezdődik, ezek alkalmazását példa mutatja be. Ez után következnek az hallgatók számára kitűzött feladatok. A feladatok nehézségi sorrendben követik egymást. Előfordulhat az is, hogy az olvasó egészen más feladatot talál könnyűnek vagy nehéznek, mint a szerző. A 7. fejezetben a zárthelyi dolgozatokra felkészítő két feladatsorral találkozhatunk és a az adott modulhoz tartozó elméleti kérdéssorokkal.

A 014. Középfokú Oktatás (Matematika) képzési program hallgatóinak ajánljuk.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Kombinatorika

A valószínűségszámítás klasszikus felfogása alapvetően két gyökérre támaszkodik, a kombinatorikára és az eseményalgebrára. Ezek közül történetileg is az első a kombinatorika. A következőkben a kombinatorikai fogalmakkal foglalkozunk, melyek a klasszikus valószínűségszámítási feladatok megoldásához hasznos segítséget nyújtanak.

- **Permutáció.**
  A permutáció röviden adott számú elem sorba rendezését jelenti. Aszerint, hogy az elemek mindegyike különböző, vagy vannak köztük egyformák is, ismétlés nélküli vagy ismétléses permutációról beszélünk.
  Ismétlés nélküli permutáció. Legyen adott n különböző elem. Az elemek egy meghatározott sorrendjét az adott n elem ismétlés nélküli permutációjának nevezzük, és számukat a P_n szimbólummal jelöljük. Az n különböző elem összes lehetséges sorrendjének (permutációinak) száma:
  $$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 1 = n!$$
  Példa: Anna, Bea és Csilla együtt mennek moziba. Hány féle képen ülhetnek le három egymás melletti székre?
  Megoldás: Minden lehetséges sorrend három elem egy-egy permutációja.
  Három elem összes permutációinak száma
  $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$

  Ismétléses permutáció. Az ismétléses permutáció abban különbözik az ismétlés nélkülitől, hogy a sorba rendezendő elemek között vannak egyformák (azonosak) is.

  Legyen adott n elem, melyek között r $(r \leq n)$ különböző található, ezek $a_1, a_2, \ldots, a_r$.

Ha az a_1 elem k_1-szer, az a_2 elem k_2-ször, ... az a_r elem k_r-szer fordul elő és

$$k_1 + k_2 + ... + k_r = n,$$

akkor az n elem egy lehetséges sorrendjét ezen elemek ismétléses permutációjának nevezzük. A permutációk számát $P_n^{(k_1,k_2,...,k_r)}$ szimbólummal jelöljük. Rögzített n, r és $k_1, k_2, \ldots, k_r$ esetén az ismétléses permutációk száma:

$$P_n^{(k_1,k_2,...,k_r)} = \frac{n!}{k_1!k_2! \cdot ... \cdot k_r!}.$$

Példa: Szabályos dobókockát 14-szer feldobva 3 darab ötöst, 2 darab négyest, 4 darab hármast és 5 darab egyest kaptunk. Hány ilyen dobássorozat lehetséges?
Megoldás: 14 szám lehetséges sorrendjéről beszélünk, melyek között rendre 5, 4, 3, és 2 azonos van. Tehát a lehetséges esetek száma

$$P_{14}^{(5,4,3,2)} = \frac{14!}{5! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2!} = 2522520.$$

- **Variáció.**
A variáció hétköznapi, egyszerű megfogalmazásban különböző elemek közül adott számú elem kiválasztását jelenti, azzal a feltétellel, hogy a kiválasztás sorrendje sem közömbös. Ahogy a permutációknál, itt is beszélhetünk ismétléses és ismétlés nélküli variációkról, attól függően, hogy megengedjük-e egy elem többszöri kiválasztását.

Ismétlés nélküli variáció. Legyen adott n különböző elem. Ha adott n elem közül k elemet ($0 < k \leq n$) úgy választjuk ki, hogy mindegyik csak egyszer kerül sorra és a kiválasztás sorrendje is számít, akkor az n elem egy k-ad osztályú ismétlés nélküli variációját kapjuk. Az n elem egy k-ad osztályú ismétlés nélküli variációinak számát a V_n^k szimbólum jelöli.
Adott n elem összes k-ad osztályú ismétlés nélküli variációinak száma

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)$$

Más alakban is felírható:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Példa: Egy feladatmegoldó versenyen 10 résztvevő indult, összesen hat különböző értékű díjat osztanak ki. Hányféleképpen alakulhat a díjazottak névsora? (Minden résztvevő csak egy díjat kaphat.)

Megoldás: Az első díj nyertesét 10 induló közül választhatjuk ki, a másodikat 9 induló közül, ..., a hatodikat 5 induló közül. Így az összes lehetőség száma

$$V_{10}^{6} = \frac{10!}{(10-6)!} = 151200.$$

Ismétléses variáció. Ha az adott n elem közül k elemet úgy választunk ki, hogy egy elem többször is sorra kerülhet és a kiválasztás sorrendje is számít, akkor az n elem egy k-ad osztályú ismétléses variációját kapjuk.

Az n elem k-ad osztályú ismétléses variációinak számát a $V_n^{k(i)}$ szimbólummal jelöljük.

Adott n elem összes k-ad osztályú ismétléses variációinak száma:

$$V_n^{k(i)} = n^k.$$

Példa: Egy feledékeny diák elfelejtette számzáras szekrénye 4 jegyű kódját. Hány lehetőséget kell kipróbálnia ahhoz, hogy biztosan ki tudja nyitni a szekrényét, ha kód minden jegye tízféleképpen választható meg?

Megoldás: Minden számjegy tízféleképpen választható ki és a sorrend is számít. Így a lehetséges kódok száma

$$V_{10}^{4(i)} = 10^4 = 10000.$$

- **Kombináció.**

  A kombináció különböző elemek közül adott számú elem kiválasztását jelenti, azzal a feltétellel, hogy a kiválasztás sorrendje közömbös. Ebben az esetben is beszélhetünk ismétléses és ismétlés nélküli kombinációkról, attól függően, hogy megengedjük-e egy elem többszöri kiválasztását.

  Ismétlés nélküli kombináció. Legyen adott n elem. Ha az adott n elem közül k elemet ($0 < k \leq n$) úgy választunk ki, hogy mindegyik csak egyszer kerül sorra, és a kiválasztás sorrendje nem számít, akkor az n elem egy k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációját kapjuk.

  Az n elem k-ad osztályú kombinációinak számát C_n^k szimbólummal jelöljük.

  Adott n elem összes k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációinak száma:
  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

A fenti kifejezést szokás az $\binom{n}{k}$ szimbólummal is jelölni (olvasd: n alatt a k).

Példa: Adott számú könyvből négyet 210-féleképpen lehet kiválasztani. Mennyi a könyvek száma?

Megoldás: Legyen a könyvek száma n. Az n könyvből C_n^4 féleképpen lehet kiválasztani négyet, tehát

$$C_n^4 = 210.$$

Alakítsuk át ezt a kifejezést:

$$\frac{n!}{4!(n-4)!} = 210,$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = 210 \cdot 24.$$

A fenti egyenletnek egy pozitív egész megoldása van a 10. Tehát a könyvek száma 10.

Ismétléses kombináció. Ha adott n elem közül k elemet úgy választunk ki, hogy egy elem többször is sorra kerülhet és a kiválasztás sorrendje nem számít, akkor az n elem egy k-ad osztályú ismétléses kombinációját kapjuk.

Az n elem k-ad osztályú ismétléses kombinációinak számát a $C_n^{k(i)}$ szimbólummal jelöljük. Adott n elem összes k-ad osztályú ismétléses kombinációinak száma:

$$C_n^{k(i)} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Példa: Egy gyerek 5 különböző fagylaltból választhat egy háromgombócos adagot. Hányféle lehetősége van a választásra, ha az adagolás sorrendjére nem vagyunk tekintettel? (Több gombóc is állhat ugyanabból a fagylaltból)

Megoldás: Az összes elem száma 5, ezekből hármas csoportokat képzünk, melyekben a sorrend nem számít és az elemek ismétlődhetnek. Tehát ismétléses kombinációról beszélünk, vagyis a lehetőségek száma:

$$C_5^{3(i)} = \frac{(5+3-1)!}{3!(5-1)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Feladatok:

1. Egy futóversenyen hét futó került a döntőbe. A döntőben hány különböző befutási sorrend lehetséges?

2. Nyolc ember hányféleképpen tud elhelyezkedni egy padon?

3. Ha az adott elemek számát 2-vel csökkentjük, a lehetséges permutációk száma 1/12 részére csökken. Mennyi volt az elemek száma?

4. Nyolc ember - jelöljük őket rendre A-, B-, C-, D-, E-, F-, G-, H-val - leül egy padra. Hányféleképpen helyezkedhetnek el úgy, hogy A és B egymás mellet üljön?

5. Egy nyolc főből álló társaság egy kör alakú asztal körül elhelyezett nyolc széken akar helyet foglalni. Hányféleképpen történhet ez, ha két elhelyezkedést, akkor és csak akkor tekintünk különbözőnek, ha a társaságnak van legalább egy olyan tagja, akinek legalább az egyik szomszédja a két elhelyezkedésben különböző.

6. Nyolc ember - jelöljük őket rendre A-, B-, C-, D-, E-, F-, G- , H-val -leül egy kerek asztalhoz. Hányféleképpen helyezkedhetnek el úgy, hogy A és B egymás mellet üljön? (Két elhelyezkedést akkor és csak akkor tekintünk különbözőnek, ha a társaságnak van legalább egy olyan tagja, akinek legalább az egyik szomszédja a két elhelyezkedésben különböző.)

7. Tíz különböző színű gyöngyből hány különböző lánc készíthető?

8. Hány olyan 1-gyel kezdődő ötjegyű számot lehet felírni az 1, 2, 4, 7, 9 számjegyek felhasználásával, amelyeknek az utolsó számjegye 7, ha a felírás során egy-egy számjegyet csak egyszer használhatunk?

9. Hány 15-el kezdődő ötjegyű szám képezhető az 1, 3, 5, 7, 9 számjegyekből, ha a számok képzésénél egy-egy számjegy csak egyszer szerepelhet?

10. Hány 5-el osztható ötjegyű szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyekből, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?

11. Hány 5-el osztható hatjegyű szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?

12. Hány ötjegyű páros szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyekből, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?

13. Hány ötjegyű páratlan szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyekből, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?

14. Hányféle sorrendben húzhatunk ki egy dobozból 5 piros, 7 fehér és 3 kék golyót, ha csak az olyan húzások tekintjük különbözőnek, amelyekben a színek más sorrendben következnek?

15. Egy dobozban két sárga golyó van. Hány darab piros golyót kell a dobozba tennünk, ha azt kívánjuk elérni, hogy a dobozban lévő összes golyókat kihúzva, 21 különböző sorrend legyen lehetséges? (Az azonos színű golyókat nem különböztetjük meg.)

16. Hány féle sorrendben írhatók fel a következő szavak betűi:
a) MATEMATIKA;
b) KÁRPÁTÁLJA;
c) KOMBINATORIKA;
d) PARALELOGRAMMA?

17. Öt házaspár foglal helyet egy padon. Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a házastársak egymás mellett akarnak ülni, de sem két nő, sem két férfi nem ülhet egymás mellé?

18. 5 piros, 2 fehér és 2 kék golyót hányféleképpen lehet úgy elrendezni, hogy a 2 kék golyó egymás mellet legyen?

19. Egy osztályban 15 leány és 15 fiú tanuló van. Kettesével ülnek le a padokba. Hányféle ülésrend készíthető, ha két lány, illetve két fiú nem ülhet egymás mellé? (a kétszemélyes padokat tekintsük egyetlen oszlopban elhelyezve.)

20. Egy osztályban 10 fiú és 10 lány van. Tornaórán kettesével sorakoznak 15 különböző eszközért úgy, hogy 2 lány ill. 2 fiú nem állhat egymás mellé. Az eszközöket meghatározó sorrendben osztják ki. És minden pár egyet kap. Hányféleképpen történhet a szétosztás?

21. Hány olyan hatjegyű szám van, amelynek egyik számjegye sem 0?

22. Hány "szót" képezhetünk az A, E, I, O, Ü magán- és B, C, D, F mássalhangzókból úgy, hogy minden "szóban" 4 magán- és 4 mássalhangzó legyen. Két magán- illetve két mássalhangzó egymás mellé ne kerüljön, és minden mássalhangzó csak egyszer szerepeljen.

23. Hány ötre végződő ötjegyű szám van?

24. Egy 25-ös létszámú közösség 3 tagú vezetőséget választ: titkárt és 2 vezetőségi tagot.
    a) Hányféleképpen történhet ez?
    b) Hány olyan kimenetele lehet a választásnak, hogy a tagok közül Gipsz Jakab legyen a titkár?
    c) Hány olyan kimenetele lehet a választásnak, hogy a tagok között Gipsz Jakab vezetőségi tag legyen?

25. Egy 25 fős társaságból egy könyvet, egy társasjátékot, egy labdát, egy töltőtollat és egy ceruzát sorsoltak ki. Hányféleképpen végződhet a sorsolás?

26. Hány olyan négyjegyűjegyű szám van, amely csupa páros számjegyből áll és minden számjegy csak egyszer szerelhet?

27. Hány rendszámtábla készíthető 26 betű és 10 számjegy felhasználásával, ha a rendszám két betűből és az utána következő négy számjegyből áll.(Nullával is kezdődhet.)

28. 15 tanuló nyaralni indul. 3 db négyszemélyes és 1 db háromszemélyes szobát kapnak.
    a) Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a szobákon belüli elhelyezkedést nem vesszük figyelembe?
    b) Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a szobákon belüli elhelyezkedést figyelembe vesszük?

29. Egy cégnél három osztályvezető, hat csoportvezető és harminc beosztott dolgozik. Hányféleképpen választhatunk ki közülük egy küldöttséget, melyben egy osztályvezető, két csoportvezető és tíz beosztott szerepel? Hányféleképpen tehetjük ezt, ha a kereskedelmi osztály vezetője és az áruforgalmi csoport vezetője mindenképpen a küldöttek között kell, hogy legyenek?

30. Egy képviselő egy napon 10 interpellációt hallgatott meg, ebből hatot elfogadott. Tetszőlegesen kiválasztottunk három interpellációt.
    a) Hányféleképpen tehetjük ezt meg?
    b) Hány különböző olyan kiválasztás van, amelyek közül pontosan kettőt fogadott el a képviselő?
    c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy közülük legalább két interpellációt fogadott el az adott képviselő?

31. Hányféleképpen osztható ki 10 személy között 2 db 500- hr-ás, 3 db 200- hr-ás és 4 db 50- hr-ás jutalom?

32. Egy önkiszolgáló étterem pultján 6 különböző leves és 9 különböző főzelék áll. Hányféle lehet egy 4 fős társaság együttes fogyasztása, ha mindenki eszik levest is, főzeléket is?

33. Szilveszter éjfélkor egy héttagú baráti társaságban mindenki mindenkivel koccint. Hány koccintás ez összesen?

34. Ötös lottón (ötöt húznak kilencven számból) hány különböző szelvényt kell kitölteni, hogy biztosan legyen ötös találat?

35. Egy konvex sokszögbe összesen 77 átló húzható. Hány oldalú a sokszög?

36. Egy csomag 32 lapos magyar kártyából kihúzunk 2 lapot úgy, hogy az elsőnek kihúzott lapot a húzás után visszatesszük. Hány esetben lesz a kihúzott lapok között legalább egy ász?

37. Egy csomag 32 lapos magyar kártyából kihúzunk két lapot úgy, hogy az elsőnek kihúzott lapot a húzás után nem tesz-szük vissza. Hány esetben lesz a lapok között legalább egy király?

38. Hányféleképpen helyezkedhet el 15 személy 3 darab ötszemélyes csónakban, ha 1-1 csónakon belül az elhelyezkedést figyelmen kívül hagyjuk?

39. Piros, fehér és fekete színű játékkockánk van, amelyeket egy dobozba helyezünk el. Kettőt kiveszünk és dobunk velük. Hányféle kimenetele lehet a kísérletnek?

40. Adott a síkban 25 különböző pont, amely közül bármely három nem illeszkedik egy egyenesre. Hány egyenest határoznak meg ezek a pontok?

41. Hány háromszöget határoz meg 12 olyan, egy síkban fekvő egyenes, amelyek között nincs párhuzamos, és közülük bármely három nem illeszkedik egy pontra?

42. Hányféleképpen lehet leolvasni a MATEMATIKA szót az ábráról, ha az olvasás során csak jobbra és lefelé haladhatunk?

M	A	T	E	M
A	T	E	M	A
T	E	M	A	T
E	M	A	T	I
M	A	T	I	K
A	T	I	K	A

43. Hányféleképpen lehet leolvasni a GÉNIUSZ szót az ábráról, ha az olvasás során csak olyan mezőbe léphetünk tovább, amely csúcsával vagy lapjával érintkezik az előző mezővel?

						G						
					É	É	É					
				N	N	N	N	N				
			I	I	I	I	I	I	I			
		U	U	U	U	U	U	U	U	U		
	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	
Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z

Ellenőrző kérdések:

1. Hány különböző sorrendje lehet n elemnek?
2. Mit nevezünk n elem k-adosztályú ismétlés nélküli kombinációjának?
3. Mennyi n elem k-adosztályú ismétléses variációinak száma?
4. Hogyan számoljuk ki az n! (n faktoriális) számot?
5. Hogyan számoljuk ki a C_n^k binomiális együtthatót?
6. Mit értünk n elem k-adosztályú ismétléses variációján?
7. Döntse el, az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis!

   a Amikor n elem k-adosztályú ismétléses kombinációjáról beszélünk, $k > n$ is lehet.

   b A lottóhúzások számát ismétlés nélküli kombinációval lehet meghatározni.

   c Ha egy kombinációban két elemet felcserélünk, egy másik kombinációt kapunk.

   d Ha egy ismétléses variációban két különböző elemet felcserélünk, egy másik ismétléses variációt kapunk.

   e Az n elem k-adosztályú ismétlés nélküli kombinációinak a száma megegyezik az $(n-k)$-adosztályú ismétlés nélküli kombinációinak a számával. $(k \neq n-k)$.

   f Az n elem k-adosztályú ismétlés nélküli variációinak a száma megegyezik az (n-k)-adosztályú ismétlés nélküli variációinak a számával. $(k \neq n-k)$.

   g Az n elem k-adosztályú ismétléses kombinációinak a száma megegyezik $n-k+1$ elem k-adosztályú ismétlés nélküli kombinációinak a számával.

   h Az n elem k-adosztályú ismétlés nélküli kombinációinak a száma megegyezik, az olyan n elemű ismétléses permutációk számával, ahol k illetve n-k elem azonos.

   i A kenószelvény kitöltésekor egy ismétlés nélküli kombinációt adunk meg.

   j A totószelvény kitöltésekor egy ismétlés nélküli variációt adunk meg.

2. fejezet

Eseményalgebra

Fontosabb alapfogalmak:

- **Eseménylagebrai alapfogalmak:**

- elemi esemény,
- összetett esemény,
- lehetetlen esemény,
- biztos esemény,
- esménytér,
- egymást kizáró események.

- **Műveletek eseményekkel:**

- események metszete $A \cap B = A \cdot B$,
- események uniója $A \cup B = A + B$,
- események különbsége $A \setminus B = A - B$,
- események komplementere $\overline{A}$.

Példa: Egy medencét két csapon keresztül lehet megtölteni. Az A esemény jelentse azt, hogy az első csapon át folyik a víz, B azt, hogy a második csapon át folyik. Fogalmazzuk meg a következő eseményeket:
a) $A \cap \overline{B}$;
b) $\overline{A \cup B}$.
Fejezzük ki A és B eseményekkel és az eseményalgebrai műveletekkel a következő eseményeket:
c) legalább az egyiken nem folyik;

d) csak az egyiken folyik!

Megoldás:

a) Csak az elsőn folyik.

b) Egyiken sem folyik.

c) $\overline{A} \cup \overline{B}$.

d) $(A - B) \cup (B - A)$.

Feladatok:

1. Igazoljuk a De-Morgan azonosságokat, azaz, hogy
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ és $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$!

2. Háromszor dobunk egy kockával. A_i jelentse azt az eseményt, hogy az i-edik dobás hatos, $i = 1, 2, 3$. Mit jelentenek az alábbi események:

b) $A_1 \cup A_2$;

c) $A_1 \cap A_2$;

d) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$;

e) $A_1 \cap A_2 \cap A_3$;

f) $A_1 \cap \overline{A_2}$;

g) $A_1 - A_2$?

3. Tíz pénzérmét kell megvizsgálnunk, hogy szabályosak-e vagy sem. Legyen A_i az az esemény, hogy a i-edik pénzérme szabályos $(i = 1, \ldots, 10)$. Mit jelentenek az alábbi események?

a) $A_1 \cup \ldots \cup A_{10}$;

b) $A_1 \cap \ldots \cap A_{10}$;

c) $\overline{A_1} \cup \ldots \cup \overline{A_{10}}$;

d) $\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{10}}$;

e) $\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_{10}}$;

f) $\overline{A_1 \cap \ldots \cap A_{10}}$;

g) $A_1 \cup \overline{A_2} \cup A_3$;

h) $A_8 \cup \overline{A_9} \cap A_{10}$;

i) $A_1 \cup (A_9 \cap A_{10})$;

j) $A_1 \cap \overline{(A_9 \cap A_{10})}$.

4. Egy repülőgépnek 4 hajtóműve van, 2 jobb oldali és 2 bal oldali. A gép akkor tud felszállni, ha mindkét oldalon van legalább egy működőképes hajtómű. J_1 esemény: a jobb 1. hajtómű működőképes, J_2 esemény: a jobb 2. hajtómű működőképes, B_1 esemény: a bal 1. hajtómű működőképes, B_2 esemény: a bal 2. hajtómű működőképes. Válassza ki az alábbi események közül azokat, amikor a repülő biztosan fel tud szállni!

a) $J_1 \cup J_2 \cup B_1 \cup B_2$;

b) $J_1 \cap J_2 \cap B_1 \cap B_2$;

c) $(J_1 \cup J_2) \cap (B_1 \cup B_2)$;

d) $J_1 \cap J_2 \cup B_1 \cap B_2$;

e) $J_1 \cap (J_2 \cup B_1) \cap \overline{B_2}$;

f) $J_1 \cup (J_2 \cap B_1) \cup B_2$.

5. Egy brókercégnél egy alkalmazott háromféle részvénnyel kereskedik egy adott napon. Jelentse az A esmény azt, hogy az adott napon kötött üzletet az első fajta, B esemény azt, hogy kötött üzletet a második fajta, C esemény azt, hogy kötött üzletet a harmadik fajta részvényre. Fogalmazzuk meg, hogy mit jelentenek az alábbi események:

a) $\overline{A \bigcup B}$;

b) $\overline{A \bigcup \overline{B \bigcap C}}$

c) $\overline{A \bigcap B \bigcap C}$;

d) $\overline{A} \bigcap \overline{B} \bigcap \overline{C}$;

e) $\overline{A}$;

f) $\overline{\overline{A} \bigcup \overline{B \bigcap C}}$;

g) $\overline{A \bigcap B} \bigcap C$;

h) $A \bigcup B \bigcup C$;

i) $A \bigcap B \bigcap \overline{C}$;

j) $(A \bigcup B \bigcup C) \backslash (A \bigcap B \bigcap C)$;

k) $(\overline{A} \bigcap \overline{B}) \bigcup (\overline{A} \bigcap \overline{C}) \bigcup (\overline{B} \bigcap \overline{C})$;

l) $(\overline{A} \bigcap \overline{B} \bigcap C) \bigcup (A \bigcap \overline{B} \bigcap \overline{C}) \bigcup (\overline{A} \bigcap B \bigcap \overline{C}) \bigcup (\overline{A} \bigcap \overline{B} \bigcap \overline{C})$. Formalizáljuk a következő eseményeket:

a) az adott napon nem mindegyik fajta részvényre kötött üzletet;

b) pontosan kétféle részvénnyel kereskedett az adott napon;

c) volt üzletkötés az adott napon ennél az alkalmazottnál!

6. Milyen kapcsolatban vannak A és B események, ha

a) $A \cap B = A$;

b) $A \cup B = A$;

c) $A \cup B = A \cap B$;

d) $A \cup \left(\overline{A} \cap B\right) = B$?

7. Egy műhelyben három gép dolgozik. Jelentse A_i azt az eseményt, hogy az i-edik gép egy éven belül elromlik, $i = 1, 2, 3$. Fejezzük ki az A_i eseményekkel és az eseményalgebrai műveletekkel:

a) csak az első romlik el;

b) mindhárom elromlik;

c) egyik sem romlik el;

d) az első és a második nem romlik el;

e) az első és második elromlik, a harmadik nem;

f) csak egy gép romlik el;

g) legfeljebb egy gép romlik el;

h) legfeljebb két gép romlik el;

i) legalább egy gép elromlik!

8. Egy kockát ötször egymás után feldobunk. Jelöljük B_j-vel azt az eseményt, hogy a j-edik dobás 6-os. Fejezzük ki a B_j-kel a következő és az eseményalgebrai műveletekkel:

a) az ötödik dobáskor kapunk először 6-ost;

b) legalább egyszer 6-ost dobunk;

c) pontosan négyszer dobunk 6-ost;

d) az első és a negyedik dobás 6-os, a többi közül az egyik biztosan nem 6-os!

9. Két dobókockával dobunk. Milyen kapcsolatban vannak A és B események? Adjuk meg az $A \cap B$ eseményt!

a) A: páratlan az összeg, B: dupla 6-ost dobunk;

b) A: páros az összeg, B: dupla 6-ost dobunk;

c) A: páratlan az összeg, B: legalább egy hatost dobunk.

10. Egy kockával háromszor dobunk, a dobott számokat lejegyezzük a dobás sorrendjében. Legyen
A: minden dobott szám különböző,
B: egy darab hatos van a dobások között.
Fejezzük ki A és B eseményekkel és az eseményalgebrai műveletekkel a következő eseményeket! Számoljuk ki az eseményekhez artozó elemi események számát is:

a) minden dobott szám különböző és egy darab hatos van köztük;

b) a dobott számok között vannak egyformák is;

c) pontosan egy ötöst dobtunk, és van a számok között egyforma is;

d) a dobott számok között vannak egyformák, és nem egy ötös van közöttük!

11. Egy matematika szakra járó főiskolásnak 3 tantárgyból kell vizsgát tennie: matematikai analízisből, geometriából, algebrából. Legyen M esemény: matematikai analízisből sikeres vizsgát tett, G esemény: geometriából sikeres vizsgát tett, A esemény: algebrából sikeres vizsgát tett. Fejezzük ki M, G, A eseményekkel és az eseményalgebrai műveletekkel:

a) csak egy tárgyból tett sikeres vizsgát;

b) legalább egy tárgyból sikeres vizsgát tett!

12. Egy érmével dobunk. Ha az esemény fej, mégegyszer, ha írás, még kétszer. Írjuk fel az eseményteret!

Ellenőrző kérdések:

1. Mit értünk események összegén?
2. Mit értünk események szorzatán?
3. Mikor mondjuk azt, hogy az A esemény maga után vonja a B eseményt?
4. Döntse el, az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis!

   - Bármely két esemény közül az egyik maga után vonja a másik bekövetkezését.
   - Két esemény szorzata olyan esemény, amely a két komponens esemény mindegyikét maga után vonja.
   - Az események szorzata felcserélhető (kommutatív).
   - Az események összeadása átzárójelezhető (asszociatív)
   - Egy esemény az ellentettjével teljes eseményrendszert alkot.
   - Egy esemény és az ellentettje nem egymást kizáró események.
   - Az események összege akkor következik be, ha a komponens események valamelyike bekövetkezik.
   - Az események szorzata akkor következik be, ha a komponens események valamelyike bekövetkezik.
   - Az események valószínűsége lehet akár 1000
   - Az események valószínűsége a véletlen kísérlet minden egyes végrehajtásakor más és más.
   - Az ellentett esemény valószínűsége mindig nagyobb mint az esemény valószínűsége.
   - Az ellentett esemény valószínűségének és az esemény valószínűségének összege mindig 1.
   - Az események szorzatának a valószínűsége nem lehet nagyobb bármely komponens esemény valószínűségénél.
   - Az események összegének a valószínűsége nem lehet nagyobb bármely komponens esemény valószínűségénél.
   - A független események kizárják egymást.
   - A független események nem zárják ki egymást.

- Két olyan független esemény, melyek közül egyik sem lehetetlen vagy biztos esemény, nem zárhatják egymást ki.
- Független események szorzatának valószínűsége egyenlő az események valószínűségeinek szorzatával.
- Független események szorzatának valószínűsége egyenlő az események valószínűségeinek összegével.
- Egymást kizáró események szorzata a lehetetlen esemény.
- Ha két esemény szorzatának valószínűsége nulla, akkor a két esemény kizárja egymást.
- Egymást kizáró események összegének valószínűsége a komponens események valószínűségeinek összege.
- A lehetetlen és a biztos események minden eseménytől függetlenek.
- Egy esemény nem lehet független a komplementerétől.

3. fejezet

Valószínűségszámítás

3.1. Klasszikus valószínűség

- **A valószínűségszámítás axiómái.**
  I. axióma: Bármely A eseményre igaz $0 \leq P(A) \leq 1$.
  II. axióma: A biztos esemény valószínűsége 1.
  III. axióma: Legyen A és B események egymást kizáróak, akkor $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

  Több véges vagy megszámlálható számú egymást páronként kizáró esemény akkor

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n + ...) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) + ...$$

- **Valószínűségszámítási tételek.**

- Komplementer események valószínűsége:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

- Ha $A_1, A_2, ...A_n, ...$ események teljes eseményrendszert alkotnak akkor

$$\sum_i P(A_i) = 1.$$

- Események különbségének valószínűsége

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

- Események összegének valószínűsége

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

- **A valószínűségszámítás klasszikus képlete.** Ha egy kísérletnek csak véges sok kimenetele lehet, és az egyes kimeneteleknek azonos a valószínűsége, akkor a kísérlettel kapcsolatos események és ezek valószínűsége klasszikus valószínűségi mezőt alkotnak.

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{kedvező elemi események száma}}{\text{összes elemi esemény száma}}.$$

Példa: A 32 lapos magyar kártyából visszatevés nélkül kihúzunk 5 lapot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

a) minden kihúzott lap azonos színű;

b) a kihúzott lapok között van piros;

c) zöld vagy piros lapok közül legalább az egyik szín van a kihúzott lapok között?

Megoldás: Magyar kártyából 5 lapot $C_{32}^5 = 201376$ módon választhatunk ki. Ezért az összes elemi esemény száma $n = 201376$.

a) Legyen A esemény: minden kihúzott lap azonos színű. Vizsgáljunk egy adott színt, például a zöldet. A csomagban 8 zöld színű lap van ezek közül öt $C_8^5 = 56$ módon választható ki. A csomagban 4 különböző szín van, tehát a lapok színét négyféleképpen választhatjuk ki. Ezért az A eseményre kedvező esetek száma $k_A = 4 \cdot C_8^5$.
A kérdezett valószínűség: $P(A) = \frac{k_A}{n} \approx 0,001$.

b) Legyen B esemény: a lapok között van piros. Ez azt jelenti, hogy lehet 1, 2 ,3 vagy 4 piros a kihúzott lapok között. Ezért ebben az esetben érdemes a $\overline{B}$ eseményt vizsgálni: a kihúzott lapok között nincs piros. Vagyis 24 lap közül (ezek a lapok nem pirosak) ötöt kell kiválasztani visszatevés nélkül, tehát a $\overline{B}$ eseményre kedvező esetek száma: $k_{\overline{B}} = C_{24}^5$.
A kérdezett valószínűség: $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{k_{\overline{B}}}{n} \approx 0,789$.

c) Legyen C esemény zöld vagy piros lapok közül legalább az egyik szín van a kihúzott lapok között. Itt is egyszerűbb a komplementer eseménnyel számolni. $\overline{C}$ sem zöld, sem piros nincs a kihúzott lapok között. Vagyis 16 lapból választhatunk ötöt $k_{\overline{C}} = C_{16}^5 = 4368$.
A kérdezett valószínűség:
$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{k_{\overline{C}}}{n} \approx 0,979$.

Feladatok:

1. Próbagyártás után kiderül, hogy annak a valószínűsége, hogy a vizsgált gyártmány anyaghibás, 0,15, annak pedig, hogy mérethibás, 0,3. A két esemény egyszerre 0,08 valószínűséggel következik be. Mennyi a valószínűsége, hogy egy termék hibátlan?

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $P(A) \geq 0,8$ és $P(B) \geq 0,8$, akkor $P(A \cap B) \geq 0,6$!

3. Ha a következő szavak betűit összekeverjük, és véletlenszerűen sorba rakjuk, mennyi a valószínűsége, hogy újra az eredeti szót kapjuk:
   a) BEREGSZÁSZ;
   b) KÁRPÁTALJA?

4. Egy dobozban 5 piros golyó van. Legkevesebb hány fehér golyót kell hozzátenni, hogy fehér golyó húzásának valószínűsége nagyobb legyen 0,9-nél?

5. Egy urnában 6 piros, több fehér és fekte golyó van. Annak a valószínűsége, hogy egy golyót kihúzva, az fehér vagy fekete golyó lesz: $\frac{3}{5}$; hogy piros vagy fekete lesz: $\frac{2}{3}$. Hány fehér és fekete golyó van az urnában?

6. Egy cukrászdába egy 9 fős társaság érkezik. Három dobostortát, 2 túrós rétest és 4 somlói galuskát rendelnek. A pincér kihozza a süteményeket, de sajnos elfelejtette, hogy ki melyiket rendelte, így véletlenszerűen teszi le őket a vendégek elé. Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindenki a megfelelő süteményt kapja?

7. Egy vendéglő egyik asztalánál 9 vendég ül, mindenki rendel egy italt, összesen 3 üdítőt 4 vörös és 2 fehér bort. A pincér találomra osztja ki az italokat. Mennyi a valószínűsége, hogy mindenki azt kapja, amit kért?

8. A 32 lapos magyar kártyából egyszerre 3 lapot húzunk. Mi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott lapok között legalább egy zöld van?

9. Két kockával dobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább az egyik kockán 6-ost dobunk?

10. Legalább hányszor kell egy érmét feldobni ahhoz, hogy 0,95-nál nagyobb valószínűséggel legyen a dobások között fej?

11. Legalább hányszor kell feldobni két szabályos dobókockát ahhoz, hogy legfeljebb 0,74 valószínűséggel egyszer se kapjunk dupla hatost?

12. Egy szabályos dobókockával kétszer egymás után dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy az első dobás eredménye nagyobb, mint a másodiké?

13. A bűvös hatos játék a következő: 2 szabályos dobókockával dobva akkor nyerünk, ha van hatos a dobott számok között vagy ha a dobott számok összege 6. Mennyi a nyerés valószínűsége?

14. Dobjunk fel 3 szabályos dobókockát egymástól függetlenül. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok összege prímszám lesz?

15. Egy kockával 6-szor dobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy van olyan szám, amit legalább kétszer dobunk?

16. Toscana hercege szerette a szerencsejátékot. Észrevette, hogy ha két kockával dobott, akkor a 9 gyakrabban jött ki, mint a 10, ezért írt Galileinek, hogy fejtse meg a rejtélyt. Mit válaszolhatott Galilei?

17. Mennyi a valószínűsége, hogy egy szelvénnyel fogadva az ötös lottón (ötöt húznak kilencven számból) legalább

a) 4 találatunk lesz;

b) ötösünk lesz;

c) legalább kettes találatunk lesz?

18. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 2 ember születésnapja azonos napra esik? (Februárt 28 nappal vegyük számításba, a születésnapok $\frac{1}{365}$ valószínűséggel esnek az egyes napokra.)

19. Legalább hány ember esetén nagyobb $\frac{1}{2}$-nél annak a valószínűsége, hogy legalább 2-nek azonos hónapra essék a születésnapja (minden hónapot azonos valószínűséggel véve)?

20. Dobjunk fel 10 darab egyforma érmét. Mennyi a valószínűsége, hogy mindegyiken fej vagy mindegyiken írás van?

21. Tíz egyforma pár cipőből kiválasztunk véletlenszerűen 4 cipőt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy lesz legalább egy pár?

22. Egy dobozban n golyó van az $1, 2, \ldots, n$ számokkal jelölve. Egyenként kihúzzuk az összes golyót. Mi a valószínűsége, hogy minden alkalommal nagyobb számú golyót húzunk ki, mint az előző volt?

23. Egy parkolóban 8 hely van. Odaérkezve egy autó véletlenszerűen beáll az üres helyek valamelyikére. 4 autó áll már bent, amikor egy busz érkezik. Akkor tud beállni, ha van 4 egymás melletti szabad hely. Mennyi a valószínűsége, hogy ezt meg tudja tenni?

24. 10 lapra felírjuk a 10 számjegyet. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy 2 lapot kihúzva, egymás mellé téve a kapott szám osztható 18-cal.

25. Egy kerek asztalhoz n különböző magasságú ember ül le. Mi a valószínűsége, hogy a legnagyobb és a legkisebb egymás mellé kerül?

26. Egy kalapban 3 lap van, egyikre 1, a másodikra 2 és a harmadikra 3 van írva. Négyszer húzunk visszatevéssel. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott számok összege páros?

27. Mennyi a valószínűsége, hogy a bridzskártyát szétosztva

a) legfeljebb egy játékos kezében van 2 ász;

b) a négy ász közül mind a négy játékosnak egyet-egyet osztanak?

28. 100 alma közül 10 férges, kiveszünk közülük válogatás nélkül 5-öt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy lesz közöttük férges?

29. Mennyi a valószínűsége, hogy az öt lottószámot növekvő sorrendben húzzák ki?

30. Tekintsük az $1, 2, \ldots, n$ számoknak egy véletlen permutációját (minden permutáció egyformán valószínű)! Mennyi a valószínűsége, hogy

a) az 1 és 2 számok egymás mellé kerülnek;

b) az 1, 2 és 3 számok egymás mellé kerülnek?

31. Egy urnában ugyanannyi piros golyó van, mint fehér. Ha visszatevés nélkül húzunk kettőt, akkor annak valószínűsége, hogy mindkettő piros, $\frac{8}{33}$. Hány golyó van az urnában?

32. Egy 10-lakásos ház elkészültekor kiderül, hogy 7 lakás hibamentes, bár a többi is beköltözhető. Öt lakásba már beköltöztek a lakók. Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan 3 hibátlan lakásba és két hibásba költöztek be?

33. Egyszerre dobunk 6 szabályos kockával. Mi a valószínűsége annak, hogy legalább két azonos dobókockán azonos pontszám lesz felül?

34. A mostani influenzajárvány mutatói szerint a lakosság 15%-a betegedett meg. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 18 fős csoportban legfeljebb 3 influenzás beteg van?

35. Egy villanykörtét gyártó cég termékei között 8% selejtes. Mekkora annak valószínűsége, hogy 10 véletlenszerűen kiválasztott körte között

a) legalább 2 selejtes;

b) pontosan 4 selejtes lesz?

3.2. Geometriai valószínűség

Geometriai valószínűségről beszélünk, ha

- a H eseménytér egy geometriai alakzat,
- az A esemény a H egy részhalmaza,
- egy véletlen pont A tartományba esésének valószínűsége arányos az A halmaz mértékével. Ekkor az esemény bekövetkezésének valószínűsége:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(H)},$$

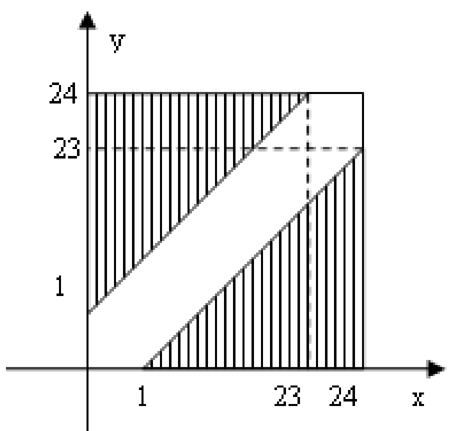
ahol a $\mu(\cdot)$ mérték lehet: hossz, terület, térfogat vagy felszín.

Példa: Egy kikötőhöz 24 órás időtartamon belül véletlen időpontban 2 hajó érkezik. Az előbb érkező rögtön megkezdi a pakolást, mely egy órát vesz igénybe. Mi a valószínűsége, hogy valamelyik hajónak várakoznia kell?

Megoldás: Legyen x az első hajó érkezésének időpontja, y a második hajó érkezésének időpontja. Mivel két változóval van dolgunk ezért, a keresett valószínűséget két terület arányával adjuk meg.

A H eseményteret egy 24x24-es négyzet alkotja, mivel
$0 \leq x \leq 24$ és $0 \leq y \leq 24$. Tehát $S(H) = 24^2$.

Vizsgáljuk a kedvező elemi események A halmazát. Ha a második hajó érkezik később, akkor a kedvező eseteket az $y - x \geq 1$ egyenlőtlenség írja le, ellenkező esetben $x - y \geq 1$. A koordinátarendszerben ábrázolva a kedvező eseteknek megfelelő pontok az besatírozott alakzatot adják.



Vagyis $S(A) = 2 \cdot \frac{23^2}{2}$. Ezért az A esemény bekövetkezésének valószínűsége:

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(H)} = \frac{23^2}{24^2} \approx 0,92$$

Feladatok:

1. Egy focilabdát találomra nekirúgnak egy háznak, amely fala 10 m hosszú és 5 m magas (egyenletes eloszlást feltételezünk). A házon két 2 m x 1,5 m-es ablak van. Mennyi a valószínűsége, hogy ablakot talál el a labda?

2. A gázvezetékek meghibásodása bárhol bekövetkezhet és a hiba egy szakaszba való esésének valószínűsége a szakasz hosszával arányos. Egy 50 méter hosszú gázvezetékből 2 helyen szivárog a gáz. A 2 hiba egymástól függetlenül keletkezett. Ha a hibák közelebb vannak egymáshoz 2 méternél, akkor az aszfaltot csak 1 helyen kell bontani. Mi a valószínűsége annak, hogy nem szükséges 2 bontás?

3. Véletlen szerűen választottak egy pontot a

$$K = \{(p, q) | p \in [-1, 1], q \in [-1, 1]\}$$

halmazból. Mi a valószínűsége, hogy az $x^2 + 2px + q = 0$ egyenlet gyökei valós számok?

4. Két számot választunk a 0 és 1 között. Mi a valószínűsége annak, hogy szorzatuk kisebb $\frac{4}{25}$-nél?

5. Véletlenszerűen felírunk két, egynél kisebb számot. Mekkora annak a valószínűsége, hogy összegük kisebb egynél és szorzatuk kisebb $\frac{2}{9}$-nél?

6. Egy egységnyi hosszúságú szakaszon találomra kiválasztunk két pontot. E pontok az adott szakaszt három részre osztják. Mekkora annak a valószínűsége, hogy e szakaszokból háromszög rajzolható?

7. Egy még létező, vásártereken játszott régi angol játék a pennygurítás: adott egy 2 egység oldalhosszúságú négyzetháló és egy 1 egység átmérőjű penny. A cél az, hogy az elgurított penny ne essen vonalra. Hogyan számítjuk ki a nyerési esélyeket?

8. Egy kis kikötőben egyszerre csak egy hajó rakodhat. Az egyik nap 5 és 12 óra között biztosan érkezik két hajó. A rakodás mindkettő esetében 53 percet vesz igénybe. Mennyi a valószínűsége, hogy nem kell várniuk egymásra?

9. Anna munkaideje háromnegyed öt és öt között véletlenszerűen, egyenletes eloszlás szerint ér véget. Béla fél öt és negyed hat között szokott odaérni, hogy hazavigye, szintén véletlenszerűen, egyenletes eloszlás szerint.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy Béla hamarabb odaér, mint ahogy Anna végez?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy egyiküknek sem kell 15 percnél tovább várakoznia?

10. András és Betti megbeszélik, hogy munka után találkoznak. Mindkettejüknek egymástól függetlenül véletlenszerűen, egyenletes eloszlás szerint ér véget a munkaideje 4 óra és fél 6 között.

    a) Mennyi a valószínűsége, hogy az előbb jövőnek nem kell 10 percnél többet várnia a másikra?

    b) Ha András fél órát hajlandó várni, Betti, aki türelmetlenebb, csak negyed órát, mennyi a valószínűsége, hogy találkoznak?

11. Választunk a (0,1) intervallumon találomra egy pontot (egyenletes eloszlás szerint). Jelöljük e pontnak a 0-tól való távolságát ξ -vel. Mennyi a annak a valószínűsége, hogy a ξ, az $1-\xi$ és az 1/2 hosszúságú szakaszokból háromszöget lehet alkotni?

12. Egy egységnyi hosszúságú szakaszon találomra kijelölünk két pontot. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a köztük lévő távolság kisebb mint egy előre megadott h hossz, ahol $0 < h < 1$?

13. Egy r sugarú kör kerületén megjelölünk egy pontot. Ezután a körlapon találomra választunk egy másik pontot (egyenletes eloszlás szerint). Mennyi a valószínűsége, hogy a két pont távolsága kisebb, mint $r\sqrt{2}$

14. A (0; 1) intervallumon találomra választunk két számot (egymástól függetlenül és egyenletes eloszlás szerint).

    Mennyi a valószínűsége, hogy különbségük

    a) 1/4 és 1/2 közé esik;

    b) kisebb lesz, mint a kisebbik szám?

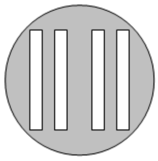
15. Egy beregszászi áruházhoz két áruszállító érkezik egyenletes eloszlás szerinti véletlen időpontokban: a Munkácsról érkező 8 és 10 óra között, az Ungvárról érkező pedig 9 és 10 óra között. Mennyi a valószínűsége, hogy az ungvári teherautó érkezik meg előbb?

16. Egy 15 cm$\times$15 cm-es négyzet alakú táblára nyilakat lövünk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a találat a négyzet miden oldalától

    a) legalább 3 cm-re van;

b) legfeljebb 9 cm-re van?

17. Egy 20 cm sugarú vízlevezető akna fedőlapján 4 darab egymással párhuzamos téglalap alakú rés van. A rések 20 cm hosszúak és 4 cm szélesek. Egy kislány véletlenül elejtett az akna felett egy 0,5 cm sugarú gyöngyöt. Mennyi annak a valószínűsége, annak, hogy a gyöngy beleesik az aknába, nem érintve közben a rések széleit?



18. Vízszintes táblára *d* távolságú párhuzamos egyeneseket rajzoljunk. Egy $l < d$ hosszúságú tűt dobálunk a táblára megpörgetve azt. Mennyi a valószínűsége, hogy a tű metszi valamelyik egyenest? (*Buffon-féle tűprobléma*)

Ellenőrző kérdések:

1. Mik a valószínűség axiómái?
2. Mit állít a Poincare tétel?
3. Mi a teljes eseményrendszer fogalma?

4. fejezet

Feltételes valószínűség

4.1. Feltételes valószínűség, teljes valószínűség tétele, Bayes tétel

- **Feltételes valószínűség.**
  Legyen A és B egy kísérlettel kapcsolatos két esemény, ahol $P(B) \neq 0$.
  Az A esemény B feltétel melletti bekövetkezésének valószínűsége:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Ha a H eseménytér elemi eseményeinek a száma véges, akkor

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

Legyenek $A_1, A_2, ...A_n$ a H eseménytér tetszőleges eseményei, ezek együttes bekövetkezésének valószínűsége:

$$\begin{aligned}
&P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = \\
&= P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}) \cdot \\
&\cdot P(A_{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-2}) \cdot ... \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_1).
\end{aligned}$$

Példa: Két kockával dobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7, feltéve, hogy a dobott számok összege páratlan.

Megoldás: Legyen A esemény: a dobott számok összege 7;

B esemény: a dobott számok összege páratlan.

A B eseményre kedvező esetek: (1,2), (1,4), (1,6), (2,1), (2,3), (2,5), (3,2), (3,4), (3,6), (4,1), (4,3), (4,5), (5,2), (5,4), (5,6), (6,1), (6,2), (6,4), (6,6).

$A \subset B$ ezért $A \cap B = A$, vagyis az $A \cap B$ eseményre kedvező esetek: (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6.1)

A kérdezett valószínűség:

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$$

- **A teljes valószínűség tétele.**

  A $B_1, B_2, ...B_n$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ha páronként kizárják egymást és összegük a biztos esemény.

  Ha $B_1, B_2, ...B_n$ teljes eseményrendszert alkotnak a H eseménytérben és $P(B_i) \neq 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$, akkor a H eseménytér tetszőleges A eseményére érvényes a teljes valószínűség tétele:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i).$$

- **Bayes tétel.**

  Ha $B_1, B_2, ...B_n$ teljes eseményrendszert alkotnak a H eseménytérben és $P(B_i) \neq 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$, továbbá a H eseménytér tetszőleges A eseményére, melyre $P(A) \neq 0$, akkor

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}.$$

Példa: Egy főiskolára könyvvitel és matematika szakos hallgatók járnak. A harmadik évfolyamon négyszer annyi könyvvitel szakos hallgató van mint matematikus. Statisztikából a könyvviteles hallgatók 68%-a, a matematikusok 82%-a tett sikeres vizsgát. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

a) egy véletlenszerűen kiválasztott hallgató sikeres vizsgát tett;

b) egy sikeres vizsgát tett hallgató matematikus?

Megoldás: Legyen B_1 esemény: a kiválasztott hallgató matematikus;

B_2 esemény: a kiválasztott hallgató könyvvtel szakos;

A esemény: a kiválasztott hallgató sikeres vizsgát tett;

$A|B_1$ esemény: a kiválasztott hallgató sikeres vizsgát tett, feltéve, hogy matematikust választottunk;
$A|B_2$ esemény: a kiválasztott hallgató sikeres vizsgát tett, feltéve, hogy könyvvitel szakost választottunk;
Ekkor: $P(B_1) = \frac{1}{5} = 0,2$, $P(B_2) = \frac{4}{5} = 0,8$,
$P(A|B_1) = 0,82$, $P(A|B_2) = 0,64$.

a) A teljes valószínűség tételét használjuk:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) = \\ &= 0,2 \cdot 0,82 + 0,8 \cdot 0,64 = 0,708. \end{aligned}$$

b) Itt a Bayes tételt használjuk:

$$\begin{aligned} P(B_1|A) =& \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)} = \\ & \frac{0,2 \cdot 0,82}{0,2 \cdot 0,82 + 0,8 \cdot 0,64} \approx 0,232. \end{aligned}$$

Feladatok:

1. Egy műhelyben 3 gép dolgozik. Az elkészült munkadarabokat a minőségellenőrzésen I., II., illetve III. osztályba sorolják.

	B1 : I.o.	B2 : II.o.	B3 : III.o.
A1 : 1.gép	500	510	415
A2 : 2.gép	440	390	275
A3 : 3.gép	320	300	190

A napi össztermékből véletlenszerűen kiválasztunk egyet.

I) Írjuk fel szimbólumokkal és számoljuk ki:
- mennyi a valószínűsége, hogy a 2.gép készítette a munkadarabot, feltéve, hogy első osztályú;
- mennyi a valószínűsége, hogy másodosztályú a munkadarab, feltéve, hogy nem a 3.gép készítette?

II) Számítsuk ki és fogalmazzuk meg szavakkal az alábbiak jelentését:

a) $P(A_1)$;

b) $P(A_1|B_2)$;

c) $P(A_1|B_1 \cup B_2)$;

d) $P\left(\overline{B}_2|\overline{A}_1 \bigcup A_2\right)$;

e) $P\left(\overline{A_1 \bigcup A_2}|\overline{B_1 \bigcup B_3}\right)$;

f) $P(A_1 \cup A_3|B_1)$.

2. Egy villamos 10 percenként jár. Feltéve, hogy az előző már legalább 3 perce elment, mennyi a valószínűsége, hogy a következő 5 percen belül jönni fog?

3. Egy asztalnál négyen kártyáznak. A 32 lapos magyar kártyát egyenlően osztják egymás között. Ha az egyik kiválasztott játékosnak nem jut ász, mennyi a valószínűsége, hogy a következőnek sem jut?

4. Egy 32 lapos kártyacsomagból 4 lapot húzunk ki egymásután visszatevés nélkül Mennyi a valószínűsége annak, hogy az első 2 lap király, a harmadik felső a negyedik pedig, ász?

5. Egy dobozban 5 fehér és két piros golyó van. Előbb két golyót húzunk a dobozból visszatevés nélkül, majd egy harmadikat. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a harmadik kivett golyó piros?

6. Van három testvér. A legnagyobb szeret rosszalkodni, ezért ha egyedül hagyják, 0,7 valószínűséggel rossz fát tesz a tűzre. A középső ha látja, hogy bátyja rosszalkodik, 0,5 valószínűséggel csatlakozik hozzá. A legkisebb szereti utánozni testvéreit, tehát ha mindketten rosszalkodnak, 0, 8 valószínűséggel utánozza őket. Egy délután magukban játszanak az udvaron. Mennyi a valószínűsége, hogy mindhárman rosszalkodni fognak, amikor szüleik kimennek utánuk?

7. Azonos fajta árukból két tételünk van. Az első tétel 15, a második tétel 20 darabból áll. Mindkét tételben 1-1 hibás darab van. Az első tételből egy véletlenszerűen választott darabot átteszünk a másodikba. Ezután a második tételből választunk egyet és ezt megvizsgáljuk. Mi a valószínűsége annak, hogy ez a darab selejtes?

8. Két doboz mindegyikében 100 db csavar van. Az első dobozban 10 db selejtes, a másodikban 6. Találomra kiveszünk egy csavart valamelyik dobozból. (A dobozok közül egyenlő valószínűséggel választunk) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kivett csavar jó?

9. 100 db kész műszer között előfordulhat 0,1,2,3,4 hibás. Ezek előfordulásának valószínűsége rendre: $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{12}$, és $\frac{1}{12}$. Feltételezve, hogy bármelyik műszert egyenlő valószínűséggel vehetjük meg, mennyi annak a valószínűsége, hogy hibátlan műszert vásárolunk?

10. Valakit keresünk az egyetemen. A keresett személy egyforma valószínűséggel lehet adott 5 terem valamelyikében, és annak a valószínűsége, hogy az öt terem valamelyikében jelen van: p. Már 4 termet megnéztünk, és a keresett személyt nem találtuk. Mennyi a valószínűsége, hogy az 5-ik teremben megtaláljuk?

11. Egy egyetemi vizsgán az A szakos hallgatók 60%-a, a B szakos hallgatók 80%-a szerepel sikeresen. Az A-szakos hallgatók az évfolyam 15%-át teszik ki. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy találomra kiválasztott hallgató sikeresen vizsgázott?

12. Egy céllövöldében három rekeszben vannak puskák. Az első rekeszben 3 puska, a másodikban 1, a harmadikban 2. Ezekkel rendre 0,5; 0,7; 0,8 valószínűséggel találunk célba. Mennyi a találat valószínűsége, ha találomra választunk ki puskát?

13. Két város közötti távíró összeköttetés olyan, hogy a leadott távírójelek közül a pontok $\frac{2}{5}$-e vonallá torzul, a vonalak $\frac{1}{3}$-a pedig ponttá. A leadott jelek közül a pontok és vonalak aránya 5:3. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha a vevő oldalon pontot kaptak, akkor az adó pontot továbbított?

14. Amennyiben barátnőnk közvetlenül a randevúnk előtt megy fodrászhoz, akkor 90%, hogy elkésik a randevúról. Tízszer olyan gyakran fordul elő, hogy elkésik a randevúról, mint az, hogy randevú előtt fodrásznál volt. Ha elkésik, mennyi a valószínűsége, hogy fodrásznál volt?

15. Egy gyárban három gép gyárt csavarokat. A termékek 25%-át az A gép, 35%-át a B, a többit a C-gép gyártja. Az A gép 5%-ban, a B gép 4%-ban a C-gép pedig 25%-ban termel selejtet. Ha egy találomra kiválasztott csavar selejtes, mennyi a valószínűsége, hogy az A gép gyártotta.

16. 4 golyót helyezünk el egy kalapban: 1 fehéret, 1 kéket és 2 pirosat. A kalapot megrázzuk, majd valaki kihúz belőle két golyót. Megnézi őket, és fennhangon kijelenti, hogy legalább az egyik piros. Mennyi a valószínűsége, hogy a másik kihúzott golyó is piros?

17. Tegyük fel, hogy a férfiak 5%-a és a nők 0,25%-a színvak. Egy 20 nőből és 5 férfiből álló csoportból 1 személyt találomra kiválasztottunk. Megállapítjuk, hogy színvak. Mennyi a valószínűsége, hogy nőt választottunk ki?

18. Egy diák a vizsgán 0,6 valószínűséggel tudja a választ a kérdésre. Ha nem tudja, akkor tippel, és 0,2 valószínűséggel találja el a helyes választ. Feltéve, hogy a diák helyesen válaszolt, mekkora az esélye, hogy tudta a választ?

19. Egy gépesített ügyintézéssel rendelkező irodában 3 gép dolgozik párhuzamosan, azonos típusú ügyiratok intézésében. Az első gép naponta 10 aktával végez, a második napi 15, a harmadik napi 25 aktával. Hibásan kezelt ügyirat naponta átlagosan 0,3, 0,9 ill. 0,5 db található egyes gépek munkájában. Az összesített napi mennyiségből találomra kiveszünk egy példányt, s azt rossznak találjuk. Mekkora a valószínűsége, hogy az első gép készítette?

20. Egy adott betegségben szenvedő betegek 63 %-át egy olyan új kezelésnek vetik alá, amely a korábbi 38 %-ról 81%- ra javítja a gyógyulási arányt. Egy gyógyult beteget kiválasztva mi a valószínűsége, hogy ő az új kezelésben részesült?

21. Sportolóknál azt vizsgálják, használnak-e doppingszert. Az erre haszlált teszt 99%-ban vezet pozitív eredményre, ha valaki használja a szert. Tudjuk, hogy a sportolók 1%-a használjam a szert és azt is tudjuk, hogy 1%-ban akkor is pozitív lesz a teszt, ha nem doppingol a sportoló. Mennyi a valószínűsége, hogy tényleg doppingol a sportoló, ha pozitív lett a tesztje?

22. Egy kávézóban a felszolgáló megfigyelése szerint a kolumbiai kávét választók 50%-a ad borravalót, a bécsi kávékeveréket választók 20%-a, míg a guatemalai kávét választók 30%-a. Mennyi a valószínűsége, hogy egy borravalót adó vendég kolumbiai kávét ivott, ha az eladott kávék 20%-a kolumbiai, 70%-a bécsi és a maradék guatemalai?

23. Szinbád, a szultánnak tett szolgálataiért, választhat egyet az $N = 100$ háremhölgy közül úgy, hogy az egyenként előtte elvonuló hölgyek valamelyikére rámutat. Tegyük fel, hogy a háremhölgyek szépségük szerint egyértelműen sorrendbe állíthatók, és Szinbád taktikája a következő: a véletlen sorrendben elvonuló hölgyek közül, az első $n = 10$ szemrevétele után azt választja, aki szebb minden korábban látottnál. Mennyi annak valószínűsége, hogy Szinbád a legszebb háremhölgyet választja?

24. Egy üzemben 3 gép van, az első adja a termelés 40%-át, a másik kettő 30-30%- át. Az első és a második gép 0,05 valószínűséggel termel selejtet a harmadik 0,1 valószínűséggel. Mennyi a valószínűsége, hogy

 a) az üzem termékei közül egyet kiválasztva az selejtes lesz;

 b) ha találunk egy selejtes terméket, azt az első gép gyártotta?

25. A matematika államvizsgán 4 témakörben szerepelnek kérdések: matematikai analízis, algebra, analitikus geometria és valószínűségszámítás, egy diák a felsorolt tantárgyakból feltette kérdéseket megfelelően 70%, 60%, 80% és 50% valószínűséggel tudja. Tegyük fel, hogy az összes kérdés 40% analízis, 30%-a algebra, 15%- geometria. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

 a) egy feltett kérdésre a diák tudta a választ;

 b) egy diák helyes válaszai közül egyet kiválasztva azt tapasztaljuk, hogy az valószínűségszámítás?

26. Egy használtautó-kereskedő azt vizsgálja befolyásolja-e a kocsi fényezése az eladási árat. Megfigyelései a következők: az eladott autók 45 %-át megvették katalógusár felett, 25

%-át katalógusár alatt, a többiért katalógusárat adtak. A katalógusár felett megvásárolt gépkocsik 65%-a volt metálfényezésű, a katalógusár alatt eladott 30 %-a volt metálfényezésű, míg a katalógusáron eladott autóknál ez az arány 45 %. Kiválasztunk tetszőlegesen egy eladott autót. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

a) metálfényezésű;

b) ha metálfényezésű, akkor katalógusár felett kelt el?

4.2. Események függetlensége

- **Két esemény függetlensége.**
  Legyen A és B a H eseménytér két eseménye. Az A és B függetlenek, ha

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

  Ha az A és B események függetlenek, akkor:

- $P(A|B) = P(A)$;

- A és $\overline{B}$, $\overline{A}$ és B illetve $\overline{A}$ és $\overline{B}$ események is függetlenek.

- **Több esemény teljes függetlensége.**
  A H eseménytér $A_1, A_2, ..., A_n$ eseményei teljesen függetlenek, ha közülük bármely k számú esemény együttes bekövetkezésének valószínűsége egyenlő az egyes események valószínűségének szorzatával.
  Az $A_1, A_2, ..., A_n$ események együttes bekövetkezésének valószínűsége:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n).$$

Példa: Ketten lőnek céltáblára. A találat valószínűsége az első személy esetében 0,8 a második esetében 0,65. A találatok egymástól függetlenek. Ha mindketten egy-egy lövést adnak le, mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább egy találat van a céltáblán?
Megoldás: Legyen:
A_1 az az esemény, hogy az első lövész talál,
A_2 az az esemény, hogy a második lövész talál, ekkor az
$\overline{\overline{A_1} \cap \overline{A_2}}$ az az esemény, hogy legalább egy találat van. A keresett valószínűség:

$$P(\overline{\overline{A_1} \cap \overline{A_2}}) = 1 - P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}).$$

Az A_1 és A_2 események függetlenek, ezért az $\overline{A_1}$ és $\overline{A_1}$ események is függetlenek, azaz $P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2})$. Ezért:

$$P(\overline{\overline{A_1} \cap \overline{A_2}}) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) = 1 - 0,2 \cdot 0.35 = 0,93.$$

Feladatok:

1. Háromszor dobunk fel egy szabályos pénzdarabot. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobások között fej és írás is előfordul, B pedig azt az eseményt, hogy legfeljebb egy írás fordul elő. Állapítsuk meg, független-e A és B!

2. Feldobunk egy kockát. A következő események közül melyek függetlenek:
   A: párosat;
   B: páratlant;
   C: prímszámot;
   D: legalább 2-t dobtunk?

3. Két kockával dobunk, legyenek

a) E: a dobások összege 6; F: a dobások összege 7;
   G: az első kocka 3-at mutat;

b) E: a dobások összege 7; F: az első kocka 3-at mutat;
   G: a második kocka 4-et mutat. Függetlenek-e ezek az események?

4. Egy kockát és két pénzdarabot dobtunk fel egyszerre. Mennyi a valószínűsége, hogy a kockán hatost, és az egyik pénzen írást, a másikon fejet dobunk?

5. Egy gyár három szerelőcsarnokában végzett statisztikai vizsgálat szerint az első szerelőcsarnokban a munkaidő 85 %-ában, a második szerelőcsarnokban a munkaidő 90%-ában, a harmadik csarnokban pedig a munkaidő 80%-ában zavartalan a termelés. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a munkaidő egy adott időpontjában:

a) mind a három csarnokban zavartalan a termelés,

b) legalább az egyik csarnokban zavartalan a termelés?

c) csak az egyik csarnokban zavartalan a termelés.

6. Egy szabályos játékkockát egymás után ötször feldobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy

a) minden dobással páros számot dobunk;

b) legalább egyszer hatost dobunk?

7. Annak a valószínűsége, hogy egy műszak alatt az automata nem készít selejtes terméket: 0,9. Mi a valószínűsége annak, hogy 3 műszak alatt nem lesz egyetlen selejtes termék sem?

8. A munkás 3 automatára figyel. Annak a valószínűsége, hogy egy órában az 1.-nél szükség lesz rá: 0,9, a 2.-nál: 0,8 és a 3.-nál: 0,85. Mi a valószínűsége annak, hogy

a) 1 órán belül egyiknél sem lesz rá szükség;

b) legalább 1-nél nem lesz rá szükség 1 órán belül?

9. A kész termékek meghibásodását forma és méret szerint különböztetik meg. A formai meghibásodás valószínűsége 0,05, a méret szerinti meghibásodás valószínűsége 0,01. Mi a valószínűsége annak, hogy a találomra kiválasztott termék forma- és mérethibás lesz?

10. Legalább hányszor kell feldobni két szabályos dobókockát ahhoz, hogy legfeljebb 0,74 valószínűséggel egyszer se kapjunk dupla hatost?

11. Egy könyvtárban csak műszaki és matematikai könyvek vannak. Annak a valószínűsége, hogy valamelyik olvasó műszaki, ill. matematikai könyvet választ, 0,7, ill. 0,3. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy 5 olvasó egymás után vagy csupa műszaki vagy csupa matematikai könyvet kölcsönöz, ha mindegyikük csak 1 könyvet visz el.

12. Egy automatizált gépsor egy gyártási ciklusban 10 gépet gyárt, amelyek mindegyike 0,01 valószínűséggel hibás. Hány ciklus alatt készül 0,8-nél nagyobb valószínűséggel legalább egy hibás gép?

13. Egy dobozban 1-től 8-ig számozott, 8 darab papírlap van. Véletlenszerűen kiveszünk egy lapot. Legyenek az A, B és C a következő események:
A - a kivett lapon páros szám van,
B - a kihúzott szám 4-nél nem nagyobb,
C - a kihúzott szám 2, vagy 5-nél nagyobb.
Igazoljuk, hogy $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ és az adott események mégsem függetlenek!

Ellenőrző kérdések:

1. Mit értünk az A esemény relatív gyakoriságán?

2. Mennyi a lehetetlen és a biztos esemény relatív gyakorisága egy n-szeres kísérletsorozatban?

3. Mi a feltételes valószínűség definíciója?

4. Mondja ki a Bayes tételt!

5. Döntse el, az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis!

    - Az esemény relatív gyakorisága mindig nagyobb, mint az esemény elméleti valószínűsége.
    - A relatív gyakoriság lehet kisebb is és nagyobb is, mint az elméleti valószínűség.
    - Ha egy esemény relatív gyakorisága 1, akkor az esemény a biztos esemény.
    - A kísérletek számának növekedtével a relatív gyakoriság értéke egyre csökken.
    - Egymást kizáró események relatív gyakoriságainak összege az összegesemény relatív gyakoriságát adja.
    - A teljes eseményrendszer relatív gyakoriságainak összege 1.
    - Egy eseménynek a biztos eseményre vonatkoztatott feltételes valószínűsége nagyobb mint a feltétel nélküli valószínűsége.
    - A feltételes valószínűség lehet 1-nél nagyobb is.
    - Egy esemény rögzítése után a feltételes valószínűség kielégíti a valószínűség axiómáit.

6. Mikor nevezünk három eseményt teljesen függetlennek?

7. Mit állít a szorzási szabály?

8. Döntse el, az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis!

    - A független események kizárják egymást.
    - Ha két esemény ellentettei függetlenek, akkor az események is azok.
    - A teljes eseményrendszer eseményei teljesen függetlenek egymástól.
    - Bármely két esemény vagy független egymástól, vagy pedig kizárják egymást.
    - Bármely pozitív valószínűségű esemény önmagára vonatkoztatott feltételes valószínűsége 1.

- Bármely pozitív valószínűségű, de nem egy valószínűségű eseménynek az ellentettjére vonatkoztatott feltételes valószínűsége 0.
- Egymást kizáró eseményeknél az egymásra vonatkoztatott feltételes valószínűség mindig 0.
- A teljes függetlenségből következik a páronkénti függetlenség.
- A lehetetlen esemény önmagától is független

5. fejezet

Valószínűségi változók és jellemzőik

5.1. Diszkrét valószínűségi változók

Ha ξ valószínűségi változó lehetséges értékeinek száma véges vagy megszámlálhatóan sok, akkor a ξ-t diszkrét valószínűségi változónak nevezzük.

- **Valószínűségeloszlás**
  a ξ lehetséges értékei és a valószínűségük megadása. Ha a ξ lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots x_k, \ldots$, akkor a
  $$p_k = P(\xi = k)$$
  valószínűségeket a ξ változó eloszlásának nevezzük.

- A ξ értékeihez tartozó valószínűségek összege 1. Tehát
  $$\sum_i p_i = 1.$$

- Az $F(x)$ függvény a ξ valószínűségi változó
  eloszlásfüggvénye, ha $F(x) = P(\xi < x)$.

Diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye megadható:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq x_1, \\ p_1 & \text{ha } x_1 < x \leq x_2, \\ p_1 + p_2 & \text{ha } x_2 < x \leq x_3, \\ ... & \\ p_1 + p_2 + ... + p_k & \text{ha } x_k < x \leq x_{k+1}, \\ ... & \\ 1 & \text{ha } x_n < x \end{cases}$$

- **Várható érték:** $M(\xi) = \sum_i x_i \cdot p_i$.
- **Szórás:** $D(\xi) = \sqrt{\sum_i \left(x_i - M(\xi)\right)^2 \cdot p_i}$.
  A szórásnégyzetre fennáll a következő összefüggés

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi).$$

Példa: A magyar kártyacsomagból kihúzunk 3 lapot visszatevés nélkül. Jelölje ξ valószínűségi változó a kihúzott piros lapok számát!

a) Határozzuk meg a valószínűségi változó eloszlását!

b) Írjuk fel az eloszlásfüggvényét!

c) Határozzuk meg az eloszlás várható értékét és szórását!
Megoldás:A ξ valószínűségi változó lehetséges értékei 0, 1, 2, 3.

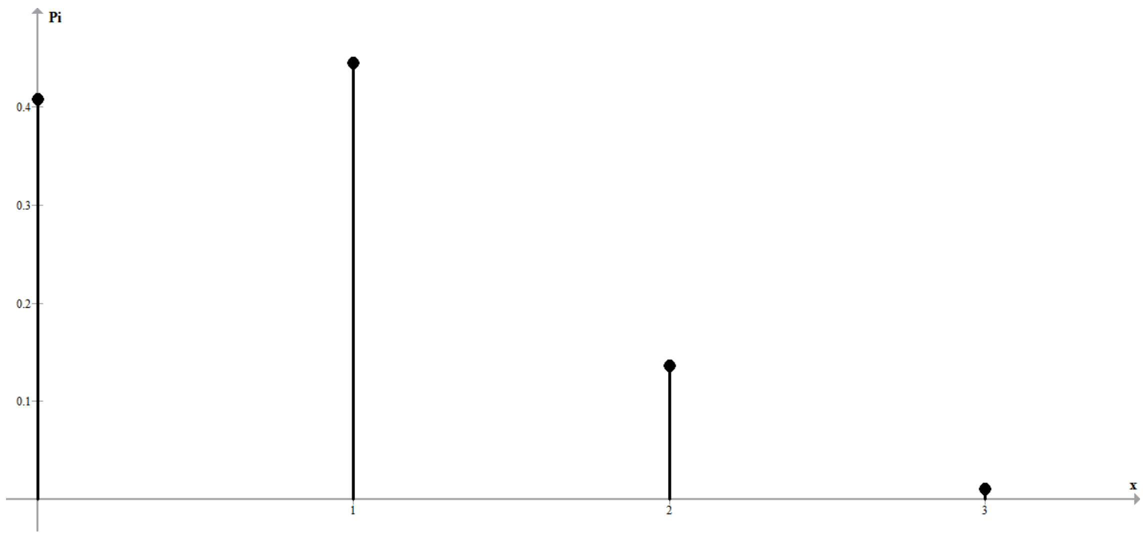
a) Az eloszlást a következő képletből számoljuk ki:

$$P(\xi = k) = \frac{C_8^k \cdot C_{24}^{3-k}}{C_{32}^3}, \quad \text{ahol} \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Tehát a ξ valószínűségi változó eloszlása:

k_i	0	1	2	3
p_i	0,408	0,445	0,136	0,011

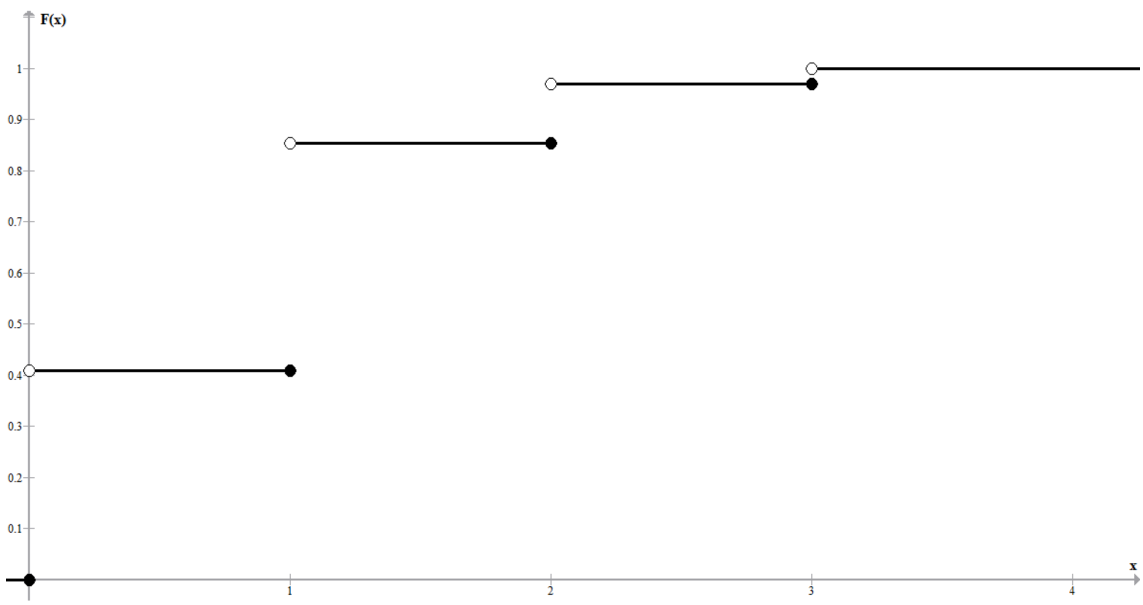
a valószínűségeloszlás ábrázolása botábrán



b)

$$F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0, \\ 0,408 & \text{ha } 0 < x \leq 1, \\ 0,853 & \text{ha } 1 < x \leq 2, \\ 0,989 & \text{ha } 2 < x \leq 3, \\ 1 & \text{ha } 3 < x \end{cases}$$

az eloszlásfüggvény ábrázolása



c) Várható érték:

$$M(\xi) = \sum_i x_i \cdot p_i = 0 \cdot 0,408 + 1 \cdot 0,445 + 2 \cdot 0,136 +$$

$$+ 3 \cdot 0,011 = 0,75$$

Szórás: Először határozzuk meg az $M(\xi^2)$ értékét

$$M(\xi^2) = \sum_i x_i^2 \cdot p_i = 0^2 \cdot 0,408 + 1^2 \cdot 0,445 + 2^2 \cdot 0,136 +$$

$$+ 3^2 \cdot 0,011 = 1,088.$$

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = 1,088 - 0,5625 = 0,5255$$

Ezért az eloszlás szórása: $D(\xi) = \sqrt{0,5255} \approx 0,725.$

Feladatok:

1. Három kockával dobunk. Számítsuk ki a dobott számok összege eloszlásfüggvényének az $x = 5,2$ helyen felvett értékét!
2. Egy érmével dobunk. Ha az eredmény fej, akkor még kétszer dobunk, ha írás, akkor még egyszer. Mennyi az összes fej eredmények számának várható értéke?
3. Két kockával dobva, mennyi a dobott számok maximumának ill. minimumának várható értéke?
4. Két személy, A és B, két kockával játszanak. Az A játékos akkor fizet B-nek, ha a feldobott kockákon páratlan számok szerepelnek. A B játékos, akkor fizet A-nak, ha az egyik kockán – de csakis az egyiken – páros számot dobnak. Ha más eset fordul elő, egyik sem fizet. Milyen pénzösszegben állapodjanak meg, hogy a játék igazságos legyen?
5. Két személy A és B, a 32 lapos magyar kártyával játszik. A játékszabály a következő: az asztal közepére tett kártyacsomagból felváltva felütnek 1-1 lapot. Ha az első négy felütött lap között van piros , akkor A fizet B-nek 10 hrivnyát. Mennyit fizessen B az A-nak, hogy a játék igazságos legyen?
6. Két kockával addig dobunk, míg valamelyiken 6-ost nem dobunk. Mennyi lesz az addigi dobásszám várható értéke, ha az utolsó dobást is beleszámoljuk?
7. Érmével dobunk addig amíg először fordul elő, hogy két egymás utáni dobás azonos. Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke?
8. Egy kockával háromszor dobunk egymás után. Jelentse a ξ a hatos dobások számát. Határozzuk meg $M(\xi)$-t és $D(\xi)$-t!
9. A ξ valószínűségi változó lehetséges értékei: -1, 0, 2, 3. Az ezekhez tartozó valószínűségek rendre: 1/12, 5/12, 1/4,1/4. Számítsuk ki ξ várható értékét és szórását!
10. Két kockával dobva mennyi a dobott számok

a) maximumának;

b) minimumának;

c) összegének eloszlása, várható értéke és szórása?
Rajzoljuk fel az eloszlásfüggvényeket!

11. Két dobókockával dobunk. Legyen ξ a dobott számok különbsége (a nagyobbikból vonjuk ki a kisebbet). Határozzuk meg ξ eloszlásfüggvényét és várható értékét!

12. Egy újságárusnál egy adott lapot átlagosan 100 vásárló keres egy napon. Ha naponta 120 lapot rendel, mennyi a várható haszna, ha az 5 hr-ért beszerzett lapot 6 hr-ért adja a vásárlónak, és a megmaradt példányokat 3 hr-ért veszi vissza a terjesztő?

13. A következő szerencsejátékot játszuk: T-összeg befizetése ellenében dobunk egy kockát, és ha az eredmény 1, 2 vagy 3, akkor nem nyerünk semmit, ha 4, 5 vagy 6 a dobás eredménye, akkor 18, 24 illetve 30 a nyereményünk.

a) Milyen T-összegig érdemes játszani?

b) Mennyi a játékban elért eredmény szórása, amikor a várható nyeremény értéke 0?

5.2. Folytonos valószínűségi változó

Az $F(x)$ függvény a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, ha $F(x) = P(\xi < x)$.

- **Az eloszlásfüggvény tulajdonságai:**

- Monoton nem csökkenő.
- Balról folytonos, azaz
$$\lim_{x\to a^-} F(x) = F(a).$$
- A függvény határértéke:
$$\lim_{x\to -\infty} F(x) = 0 \quad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$$

Az $F(x)$ függvény csak akkor lehet eloszlásfüggvény, ha az előző három feltétel mindegyike teljesül rá.

- Az eloszlásfüggvény és **sűrűségfüggvény** közötti kapcsolat.

- Legyen ξ folytonos valószínűségi változó, az $F(x)$ függvény deriváltját a ξ sűrűségfüggvényének nevezzük $f(x) = F'(x)$.
- Az eloszlásfüggvény előállítása a sűrűségfüggvényből:
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

- **A sűrűségfüggvény tulajdonságai:**

- $f(x) \geq 0$,
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Az $f(x)$ függvény csak akkor lehet sűrűségfüggvény, ha az előző két állítás mindegyike teljesül rá.

- **Valószínűségek kiszámítása** a sűrűség- és eloszlásfüggvényből.

$$P(a \leq \xi < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx,$$

$$P(\xi < b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx,$$

$$P(\xi \geq a) = \int_a^{\infty} f(x)dx,$$

$$P(a \leq \xi \leq b) = P(a < \xi \leq b) =$$
$$= P(a < \xi < b) = P(a \leq \xi < b.)$$

- **Várható érték:** $M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx.$
- **Szórás:** $D(\xi) = \sqrt{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(x - M(\xi)\Big)^2 f(x)d\,x}.$

  A szórásnégyzetre fennáll a következő összefüggés

  $$D(\xi)^2 = M(\xi^2) - M^2(\xi),$$

  ahol $M(\xi^2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx.$
- A $\varphi(x)$ függvény a ξ valószínűségi változó **karakterisztikus függvénye**, ha

  $$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{itx}dx.$$

Példa: A $(0, a)$ szakaszon véletlenszerűen (egyenletes eloszlást feltételezve) kiválasztottak egy pontot. Jelölje ξ ennek a pontnak a szakasz középpontjától való távolságát.

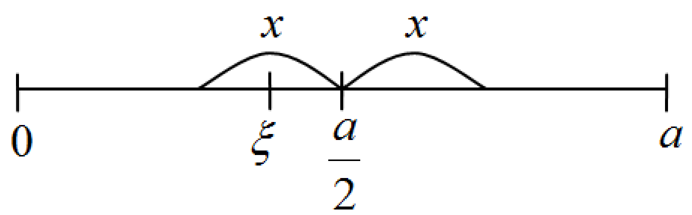
a) Írjuk fel a ξ eloszlás és sűrűségfüggvényét!

b) Számoljuk ki a ξ valószínűségi változó várható értéké és szórását!

Megoldás:

a) A feladat feltételeiből: $0 \leq \xi \leq \frac{a}{2}$. Legyen $0 < x \leq \frac{a}{2}$, ekkor

$$P(\xi < x) = P\Big(\frac{a}{2} - x < \xi < \frac{a}{2} + x\Big) = \frac{2x}{a}.$$



A keresett eloszlásfüggvény:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0, \\ \frac{2x}{a} & \text{ha } 0 < x \leq \frac{2}{a}, \\ 1 & \text{ha } \frac{2}{a} < x. \end{cases}$$

A sűrűségfüggvény:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{2}{a} & \text{ha } 0 < x \leq \frac{2}{a}, \\ 0 & \text{különben }. \end{cases}$$

b)

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_{0}^{\frac{2}{a}} x \cdot \frac{2}{a}\, dx = \frac{a}{4}.$$

Szórás:

$$M(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx = \int_{0}^{\frac{2}{a}} x^2 \cdot \frac{2}{a}\, dx = \frac{a^2}{12},$$

$$D(\xi) = \sqrt{M(\xi^2) - M^2(\xi)} = \sqrt{\frac{a^2}{12} - \frac{a^2}{16}} = \frac{\sqrt{3}a}{12}.$$

Feladatok:

1. Tegyük fel, hogy egy étteremben a vendégek ebédidőben eltöltött idejét, percekben mérve, a következő eloszlás függvény jellemzi:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ha & x \leq 0 \\ \frac{x}{60} & ha & 0 < x \leq 30 \\ \frac{1}{2} & ha & 30 < x \leq 60 \\ \frac{x}{120} & ha & 60 < x \leq 120 \\ 1 & ha & 120 < x \end{cases}$$

   Ábrázoljuk e függvényt! Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy vendég az étteremben 30 percnél több időt tölt el?

2. Lehetnek-e valamely folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvényei az alábbi függvények? Határozzuk meg a sűrűségfüggvényét azoknak, amelyek lehetnek eloszlásfüggvények!

a) $F(x) = \begin{cases} 0 \; ha \, x < 1 \\ \frac{3x+1}{x+1} \; ha \, x \geq 1 \end{cases}$

b) $F(x) = \begin{cases} 0 \; ha \, x < 2 \\ \frac{x-2}{x+2} \; ha \, x \geq 2 \end{cases}$

c) $F(x) = \begin{cases} 0 \; ha \, x \leq 0 \\ e^{\frac{1}{x}} \; ha \, x > 0 \end{cases}$

d) $F(x) = \begin{cases} 2^x \; ha \, x \leq 0,5 \\ 1 - \frac{1}{4x} \; ha \, x > 0,5 \end{cases}$

e) $F(x) = \begin{cases} 0 \; ha \, x \leq 0 \\ \frac{x}{4} (4 - x) \;\; ha \, 0 < x \leq 2 \\ 1 \; ha \; 2 < x \end{cases}$

f) $F(x) = \begin{cases} 0, & ha \quad x \leq 0 \\ \frac{x}{1+x}, & ha \quad 0 < x \end{cases}$

3. A $(0, a)$ szakaszon véletlenszerűen megjelölünk egy pontot, majd az $(a, 2a)$szakaszon, szintén véletlenszerűen, egy másik pontot. Jelentse ξ e két pont távolságát. Írjuk fel

a ξ eloszlás- és sűrűségfüggvényét.

4. Legyen a ξ várható értéke $M(\xi)$ és szórása $D(\xi) > 0$. Bizonyítsuk be, hogy az $\eta = \frac{\xi - M(\xi)}{D(\xi)}$ valószínűségi változó várható értéke 0 és szórása 1.

5. Sűrűségfüggvények-e a következő függvény?

a)

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < \pi \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & 1 < x < 2 \\ \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

6. Legyen ξ sűrűségfüggvénye a következő alakú:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2 + x), & -A < x < 0 \\ \frac{1}{4}(2 - x), & 0 < x < A \\ \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

a) Határozzuk meg az A értékét;

b) Írjuk fel a ξ eloszlásfüggvényét;

c) Ábrázoljuk a ξ eloszlás- és sűrűségfüggvényét!

7. A ξ– valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a következő:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \leq 1 \\ \frac{1}{4}x & \text{ha} \quad 1 < x \leq 3 \\ 0 & \text{ha} \quad x > 3 \end{cases}$$

Számoljuk ki a az $\eta = 2\xi - 4$ valószínűségi változó karakterisztikus függvényét!

8. A ξ– valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a következő:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{ha} \quad 0 < x \leq 2 \\ 0 & \text{ha} \quad x > 2 \end{cases}$$

Számoljuk ki a az $\eta = 2\xi + 3$ valószínűségi változó karakterisztikus függvényét!

9. Számítsuk ki a következő sűrűségfüggvényekkel jellemzett eloszlások várható értékét:

a)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \notin (0,1) \\ 1 & \text{ha} \quad x \in (0,1) \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{ha} \quad x \notin (-1,1) \\ 1 & \text{ha} \quad x \in (-1,1) \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-(\frac{x-2}{2})^2}$$

10. Valaki két telefonhívást vár. Mindkét hívást 10 és 11 óra között esedékes. Jelölje a ξ változó a két hívás között eltelt időt.

a) Határozzuk meg a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét!

b) Határozzuk meg a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a két hívás között 20 percnél kevesebb idő telik el?

d) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a két hívás között 25 percnél több idő telik el?

Ellenőrző kérdések:

1. Mi a valószínűségi változó definíciója?
2. Milyen tulajdonságok jellemzik egyértelműen az eloszlásfüggvényt?
3. Mi a várható érték definíciója?
4. Milyen tulajdonságai vannak a várható értéknek és a szórásnégyzetnek?
5. Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, és melyik hamis!
   - A valószínűségi változó olyan valós értékű függvény, amelynek értelmezési tartománya a K véletlen kísérlet ? eseménytere.
   - Egy véletlen kísérlethez több valószínűségi változót is értelmezni lehet.
   - Az eloszlásfüggvény szigorúan monoton növekedő.
   - Az eloszlásfüggvény értékei nem negatívak.
   - Az eloszlásfüggvény folytonos.
   - Az eloszlásfüggvény balról folytonos függvény, aminek jobbról lehet elsőfajú szakadása.
   - Az eloszlásfüggvény nem veheti fel a 0 és az 1 értékeket csak határértékben.
   - Annak valószínűségét, hogy egy valószínűségi változó az értékeit egy intervallumban veszi fel, az eloszlásfüggvény segítségével meg lehet határozni.
   - Ha egy pontban az eloszlásfüggvény folytonos, akkor az azt is jelenti, hogy azt a pontot a valószínűségi változó nulla valószínűséggel veszi fel.
   - Ha a $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény értékkészlete az irracionális számok halmaza, ξ nem lehet diszkrét valószínűségi változó.
   - Ha a $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény értékkészlete véges, akkor ξ csak diszkrét valószínűségi változó lehet.
   - A folytonos valószínűségi változók eloszlásfüggvénye lépcsős.
   - Egy n-szeres Bernoulli kísérletsorozatban a p valószínűségű A esemény gyakorisága binomiális eloszlású valószínűségi változó.
   - Minden valószínűségi változónak van várható értéke.
   - Minden valószínűségi változónak van szórása.
   - A szórásnégyzet lineáris.
   - A várható érték lineáris.

- Két valószínűségi változó szorzatának várható értéke egyenlő a várható értékek szorzatával.
- Két független valószínűségi változó szorzatának várható értéke egyenlő a várható értékek szorzatával.
- Két független valószínűségi változó szorzatának szórásnégyzete egyenlő a szórásnégyzetek szorzatával.
- Két független valószínűségi változó összegének szórásnégyzete egyenlő a szórásnégyzetek összegével.
- Két független valószínűségi változó összegének várható értéke egyenlő a várható értékek összegével.
- Egy valószínűségi változó négyzetének várható értéke nem kisebb mint a várható értékének négyzete.
- Egy valószínűségi változó négyzetének várható értéke egyenlő a várható értékének négyzetével.

6. fejezet

Nevezetes eloszlások

6.1. Nevezetes diszkrét eloszlások

- **Hipergeometrikus eloszlás**

- *Valószínűségeloszlás:* A ξ lehetséges értékei: $0, 1, 2, ..., n$:

$$P(\xi = k) = \frac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \quad \text{ahol} \quad k = 0, 1, 2, ..., n$$

  továbbá *N, M, n* nemnegatív egészek; $M < N$;
  $n \leq \min(M; N - M)$.

- *Várható érték:* $M(\xi) = n \cdot p$, ahol $p = \frac{M}{N}$.

- *Szórás:* $\sqrt{n \cdot p \cdot q \cdot \frac{N-n}{N-1}}$, ($q = 1 - p$).

- *Alkalmazás:* Visszatevés nélküli mintavétel: van *N* számú elem, amelyből *M* kitüntetett. Az *N* elemből n-szer húzunk visszatevés nélkül. A ξ a mintában lévő kitünetett elemek száma.

- **Binomiális eloszlás**

- *Valószínűségeloszlás:* A ξ lehetséges értékei: $0, 1, 2, ..., n$:

$$P(\xi = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} \quad \text{ahol} \quad k = 0, 1, 2, ..., n,$$

  továbbá $0 < p < 1$, $q = 1 - p$.

- *Várható érték:* $M(\xi) = n \cdot p$.

- *Szórás:* $\sqrt{n \cdot p \cdot q}$.

- *Alkalmazás:*

a) Visszatevéses mintavétel;

b) Bernoulli probléma: Végezzük el az A kísérletet n-szer egymástól függetlenül, legyen $P(A) = p$, ekkor $P(\overline{A}) = 1 - p = q$. A ξ valószínűségi változó a vizsgált A esemény bekövetkezéseinek számát jelöli n kísérlet folyamán.

- **Negatív binomiális eloszlás**

- *Valószínűségeloszlás:* A ξ lehetséges értékei:
$x_k = k + r$, ahol $k = 0, 1, 2, ...$:

$$P(\xi = k + r) = C_{k+r-1}^{r-1} \cdot p^r \cdot q^k,$$

továbbá r adott pozitív egész szám.

- *Várható érték:* $M(\xi) = \frac{r}{p}$.

- *Szórás:* $\frac{\sqrt{r \cdot q}}{p}$, ahol $q = 1 - p$.

- *Alkalmazás:* A binomiális eloszlásnál megismert kísérletek esetén. Ennél az eloszlásnál a ξ valószínűségi változó azon kísérlet sorszámát jelöli, mely elvégzése során az A esemény pontosan r-edszer következik be.

- **Geometriai eloszlás**

- *Valószínűségeloszlás:* A ξ lehetséges értékei:
$x_k = k + 1$, ahol $k = 0, 1, 2, ...$:

$$P(\xi = k + 1) = p \cdot q^k,$$

- *Várható érték:* $M(\xi) = \frac{1}{p}$.

- *Szórás:* $\frac{\sqrt{q}}{p}$, ahol $q = 1 - p$.

- *Alkalmazás:* A negatív binomiális eloszlásnál megismert kísérletek esetén, ha $r = 1$. Ennél az eloszlásnál a ξ valószínűségi változó azon kísérlet sorszámát jelöli, mely elvégzése során az A esemény először következik be.

Példa: Egy teszt 20 kérdésből áll. Minden kérdésre A, B, C és D választ adnak, melyek közül csak egy helyes. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

a) a D legfeljebb egyszer szerepel;

b) helyes válaszként a B a negyedik kérdés után fordul elő először;

c) helyes válaszként a B a nyolcadik kérdésnél fordul elő másodszor;

d) Várhatóan hány kérdésnél lesz B a helyes válasz?

Megoldás: Minden kérdésnél egyenlő valószínűséggel választhatjuk bármelyik válasz lehetőséget, ezért $p = 0,25$.

a) Binomiális eloszlást alkalmazunk : $n = 15$,
$p = 0,25$. Ebben az esetben a ξ a 0 vagy az 1 értéket veheti fel.

$$P(\xi \leq 1) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) =$$
$$= C_{20}^{0} \cdot 0,25^{0} \cdot 0,75^{20} + C_{20}^{1} \cdot 0,25^{1} \cdot 0,75^{19} \approx$$
$$\approx 0,024.$$

b) Az η valószínűségi változó geometriai eloszlású. Ebben az esetben az η valószínűségi változó 4-nél nagyobb értéket vesz fel, tehát:

$$P(\eta > 4) = 1 - \Big(P(\eta = 1) + P(\eta = 2) + P(\eta = 3) +$$
$$+ P(\eta = 4)\Big) = 1 - \Big(0,25 + 0,75 \cdot 0,25 +$$
$$+ 0,75^{2} \cdot 0,25 + 0,75^{3} \cdot 0,25\Big) \approx 0,316.$$

c) A ξ valószínűségi változó negatív binomiális eloszlás. Ekkor $k + r = 8$, $r = 2$ ezért $k = 6$

$$P(\xi = 6) = C_{7}^{1} \cdot (0,25)^{2} \cdot (0,75)^{6} = 0,078.$$

d) Az η valószínűségi változó binomiális eloszlású és várható értéke a következő módon határozható meg:
$M(\eta) = n \cdot p = 8 \cdot 0,25 = 4.$

- **Poisson eloszlás**

- *Valószínűségeloszlás:* A ξ lehetséges értékei $0, 1, 2, ...$:

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{\lambda}, \quad \text{ahol} \quad \lambda > 0.$$

- *Várható érték:* $M(\xi) = \lambda$.
- *Szórás:* $D(\xi) = \sqrt{\lambda}$.
- *Alkalmazás:*

a) Pont-elhelyezkedési problémák: adott időintervallumon, távolságon, területen, térfogatban véletlenszerűen bekövetkező pontszerű események, amelyeknél az egyes tartományokba eső pontok számának várható értéke arányos a tartomány nagyságával.

b) Binomiális eloszlás jól közelíthető a Poisson eloszlással, ha n nagy, p kicsi és $n \cdot p \to \lambda$. A binomiális eloszlásnál megismert kísérletek esetén.

Példa: A tanulmányi osztályra 10 órától 12 óráig 0,9 valószínűséggel érkezik legalább egy hallgató. Egy adott idő alatt a tanulmányi osztályt felkereső hallgatók száma Poisson eloszlású.

a) Hány hallgató érkezik átlagosan 10 órától 12 óráig?
b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 11:00 és 11:30 között legfeljebb egy hallgató érkezik?

Megoldás: Legyen ξ a tanulmányi osztályt egy adott idő alatt meglátogató hallgatók száma.

a) $P(\xi = 0)$ annak a valószínűsége, hogy egy hallgató sem keresi fel a tanulmányi osztályt 10 órától 12 óráig.
$P(\xi = 0) = 1 - 0,9 = 0,1, \Rightarrow e^{-\lambda} = 0,1 \Rightarrow \lambda = 2,3$. Vagyis 10 órától 12 óráig átlagosan 2,3 diák érkezik.

b) Ha két óra alatt átlag 2,3 diák érkezik, akkor 11:00 és 11:30 között (fél óra alatt) érkező hallgatók átlagos száma: $\lambda_1 = 2,3 \cdot \frac{1}{4} = 0,575$.

$$P(\xi \leq 1) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) =$$
$$= e^{-0,575}\left(\frac{0,575^0}{0!} + \frac{0,575^1}{1!}\right) \approx 0,886.$$

Feladatok:

1. Suta Sára gépeléskor meglehetősen gyakran csinál hibás leütést. Megfigyelte, hogy a leütések 18%-a rossz. A leütések jó vagy rossz voltát tekintsük egymástól függetlennek. Mennyi a valószínűsége annak, hogy

a) egy 10 betűből álló szóban van legalább egy hibás leütés?

b) Egy 8 betűs szóban a 4. és az 5. betűt ütötte le hibásan?

c) Egy 5 betűs szóban több betű hibás, mint jó?

2. Egy doboz desszertben 12 bonbon található, amely közül 4 mogyorós és 8 csokoládé ízesítésű. A bonbonok külsőre teljesen egyformák. Egy alkalommal megettünk a bonbonokból hármat. Jelölje a ξ valószínűségi változó az elfogyasztott mogyorós bonbonok számát!

a) Határozzuk meg a valószínűségi változó eloszlását!

b) Számoljuk ki az eloszlás várható értékét és szórását!

c) Hány mogyorós bonbon van a kiválasztottak között legnagyobb valószínűséggel

3. Statisztikai vizsgálatok alapján tudjuk, annak a valószínűsége, hogy egy újszülött fiú, 0,516. Tegyük fel, hogy egy családban 6 gyermek van. Mekkora annak a valószínűsége, hogy legfeljebb két lány van köztük?

4. Egy automata gépnél megfigyelték, hogy naponta átlagosan 12 db termék lesz selejtes és ezek számának szórása 3,41. Hány terméket készít naponta a gép?

5. Annak a valószínűsége, hogy egy üzemben a nyersanyag ellátás valamely napon zavartalan 0,75.

a) Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy héten (6 napon) keresztül a nyersanyag ellátás zavartalan?

b) Mennyi lesz az egyheti zavartalan ellátású napok számának várható értéke?

6. Egy halastóban 1000 db hal van. Egyik nap kihalásznak közülük 100-at. Ezeket valamilyen módon megjelölik, majd visszadobják őket. Másnap megint kihalásznak 100 halat, de most visszatevéssel. Határozzuk meg a második nap kifogott megjelölt halak számának várható értékét és szórását!

7. Az 52 lapos bridzskártyát négy játékos között egyenlően osztják szét.
   a) Mennyi az első játékoshoz kerülő ászok számának várható értéke?
   b) Mennyi a valószínűsége, hogy emberünkhöz legalább 2 ász kerül?

8. Egy 40 elemű alkatrészhalmazban pontosan 5% a selejt arány. Mennyi a valószínűsége, hogy a halmazból egy 20 elemű mintát véve visszatevés nélkül, a mintában levő selejtek száma éppen 2 lesz?
9. Egy alkatrész halmazban 4 selejtes van. Mintát veszünk visszatevés nélkül. A mintában szereplő selejtes alkatrészek számának várható értéke 2, szórásnégyzete 2/3. Mennyi a valószínűsége, hogy a minta legfeljebb 2 selejtest tartalmaz?
10. Egy kockával addig dobunk ismételten, míg 3 darab 6-ost nem dobunk.
   a) Mennyi a valószínűsége, hogy legalább ötször kellett dobni?
   b) Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke?
11. Egy urnában 10 piros, 10 fehér és 2 zöld golyó van. Ebből egy játékos addig húzhat, amíg az első zöldet kihúzza. Ekkor a másik játékos annyi pénzt fizet neki, amennyi golyót kihúzott, majd ő húz zöldig. Ekkor az első játékos fizet a másodiknak annyit, amennyi golyót húzott. Igazságos-e ez a játék?
12. Egy dobozban 6 fehér és 4 kék golyó van. Egyenként húzunk visszatevésel találomra választott golyókat. A dobozból addig veszünk ki golyókat, amíg a fehér húzások száma el nem éri a hármat.
   a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a szükséges golyók száma legfeljebb 6 lesz?
   b) Mennyivel egyenlő a kihúzott golyók számának várható értéke és szórása?
13. Egy dobozban 4 db fekete és 6 db fehér golyó van, találomra választunk egy golyót amíg fehéret nem húzunk. A kihúzott golyót azonnal visszatesszük. Határozzuk meg a kihúzott golyók számának eloszlását, várható értékét és szórását!
14. Egy villamoson p = 0,04 valószínűséggel jelennek meg ellenőrök, és a bliccelőket 3000 forintra megbírságolják. Mennyi a valószínűsége, hogy a bírság fedezi egy bliccelő által a lebukásig okozott kárt, ha a jegy ára 150 forint?
15. Egy kockával addig dobunk ismételten, míg 6-ost nem dobunk.
   a) Mennyi a valószínűsége, hogy legalább 5-ször kell dobni, hogy az első 6-os kijöjjön?
   b) Melyik az a k szám, amelyre teljesül, hogy annak a valószínűsége, hogy legalább k dobás kellett az első 6-osig éppen 0,5?
16. Egy adott üzemben gyártott harisnyák között minden ezredik hibás. A harisnyákat kétszázasával csomagolják dobozokba. 1000 doboz közül átlag hány olyan lesz,

amely csak hibátlan harisnyákat tartalmaz?

17. Egy augusztusi éjszakán átlag 10 percenként észlelhető csillaghullás. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy negyedóra alatt két csillaghullást látunk?

18. Egy ruhaszövet anyagában 100 m-enként átlag 5 hiba van. Egy 300 méteres szövetet 3 méteres darabokra vágnak. Előre láthatóan hány hibátlan darab lesz ezek közt?

19. Egy konzervgyár valamelyik üveggyártól 1literes üvegeket rendel. 200 darab üveg közül átlag 3 üveg selejtes. Mekkora a valószínűsége annak, hogy 1000 üveget átnézve, abban

a) pontosan 10 selejtes üveget találunk;

b) legalább 4 selejtes üveget találunk?

20. Egy évben bekövetkező repülőgép szerencsétlenségek száma Poisson-eloszlást követ. Annak a valószínűsége, hogy egy évben egyetlen repülő sem zuhan le 0,1. Várhatóan hány repülő fog lezuhanni a következő évben?

21. Egy egyetemi oktató 300 oldalas jegyzetet írt, amelyben oldalanként átlagosan 2 nyomdahiba van. Minden lektor 0,75 valószínűséggel vesz észre egy-egy hibát. A lektor által észrevett hibákat az oktató kijavítja, majd továbbküldi egy másik lektornak. Legalább hány lektorra van szükség, hogy legalább 0,5 valószínűséggel hibátlan legyen a jegyzet?

22. Almafánk egyes gyümölcseit megtámadó férgek száma 1,5 paraméterű Poisson eloszlást követ. 10 almát leszedünk.

a) Mi a bennük lévő férgek számának várható értéke?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy egy almában legalább két féreg lesz?

23. Móricka, ha túrázni megy, minden lépésnél – az előzményektől függetlenül – valamekkora (kicsi) valószínűséggel hasra esik és megüti a térdét, illetve valamekkora (kicsi) valószínűséggel hanyatt esik és megüti a könyökét. Egy 10 kilométeres túrán átlagosan 3-szor szokta megütni a térdét és 2-szer a könyökét. Legfeljebb milyen hosszú túrára engedheti el az anyukája, ha azt akarja, hogy $\frac{2}{3}$ valószínűséggel térd- és könyöksérülés nélkül járja meg?

24. Egy tábla mogyorós-mazsolás csokiban átlagosan 30 mazsola van. Egy tábla csoki 15 kockából áll. Egy kocka csokiban 1/2 valószínűséggel nincsen mogyoródarab.

a) Milyen eloszlású lesz az egy tábla csokiban levő mogyoródarabok száma?

b) Letörünk 2 kockát és megesszük. Mennyi a valószínűsége, hogy az elfogyasztott csokiban levő mogyoró- és mazsoladarabok együttes száma legalább 2?

25. Egy kockával n-szer dobunk.

a) Adjuk meg a dobott hatosok számának eloszlását, várható értékét és szórását!

b) Mennyi a valószínűsége, hogy legalább kettő, de legfeljebb négy hatost dobtunk?

26. Egy izzó a minden egyes bekapcsoláskor 0,005 valószínűséggel kiég. Legyen az ξ véletlen változó értéke a kiégésig végbemenő bekapcsolások száma.

a) Számoljuk ki a ξ várható értékét és szórását!

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a várható értékénél tovább tudjuk használni?

27. Kalácssütéskor 1kg tésztába 30 szem mazsolát tesznek. Mennyi a valószínűsége, hogy egy 5 dekagrammos szeletben kettőnél több mazsolaszem lesz?

6.2. Nevezetes folytonos eloszlások

- **Egyenletes eloszlás**

- *Sűrűségfüggvény:* A ξ valószínűségi változó az $[a;b]$ intervallumon egyenletes eloszlásúnak nevezzük, ha a sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{különben .} \end{cases}$$

- *Eloszlásfüggvény:*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{ha } a < x \leq b, \\ 1 & \text{ha } b < x. \end{cases}$$

- *Várható érték:* $M(\xi) = \frac{a+b}{2}$.

- *Szórás:* $D(\xi) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

- *Alkalmazás:* a ξ valószínűségi változó az értékeit egy $[a;b]$ véges hosszúságú intervallumon veszi fel és az $[a;b]$ bármely részintervallumába esés valószínűsége arányos a részintervallum hosszával.

- **Exponenciális eloszlás**

- *Sűrűségfüggvény:* A ξ valószínűségi változót $\lambda > 0$ paraméterű exponenciális eloszlásúnak nevezzük, ha a sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0, \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

- *Eloszlásfüggvény:*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

- *Várható érték:* $M(\xi) = \frac{1}{\lambda}$.
- *Szórás:* $D(\xi) = \frac{1}{\lambda}$.
- *Alkalmazás:*

a) Ez az eloszlás olyan gépek és berendezések élettartamára jellemző, amelyek valamely hirtelen behatás következtében mennek tönkre.

b) Várakozási, sorbanállási idő vizsgálatakor.

c) Ha egy jelenség adott idő alatti bekövetkezéseinek száma Poisson eloszlású, akkor a jelenség bármely két egymás utáni bekövetkezése között eltelt idő exponenciális eloszlású.

- **Normális eloszlás**

- *Sűrűségfüggvény:* A ξ valószínűségi változót (m, σ) paraméterű normális eloszlásúnak nevezzük, ha a sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{ahol} \quad x, m \in R, \sigma > 0$$

- *Eloszlásfüggvény:*

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$$

- *Várható érték:* $M(\xi) = m$.
- *Szórás:* $D(\xi) = \sigma$.
- *Alkalmazás:*

a) Gyártási folyamatokban fellépő méretingadozások, műszerek mérési hibája.

b) Gépek berendezések élettartama, amelyek természetes elhasználódással mennek tönkre.

c) Ha elég nagy számú független kísérletet végzünk el, akkor szinte bármelyik eloszlás közelíthető normális eloszlással.

- **Standard normális eloszlás**. Az $m = 0$; $\sigma = 1$ paraméterű normális eloszlást standard normálisnak nevezzük.

- *Sűrűségfüggvény:*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

- *Eloszlásfüggvény:*

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

- Kapcsolat a normális - és standard normális eloszlás között:

$$F(x) = \Phi\Big(\frac{x-m}{\sigma}\Big).$$

- $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Példa: Munkapadról kikerült termék hossza normális eloszlású valószínűségi változó 20 cm várható értékkel és 0,2 cm szórással.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy termék hossza 19,7cm és 20,3 cm közé esik?

b) Milyen pontosságot biztosíthatunk 0,95 valószínűséggel a munkadarabok hosszára?

Megoldás: Ekkor $m = 20$, $\sigma = 0,2$. Jelentse ξ valószínűségi változó a munkadarabok hosszát.

a) A keresett valószínűség:

$$\begin{aligned}
&P(19,7 < \xi < 20,3) = F(20,3) - F(19,7) = \\
&= \Phi\Big(\frac{20,3-20}{0,2}\Big) - \Phi\Big(\frac{19,7-20}{0,2}\Big) = \\
&= \Phi(1,5) - \Phi(-1,5) = \Phi(1,5) - (1 - \Phi(1,5)) = \\
&= 2\Phi(1,5) - 1 = 2 \cdot 0,9332 - 1 = 0,8664.
\end{aligned}$$

b) Legyen a munkadarab hosszának várható értékétől való maximális eltérése A cm. Akkor a keresett valószínűség:

$$\begin{aligned}
&P(|\xi - m| < A) = P(|\xi - 20| < A) = \\
&= P(20 - A < \xi < 20 + A) = F(20 + A) - F(20 - A) = \\
&= \Phi\left(\frac{20 + A - 20}{0,2}\right) - \Phi\left(\frac{20 - A - 20}{0,2}\right) = \\
&= \Phi\left(\frac{A}{0,2}\right) - \Phi\left(\frac{-A}{0,2}\right) = 2\Phi\left(\frac{A}{0,2}\right) - 1 = 0,95.
\end{aligned}$$

Ebből: $\Phi\left(\frac{A}{0,2}\right) = 0,975$, a táblázatból visszakeresve:

$$\frac{A}{0,2} = 1,96$$

ebből: $A = 0,392 \approx 0,4$. Tehát 95% valószínűséggel állíthatjuk, hogy a hosszeltérés 4mm-nél nem hosszabb.

Feladatok:

1. Mekkora a valószínűséggel vesz fel egy, a $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ intervallumon egyenletes eloszlású változó olyan értéket, amely a várható értéktől szórásánál nagyobb értéket vesz fel?
2. Valaki egy sürgős telefonhívást vár. A hívás időpontja egy reggel 8 órakor kezdődő, ismeretlen hosszúságú intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. A hívást váró fél tudja, a hívás 80% valószínűséggel 8 és 10 óra között befut. Állapítsuk meg, mekkora annak a valószínűsége, hogy 9:30 és 10 óra között érkezik?
3. Egy egyenletes eloszlású valószínűségi változó várható értéke 3, szórása 2.

a) Adjuk meg az eloszlás- és sűrűségfüggvényt!

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a változó értéke nagyobb, mint 5?

4. A $[0; 1]$ intervallumon egymástól függetlenül két számot választunk találomra (egyenletes eloszlás szerint).

a) Írjuk fel a két szám összegének eloszlásfüggvényét!

b) Írjuk fel az összeg várható értékét és szórását!

c) Mennyi a 2 szám szorzatának várható értéke?

5. Egy egység hosszúságú pálca kettétörik, a töréspont egyenletes eloszlást követ. Határozzuk meg a rövidebb darab hosszának várható értékét!
6. Megfigyelték, hogy a postás legkorábban reggel 8-kor érkezik és az esetek 80 %-ban 9 óra 36 perc előtt. A postás érkezésének ideje egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Mennyi lesz a postás érkezési idejének várható értéke és szórása?
7. Egy intézet külföldről könyveket rendel. Az ehhez szükséges devizára várni kell, a tapasztalatok alapján általában 1/2 évet. A várakozási idő exponenciális eloszlású. Mennyi a valószínűsége, hogy az intézet egy negyedéven belül megkapja a könyveket?
8. Egy stopposnak ξ órát kell várnia, amíg egy autó felveszi. Tegyük fel, hogy ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda = \frac{1}{3}$ paraméterrel. Mekkora a valószínűsége, hogy a stopposnak legalább 3, de legfeljebb 6 órát kell várnia, amíg felveszik?
9. Annak a valószínűsége, hogy egy benzinkútnál a tankolásra hat percnél többet kell várakozni, a tapasztalat szerint 0,1. Feltételezve, hogy a várakozási idő exponenciális

eloszlású, mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen a benzinkúthoz érkező gépkocsi három percen belül sorra kerül?

10. Egy műszer élettartama exponenciális eloszlású. Annak a valószínűsége, hogy legalább 2 évig működik: 0,9. Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb 3 évig lesz működőképes?

11. Egy villanykörte élettartama exponenciális eloszlású. Átlagosan 2 évig működik.

 a) Mennyi a valószínűsége, hogy legalább egy évig fog működni egy új villanykörte?

 b) Mennyi a valószínűsége, hogy legalább egy évig fog működni egy fél éve működő villanykörte?

 c) Mekkora életkort nem ér meg a villanykörték 10%-a?

12. Tegyük fel, hogy bizonyos fajta izzólámpák "élettartama” normális eloszlású, $m = 1000$ óra várható értékkel és $\sigma = 100$ óra szórással. Számítsuk ki, hogy az első 900 órában a lámpák hány százaléka megy tönkre?

13. Legyen ξ normális eloszlású valószínűsgi változó
$m = 3$, $\sigma = 2$ paraméterértékekkel. Mekkora legyen az A szám, ha azt kívánjuk, hogy ξ a (2,A) intervallumban legalább 0,5 valószínűséggel essen?

14. Egy löveg tüzel egy 1200 méter távoli célpontra. A lőtávolság ingadozása 1200 méter körül normális eloszlású 40 méter szórással. Hatásosnak tekintünk egy lövést, ha a találat a célhoz 50 méternél közelebb esik. A lövések hány százaléka lesz hatástalan?

15. A skót bakák mellkasának körmérete $N(88; 10)$. A skót bakák mekkora hányada fér bele egy 84-es zubbonyba?

16. A házimacskák testsúlya jó közelítéssel normális eloszlást követ: a macskák 10%-a könnyebb, mint
1,5 kg és 20%-a nehezebb, mint 7 kg. Mekkora a 6 kg-nál nehezebb házimacskák aránya?

17. A programozó hallgatók valószínűségszámítás gyakorlaton szerzett pontszáma közelítőleg normális eloszlású. 8%-uk szerzett kevesebb, mint 50 pontot és 12%- uk szerzett több, mint 86 pontot. Mekkora hányaduk szerzett 51 és 61, illetve 62 és 73 közötti pontszámot?

18. Egy rekeszben 20 doboz kávé van. A dobozokba kerülő kávé mennyisége (egymástól függetlenül) normális eloszlású valószínűségi változó 25 dkg várható értékkel és 0,1

dkg szórással. Jelentse A azt az eseményt, hogy egy rekeszben legalább 15 olyan doboz van, amelyben a kávé mennyisége 24,8 és 25,2 dkg között van. Mennyi az A esemény bekövetkezésének valószínűsége?

19. Egy fatelepen gerendákat vágnak méretre. A gerendák hossza normális eloszlású valószínűségi változó, 5 méter várható értékkel és 2 cm szórással. Jelentse ξ valószínűségi változó egy gerenda hossza. Mennyi annak a valószínűségi , hogy a ξ érétke 4,96 és 5,01 méter közé esik?

Ellenőrző kérdések:

1. Definiálja a binomiális eloszlást!
2. Mi a sűrűségfüggvénye a A μ, σ paraméterű normális eloszlásnak?
3. Mit jelent az, hogy az exponenciális eloszlás örökifjú?
4. Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, és melyik hamis!
   - Egy n-szeres Bernoulli kísérletsorozatban a p valószínűségű A esemény gyakorisága binomiális eloszlású valószínűségi változó.
   - Az egyenletes eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye lépcsős.
   - Az exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye páros.
   - A μ, σ paraméterű normális eloszlás sűrűségfüggvénye szimmetrikus az $x = \mu$ függőleges tengelyre.
   - A A μ, σ paraméterű normális eloszlás eloszlásfüggvénye szimmetrikus a $(\mu, 0, 5)$ pontra.
   - A hipergeometriai eloszlással modellezhető a visszatevés nélküli mintavételezés.
   - A binomiális eloszlással modellezhető a visszatevés nélküli mintavételezés.
   - A normális eloszlás örökifjú tulajdonságú.
   - Az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonságú.
   - A geometriai eloszlású valószínűségű változó értékkészlete véges.
   - A karakterisztikus eloszlás speciális binomiális eloszlás.

7. fejezet

Példák zárthelyi dolgozathoz és elméleti kérdések

7.1. 1.modul

1. számú dolgozat

1. Egy gazdálkodás szakra járó főiskolásnak 3 nehéz tantárgyból kell vizsgát tennie: matematikából, statisztikából, közgazdaságtanból. M esemény: matematikából sikeres vizsgát tett, S esemény: statisztikából sikeres vizsgát tett, K esemény: közgazdaságtanból sikeres vizsgát tett. Fejezze ki M, S, K eseményekkel és az esemény algebrai műveletekkel: a)Csak egy tárgyból tett sikeres vizsgát b) Legalább egy tárgyból sikeres vizsgát tett.

2. Öt házaspár foglal helyet egy padon. Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a házastársak egymás mellett akarnak ülni, de sem két nő, sem két férfi nem ülhet egymás mellé?

3. A 32 lapos magyar kártyából hányféleképpen lehet kiválasztani nyolc lapot úgy, hogy legalább egy zöld legyen a kiválasztott lapok között? 5. Egyszerre dobunk 6 szabályos kockával. Mi a valószínűsége annak, hogy legalább két dobókockán azonos pontszám lesz felül?

4. Egy villanykörtét gyártó cég termékei között 8% selejtes. Mekkora annak valószínűsége, hogy 10 véletlenszerűen kiválasztott körte között pontosan 4 selejtes lesz?

5. Egy cukrászda egy 9 fős társaság érkezik. 3dobos tortát, 2 túrós rétest és 4 somlói galuskát rendelnek. A pincér kihozza a süteményeket, de sajnos elfelejtette, hogy ki melyiket

rendelte, így véletlenszerűen teszi le őket a vendégek elé. Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindenki a megfelelő süteményt kapja? 8. András és Betti megbeszélik, hogy munka után találkoznak. Mindkettejüknek egymástól függetlenül véletlenszerűen, egyenletes eloszlás szerint ér véget a munkaideje 4 óra és fél 6 között. Mennyi a valószínűsége, hogy az előbb jövőnek nem kell 10 percnél többet várnia a másikra?

6. Egy könyvkiadó két nyomdával dolgozik. Az első nyomda a kiadványok ? részét, a maradék részt a második nyomda készíti. Az első nyomdában elkészültek 5 a/ Adja meg a következő valószínűséget: egy találomra kiválasztott kiadvány szépséghibás. b/ Adja meg, mekkora a valószínűség, hogy egy kiadványt az első nyomdában nyomtattak, ha az szépséghibás.

Elméleti kérdések szóbeli számonkéréshez:

1. Véletlen kísérletek. Műveletek eseményekkel.
2. Kolmogorov-féle valószínűségi mező. Eseményalgebrák.
3. Valószínűségszámítási tételek(a valószínűség folytonossága és a többi)
4. Klasszikus valószínűség.
5. Geometriai valószínűség.
6. Feltételes valószínűség. Szorzási szabály.
7. Teljes valószínűség tétele. Bayes-tétele
8. Események függetlensége. Borel-Cantelli lemma
9. Bernoulli-féle kísérlet sorozat. Hányszor következik be az A esemény a legnagyobb valószínűséggel?
10. Moivre-Laplace lokális határeloszlás tétele.

7.2. 2. modul

2. számú dolgozat

1. Érmével dobunk addig, amíg először fordul elő, hogy két egymás utáni dobás azonos. Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke és szórása?

2. András és Béla a következő játékot játsszák. András egy érmével legfeljebb 3-szor dobhat. A játék befejeződik, ha valamelyik dobásnál fejet dob. Ha első, második vagy harmadik dobásnál sikerül fejet dobnia, akkor a nyereményei rendre 32 Fitying, 16 Fitying, 8 Fitying. Ha harmadikra sem sikerül fejet dobni, akkor fizet Bélának 120Fitying-et. Kinek kedveznek a játék feltételei? Válaszod indokold!

3. Eloszlásfüggvény-e a következő függvény? $F(x) = \begin{cases} 0, & ha \quad x \leq 0 \\ \frac{x}{1+x}, & ha \quad 0 < x \end{cases}$

4. Sűrűségfüggvények-e a következő függvény?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{2}, & 0 < x < \pi \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

5. Valaki egy sürgős telefonhívást vár. A hívás időpontja egy reggel 8 órakor kezdődő, ismeretlen hosszúságú intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. A hívást váró fél tudja, a hívás 80% valószínűséggel 8 és 10 óra között befut. Állapítsuk meg, mekkora annak a valószínűsége hogy 930 és 10 óra között érkezik?

6. Tegyük fel, hogy egy étteremben a vendégek ebédidőben eltöltött idejét, percekben mérve, a következő eloszlás függvény jellemzi:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ha & x \leq 0 \\ \frac{x}{60} & ha & 0 < x \leq 30 \\ \frac{1}{2} & ha & 30 < x \leq 60 \\ \frac{x}{120} & ha & 60 < x \leq 120 \\ 1 & ha & 120 < x \end{cases}$$

   Ábrázoljuk e függvényt! Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy vendég az étteremben 20 percnél több időt tölt el?

7. Egy villanykörte élettartama exponenciális eloszlású. Átlagosan 2 évig működik. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább egy évig fog működni egy új villanykörte?

8. Egy halastóban 1000 db hal van. Egyik nap kihalásznak közülük 100-at. Ezeket valamilyen módon megjelölik, majd visszadobják őket. Másnap megint kihalásznak halat, de most visszatevéssel. Határozzuk meg a második nap kifogott megjelölt halak számának várható értékét és szórását!

9. Almafánk egyes gyümölcseit megtámadó férgek száma 1,5 paraméterű Poisson eloszlást követ. 10 almát leszedünk. Mi a bennük lévo férgek számának várható értéke? Mennyi a valószínusége, hogy egy almában legalább két féreg lesz?

10. Egy 40 elemű alkatrészhalmazban pontosan 5% a selejt arány. Mennyi a valószínűsége, hogy a halmazból egy 20 elemű mintát véve visszatevés nélkül, a mintában levő selejtek száma éppen 2 lesz?

Elméleti kérdések szóbeli számonkéréshez:

1. Diszkrét valószínűségi változók és eloszlásuk. Várható érték és tulajdonságai
2. Diszkrét valószínűségi változók és eloszlásuk. Szórás és tulajdonságai
3. Folytonos valószínűségi változók. Eloszlás függvény és tulajdonságai
4. Folytonos valószínűségi változók. Sűrűségfüggvény, várható érték és szórás.
5. Nevezetes diszkrét eloszlások. Hipergeometrikus eloszlás.
6. Nevezetes diszkrét eloszlások. Binomiális elszlás.
7. Nevezetes diszkrét eloszlások. Geometriai és negatív binomiális eloszlás.
8. Nevezetes diszkrét eloszlások. Poisson eloszlás. A Poisson eloszlás és binomiális eloszlás közötti kapcsolat.
9. Karakterisztikus függvény és tulajdonságai.
10. Nevezetes folytonos eloszlások. Egyenletes eloszlás.
11. Nevezetes folytonos eloszlások. Exponenciális eloszlás.
12. Nevezetes folytonos eloszlások. Normális eloszlás és várható érétke. Nevezetes folytonos eloszlások. Standard normális eloszlású valószínűségi változók és kapcsoltuk a normális eloszlással.

A standard normális eloszlás eloszlás

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.5000	0.35	0.6368	0.70	0.7580	1.05	0.8531
0.01	0.5040	0.36	0.6406	0.71	0.7611	1.06	0.8554
0.02	0.5080	0.37	0.6443	0.72	0.7642	1.07	0.8577
0.03	0.5120	0.38	0.6480	0.73	0.7673	1.08	0.8599
0.04	0.5160	0.39	0.6517	0.74	0.7704	1.09	0.8621
0.05	0.5199	0.40	0.6554	0.75	0.7734	1.10	0.8643
0.06	0.5239	0.41	0.6591	0.76	0.7764	1.11	0.8665
0.07	0.5279	0.42	0.6628	0.77	0.7794	1.12	0.8686
0.08	0.5319	0.43	0.6664	0.78	0.7823	1.13	0.8708
0.09	0.5359	0.44	0.6700	0.79	0.7852	1.14	0.8729
0.10	0.5398	0.45	0.6736	0.80	0.7881	1.15	0.8749
0.11	0.5438	0.46	0.6772	0.81	0.7910	1.16	0.8770
0.12	0.5478	0.47	0.6808	0.82	0.7939	1.17	0.8790
0.13	0.5517	0.48	0.6844	0.83	0.7967	1.18	0.8810
0.14	0.5557	0.49	0.6879	0.84	0.7995	1.19	0.8830
0.15	0.5596	0.50	0.6915	0.85	0.8023	1.20	0.8849
0.16	0.5636	0.51	0.6950	0.86	0.8051	1.21	0.8869
0.17	0.5675	0.52	0.6985	0.87	0.8078	1.22	0.8888
0.18	0.5714	0.53	0.7019	0.88	0.8106	1.23	0.8907
0.19	0.5753	0.54	0.7054	0.89	0.8133	1.24	0.8925
0.20	0.5793	0.55	0.7088	0.90	0.8159	1.25	0.8944
0.21	0.5832	0.56	0.7123	0.91	0.8186	1.26	0.8962
0.22	0.5871	0.57	0.7157	0.92	0.8212	1.27	0.8980
0.23	0.5910	0.58	0.7190	0.93	0.8238	1.28	0.8997
0.24	0.5948	0.59	0.7224	0.94	0.8264	1.29	0.9015
0.25	0.5987	0.60	0.7257	0.95	0.8289	1.30	0.9032
0.26	0.6026	0.61	0.7291	0.96	0.8315	1.31	0.9049
0.27	0.6064	0.62	0.7324	0.97	0.8340	1.32	0.9066
0.28	0.6103	0.63	0.7357	0.98	0.8365	1.33	0.9082
0.29	0.6141	0.64	0.7389	0.99	0.8389	1.34	0.9099
0.30	0.6179	0.65	0.7422	1.00	0.8413	1.35	0.9115
0.31	0.6217	0.66	0.7454	1.01	0.8438	1.36	0.9131
0.32	0.6255	0.67	0.7486	1.02	0.8461	1.37	0.9147
0.33	0.6293	0.68	0.7517	1.03	0.8485	1.38	0.9162
0.34	0.6331	0.69	0.7549	1.04	0.8508	1.39	0.9177

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1.40	0.9192	1.70	0.9554	2.00	0.9772	2.60	0.9953
1.41	0.9207	1.71	0.9564	2.02	0.9783	2.62	0.9956
1.42	0.9222	1.72	0.9573	2.04	0.9793	2.64	0.9959
1.43	0.9236	1.73	0.9582	2.06	0.9803	2.66	0.9961
1.44	0.9251	1.74	0.9591	2.08	0.9812	2.68	0.9963
1.45	0.9265	1.75	0.9599	2.10	0.9821	2.70	0.9965
1.46	0.9279	1.76	0.9608	2.12	0.9830	2.72	0.9967
1.47	0.9292	1.77	0.9616	2.14	0.9838	2.74	0.9969
1.48	0.9306	1.78	0.9625	2.16	0.9846	2.76	0.9971
1.49	0.9319	1.79	0.9633	2.18	0.9854	2.78	0.9973
1.50	0.9332	1.80	0.9641	2.20	0.9861	2.80	0.9974
1.51	0.9345	1.81	0.9649	2.22	0.9868	2.82	0.9976
1.52	0.9357	1.82	0.9656	2.24	0.9875	2.84	0.9977
1.53	0.9370	1.83	0.9664	2.26	0.9881	2.86	0.9979
1.54	0.9382	1.84	0.9671	2.28	0.9887	2.88	0.9980
1.55	0.9394	1.85	0.9678	2.30	0.9893	2.90	0.9981
1.56	0.9406	1.86	0.9686	2.32	0.9898	2.92	0.9982
1.57	0.9418	1.87	0.9693	2.34	0.9904	2.94	0.9984
1.58	0.9429	1.88	0.9699	2.36	0.9909	2.96	0.9985
1.59	0.9441	1.89	0.9706	2.38	0.9913	2.98	0.9986
1.60	0.9452	1.90	0.9713	2.40	0.9918	3.00	0.9987
1.61	0.9463	1.91	0.9719	2.42	0.9922	3.20	0.9993
1.62	0.9474	1.92	0.9726	2.44	0.9927	3.40	0.9997
1.63	0.9484	1.93	0.9732	2.46	0.9931	3.60	0.9998
1.64	0.9495	1.94	0.9738	2.48	0.9934	3.80	0.9999
1.65	0.9505	1.95	0.9744	2.50	0.9938	4.00	1.0000
1.66	0.9515	1.96	0.9750	2.52	0.9941	4.20	1.0000
1.67	0.9525	1.97	0.9756	2.54	0.9945	4.40	1.0000
1.68	0.9535	1.98	0.9761	2.56	0.9948	4.60	1.0000
1.69	0.9545	1.99	0.9767	2.58	0.9951	4.80	1.0000

Irodalomjegyzék

[1] *Denkinger Géza* Valószínűségszámítás / G. Denkinger // Nemzeti tankönyvkiadó, Budapest, 1997.

[2] *Denkinger Géza* Valószínűségszámítási gyakorlatok / G. Denkinger // Nemzeti tankönyvkiadó, Budapest, 1997.

[3] *Nagy Márta* Valószínűségszámítás / M. Nagy, J. Sztrik, L. Tar // Debereceni Egyetem Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen, 2003.

[4] *Nagy-György Judit* Valószínűségszámítás / J. Nagy-György, É. OszténYiné Krauczi, L. Székely // Polygon, Szeged, 2007.

[5] *Solt György* Valószínűségszámítás / Gy. Solt // Műszaki könyvkiadó, Budapest, 2004.

[6] *Szabó Ilona* Valószínűségszámítás példatár / I. Szabó // Bonex Press Bt., Székesfehérvár, 2006.

[7] *Vetier András* Valószínűségszámítás 1. rész / A. Veiter // Typotex., 2021.

[8] Валєєв К. Г. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики: Навч. посіб. / К. Г. Валєєв, // КНЕУ, Київ, 2006.

[9] Карташов М. В. Теорія ймовірностей та математична статистика / М. В. Карташов, // ТВіМС, Київ, 2004.

[10] Слюсарчук П. В. Теорія ймовірностей та математична статистика / П. В. Слюсарчук, // Карапати, Ужород, 2005.