

Кафедра математики та інформатики
Matematika és Informatika Tanszék

ВИБРАНІ РОЗДІЛИ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ / AZ ELEMI
MATEMATIKA VÁLASZTOTT FEJEZETEI

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ / MÓDSZERTANI ÚTMUTATÓ
до лекційних та практичних занять / előadásokhoz és gyakorlati foglalkozásokhoz

Вибрані розділи елементарної математики / Az elemi matematika választott fejezetei

(назва навчальної дисципліни / a tantárgy neve)

Другий (магістерський) / Képzési szint (MSc)
(рівень вищої освіти / felsőoktatás szintje)

01 Освіта/Педагогіка / 01 Oktatás/Pedagógia
(галузь знань / képzési ág)

Середня освіта (Математика) / Középiskolai oktatás (Matematika)
(освітня програма / képzési program)



Методичні вказівки до лекційних та практичних занять з дисципліни «Вибрані розділи елементарної математики / Az elemi matematika választott fejezetei» розроблені на основі Освітньої програми підготовки магістрів з галузі знань «01 Освіта/Педагогіка» за напрямом «014 Середня освіта (Математика)» як для студентів денної, так і заочної форми навчання. Метою методичного посібника є узагальнення, систематизація і поглиблення знань слухачів з дисципліни «Вибрані розділи елементарної математики». У роботі розглядаються методи розв'язування алгебраїчних рівнянь вищих степенів, ірраціональних, тригонометричних, показникових, логарифмічних рівнянь, нерівностей і їх систем. У методичних вказівках описані базові перетворення графіків функцій і приклади їх застосування, пропонуються підходи і побудовані на них алгоритми, які покликані полегшити пошук і розв'язання найважливіших завдань з математики – завдань з параметром.

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II
(протокол № 10 від «27» травня 2022 року)

Розглянуто та рекомендовано Навчально-методичною радою
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол № 10 від «28» червня 2022 року)

Рекомендовано до видання в електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол № 7 від «13» жовтня 2022 року)

Підготовлено до видання в електронній формі (PDF) кафедрою математики та інформатики
спільно з Видавничим відділом Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Розробник методичних вказівок:

Юлія ПЕТЕЧУК – доцент кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II, кандидат фізико-математичних наук

Рецензенти:

Віктор ОРОС – завідувач кафедри природничо-математичної освіти та інформаційних технологій Закарпатського інституту післядипломної педагогічної освіти, кандидат фізико-математичних наук, заслужений вчитель України (м. Ужгород)

Мирослав СТОЙКА – доцент кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Відповідальні за випуск:

Каталін КУЧИНКА – завідувач кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II, доцент, кандидат фізико-математичних наук

Олександр ДОБОШ – начальник Видавничого відділу ЗУІ ім. Ф.Ракоці II

За зміст методичних вказівок відповідальність несе розробник.

Видавництво: Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II (адреса: пл. Кошута 6, м. Берегове, 90202. Електронна пошта: foiskola@kmf.uz.ua)

© Юлія Петечук, 2022

© Кафедра математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II, 2022

A módszertani útmutató a „Вибрані розділи елементарної математики / Az elemi matematika választott fejezetei” tárgy előadásaihoz és gyakorlati foglalkozásaihoz az MSc „Középiskolai oktatás (Matematika)” képzési programja alapján lett kidolgozva nappali és levelező tagozatos hallgatók részére. A módszertani segédlet célja a hallgatók tudásának összefoglalása, rendszerezése és mélyítése az „Az elemi matematika választott fejezetei” tantárgyból. A munka a magasabb fokú algebrai, irracionális, trigonometrikus, exponenciális, logaritmikus egyenletek, egyenlőtlenségek és ezek rendszereinek megoldási módszereit tárgyalja. A módszertani útmutató leírja a függvények alapvető transzformációit és példákat azok alkalmazásaira, megközelítéseket és algoritmusokat kínál, amelyek célja a matematika legnehezebb – paramétereket tartalmazó feladatai – megoldásának megkönnyítése.

Az oktatási folyamatban történő felhasználását jóváhagyta
a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszéke
(2022. május 27., 10. számú jegyzőkönyv).

Megjelentetésre javasolta a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Oktatási és Módszertani Tanácsa
(2022. június 28., 10. számú jegyzőkönyv).

Elektronikus formában (PDF fájlformátumban) történő kiadásra javasolta
a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Tudományos Tanácsa
(2022. október 13., 7. számú jegyzőkönyv).

Kiadásra előkészítette a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Matematika és Informatika Tanszéke, valamint Kiadói Részlege.

A módszertani útmutató kidolgozói:

PETECSUK Júlia – PhD, a fizikai és matematikai tudományok kandidátusa, a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének docense

Szakmai lektorok:

OROSZ Viktor – PhD, a fizikai és matematikai tudományok kandidátusa, a Kárpátaljai Pedagógustovábbképző Intézet Természettudományi-Matematikai Oktatási és Technológiai Tanszékének tanszékvezetője, Ukrajna tiszteletbeli tanára

SZTOJKA Miroszláv – PhD, a fizikai és matematikai tudományok kandidátusa, docens, a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének docense

A kiadásért felelnek:

KUCSINKA Katalin – PhD, a fizikai és matematikai tudományok kandidátusa, a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének tanszékvezetője és docense

DOBOS Sándor – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Kiadói Részlegének vezetője

A segédlet tartalmáért kizárólag a módszertani útmutató kidolgozója felel.

Kiadó: II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola (cím: 90 202, Beregszász, Kossuth tér 6.
E-mail: foiskola@kmf.uz.ua)

© Petecsuk Júlia, 2022

© A II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszéke, 2022

ЗМІСТ / TARTALOMJEGYZÉK

ПЕРЕДМОВА	4
1. ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ	5
2. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО ФУНКЦІЮ І ПОБУДОВА ЇЇ ГРАФІКІВ	6
3. РІВНЯННЯ І СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ТА МЕТОДИ ЇЇ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ	19
4. НЕРІВНОСТІ І СИСТЕМИ НЕРІВНОСТЕЙ ТА МЕТОДИ ЇЇ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ	50
5. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ І СИСТЕМИ ТА МЕТОДИ ЇЇ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ	61
6. ПОКАЗНИКОВІ РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ І СИСТЕМИ ТА МЕТОДИ ЇЇ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ	66
7. ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ І СИСТЕМИ ТА МЕТОДИ ЇЇ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ	69
8. РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ З ПАРАМЕТРОМ ТА МЕТОДИ ЇЇ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ	72
9. СИСТЕМИ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ З ПАРАМЕТРОМ ТА МЕТОДИ ЇЇ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ	78
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	81

ПЕРЕДМОВА

Математика є одним із основних предметів, які вивчаються у школі. Саме математика покликана розвивати мислення учнів. Математичне мислення – це не тільки розуміння кількісних, просторових, функціональних залежностей, але й своєрідний підхід до дійсності, метод дослідження фактів і явищ, способів міркування.

Математична компетентність є ключовою компетентністю Нової української школи, адже її методи відкривають шлях до пізнання навколишнього світу.

Навчальна дисципліна «Вибрані розділи елементарної математики» є обов'язковою для студентів-математиків.

Основними завданнями вивчення дисципліни «Вибрані розділи елементарної математики» є озброєння майбутнього вчителя математики міцними знаннями шкільного курсу математики, умінням самостійно оволодівати знаннями, формування у майбутнього педагога здатності до аналізу, співставлення, порівняння, тощо.

У результаті вивчення дисципліни студент повинен

знати:

- основні теореми та формули шкільного курсу математики;
- методи розв'язування рівнянь та нерівностей;
- базові перетворення графіків функцій;
- основні підходи до розв'язування завдань з параметрами.

вміти:

- користуватися теоретичним матеріалом шкільного курсу математики;
- застосовувати різні методи розв'язування рівнянь та нерівностей;
- будувати графіки функцій;
- розв'язувати завдання з параметрами.

Методичний посібник охоплює теми, передбачені навчальною програмою дисципліни «Вибрані розділи елементарної математики»: загальні відомості про функцію та побудова графіків функцій, рівняння, нерівності та їх системи, зокрема з параметрами. У методичних вказівках описані базові перетворення графіків функцій і приклади їх застосування, розглядаються методи розв'язування алгебраїчних рівнянь вищих степенів, ірраціональних, тригонометричних, показникових, логарифмічних рівнянь і їх систем. Запропоновані у розробці підходи і побудовані на них алгоритми розв'язання найважчих завдань з математики – завдань з параметром, покликані

полегшити їх пошук. Вказані підходи забезпечують повноту розв'язання завдань такого рівня. Вони носять універсальний характер. Тому придатні до застосування при розв'язуванні широкого кола завдань.

Навчально-методичний посібник покликаний допомогти підвищити загальну математичну культуру студентів; поглибити та систематизувати знання отримані в школі; розвинути творчий підхід до розв'язування нестандартних завдань.

1. ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Змістовий модуль 1

Тема 1. Загальні відомості про функцію. Побудова графіків функцій.

Тема 2. Загальні відомості про рівняння. Системи рівнянь і методи їх розв'язування.

Тема 3. Загальні відомості про нерівності. Системи нерівностей і методи їх розв'язування.

Тема 4. Тригонометричні рівняння, нерівності та їх системи.

Тема 5. Показникові рівняння, нерівності та їх системи.

Тема 6. Логарифмічні рівняння, нерівності та їх системи.

Тема 7. Рівняння і нерівності з параметром та методи їх розв'язування.

Тема 8. Системи рівнянь і нерівностей з параметром та методи їх розв'язування.

2.ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО ФУНКЦІЮ І ПОБУДОВА ЇЇ ГРАФІКІВ

Поняття функції, як і поняття числа, пройшло довгий історичний шлях уточнення і розширення. Воно виникло з потреб практики і таких наук, як фізика, хімія, природознавство та ін. Вперше термін «функція» вжив у своїх працях Г. Лейбніц. Перше означення функції сформулював в 1718 р. Й.Бернуллі— учень і співпрацівник Лейбніца. Це означення було уточнене Л.Ейлером у 1748 р. Розвиток природознавства і математики потребував розширення поняття функції. На це звернув увагу Ж. Фур'є, розробляючи теорію рядів. Проте минуло понад 100 років після застосування першого означення функції, поки М. І. Лобачевський у 1834 р. не сформулював загальніше, фактично сучасне, означення функції, а через три роки — математик і філософ Б. Больцано.

У загальноосвітніх навчальних закладах вчення про функцію є однією із змістових ліній шкільного курсу алгебри.

Особливо важко дається учням побудова графіків. Щоб побудувати графік функції $y = f(x)$ або рівняння $F(x, y) = 0$, слід знайти множину точок, якій належать всі точки $(x; y)$, координати яких задовольняють функцію $y = f(x)$ або рівняння $F(x, y) = 0$. Це означає, що потрібно знайти необхідну умову належності точок графіка функції або рівняння деякій множині точок. Далі з цієї множини точок виділяють підмножину точок, координати яких задовольняють функцію або рівняння. В такому випадку кажуть, що точки підмножини задовольняють достатню умову належності графіку функції або рівнянню, а сама підмножина називається геометричним місцем точок функції або рівняння. Таким чином, графік функції або рівняння — це геометричне місце точок, координати яких їх задовольняють.

За допомогою базових перетворень, знаючи графік функції $y = f(x)$, будуються графіки функцій:

- 1) $y = f(-x)$
- 2) $y = -f(x)$
- 3) $y = f(|x|)$
- 4) $y = |f(x)|$
- 5) $y = f(x + a) + b$
- 6) $y = \frac{1}{f(x)}$, $f(x) \neq 0$

Графік функції 1) утворюється з графіка функції $y = f(x)$ симетрією лівої і правої частин відносно осі OY , 2) симетрією нижньої і верхньої частин відносно осі OX , 3) без зміни правої частини і симетричним відображенням її відносно осі OY , 4) без зміни верхньої частини і симетричним відображенням нижньої частини відносно осі OX .

5) Графік функції $y = f(x + a) + b$ утворюється із графіка функції $y = f(x)$ паралельним перенесенням системи координат, при якому початок

“старої” системи координат XOY переходить у точку з координатами $(-a; b)$, що стає початком “нової” системи координат $X_1O_1Y_1$ (Рис.1)

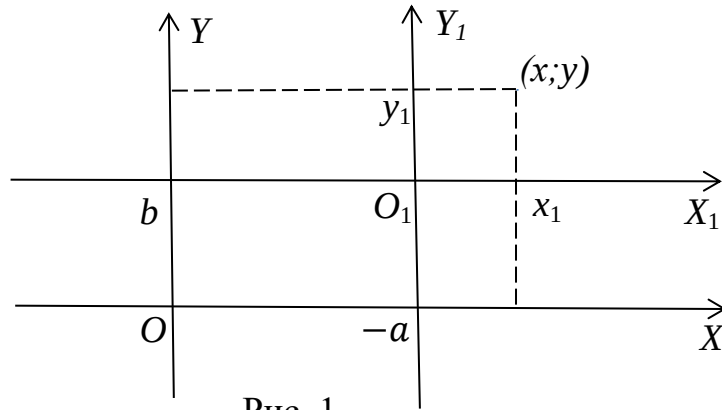


Рис. 1

Тоді $\begin{cases} x = x_1 + (-a) \\ y = y_1 + b \end{cases}$ і функція $y = f(x + a) + b$ в “новій” системі координат має вигляд $y_1 = f(x_1)$. Фактично паралельним перенесенням побудова графіка заданої функції $y = f(x + a) + b$ зводиться до її побудови при $a = b = 0$.

Базовий приклад

Побудувати графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Задану функцію переписуємо у вигляді $y = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a}$, де $D = b^2 - 4ac$ - дискримінант квадратичної функції

“Стару” систему координат з початком у точці $(0; 0)$ паралельно переносимо у “нову” систему координат з початком у точці $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a} \right)$.

У “новій” системі координат квадратична функція має вигляд $y_1 = ax_1^2$. Графік такої функції прийнято називати параболою (Рис. 2)

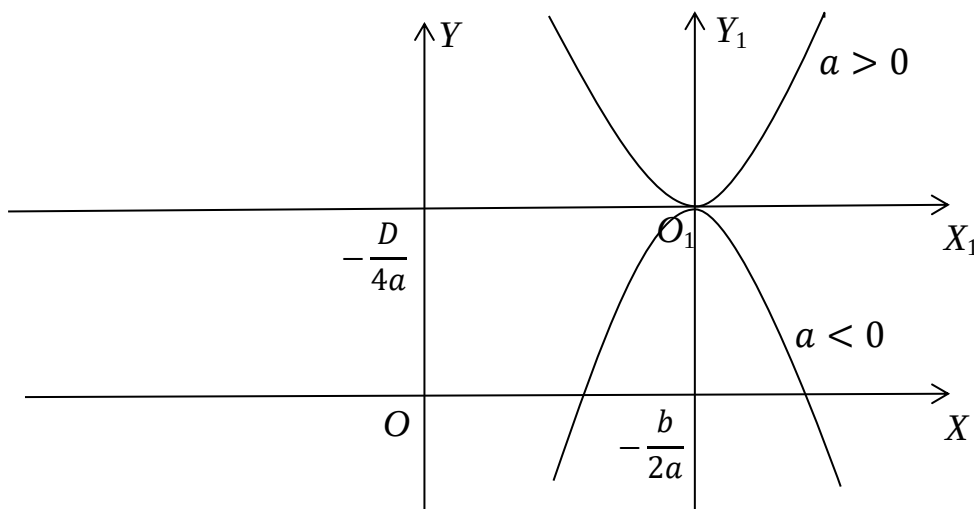


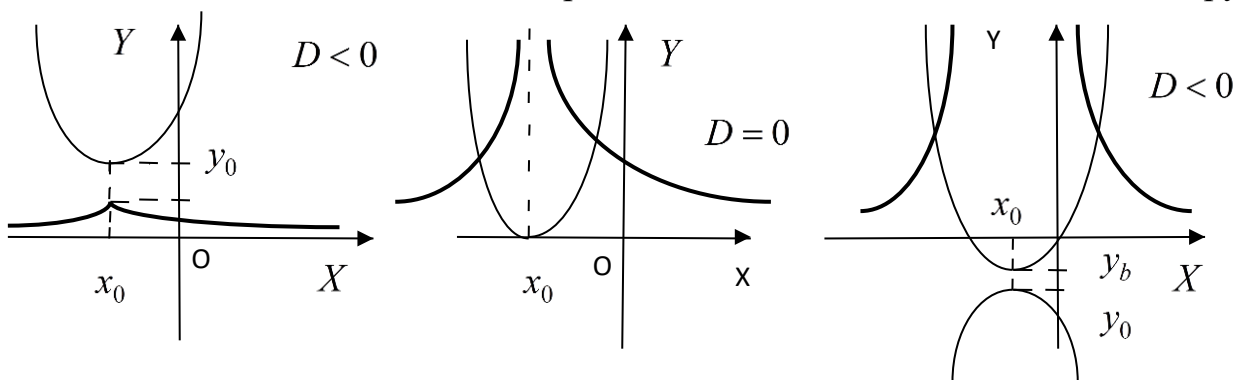
Рис. 2

Точка з координатами $(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a})$ є вершиною параболи.

6) Для побудови графіка функції $y = \frac{1}{f(x)}$ будемо графік функції знаменника $y = f(x)$ і визначаємо поведінку функції $y = f(x)$ при наближенні x до нулів функції знаменника, точок невизначеності і нескінченності. Далі користуємось “мнемонічним” правилом $\frac{1}{\pm 0} = \pm 0$ і $\frac{1}{\pm \infty} = \pm \infty$.

Найбільш типовим прикладом такої побудови є графік $y = \frac{1}{ax^2 + bx + c}$.

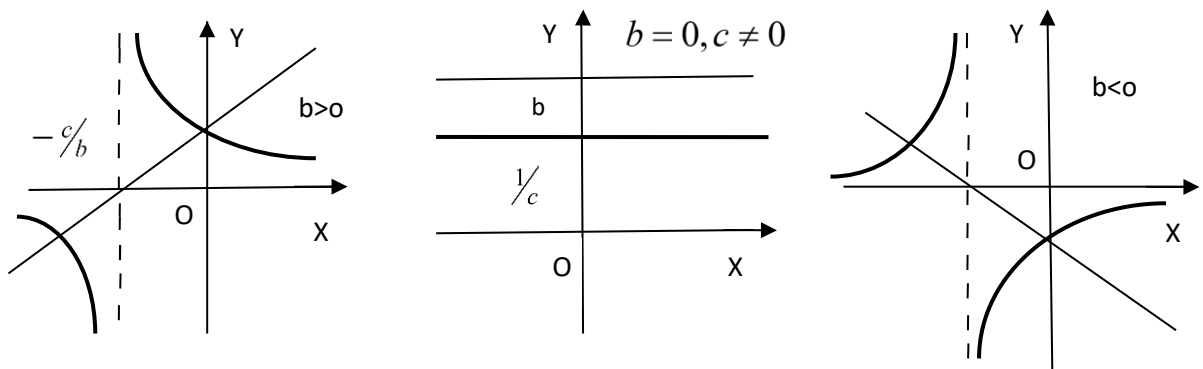
Як уже відмічалось, графіком функції $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ є парабола. При $a > 0$ вона направлена вітками вгору.



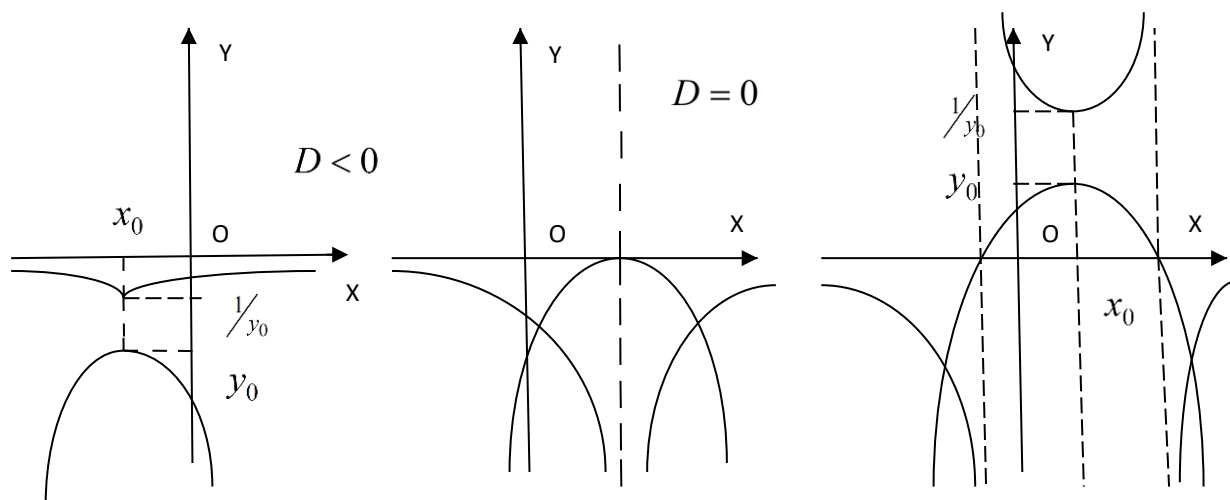
На рисунках вказано всі можливі випадки: якщо $D < 0, D = 0, D > 0$. Більш жирною лінією на цих рисунках зображено графік функції

$y = \frac{1}{ax^2 + bx + c}$ при $a > 0$. Якщо $a = 0$, то графіком функції $y = bx + c$ будуть

прямі, а графіком функції $y = \frac{1}{bx + c}$ будуть графіки, які зображені на рисунках більш жирними лініями.



Випадок $a < 0$ симетричний відносно осі ox до випадку $a > 0$.



Базовий приклад

Побудувати графік функції $y = \frac{1}{\sqrt{x}-2}$.

Будуємо графік функції $y = \sqrt{x} - 2$ і визначаємо поведінку даної функції при наближенні x до 0 справа, до 4 зліва і справа та зліва до $+\infty$ (Рис.3)

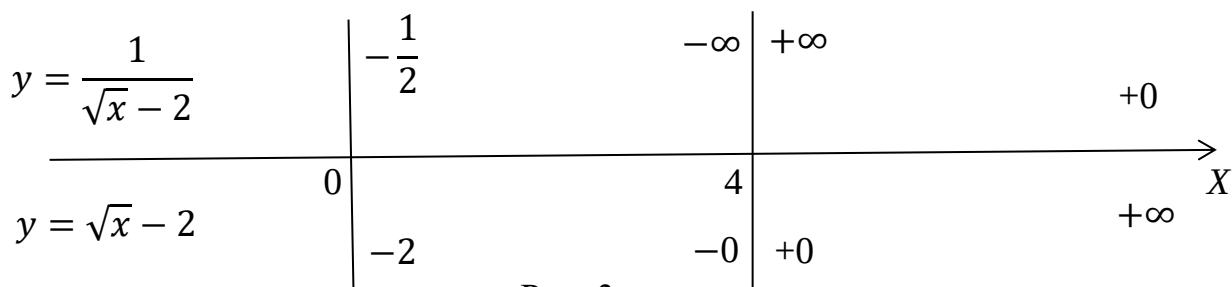


Рис. 3

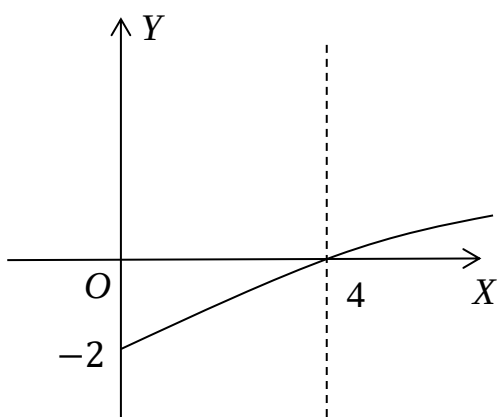


Рис.4

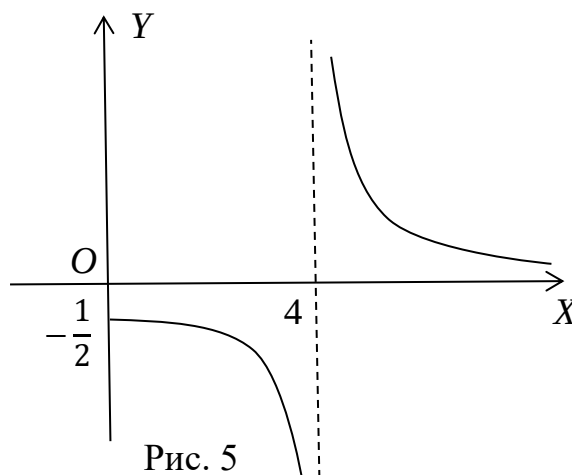


Рис. 5

Графіки функцій $y = \sqrt{x} - 2$ і $y = \frac{1}{\sqrt{x}-2}$ зображені на Рис. 4 і Рис. 5

Послідовність побудови графіка функції $\frac{1}{\sqrt{3-|1-x|-1}}$.

Для побудови графіка функції $\frac{1}{\sqrt{3-|1-x|-1}}$ її слід розкласти на складові, які описані в 1) - 6).

$$y = \sqrt{x} \rightarrow y = \sqrt{3+x} \rightarrow y = \sqrt{3-x} \rightarrow y = \sqrt{3-|x|} \rightarrow y = \sqrt{3-|1+x|} \rightarrow y = \sqrt{3-|1-x|} - 1 \rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3-|1-x|-1}}$$

Кожний перехід доцільно зображати графічно (Рис. 6)

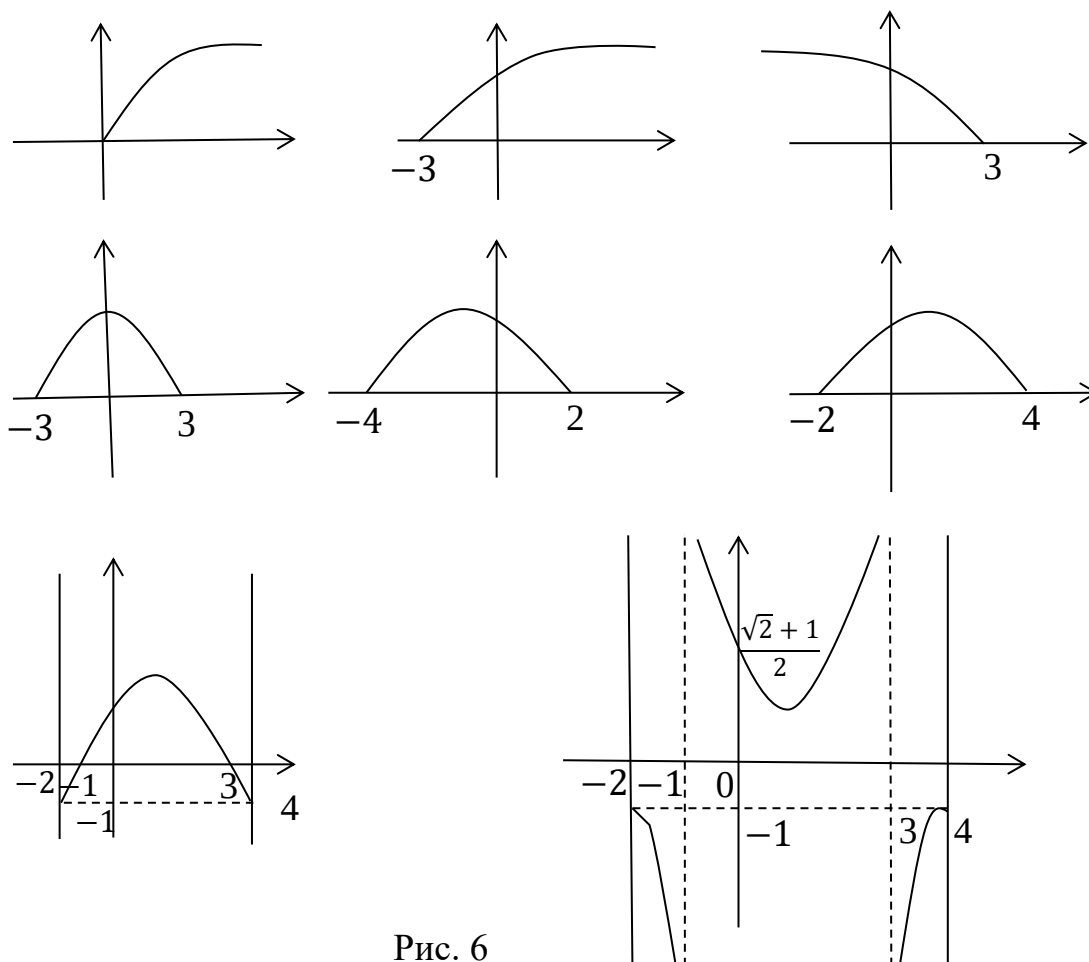


Рис. 6

Застосування

Графік суперпозиції $y = f(g(x))$ двох функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$ будується наступним чином (Рис. 7)

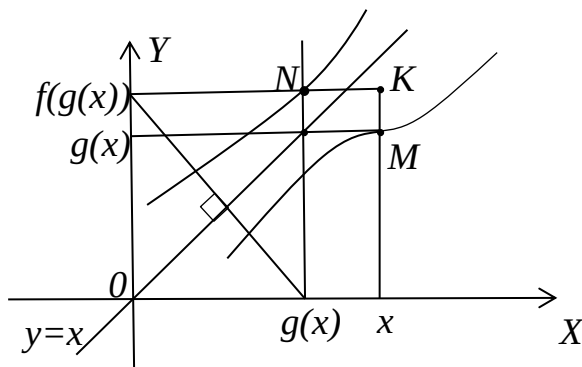
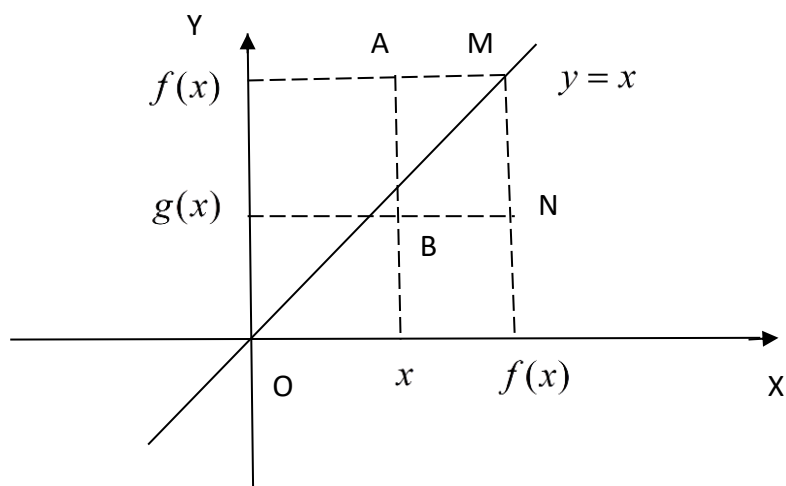


Рис. 7а

- 1) знаходимо значення функції $y = g(x)$ і відкладаємо його на осі OY
- 2) на осі OX відкладаємо значення $g(x)$, симетрично відносно прямої $y = x$
- 3) знаходимо значення функції $y = f(g(x))$
- 4) в точці з абсцисою x і в точці з ординатою $f(g(x))$ проводимо прямі, які паралельні осям OY і OX відповідно. Точку перетину цих прямих позначаємо через K
- 5) точки M, N, K належать графікам функцій $y = g(x)$, $y = f(x)$, $y = f(g(x))$ відповідно. Точки K складають графік функції $y = f(g(x))$.

Зрозуміло, що базові перетворення є окремими випадками суперпозиції двох функцій. Графік суперпозиції довільних двох функцій $y = g(f(x))$ будується за правилом, яке зображено на рисунку, де графік функції $y = f(x)$ задається точками виду A , графік функції $y = g(x)$ точками виду N , графік функції $y = x$ точками виду M , а графік функції $y = g(f(x))$ точками виду B .

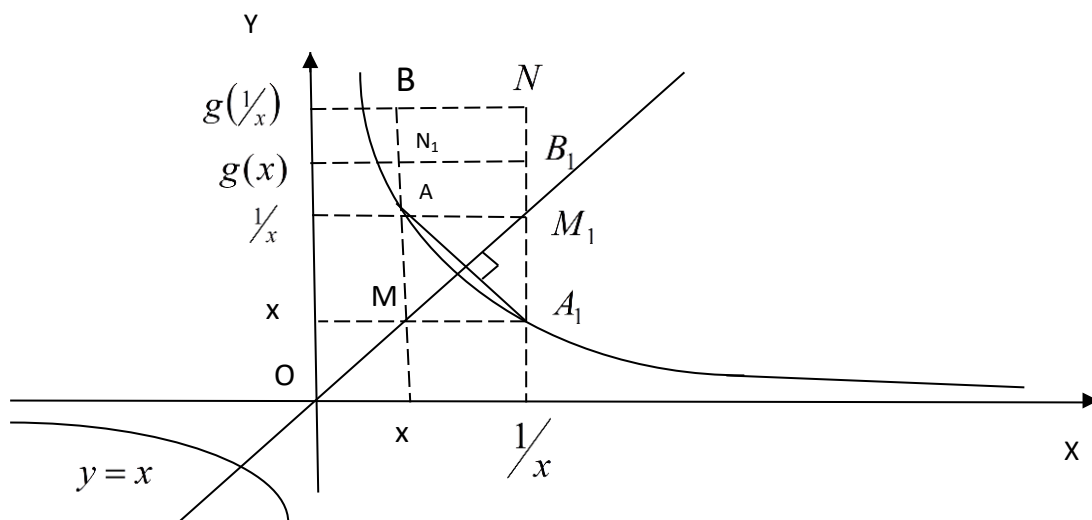


Для цього через точку x на OX проводять вертикальну пряму до перетину з графіком функції $y = f(x)$ в точці A . Через точку A проводять горизонтальну пряму до перетину з графіком функції $y = x$ в точці M . Через точку M проводять вертикальну пряму до перетину з графіком функції $y = g(x)$ в точці N . Нехай горизонтальна пряма, яка проходить через точку N перетинає вертикальну пряму через точку x в точці B . Точка B є шуканою точкою графіка функції $y = g(f(x))$ в x .

Отже, побудова графіка функції $y = g(f(x))$ здійснюється через знаходження точок $A \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow B$.

Проілюструємо це правило при побудові графіків функцій $y = g\left(\frac{1}{x}\right)$.

Адже функцію $y = g\left(\frac{1}{x}\right)$ можна розглядати як суперпозицію двох функцій $y = g(f(x))$, де $f(x) = \frac{1}{x}$. Нехай графік функції $y = g(x)$ задається точками виду A , а графік функції $y = g(x^{-1})$ задається точками виду B за правилом, яке впливає з правила побудови графіків суперпозицій двох функцій: $A \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow B$ і $A_1 \rightarrow M_1 \rightarrow N_1 \rightarrow B_1$.

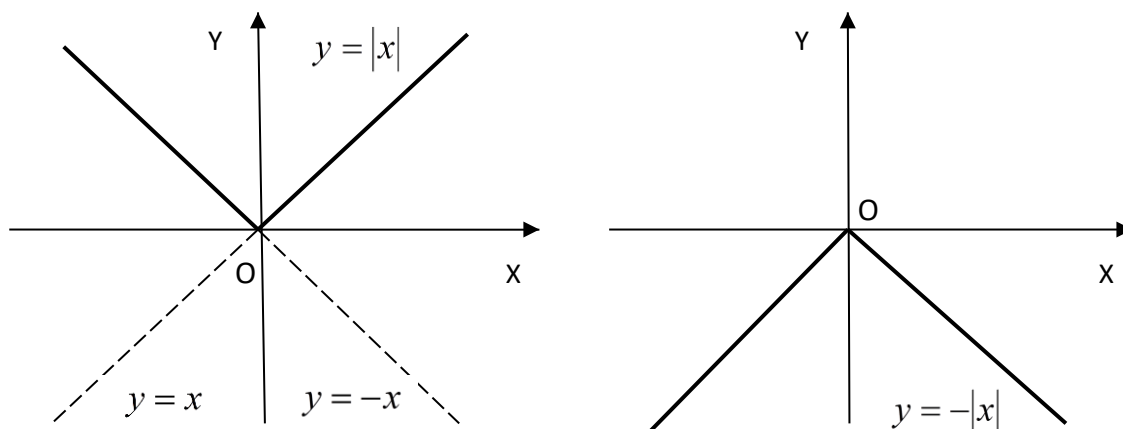


Більш раціонально побудова графіка функції $y = g\left(\frac{1}{x}\right)$ здійснюється наступним чином: проводять прямі, які перпендикулярні до прямої $y = x$ до їх перетину з графіком функції $y = \frac{1}{x}$. Утворюється сукупність пар точок A і A_1 на гіперболі $y = \frac{1}{x}$. Через них проводять прямі, які паралельні осі OY до перетину з графіком функції $y = g(x)$ в точках N і N_1 . точки B і B_1 шукають як дві інші вершини прямокутника, сторони якого паралельні осям координат.

Побудова графіків функцій, які містять модулі

Найпростішим графіком такого типу є графік функції $y = |x|$. Відомо, що $|x|$ означає відстань від точки x до початку координат. Тому має місце правило розкриття модуля: $|x| = \begin{cases} x & \text{при } x \geq 0 \\ -x & \text{при } x < 0 \end{cases}$. Іншими словами, модуль перетворюється в дужку, якщо підмодульний вираз більший або рівний від нуля і в мінус дужку, якщо під модульний вираз від'ємний. Таке формулювання правила розкриття модуля допомагає запобігати помилкам, коли учні при розкритті модулів виразів міняють знаки не в усіх доданках від'ємного підмодульного виразу.

Зрозуміло, що функція $y = |x|$ парна і графіком цієї функції є дві півпрямі («вилка»), які виходять з однієї точки – вершини «вилки». Графіком функції $y = -|x|$ згідно базових перетворень є перевернута відносно осі ОХ «вилка» з вершиною в початку координат.



ПРИКЛАДИ

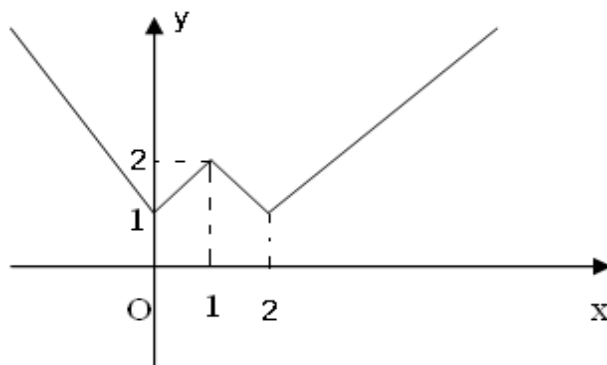
Приклад 1. Побудувати графік функції $y = |x| - |1-x| + |x-2|$.

Вказівка:

$$y = |x| - |1-x| + |x-2| = \begin{cases} -x-1+x-x+2, & x \leq 0 \\ x-1+x-x+2, & 0 < x \leq 1 \\ x+1-x-x+2, & 1 < x \leq 2 \\ x+1-x+x-2, & x > 2 \end{cases} = \begin{cases} -x+1, & x \leq 0 \\ x+1, & 0 < x \leq 1 \\ -x+3, & 1 < x \leq 2 \\ x-1, & x > 2 \end{cases}$$

Будуємо графік функції $y = |x| - |1-x| + |x-2|$.

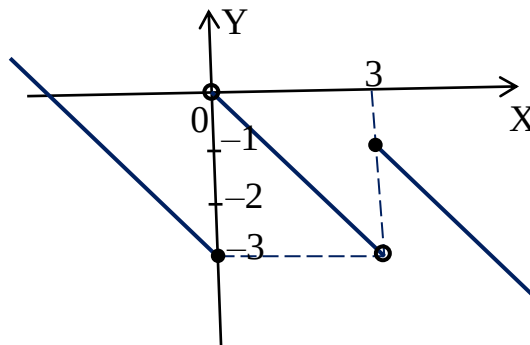
Відповідь: графік функції зображений на рисунку.



Приклад 2. Побудуйте графік функції $y = \frac{|x|}{x} + \frac{x-3}{|x-3|} - x$.

Вказівка: Розкриємо модулі. Тоді $y = \begin{cases} -2-x, & x \leq 0 \\ -x, & 0 < x < 3 \\ 2-x, & x \geq 3 \end{cases}$

Відповідь: графік функції зображений на рисунку.



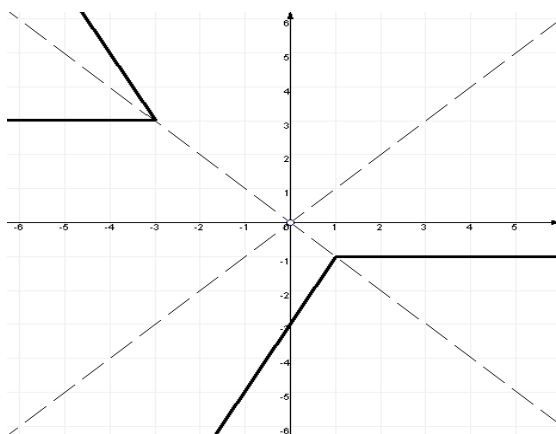
Приклад 3. Побудуйте графік рівняння $|x - y| - |x + y| = y + 3$.

Вказівка: Можуть трапитися випадки

$$1) \begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \geq 0 \\ y = -1 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y < 0 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x - y < 0 \\ x + y \geq 0 \\ y = -2x - 3 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x - y < 0 \\ x + y < 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\text{Тому } \begin{cases} y = -1 \\ x \geq 1 \end{cases}, \begin{cases} y = 2x - 3 \\ x < 1 \end{cases}, \begin{cases} y = -2x - 3 \\ x \geq -3 \end{cases}, \begin{cases} y = 3 \\ x \geq -3 \end{cases}$$

Відповідь: графік рівняння $|x - y| - |x + y| = y + 3$ зображений на рисунку.



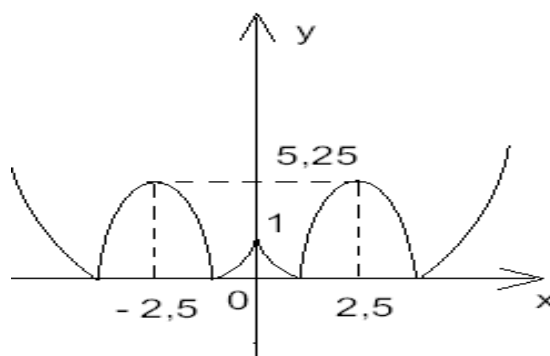
Приклад 4. Побудувати графік функції

$$y = |x^2 - 5|x| + 1|$$

Вказівка:

$$y = x^2 - 5x + 1 \rightarrow y = |x|^2 - 5|x| + 1 \rightarrow y = |x^2 - 5|x| + 1|$$

Відповідь: графік функції зображений на рисунку.



Приклад 5. Побудувати графік функції:

$$y = \sqrt{2 + \sin^4 x - \cos 2x} + \sqrt{2 + \cos^4 x + \cos 2x}.$$

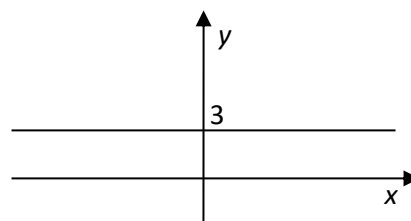
Вказівка:

$$y = \sqrt{1 + 2 \sin^2 x + \sin^4 x} + \sqrt{2 + 2 \cos^2 x + \cos^4 x}.$$

Тому

$$y = |1 + \sin^2 x| + |1 + \cos^2 x| = 3.$$

Відповідь: графік функції зображений на рисунку.



Приклад 6. Побудуйте графік функції

$$y = x^3 (\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Вказівка: Оскільки $\begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$, то $x^2 = 1$, $x = \pm 1$. Тому графік функції складається із двох точок $(1; 0)$ і $(-1; 0)$.

Відповідь: графік функції складається із двох точок $(1; 0)$, $(-1; 0)$.

3. РІВНЯННЯ І СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Вибір підходу до означення рівняння в школі залежить від вікових особливостей учнів і рівня їхньої підготовки, від форми навчання (факультативи, класи з поглибленим вивченням предмета) та інших факторів.

У підручнику з алгебри рівняння трактується як рівність, що містить змінну. Через поняття змінної вводиться означення кореня рівняння. Розв'язати рівняння означає знайти всі його корені або довести, що коренів немає.

При розв'язуванні рівнянь важливим є розуміння поняття «рівносильні рівняння». Без нього не можна забезпечити свідоме і глибоке засвоєння питань розв'язування рівнянь. Учням важко зорієнтуватися чи всі

перетворення рівнянь до більш простого вигляду є продуктивними. Дійсно, не кожне перетворення зберігає незмінним множину коренів даного рівняння: в одному випадку ця множина може звузитися, а в другому – розширитися, тобто з'являться сторонні корені. Однією з причин появи сторонніх коренів є розширення області допустимих значень. Для цього доцільно використовувати твердження-теорему про рівносильні перетворення рівнянь.

Лінійні та квадратні рівняння завжди розв'язні, тобто корені рівнянь можна виразити через їх коефіцієнти за допомогою скінченної кількості дій додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня та добування кореня. У цьому разі прийнято говорити, що рівняння розв'язне в радикалах.

Будь-яке кубічне рівняння та рівняння четвертого степеня також розв'язні в радикалах. Так, для коренів рівняння $x^3 + px + q = 0$ відомою є формула, що носить ім'я італійського математика Дж. Кардано (1501 – 1576)

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Формулу розв'язування рівняння четвертого степеня винайшов Л.Феррарі (1522 – 1565) учень Дж. Кардано.

Для алгебраїчних рівнянь вищих степенів не існує єдиного загального методу розв'язування. Методи розв'язування алгебраїчних рівнянь базуються на загальному підході, коли дане рівняння поступово замінюється простішим.

Для побудови ланцюжка рівносильних рівнянь суттєвою є транзитивна властивість рівносильності: якщо перше рівняння рівносильне другому рівнянню, а друге – третьому, то останнє рівносильне першому.

Якщо треба знайти всі спільні розв'язки кількох рівнянь, то кажуть, що треба розв'язати систему рівнянь.

3.1. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ СТЕПЕНІВ

Рівнянням вищого степеня називається рівняння виду $F(x) = 0$, де $F(x)$ – многочлен, вищий другого степеня. Розглянемо деякі методи їх розв'язування.

3.1.1. Розв'язування рівнянь четвертого степеня з додатковими умовами, накладеними на коефіцієнти

3.1.1.1. Розв'язування рівнянь вигляду

$$(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) = t, \text{ якщо } a + d = b + c = t.$$

Вказівка:

Зробивши підстановку $x^2 - tx = y$, отримаємо квадратне рівняння $(y + ad)(y + bc) = t$, з якого знаходимо y , а далі x .

ПРИКЛАДИ.

Приклад 1. Обчислити суму розв'язків рівняння

$$(x + 2)(x - 1)(x - 3)(x - 6) = 16.$$

Вказівка:

Помічаємо, що $a = -2$, $b = 1$, $c = 3$, $d = 6$. Отже, $a + d = b + c = 4$.

Отримаємо $(x^2 - 4x - 12)(x^2 - 4x + 3) = 16$.

Нехай $y = x^2 - 4x$, тоді $(y - 12)(y + 3) = 16$, $y^2 - 9y - 52 = 0$.

Розв'язавши квадратне рівняння, знаходимо $y = -4$ або $y = 13$.

Отримаємо два випадки:

$$x^2 - 4x = -4, (x - 2)^2 = 0, x = 2.$$

$$x^2 - 4x = 13, \text{ тоді } x = 2 \pm \sqrt{17}.$$

Обчислимо суму розв'язків рівняння $2 + 2 + \sqrt{17} + 2 - \sqrt{17} = 6$.

Відповідь: сума розв'язків рівняння дорівнює 6.

Приклад 2. Знайти найменший корінь рівняння

$$x(x - 2)(x^2 - 1) = 24.$$

Вказівка:

$$(x - 2)(x - 1)x(x + 1) = 0, (x^2 - x - 2)(x^2 - x) = 24.$$

Нехай $y = x^2 - x$, тоді $(y - 2)y = 24$.

Отже $y^2 - 2y - 24 = 0$, звідки $y = 6$ або $y = -4$.

Отримаємо два випадки:

$$x^2 - x - 6 = 0, \text{ тоді } x = 3 \text{ або } x = -2;$$

$$x^2 - x + 2 = 0, \text{ тоді розв'язків немає.}$$

Відповідь: найменшим коренем рівняння є число -2 .

3.1.1.2. Розв'язування рівнянь вигляду

$$(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) = tx^2, \text{ якщо } ad = bc = t \neq 0,$$

Вказівка:

$$(x^2 - (a + d)x + ad)(x^2 - (b + c)x + bc) = tx^2.$$

Оскільки число $x = 0$ не є коренем цього рівняння, розділивши обидві його частини на x^2 , отримаємо:

$$\left(x + \frac{t}{x} - (a + d)\right)\left(x + \frac{t}{x} - (b + c)\right) = t.$$

Зробивши підстановку $x + \frac{t}{x} = y$, отримаємо квадратне рівняння $(y - (a + d))(y - (b + c)) = t$, з якого знаходимо y , а далі x .

ПРИКЛАДИ

Приклад 1. Обчислити суму розв'язків рівняння

$$(x + 2)(x + 3)(x + 8)(x + 12) = 4x^2.$$

Вказівка:

Помічаємо, що $a = -2$, $b = -3$, $c = -8$, $d = -12$. Отже, $ad = bc = 24$.

Отримаємо $(x^2 + 14x + 24)(x^2 + 11x + 24) = 4x^2$.

Розділивши обидві частини рівняння на $x^2 \neq 0$, одержимо

$$\left(x + \frac{24}{x} + 14\right)\left(x + \frac{24}{x} + 11\right) = 4.$$

Нехай $x + \frac{24}{x} + 11 = y$, тоді $(y + 3)y = 4$,

$$y^2 + 3y - 4 = 0, \text{ звідки } y = -4 \text{ або } y = 1.$$

Отримаємо два випадки :

$$x + \frac{24}{x} + 11 = -4, \text{ тоді } x = \frac{-15 \pm \sqrt{129}}{2};$$

$$x + \frac{24}{x} + 11 = 1, \text{ тоді } x = -6 \text{ або } x = -4.$$

Відповідь : сума розв'язків рівняння дорівнює -25 .

Приклад 2. Знайти найбільший розв'язок рівняння

$$(x - 3)(x + 4)(x + 6)(x - 2) = 10x^2.$$

Вказівка:

Після перетворень отримаємо $(x^2 + x - 12)(x^2 + 4x - 12) = 10x^2$.
Розділивши обидві частини рівняння на $x^2 \neq 0$, отримаємо

$$\left(x - \frac{12}{x} + 1\right)\left(x - \frac{12}{x} + 4\right) = 10.$$

$$\text{Нехай } x + \frac{12}{x} + 1 = y, \text{ тоді } y(y + 3) = 10, \text{ звідки } y = 2 \text{ або } y = -5.$$

Отримаємо два випадки :

$$x + \frac{12}{x} + 1 = 2, \text{ тоді } x = 3 \text{ або } x = 4;$$

$$x + \frac{12}{x} + 1 = -5, \text{ тоді } x^2 + 6x + 12 = 0, \text{ розв'язків немає.}$$

Відповідь: найбільшим розв'язком рівняння є число 4.

3.1.1.3. Розв'язування рівнянь вигляду

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + t = 0, \text{ якщо } a = c + d, t = b + c.$$

Вказівка:

Після перетворень отримаємо

$$(c + d)x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + b + c = 0$$

$$c(x^4 + x^2 + 1) + dx(x^3 + 1) + b(x^3 + 1) = 0.$$

Враховуючи, що $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$, маємо
 $c(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) + dx(x + 1)(x^2 - x + 1) + b(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0,$
 $(x^2 - x + 1)(cx^2 + cx + c + dx^2 + dx + bx + b) = 0$

і, нарешті, $c(x^2 - x + 1)((c + d)x^2 + (b + c + d)x + b + c) = 0$.

Дане рівняння рівносильне сукупності двох квадратних рівнянь

$$x^2 - x + 1 = 0 \text{ і } (c + d)x^2 + (b + c + d)x + b + c = 0.$$

Оскільки рівняння $x^2 - x + 1 = 0$ не має дійсних коренів, то
 отримаємо квадратне рівняння $(c + d)x^2 + (b + c + d)x + b + c = 0$, тобто
 рівняння $ax^2 + (t + d)x + t = 0$.

ПРИКЛАДИ

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$2x^4 - 3x^3 + x^2 + x - 2 = 0.$$

Вказівка:

Помічаємо, що $a = 2$, $b = -3$, $c = d = 1$, $t = -2$. Отже, $a = c + d$, $t = b + c$.

Тоді задане рівняння рівносильне рівнянню $ax^2 + (t + d)x + t = 0$,

тобто $2x^2 - x - 2 = 0$, звідки $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$.

Відповідь : $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$.

3.1.1.4. Розв'язування рівняння вигляду

$ax^{2n} + bx^n + c = 0$, де $abc \neq 0$, $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Вказівка:

За допомогою підстановки $x^n = z$ спочатку отримуємо квадратне рівняння $az^2 + bz + c = 0$, а далі діємо відповідно до того, скільки коренів має це квадратне рівняння.

Зауваження. При $n = 2$ тричленне рівняння називається бікватратним. За допомогою підстановки $x^2 = y$ воно зводиться до квадратного рівняння.

ПРИКЛАДИ

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$x^{12} - 5x^6 + 6 = 0.$$

Вказівка:

Нехай $x^6 = y$, тоді $y^2 - 5y + 6 = 0$, звідки $y = 2$, $y = 3$.

Отримаємо два випадки :

$$x^6 = 2, \quad x_{1,2} = \pm \sqrt[6]{2}; \quad x^6 = 3, \quad x_{3,4} = \pm \sqrt[6]{3}.$$

Відповідь : $-\sqrt[6]{3}$; $-\sqrt[6]{2}$; $\sqrt[6]{2}$; $\sqrt[6]{3}$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$4x^8 + 7x^4 + 3 = 0.$$

Вказівка:

Розв'язків немає, бо ліва частина додатна.

Відповідь : розв'язків немає.

3.1.2. Розв'язування симетричних рівнянь

Симетричним називається рівняння виду

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, \quad \text{де } a_0 \neq 0.$$

У лівій частині рівняння коефіцієнти, симетричні відносно «середини» многочлена, рівні між собою. Тобто

$$a_k = a_{n-k}, \quad \text{де } k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Розрізняють два випадки:

1) $n = 2k$ (n – парне число), тоді ліва частина містить $2k + 1$ доданок.

Наприклад, $a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$.

Поділимо обидві частини рівняння на x^2 , дістанемо рівносильне йому (якщо $x \neq 0$) рівняння: $a_0 x^2 + a_1 x + a_2 + \frac{a_3}{x} + \frac{a_4}{x^2} = 0$.

Враховуючи, що $a_0 = a_4$; $a_1 = a_3$, згрупуємо члени з однаковими коефіцієнтами. Отримаємо:

$$a_0 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + a_1 \left(x + \frac{1}{x} \right) + a_2 = 0.$$

Зробимо **підстановку** $x + \frac{1}{x} = y$. Тоді $y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$ і $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$.

Тобто отримаємо рівняння відносно нової змінної y :

$$a_0 (y^2 - 2) + a_1 y + a_2 = 0.$$

Розв'язавши утворене квадратне рівняння, зведемо розв'язування вихідного рівняння до двох рівнянь:

$$x + \frac{1}{x} = y_1 \quad \text{та} \quad x + \frac{1}{x} = y_2.$$

б) $n=2k+1$ (n – непарне число), тоді ліва частина рівняння містить $2k+2$ доданки.

Неважко побачити, що це рівняння має корінь $x = -1$. Вихідне рівняння можна подати у вигляді $(x+1) \cdot F_1(x) = 0$, де $F_1(x) = 0$ – симетричне рівняння парного степеня, що було вже розглянуто.

ПРИКЛАДИ

Приклад 1. Обчислити суму квадратів коренів рівняння

$$x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0.$$

Вказівка:

Помічаємо, що $x = 0$ не є коренем цього рівняння. Тоді, розділивши обидві частини рівняння на x^2 , отримаємо рівняння

$$x^2 - 10x + 26 - \frac{10}{x} + \frac{1}{x^2} = 0, \text{ рівносильне даному.}$$

$$\text{Тоді } \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) - 10 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 26 = 0.$$

$$\text{Нехай } x + \frac{1}{x} = y, \text{ тоді } y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2.$$

$$\text{Отже } x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Вихідне рівняння набуває вигляду $y^2 - 10y + 24 = 0$, звідки отримаємо $y = 6$, $y = 4$.

Отримаємо два випадки:

$$1) \quad x + \frac{1}{x} = 6, \text{ отже } x^2 - 6x + 1 = 0, \text{ звідки } x_1 = 3 - 2\sqrt{2}, x_2 = 3 + 2\sqrt{2};$$

$$2) \quad x + \frac{1}{x} = 4, \text{ отже } x^2 - 4x + 1 = 0, \text{ звідки } x_3 = 2 - \sqrt{3}, x_4 = 2 + \sqrt{3}.$$

$$\text{Тоді } (3 - 2\sqrt{2})^2 + (3 + 2\sqrt{2})^2 + (2 - \sqrt{3})^2 + (2 + \sqrt{3})^2 = 48.$$

Відповідь: 48.

3.1.3. Розв'язування зворотних рівнянь

Термін **зворотне рівняння** ввів у 1733 р. Л. Ейлер.

Зворотним називається рівняння виду:

$$a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + a_2 x^{2n-1} + \dots + a_n x^{n+1} + \beta a_n x^n + \beta^2 a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \beta^{2n+1} = 0$$

або

$$a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + a_2 x^{2n-2} + \dots + a_n x^n + \beta a_{n-1} x^{n-1} + \beta^2 a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0 \beta^n = 0,$$

де $a \neq 0$, β – фіксоване дійсне число.

Якщо $\beta = 1$, то рівняння є симетричними рівняннями відповідно непарного і парного степеня. Очевидно, що зворотне рівняння непарного степеня завжди має корінь $x = -\beta$.

Перше з рівнянь можна записати у вигляді

$$a_0(x^{2n+1} + \beta^{2n+1}) + a_1(x^{2n} + \beta^{2n}) + \dots + a_n x^n (x + \beta) = 0 \quad \text{або} \quad (x + \beta) \cdot F(x) = 0,$$

де $F(x) = 0$ зворотне рівняння парного степеня.

Після виділення множника $x + \beta$ розв'язування зворотного рівняння непарного степеня зводиться до розв'язування зворотного рівняння парного степеня.

Помічаємо, що $x = 0$ не є коренем рівняння. Поділимо обидві частини рівняння на x^n та згрупуємо члени з однаковими показниками степеня. Отримаємо

$$a_0(x^n + (\frac{\beta}{x})^n) + a_1(x^{n-1} + (\frac{\beta}{x})^{n-1}) + \dots + a_{n-1}(x + \frac{\beta}{x}) + a_n = 0$$

Введемо нову змінну $x + \frac{\beta}{x} = t$. Тоді

$$x^2 + (\frac{\beta}{x})^2 = t^2 - 2\beta, \quad x^3 + (\frac{\beta}{x})^3 = t^3 - 3\beta t;$$

$$x^4 + (\frac{\beta}{x})^4 = (x + \frac{\beta}{x})^4 - 4\beta(x^2 + \frac{\beta^2}{x^2}) - 6\beta^2 = t^4 - 4\beta t^2 + 2\beta^2 \quad \text{і т.д.}$$

Рівняння парного степеня розв'язується аналогічно симетричному рівнянню парного степеня.

ПРИКЛАДИ

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4 = 0.$$

Вказівка:

Це зворотне рівняння парного степеня, $\beta = 2$. Оскільки $x = 0$ не є коренем рівняння, то розділивши обидві частини рівняння на x^2 , одержимо рівняння

$$x^2 + 3x + 4 + \frac{6}{x} + \frac{4}{x^2} = 0, \quad \text{що рівносильне даному.}$$

$$\text{Тоді} \quad (x^2 + \frac{4}{x^2}) + 3(x + \frac{2}{x}) + 4 = 0.$$

$$\text{Нехай} \quad y = x + \frac{2}{x}, \quad \text{тоді} \quad y^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} + 4.$$

Отримаємо рівняння $y^2 - 4 + 3y + 4 = 0$, звідки $y^2 + 3y = 0$, $y = 0$ або $y = -3$.

Маємо два випадки:

1) $x + \frac{2}{x} = 0$, розв'язків немає;

2) $x + \frac{2}{x} = -3$, $x^2 + 3x + 2 = 0$, $x = -1$ або $x = -2$.

Відповідь : -2 ; -1 .

3.1.4. Розв'язування рівнянь методом розкладання на множники

Загальний спосіб розв'язування алгебраїчних рівнянь вищих степенів методом розкладання на множники базується на основній теоремі алгебри та застосуванні теорем Безу і Вієта. Використання методу невизначених коефіцієнтів, схеми Горнера або ділення многочлена «кутом» дає можливість послідовно понижувати степінь многочлена, що стоїть у лівій частині алгебраїчного рівняння. Щоб розкласти многочлен на лінійні множники, потрібно знати його корені.

Теорема Вієта для квадратного рівняння – окремий випадок загальнішого твердження, сформульованого для многочлена n – го степеня.

ТЕОРЕМА. Якщо $x_1, x_2, \dots, x_n$ – корені многочлена

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n,$$

то мають місто такі рівності:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_1}{a_0};$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{a_2}{a_0};$$

$$x_1 x_2 x_3 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -\frac{a_3}{a_0};$$

$$x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

З останньої рівності теореми можна зробити такі практичні висновки.

1. Якщо многочлен $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ має цілі коефіцієнти і $a_0 = 1$, то раціональними коренями можуть бути тільки цілі числа, що є дільниками вільного члена a_n .

2. Щоб раціональне число $\frac{p}{q}$ (нескоротний дріб) було коренем многочлена $P_n(x)$ з цілими коефіцієнтами, необхідно, щоб число p було дільником вільного члена a_n , число q дільником старшого коефіцієнта a_0 .

ПРИКЛАДИ

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$x^3 + 3x^2 + 7x + 10 = 0.$$

Вказівка:

Раціональні корені даного рівняння можуть бути тільки серед чисел $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$ ($a_0 = 1, a_3 = 10$).

Так як $x = -2$ – є коренем, то многочлен має ділитися на $x + 2$.

Розкладаючи ліву частину рівняння на множники, отримаємо:

$$(x + 2)(x^2 + x + 5) = 0$$

Квадратне рівняння $x^2 + x + 5 = 0$ коренів немає.

Відповідь : $x = -2$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Вказівка:

Легко бачити, що $x = -1$ – корінь даного рівняння

$$\begin{array}{r|l} \text{Тоді } 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 & x+1 \\ \hline -2x^2 + 2x^2 & 2x^2 - 5x + 2 \\ \hline -5x^2 - 3x & \\ -5x^2 - 5x & \\ \hline 2x + 2 & \\ -2x + 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

За т. Безу $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = (x+1)(2x^2 - 5x + 2)$.

Рівняння $2x^2 - 5x + 2 = 0$, має корені $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2$.

Відповідь: $-1; \frac{1}{2}; 2$.

3.1.5. Розв'язування рівнянь методом невизначених коефіцієнтів

Розв'язування рівнянь методом невизначених коефіцієнтів базується на твердженнях:

- 1) многочлен третього степеня розкладається на добуток многочленів першого і другого степенів;
- 2) многочлен четвертого степеня розкладається на добуток двох многочленів другого степеня;
- 3) два многочлени тотожно рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їхні коефіцієнти при однакових степенях.

ПРИКЛАДИ**Приклад 1.** Розв'язати рівняння

$$x^4 + x^3 - 17x^2 + x + 6 = 0.$$

Вказівка:

Нехай $x^4 + x^3 - 17x^2 + x + 6 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$, де a, b, c, d – невідомі коефіцієнти.

Розкриваючи дужки в правій частині цієї рівності та прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x зліва і справа, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} a + c = 1 \\ ac + b + d = -17 \\ ad + bc = 1 \\ bd = 6 \end{cases}$$

Цій системі задовольняють числа $a = -3$, $b = -2$, $c = 4$, $d = -3$.

Отже, вихідне рівняння рівносильне рівнянню

$$(x^2 - 3x - 2)(x^2 + 4x - 3) = 0.$$

Отримаємо два випадки

$$x^2 - 3x - 2 = 0, \text{ тоді } x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2},$$

$$x^2 + 4x - 3 = 0, \text{ тоді } x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{7}$$

Відповідь : $\frac{3 - \sqrt{17}}{2}; \frac{3 + \sqrt{17}}{2}; -2 - \sqrt{7}; -2 + \sqrt{7}.$

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$x^4 - 8x^2 + x + 12 = 0.$$

Вказівка:

Нехай $x^4 - 8x^2 + x + 12 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$. Отримаємо систему

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ ac + b + d = -8 \\ ad + bc = 1 \\ bd = 12 \end{cases}$$

Цій системі задовольняють числа $a = -1$, $b = -3$, $c = 1$, $d = -4$.

Вихідне рівняння рівносильне рівнянню

$$(x^2 - x - 3)(x^2 + x - 4) = 0.$$

Отримаємо два випадки

$$x^2 - x - 3 = 0, \text{ тоді } x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2};$$

$$x^2 + x - 4 = 0, \text{ тоді } x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Відповідь: $\frac{1 - \sqrt{13}}{2}; \frac{1 + \sqrt{13}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}.$

3.1.6. Розв'язування однорідних рівнянь та рівнянь, що зводяться до однорідних

Рівняння виду

$$a_0 \phi^n(x) + a_1 \phi^{n-1}(x)\phi(x) + \dots + a_{n-1}\phi(x)\phi^{n-1}(x) + a_n \phi^n(x) = 0,$$

де $n > 1$ – натуральне число, $a_0 \neq 0, a_1 \neq 0, \dots, a_n \neq 0, \phi(x) \text{ і } \varphi(x)$ – деякі функції, називаються **однорідними** відносно функцій $\phi(x) \text{ і } \varphi(x)$.

Дане рівняння рівносильне рівнянню:

$$a_0 \left(\frac{\phi(x)}{\varphi(x)} \right)^n + a_1 \left(\frac{\phi(x)}{\varphi(x)} \right)^{n-1} + \dots + a_{n-1} \left(\frac{\phi(x)}{\varphi(x)} \right) + a_n = 0, \text{ де } \varphi(x) \neq 0; \text{ або рівнянню}$$

$$a_n \left(\frac{\varphi(x)}{\phi(x)} \right)^n + a_{n-1} \left(\frac{\varphi(x)}{\phi(x)} \right)^{n-1} + \dots + a_1 \frac{\varphi(x)}{\phi(x)} + a_0 = 0, \text{ де } \phi(x) \neq 0.$$

Поклавши $\frac{\phi(x)}{\varphi(x)} = y$ в перше з отриманих рівнянь або $\frac{\varphi(x)}{\phi(x)} = y$ в друге

з рівнянь, отримаємо раціональне рівняння виду:

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_{n-1} y + a_n = 0 \quad \text{або} \quad a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_1 y + a_0 = 0.$$

ПРИКЛАДИ

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$(2x^2 - x + 1)^2 + x^2(2x^2 - x + 1) - 6x^4 = 0,$$

Вказівка:

Помічаємо, що $x = 0$ не є коренем рівняння. Тоді, розділивши обидві частини рівняння на x^4 , одержимо рівняння

$$\left(\frac{2x^2 - x + 1}{x^2} \right)^2 + \frac{2x^2 - x + 1}{x^2} - 6 = 0, \text{ яке рівносильне даному.}$$

Нехай $\frac{2x^2 - x + 1}{x^2} = y$, тоді $y^2 + y - 6 = 0$, звідки $y = -3$ або $y = 2$.

Отримаємо два випадки :

$$\frac{2x^2 - x + 1}{x^2} = -3, \text{ дійсних розв'язків немає;}$$

$$\frac{2x^2 - x + 1}{x^2} = 2, \text{ звідки } x = 1.$$

Відповідь: 1.

3.1.7. Розв'язування рівнянь методом виділення повного квадрата

ПРИКЛАДИ

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$x^4 - 12x - 5 = 0.$$

Вказівка:

$$x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 - 12x - 9 = 0,$$

$$(x^2 + 2)^2 - (2x + 3)^2 = 0.$$

Розкладаючи ліву частину рівняння як різницю квадратів, маємо $(x^2 + 2x + 5)(x^2 - 2x - 1) = 0$.

Отримаємо два випадки :

$$x^2 + 2x + 5 = 0, \text{ розв'язків немає;}$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0, \quad x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Відповідь : $1 \pm \sqrt{2}$.

3.1.8. Розв'язування рівнянь методом введення кількох змінних ПРИКЛАДИ

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$(3x^2 + x - 1)^2 + (2x^2 + x - 2)^2 = (5x^2 + 2x - 3)^2.$$

Вказівка:

Помічаємо, що $(3x^2 + x - 1) + (2x^2 + x - 2) = (5x^2 + 2x - 3)$.

Нехай $3x^2 + x - 1 = a$, $2x^2 + x - 2 = b$, тоді $a^2 + b^2 = (a + b)^2$, звідки $2ab = 0$.

Отримаємо два випадки:

$$a = 0, \text{ тоді } 3x^2 + x - 1 = 0, \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6};$$

$$b = 0, \text{ тоді } 2x^2 + x - 2 = 0, \quad x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

Перевірка підтверджує, що всі ці числа є коренями даного рівняння.

Відповідь : $\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}; \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$(x^2 + 3x - 4)^3 + (2x^2 - 5x + 3)^3 = (3x^2 - 2x - 1)^3.$$

Вказівка:

Помічаємо, що $(x^2 + 3x - 4) + (2x^2 - 5x + 3) = (3x^2 - 2x - 1)$.

Нехай $x^2 + 3x - 4 = a$, $2x^2 - 5x + 3 = b$. Тоді $a^3 + b^3 = (a + b)^3$, звідки $3ab(a + b) = 0$.

Отримаємо три випадки:

$$a = 0, \text{ тоді } x^2 + 3x - 4 = 0. \text{ Отже, } x = 1 \text{ або } x = -4;$$

$$b = 0, \text{ тоді } 2x^2 - 5x + 3 = 0. \text{ Отже } x = 1 \text{ або } x = \frac{3}{2};$$

$$a + b = 0, \text{ тоді } 3x^2 - 2x - 1 = 0. \text{ Отже, } x = 1 \text{ або } x = -\frac{1}{3}.$$

Перевірка підтверджує, що всі знайдені числа є коренями даного рівняння.

Відповідь : $-4; -\frac{1}{3}; 1; 1,5$.

3.1.9. Розв'язування рівнянь з використанням властивостей функцій ПРИКЛАДИ

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$5x^9 + x = 6.$$

Вказівка:

Легко бачити, що $x = 1$ є коренем рівняння $5x^9 + x = 6$.

Покажемо, що інших коренів дане рівняння не має.

Запишемо рівняння у вигляді $5x^9 = 6 - x$.

Функція $f(x) = 5x^9$ зростаюча, а функція $g(x) = 6 - x$ спадна. Отже, рівняння $f(x) = g(x)$ не може мати більше одного кореня.

Відповідь : $x = 1$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$x^4 - x^2 - 3x + 4 = 0.$$

Вказівка:

Розглянемо функцію $f(x) = x^4 - x^2 - 3x + 4 = (x^2 - 1)^2 + (x - \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4}$.

Очевидно, що $f(x) > 0$, отже дане рівняння не має коренів

Відповідь : розв'язків немає.

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$(x^2 - 3x - 6)^2 - 3(x^2 - 3x - 6) - 6 = x.$$

Вказівка:

Нехай $f(x) = x^2 - 3x - 6$, тоді задане рівняння має вигляд $f(f(x)) = x$.
Отже корені рівняння $f(x) = x$ є коренями даного рівняння.

Знайдемо корені рівняння $x^2 - 3x - 6 = x$: $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{10}$.

Далі, розкривши дужки і звівши подібні члени, запишемо задане рівняння у вигляді $x^4 - 6x^3 - 6x^2 + 44x + 48 = 0$.

Оскільки числа $2 - \sqrt{10}$ та $2 + \sqrt{10}$ є його коренями, многочлен, що стоїть у лівій частині рівняння, ділиться на $x^2 - 4x - 6$.

Після ділення одержимо рівняння

$$(x^2 - 4x - 6)(x^2 - 2x - 8) = 0.$$

З рівняння $x^2 - 2x - 8 = 0$ отримаємо $x = -2$ або $x = 4$.

Відповідь: -2 ; $2 - \sqrt{10}$; $2 + \sqrt{10}$; 4 .

3.1.10. Розв'язування рівнянь і нерівностей з модулями

Як правило, рівняння з модулями розв'язують за **алгоритмом**:

1. Знайти нулі всіх підмодульних виразів і позначити їх на ОДЗ рівняння.

2. На кожному з одержаних проміжків розкрити модулі і записати рівняння без знака модуля.

3. Розв'язати отримане рівняння без модулів.

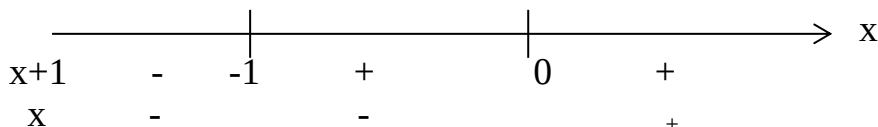
4. Записати відповідь з урахуванням проміжку, що розглядається.

ПРИКЛАДИ

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$|x+1| - |x| + 1 - x = 0.$$

Вказівка:



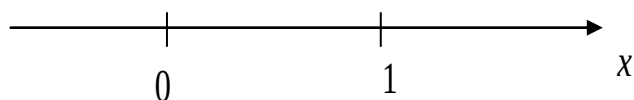
$$\begin{aligned}
1) & \begin{cases} x \leq -1 \\ -(x+1) + x + 1 - x = 0 \end{cases} \begin{cases} x \leq -1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \emptyset \\
2) & \begin{cases} -1 < x \leq 0 \\ x + 1 + x + 1 - x = 0 \end{cases} \begin{cases} -1 < x \leq 0 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow \emptyset \\
3) & \begin{cases} x > 0 \\ x + 1 - x + 1 - x = 0 \end{cases} \begin{cases} x > 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 2
\end{aligned}$$

Відповідь: $x=2$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність

$$|x| + |1-x| \geq 2.$$

Вказівка:



x	-	+	+
$1-x$	+	+	-

$$\begin{aligned}
1) & \begin{cases} x \leq 0 \\ -x - (x-1) \geq 2 \end{cases} \begin{cases} x \leq 0 \\ x \leq -0,5 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; -0,5] \\
2) & \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ x - (x-1) \geq 2 \end{cases} \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ 1 \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \emptyset \\
3) & \begin{cases} x > 1 \\ x + x - 1 \geq 2 \end{cases} \begin{cases} x > 1 \\ x \geq 1,5 \end{cases} \Rightarrow x \in [1,5; +\infty)
\end{aligned}$$

Відповідь: $x \in (-\infty; -0,5] \cup [1,5; +\infty)$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$|x+2| + |2x-3| + |x-1| + |x-3| - 3x + 12 = 0.$$

Вказівка:

Запишемо рівняння у вигляді:

$$|x+2| + |2x-3| + |x-1| + |x-3| = 3x - 12.$$

Ліва частина рівняння додатна. Отже, рівняння може мати дійсні корені, якщо $3x - 12 \geq 0$, тобто при $x \geq 4$. А на цьому проміжку вирази, записані в кожному з модулів, додатні. Рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ x + 2 + 2x - 3 + x - 1 + x - 3 = 3x - 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ x = -3,5 \end{cases}$$

розв'язків немає.

Відповідь: розв'язків немає.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $|x + 4| + |x| + |x - 4| = 8 - x^2$.

Вказівка: за нерівністю модулів $|x + 4| + |x - 4| = |x + 4| + |4 - x| \geq |x + 4 + 4 - x| = 8$. Тому ліва частина рівняння не менша 8. Рівність досягається лише в тому випадку, коли $x + 4 = 4 - x$, тобто при $x = 0$. Права частина не перевищує 8. Отже, задане рівняння має розв'язок тільки в тому разі, коли нерівності перетворюються в рівності. Це має місце лише при $x = 0$.

Відповідь: $x = 0$.

3.2. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ

Рівняння, у яких невідоме міститься під знаком кореня, називається **ірраціональним**.

Основним способом розв'язування ірраціонального рівняння є зведення його до раціонального (лінійного або квадратного). Цього можна досягнути, якщо піднести обидві частини рівняння до відповідного степеня.

При піднесенні обох частин рівняння до парного степеня отримаємо рівняння, яке є наслідком даного і може містити сторонні корені.

Для подібних ситуацій можливий інший шлях розв'язування – метод рівносильних перетворень. У шкільному курсі алгебри вивчаються теореми:

Теорема 1. Рівняння виду $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ рівносильно системі

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Теорема 2. Рівняння виду $\sqrt{f(x)} = g(x)$ рівносильне системі

$$\begin{cases} f(x) = (g(x))^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Теорема 3. Якщо для будь-якого $x \in M$ виконується нерівність $f(x) \geq 0$ і $g(x) \geq 0$, то рівняння $f(x) = g(x)$ і $(f(x))^{2k} = (g(x))^{2k}$, де $k \in N$, рівносильні на множині M .

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\sqrt{2x - 5} = \sqrt{4x + 7}$.

Вказівка:

Застосуємо теорему 1

$$\begin{cases} 2x - 5 = 4x + 7 \\ 4x + 7 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Тоді } \begin{cases} -2x = 12 \\ 4x \geq -7 \end{cases}, \begin{cases} x = -6 \\ x \geq -1\frac{3}{4} \end{cases}$$

Відповідь: коренів немає.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x^2 + 9} = x^2 - 11$$

Вказівка:

Застосуємо теорему 2

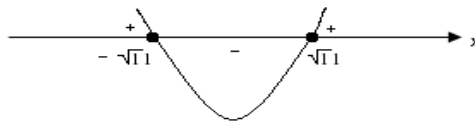
$$\begin{cases} x^2 + 9 = (x^2 - 11)^2 \\ x^2 - 11 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Тоді } \begin{cases} x^2 + 9 = x^4 - 22x^2 + 121 \\ x^2 - 11 \geq 0 \end{cases}$$

Розв'яжемо нерівність $x^2 - 11 \geq 0$

Введемо в розгляд функцію $y = x^2 - 11$, графіком якої є парабола, вітки напрямлені вгору.

$$x^2 - 11 = 0; \quad x = \pm\sqrt{11}$$



Отже, $x \in (-\infty; -\sqrt{11}] \cup [\sqrt{11}; +\infty)$.

$$x^4 - 23x^2 + 112 = 0$$

Заміна $x^2 = t$

$$t^2 - 23t + 112 = 0$$

$$D = 529 - 448 = 81$$

$$t_1 = \frac{23-9}{2} = 7;$$

$$t_2 = \frac{23+9}{2} = 16$$

Отримаємо два рівняння:

$$x^2 = 7 \quad \text{і} \quad x^2 = 16$$

Тоді

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{7} \\ x_2 = -\sqrt{7} \\ x_3 = 4 \\ x_4 = -4 \end{cases}$$

$x_2 = -\sqrt{7}$ - сторонній корінь.

Відповідь: -4, $\sqrt{7}$, 4.

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{3x-5} + \sqrt{x-2} = 3.$$

Вказівка:

Областю визначення цього рівняння є множина М: $\begin{cases} 3x-5 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases}$.

Розв'яжемо отриману систему $\begin{cases} x \geq 1\frac{2}{3}, \\ x \geq 2 \end{cases}$, $M = [2; +\infty)$. Тоді

$$(\sqrt{3x-5} + \sqrt{x-2})^2 = 9^2$$

$$3x-5+2\cdot\sqrt{3x-5}\cdot\sqrt{x-2}+x-2=9$$

$$2\cdot\sqrt{3x-5}\cdot\sqrt{x-2}=-4x+16$$

$$\sqrt{3x-5}\cdot\sqrt{x-2}=8-2x$$

Ліва частина останнього рівняння на множині $M=[2;+\infty)$ набуває невід'ємних значень. Тому права частина $8-2x \geq 0$, $x \leq 4$. Тоді на множині $M_1=[2;4]$ обидві частини рівняння $\sqrt{3x-5}\cdot\sqrt{x-2}=8-2x$ набувають невід'ємних значень.

Отже,

$$\begin{cases} (3x-5)\cdot(x-2)=(8-2x)^2 \\ 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-21x+54=0 \\ 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$x^2-21x+54=0, \text{ за теоремою Вієта: } \begin{matrix} x_1=18 \\ x_2=3 \end{matrix}$$

Таким чином, $x=3$.

Відповідь: 3.

Розглянемо приклади, які ілюструють, що відшукування ОДЗ в окремих випадках є складним і непотрібним.

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x^3+4x-1-8\cdot\sqrt[4]{x^4-x}}=\sqrt{x^3-1}+2\sqrt{x}.$$

Вказівка:

Відшукування ОДЗ в цьому рівнянні є досить непростим.

Піднесемо обидві частини до квадрату.

$$x^3+4x-1-8\cdot\sqrt[4]{x^4-x}=x^3-1+4\cdot\sqrt{x^3-1}\cdot\sqrt{x}+4x$$

$$\sqrt{x^3-1}\cdot\sqrt{x}=0$$

$$x_1=1; x_2=0$$

Шляхом перевірки встановлюємо, що $x_2=0$ - сторонній корінь.

Відповідь: 1.

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2-x-x^2}=\sqrt{x}-1.$$

Вказівка:

Відшукування ОДЗ в цьому випадку приносить користь.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x^2 - x \geq 0 \\ x^2 + x - 2 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \text{ Отримаємо } \begin{cases} x \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty) \\ x \in [-2; 1] \\ x \geq 0 \end{cases}$$

ОДЗ складається лише з двох значень $x=1$ і $x=0$. Перевірка показує, що коренем рівняння є тільки $x=1$.

Відповідь: 1.

3.2.1. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

3.2.1.1. Метод виділення повних квадратів

ПРИКЛАДИ

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1.$$

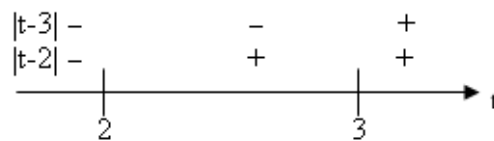
Вказівка:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} &= 1 \\ \sqrt{x-1-4\sqrt{x-1}+4} + \sqrt{x-1-6\sqrt{x-1}+9} &= 1 \\ |\sqrt{x-1}-2| + |\sqrt{x-1}-3| &= 1 \end{aligned}$$

Зробимо заміну $\sqrt{x-1} = t$

$$|t-2| + |t-3| = 1$$

Розкриємо знак модуля на проміжках



1) якщо $t \leq 2$, то

$$-t + 2 - t + 3 = 1$$

$$-2t = -4$$

$$t = 2$$

2) якщо $2 < t < 3$, то

$$t - 2 - t + 3 = 1$$

$$0t = 0$$

$$t \in (2; 3)$$

3) якщо $t \geq 3$, то

$$t - 2 + t - 3 = 1$$

$$2t = 6$$

$$t = 3$$

$$t \in [2; 3]$$

$$2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3$$

$$4 \leq x-1 \leq 9$$

Повертаємося до заміни:

$$5 \leq x \leq 10$$

$$x \in [5;10]$$

Відповідь: $x \in [5;10]$.

3.2.1.2. Метод введення заміни

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$x - 4 \cdot \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 6 = 0.$$

Вказівка:

Зробимо заміну $\sqrt[3]{x} = t$.

Тоді $t^3 - 4t^2 + t + 6 = 0$.

Дане рівняння має корені:

$$t_1 = -1; t_2 = 2; t_3 = 3$$

Повертаємось до заміни

$$\sqrt[3]{x} = -1; x = -1$$

$$\sqrt[3]{x} = 2; x = 8$$

$$\sqrt[3]{x} = 3; x = 27.$$

Відповідь: -1; 8; 27.

3.2.1.3. Метод розкладання на множники виразів, що входять в рівняння ПРИКЛАДИ

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$(x+3) \cdot \sqrt{x-1} = 3 \cdot \sqrt{x^2-1}.$$

Вказівка:

При $x \geq 1$ рівняння має вигляд:

$$\sqrt{x-1} \cdot (x+3-3 \cdot \sqrt{x+1}) = 0.$$

$$\text{Тоді } \begin{cases} \sqrt{x-1} = 0 \\ x+3-3 \cdot \sqrt{x+1} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 1 \\ 9 \cdot (x+1) = x^2 + 6x + 9 \end{cases}$$

$$\text{Отже, } \begin{cases} x = 0; x = 3 \\ x \geq 1 \\ x = 1 \end{cases}. \quad \text{Отримаємо, що } \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Відповідь: 1; 3.

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+y+4} + \sqrt[3]{y+7} = 4 \\ x+2y = 5 \end{cases}$$

Вказівка:

Зробимо заміну: $\begin{cases} \sqrt[3]{x+y+4} = a \\ \sqrt[3]{y+7} = b \end{cases}$. Отримаємо $\begin{cases} x+y+4 = a^3 \\ y+7 = b^3 \end{cases}$. Звідси $\begin{cases} x = a^3 - y - 4 \\ y = b^3 - 7 \end{cases}$.

Таким чином

$$\begin{cases} a+b=4 \\ a^3-y-4+2\cdot(b^3-7)=5 \end{cases}, \quad \begin{cases} a+b=4 \\ a^3+b^3=16 \end{cases}, \quad \begin{cases} a=4-b \\ a^3+b^3-16=0 \end{cases}$$

Розв'яжемо рівняння

$$(4-b)^3 + b^3 - 16 = 0$$

$$64 - 3 \cdot 16b + 3 \cdot 4b^2 - b^3 + b^3 - 16 = 0$$

$$12b^2 - 48b + 48 = 0 : 12$$

$$b^2 - 4b + 4 = 0 \quad \begin{cases} b=2 \\ a=2 \end{cases}$$

$$(b-2)^2 = 0$$

Повертаємося до заміни:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+y+4} = 2 \\ \sqrt[3]{y+7} = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y+4 = 8 \\ y+7 = 8 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y = 4 \\ y = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Відповідь: (3;1).

3.2.1.4. Метод оцінки

Застосовується у тому випадку, коли підкореневі вирази є тричленами, що не розкладаються на лінійні множники. Тому доцільно оцінити ліву і праву частину.

ПРИКЛАДИ

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{4x^2 + 8x + 8} + \sqrt{3x^2 + 6x + 12} = 4 - 2x - x^2$$

Вказівка:

Зробимо оцінку виразів

$$\sqrt{4x^2 + 8x + 8} + \sqrt{3x^2 + 6x + 12} = 4 - 2x - x^2$$

$$\sqrt{4 \cdot (x^2 + 2x + 2)} = \sqrt{4 \cdot (x+1)^2 + 4} \geq \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{3 \cdot (x^2 + 2x + 4)} = \sqrt{3 \cdot (x+1)^2 + 9} \geq \sqrt{9} = 3$$

$$4 - 2x - x^2 = -(x^2 + 2x - 4) = -((x+1)^2 - 5) = 5 - (x+1)^2 \leq 5$$

Ліва частина рівняння існує при значеннях $x \geq 5$, а права при $x \leq 5$. Отже рівняння матиме розв'язок, якщо обидві частини рівняння одночасно дорівнюють 5.

Тоді

$$\begin{cases} \sqrt{4x^2 + 8x + 8} + \sqrt{3x^2 + 6x + 12} = 5 \\ 4 - 2x - x^2 = 5 \end{cases}$$

Розв'яжемо друге рівняння:

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0$$

$$x = -1$$

Перевіримо чи є число -1 коренем першого рівняння:

$$\sqrt{4-8+8} + \sqrt{3-6+12} = 2 + 3 = 5$$

Відповідь: -1.

3.2.1.5. Метод використання властивостей монотонності функцій

Теорема 1. Якщо в рівнянні $f(x) = a$ функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то це рівняння має не більш ніж один корінь на цьому проміжку.

Теорема 2. Якщо в рівнянні $f(x) = g(x)$ функція $f(x)$ зростає на деякому проміжку, а функція $g(x)$ спадає на цьому проміжку (або навпаки), то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку.

ПРИКЛАДИ

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{2x+5} + \sqrt{x+2} = \frac{10}{x}.$$

Вказівка:

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x+5 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x \geq -2,5 \\ x \geq -2 \\ x > 0 \end{cases}, \quad x \in (0; +\infty).$$

Функції, $y = \sqrt{2x+5}$ $y = \sqrt{x+2}$ зростаючі, а функція $y = \frac{10}{x}$ спадна на проміжку $x \in (0; +\infty)$. Сума двох зростаючих функцій не є спадною, тому дане рівняння має лише один корінь $x = 2$.

$$\text{Перевірка: } \sqrt{2 \cdot 2 + 5} + \sqrt{2 + 2} = \frac{10}{2}, \quad 3 + 2 = 5.$$

Відповідь: 2.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+2} - \sqrt{2x+5} - \sqrt{3x} = 0.$$

Вказівка:

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ 3x+2 \geq 0 \\ 2x+5 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x \geq -1,5 \\ x \geq -\frac{2}{3} \\ x \geq -2,5 \\ x \geq 0 \end{cases}, \quad x \in [0; +\infty)$$

Помічаємо, що суми вільних доданків в першого і другого та третього і четвертого підкоренових виразів однакові.

Перепишемо рівняння у вигляді:

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+2} = \sqrt{2x+5} + \sqrt{3x}$$

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату:

$$\sqrt{(2x+3) \cdot (3x+2)} = \sqrt{(2x+5) \cdot 3x}$$

Піднесемо ще раз до квадрату обидві частини:

$$6x^2 + 4x + 9x + 6 = 6x^2 + 15x$$

$$-2x = -6$$

$$x = 3.$$

Число 3 належить ОДЗ.

Відповідь: 3.

4. НЕРІВНОСТІ І СИСТЕМИ НЕРІВНОСТЕЙ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

4.1. ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ

Уміння доводити нерівності — це мистецтво, якому притаманні чіткість логічного мислення, наукова строгість доведеного, витонченість висновків, унікальність подальшого застосування.

Мистецтвом доводити нерівності оволодіти досить нелегко. Тут необхідний чималий досвід, інтуїція і, як у кожному мистецтві, вміння вільно застосовувати різні технічні прийоми.

Доведення нерівностей не підлягають алгоритмізації. Кожна нерівність має свою специфіку доведення.

Пошук методів доведення нерівностей — захопливе й нелегке завдання. Задачі на доведення нерівностей — найважчі й найцікавіші з розділу елементарної математики. Відсутність єдиного підходу до проблеми доведення нерівностей приводить до пошуку багатьох прийомів, придатних для доведення нерівностей конкретного виду.

Найбільш поширені методи доведення нерівностей:

- метод зведення до очевидного результату;
- метод використання класичних нерівностей;
- метод з використанням аналізу функції.

Потрібно застерегти, що ідеї, які застосовуються для доведення нерівностей, такі ж різноманітні, як і самі нерівності. Тому в деяких випадках загальні методи можуть привести до некрасивого й громіздкого розв'язання. Отже, в окремих випадках доцільно застосовувати нестандартний спосіб розв'язання, що кращий, ніж розв'язання, здобуте загальним методом. З цієї причини доведення нерівностей вимагає справжньої винахідливості, творчості, що робить математику захопливим предметом.

ПРИКЛАДИ

Приклад 1. Довести, що сума додатного числа й числа, оберненого до нього, не менше ніж 2, тобто $a + \frac{1}{a} \geq 2$, $a > 0$.

Доведення:

Розглянемо різницю між лівою і правою частинами нерівності та виконаємо тотожні перетворення:

$$a + \frac{1}{a} - 2 = (\sqrt{a})^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 - 2\sqrt{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} = \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \geq 0.$$

Оскільки різниця невід'ємна, то нерівність $a + \frac{1}{a} \geq 2$ правильна при всіх $a > 0$, причому рівність досягається при $a = 1$.

Нерівність доведено.

Приклад 2. Для $a > 0$, $b > 0$ доведіть нерівність

$$\frac{b}{b-a} + \frac{a+b}{a} - \frac{a}{b-a} + \frac{a}{b} \geq 4.$$

Доведення:

Виконаємо перетворення лівої частини нерівності:

$$\begin{aligned} \frac{b}{b-a} + \frac{a+b}{a} - \frac{a}{b-a} + \frac{a}{b} &= \left(\frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a}\right) + \frac{a}{a} + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) = \\ &= \frac{b-a}{b-a} + 1 + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) = 1 + 1 + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) = 2 + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) \geq 4, \end{aligned}$$

оскільки $\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) \geq 2$.

(як сума додатного числа і числа, оберненого до нього).

Нерівність доведено.

Приклад 3. Якщо a, b, c, d – додатні числа і $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то сума найбільшого і найменшого з них більша від суми двох останніх. Довести.

Доведення:

Нехай a – найбільше із чисел a, b, c, d . Із пропорції $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ отримаємо, що $d = b \cdot \frac{c}{a} = c \cdot \frac{b}{a}$.

Оскільки дроб $\frac{c}{a}$, $\frac{b}{a}$ менші від одиниці, то $d < b$, $d < c$. Отже, d – найменше число. Тому необхідно довести нерівність $a + d > b + c$.

Маємо:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1 \Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \Leftrightarrow a-b = \frac{b}{d}(c-d)$$

Оскільки $c-d > 0$, $\frac{b}{d} > 1$, то $a-b > c-d \Leftrightarrow a+d > b+c$.

Нерівність доведено.

Приклад 4. Доведіть нерівність $\frac{a^2}{2b} + \frac{b^2+c^2}{4c} \geq a$, де b, c – додатні числа.

Доведення:

Скористаємось нерівністю $(x-y)^2 \geq 0$. При $y > 0$ із неї слідує, що

$$\frac{x^2}{y} \geq 2x - y. \text{ Тому } \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{b} \geq \frac{1}{2}(2a - b) = a - \frac{b}{2}, \quad \frac{b^2+c^2}{4c} \geq \frac{2bc}{4c} = \frac{b}{2}.$$

Додавши ці нерівності, отримаємо шукану нерівність.

Нерівність доведено.

Нерівність Коші – Буняковського

Для довільних чисел $a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n$ виконується нерівність $|a_1b_1 + \dots + a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}$, причому рівність при $a_1^2 + \dots + a_n^2 \neq 0, b_1^2 + \dots + b_n^2 \neq 0$ досягається тоді і тільки тоді, коли $\frac{a_1}{b_1} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

Якщо ж деяке з чисел $b_i = 0$, то рівність досягається тоді і тільки тоді, коли відповідне $a_i = 0$. В такому разі відношення $\frac{a_i}{b_i}$ в пропорції домовляються писати формально.

Для доведення нерівності Коші – Буняковського введемо позначення $a = a_1^2 + \dots + a_n^2$, $b = b_1^2 + \dots + b_n^2$ і розглянемо неочевидний випадок $a \neq 0, b \neq 0$. Неважко перевірити, що $xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$. Якщо позначити $x = \frac{|a_i|}{\sqrt{a}}$, $y = \frac{|b_i|}{\sqrt{b}}$ то $\frac{|a_ib_i|}{\sqrt{ab}} \leq \frac{1}{2}(\frac{a_i^2}{a} + \frac{b_i^2}{b})$ для всіх i ($i = \overline{1, n}$), причому рівність досягається тоді і тільки тоді, коли $x = y$. Тому $|a_1b_1 + \dots + a_nb_n| \leq |a_1b_1| + \dots + |a_nb_n| \leq \frac{\sqrt{ab}}{2} \left(\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{a} + \frac{b_1^2 + \dots + b_n^2}{b} \right) = \sqrt{ab}$, причому рівність досягається тоді і тільки тоді, коли всі доданки $a_1b_1, \dots, a_nb_n$ мають однаковий знак і $\frac{|a_i|}{\sqrt{a}} = \frac{|b_i|}{\sqrt{b}}$, ($i = \overline{1, n}$), тобто коли $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \pm \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. Це означає, що $-\sqrt{ab} \leq a_1b_1 + \dots + a_nb_n \leq \sqrt{ab}$, причому ліва(права) рівність досягається тоді і тільки тоді, коли відношення $\frac{a_1}{b_1} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ є величина від'ємна (додатня).

Вираз $\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}$ називають середнім квадратичним чисел $a_1, \dots, a_n$. Якщо в нерівності Коші – Буняковського покласти $b_1 = \dots = b_n = \frac{1}{n}$, то отримують зв'язок між середнім арифметичним і середнім квадратичним $\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}$, причому рівність досягається тільки при $a_1 = \dots = a_n \geq 0$.

Приклад. Нехай $x_1 + \dots + x_n = n$. Тоді $x_1^2 + \dots + x_n^2 \geq n$, причому рівність досягається тільки при $x_1 = \dots = x_n = 1$.

Приклад 5. Довести нерівність

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc, \text{ де } a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0.$$

Доведення:

За нерівністю Коші $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}, \frac{a+c}{2} \geq \sqrt{ac} \Rightarrow (a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc$.

Нерівність доведено.

Приклад 6. Довести нерівність

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd},$$

де $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$

Доведення:

За нерівністю Коші

$$ad+bc \geq 2\sqrt{abcd} \Rightarrow (a+c)(b+d) \geq ab + 2\sqrt{abcd} + cd = (\sqrt{ab} + \sqrt{cd})^2.$$

Добувши квадратний корінь з обох частин нерівності отримуємо шукану нерівність.

Нерівність доведено.

4.2. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

У шкільному курсі алгебри розглядаються теореми, за допомогою яких розв'язуються основні типи ірраціональних нерівностей.

Теорема 1. Нерівність виду $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ рівносильна системі:
$$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}.$$

Теорема 2. Нерівність виду $\sqrt{f(x)} < g(x)$ рівносильна системі:
$$\begin{cases} f(x) < (g(x))^2 \\ g(x) > 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}.$$

Теорема 3. Нерівність виду $\sqrt{f(x)} > g(x)$ рівносильна сукупності двох систем:

$$\begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > (g(x))^2 \end{cases}.$$

ПРИКЛАДИ

Приклад 1. Розв'яжіть нерівність.

$$\sqrt{x^2 - 3x + 1} > \sqrt{2x - 3}.$$

Вказівка:

Застосуємо теорему 1

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 1 > 2x - 3 \\ 2x - 3 \geq 0 \end{cases}$$

Отримаємо

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 > 0 \\ x \geq 1,5 \end{cases}, \quad \begin{cases} x \in (-\infty; 1) \cup (4; +\infty) \\ x \in [1,5; +\infty) \end{cases}, \quad x \in (4; +\infty)$$

Відповідь: $x \in (4; +\infty)$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність

$$\sqrt{3x - x^2} < 4 - x.$$

Вказівка:

Застосуємо теорему 2

$$\begin{cases} 3x - x^2 < (4 - x)^2 \\ 4 - x > 0 \\ 3x - x^2 \geq 0 \end{cases}$$

Отримаємо

$$\begin{cases} 3x - x^2 < 16 - 8x + x^2 \\ x < 4 \\ x \cdot (3 - x) \geq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x^2 - 11x + 16 > 0 \\ x < 4 \\ x \cdot (3 - x) \geq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x < 4 \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$



$$0 \leq x \leq 3$$

Відповідь: $[0;3]$.

Приклад 3. Розв'язати нерівність.

$$\sqrt{x^2 - 2x} \geq 4 - x.$$

Вказівка:

Застосуємо теорему 3

$$\begin{cases} 4 - x < 0 \\ x^2 - 2x \geq 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 4 - x \geq 0 \\ x^2 - 2x \geq (4 - x)^2 \end{cases}$$

Отримаємо

$$\begin{cases} x > 4 \\ x \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty) \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x \leq 4 \\ x^2 - 2x \geq 16 - 8x + x^2 \end{cases}$$

$$x \in (4; +\infty) \quad \text{або} \quad \begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq 2\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{Отже, } x \in \left[2\frac{2}{3}; +\infty\right).$$

$$\text{Відповідь: } \left[2\frac{2}{3}; +\infty\right).$$

4.3. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕРІВНОСТЕЙ МЕТОДОМ ІНТЕРВАЛІВ

Щоб розв'язати нерівності методом інтервалів потрібно: 1) знайти ОДЗ нерівності; 2) знайти нулі функції; 3) відмітити нулі функції на ОДЗ і знайти знак функції на кожному проміжку, на які розбивається ОДЗ; 4) записати відповідь, враховуючи знак нерівності.

ПРИКЛАДИ

Приклад 1. Розв'язати нерівність

$$\frac{2}{x-3} \geq 1.$$

Вказівка:

$$\frac{2-x+3}{x-3} \geq 0$$

$$\frac{x-5}{x-3} \leq 0$$

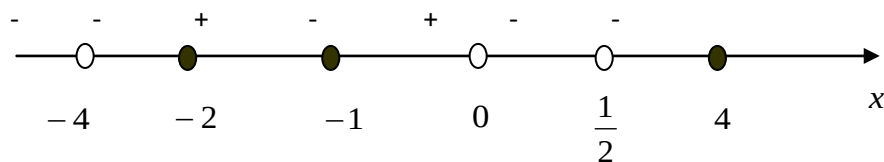
Відповідь: $x \in (3; 5]$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність

$$\frac{(x+1)^3(4-x)^4(x+2)}{x(4+x)^4(1-2x)^3} \geq 0.$$

Вказівка:

$$x_1 = -1, x_2 = 4, x_3 = -2, x_4 = 0, x_5 = -4, x_6 = \frac{1}{2}$$



Відповідь: $x \in [-2; -1] \cup (0; \frac{1}{2}), x = 4$.

Приклад 3. Розв'яжіть нерівність

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-1}.$$

Вказівка:

Зведемо нерівність до виду $f(x) > 0$ і розв'яжемо її методом інтервалів.

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-1} > 0$$

$$f(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-1}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases}, \begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq 1 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}, x \geq 1$$

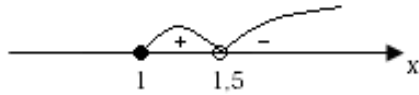
Щоб знайти нулі функції $f(x)$, використаємо рівняння-наслідки. Щоб вилучити сторонні корені, виконаємо перевірку одержаних результатів.

Нулі функції $f(x)$:

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-1} = 0$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-1}$$

$$\begin{aligned}
(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1})^2 &= (\sqrt{2x-1})^2 \\
x+3 - 2 \cdot \sqrt{x+3} \cdot \sqrt{x-1} + x-1 &= 2x-1 \\
2 \cdot \sqrt{x+3} \cdot \sqrt{x-1} &= 3 \\
4 \cdot (x+3) \cdot (x-1) &= 9 \\
4x^2 + 8x - 21 &= 0 \\
x_1 = 1,5; \quad x_2 = -\frac{7}{2} &\text{ - сторонній корінь}
\end{aligned}$$



Відповідь: $[1; 1,5)$.

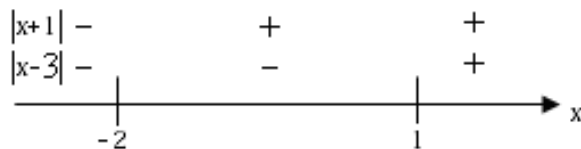
Приклад 4. Розв'язати нерівність

$$2\sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{(x-1)^2 + 4x} \leq x.$$

Вказівка:

$$\begin{aligned}
2 \cdot \sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{(x-1)^2 + 4x} &\leq x \\
2 \cdot \sqrt{(x-3)^2} - \sqrt{x^2 - 2x + 1 + 4x} &\leq x \\
2 \cdot \sqrt{(x-3)^2} - \sqrt{(x+1)^2} &\leq x \\
2 \cdot |x-3| - |x+1| &\leq x
\end{aligned}$$

Розкриємо знак кожного модуля на проміжках:



$$1) \begin{cases} x \leq -2 \\ -2x + 6 + x + 1 \leq x \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq -2 \\ -2x \leq -7 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 3,5 \end{cases}$$

Система немає розв'язку.

$$2) \begin{cases} -2 < x < 3 \\ -2x + 6 - x - 1 \leq x \end{cases} \quad \begin{cases} -2 < x < 3 \\ -4x \leq -5 \end{cases} \quad \begin{cases} -2 < x < 3 \\ x \geq 1,25 \end{cases} \quad x \in [1,25; +\infty)$$

$$3) \begin{cases} x \geq 3 \\ 2x - 6 - x - 1 \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 3 \\ 0x \leq 7 \end{cases} \quad x \in [3; +\infty)$$

Відповідь: $[1,25; +\infty)$.

4.4. ВИКОРИСТАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ЗРОСТАННЯ І СПАДАННЯ ФУНКЦІЇ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕРІВНОСТЕЙ

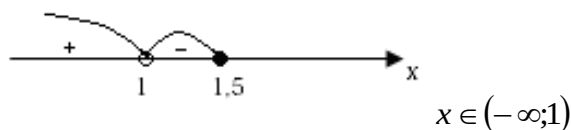
Приклад 1. Розв'язати нерівність

$$\sqrt[6]{3-2x} > 2x^3 - 1.$$

Вказівка:

ОДЗ: $3-2x \geq 0$, $x \in (-\infty; 1,5]$. Нехай $f(x) = \sqrt[6]{3-2x}$; $g(x) = 2x^3 - 1$.

Коренем рівняння $f(x) = g(x)$ є число $x = 1$. Оскільки функція $g(x)$ зростає на $(-\infty; 1,5]$, а функція $f(x)$ спадає на цьому проміжку, то $x = 1$ єдиний корінь рівняння. Знайдемо знак функції $f(x) - g(x)$



Відповідь: $(-\infty; 1)$.

Приклад 2. Розв'яжіть нерівність

$$\sqrt{x-1} \geq 1 + 2x - x^2.$$

Вказівка:

ОДЗ змінної: $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$

Введемо в розгляд функції $f(x) = \sqrt{x-1}$; $g(x) = 1 + 2x - x^2$.

Графіком функції $g(x)$ є парабола, вітки якої напрямлені вниз і на проміжку $[1; +\infty)$ ця функція є спадною. Функція $f(x) = \sqrt{x-1}$ є зростаючою на $[1; +\infty)$.

Знайдемо корені рівняння:

$$f(x) = g(x)$$

$$\sqrt{x-1} = 1 + 2x - x^2$$

$$x - 1 = 1 + 2x - x^2 + 2x + 4x^2 - 2x^3 - x^2 - 2x^3 + x^4$$

$$x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = 0.$$

Шукаємо корені рівняння серед дільників вільного коефіцієнта: ± 1 ; ± 2 .

Легко бачити, що $x = 2$ є коренем рівняння.

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 3x + 2 \\ - (x^4 - 2x^3 - 2x - 1) \\ \hline -2x^3 + 2x^2 + 3x + 3 \\ - (-2x^3 + 4x^2) \\ \hline -2x^2 + 3x + 3 \\ - (-2x^2 + 4x) \\ \hline -x + 3 \\ - (-x + 2) \\ \hline 1 \end{array} & \begin{array}{l} x-2 \\ \hline x^3 - 2x^2 - 2x - 1 \end{array} \end{array}$$

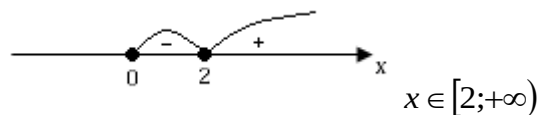
$$(x-2) \cdot (x^3 - 2x^2 - 2x - 1) = 0$$

$$x^3 - 2x^2 - 2x - 1 \neq 0$$

Шляхом перевірки встановлюємо, що $x = 2$ є коренем рівняння.

Знайдемо знак функції:

$$f(x) = \sqrt{x-1} - (1 + 2x - x^2)$$



Відповідь: $[2; +\infty)$.

5. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ І СИСТЕМИ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

За допомогою різних прийомів і методів (наприклад, ввівши нову змінну, звівши до однорідного рівняння, розклавши на множники, використавши рівносильні перетворення) багато тригонометричних рівнянь можна звести до найпростіших.

Розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей проводимо за схемою: знаходимо розв'язки на проміжку, довжина якого дорівнює періоду даної функції, а усі інші розв'язки відрізняються від знайдених на Tn , де T – період даної функції, $n \in Z, n \neq 0$.

Розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей можна інтерпретувати за допомогою одиничного кола.

ПРИКЛАДИ

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\sin x - \cos 2x = 0.$$

Вказівка:

$$\sin x - (1 - 2\sin^2 x) = 0$$

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\text{Нехай } \sin x = t, |t| \leq 1$$

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4}; \quad t_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}; x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$$

$$t_2 = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$$

Відповідь: $x_1 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z, x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$\sin x - \sin 3x + \cos 2x = 0.$$

Вказівка:

$$2\sin \frac{x-3x}{2} \cos \frac{x+3x}{2} + \cos 2x = 0$$

$$-2\sin x \cos 2x + \cos 2x = 0$$

$$-\cos 2x(2\sin x - 1) = 0$$

$$\cos 2x = 0 \quad \text{або} \quad 2\sin x - 1 = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n, n \in Z; \sin x = \frac{1}{2}; x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$$

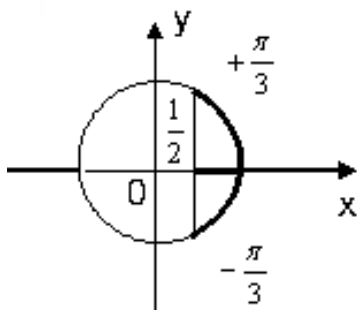
Відповідь: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n, n \in Z; x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$

Приклад 3. Розв'язати нерівність

$$\frac{\cos x}{\cos x - \frac{1}{2}} \geq 1.$$

Вказівка:

$$\text{Нехай } \cos x = t, |t| \leq 1$$



$$\frac{t}{t - \frac{1}{2}} \geq 1; t > \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} < \cos x$$

Відповідь: $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$

Приклад 4. Розв'язати нерівність

$$\frac{\sin x - 2}{4\sin^2 x - 1} > 2.$$

Вказівка:

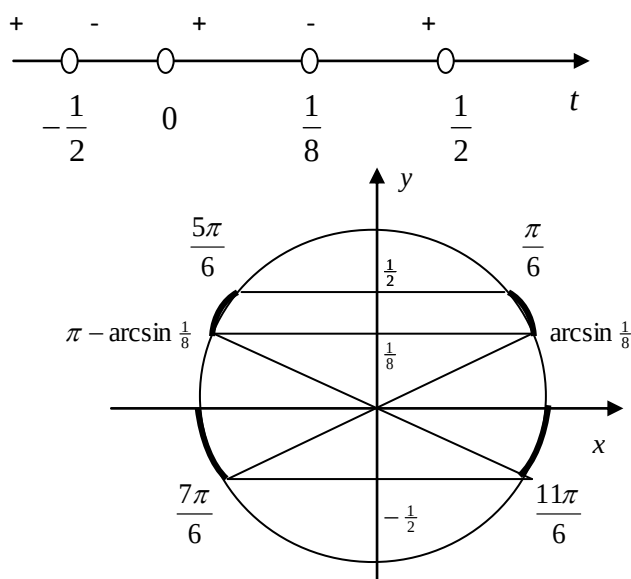
Заміна $t = \sin x, |t| \leq 1$

$$\frac{t - 2 - 8t^2 + 2}{4t^2 - 1} > 0,$$

$$\frac{t(8t - 1)}{(2t - 1)(2t + 1)} < 0.$$

$$t_1 = \frac{1}{8}, \quad t_2 = \frac{1}{2}, \quad t_3 = -\frac{1}{2}, \quad t_4 = 0.$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} < \sin x < 0, \\ \frac{1}{8} < \sin x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$



Відповідь: $x \in \left(\arcsin \frac{1}{8} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \pi - \arcsin \frac{1}{8} + 2\pi n\right) \cup$
 $\cup \left(\pi + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{11\pi}{6} + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$

Приклад 5. Доведіть нерівність $\sin^{2n} \alpha + \cos^{2n} \alpha \leq 1$, де n – натуральне число.

Вказівка:

$\sin^{2n} \alpha + \cos^{2n} \alpha \leq \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Це випливає з того, що $\sin^2 \alpha, \cos^2 \alpha \in [0; 1]$ і тому $\sin^{2n} \alpha \leq \sin^2 \alpha, \cos^{2n} \alpha \leq \cos^2 \alpha$.

Відповідь: доведено.

Приклад 6. Розв'язати нерівність $\cos^4 x + \sin^{10} x \geq 1$.

Вказівка:

Оскільки $\cos^4 x \leq \cos^2 x$ та $\sin^{10} x \leq \sin^2 x$, то

$\cos^4 x + \sin^{10} x \leq \cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Тому $\cos^4 x + \sin^{10} x = 1$.

Рівність досягається, якщо нерівності перетворюються в рівності, тобто коли $0 = \cos^4 x - \cos^2 x = \cos^2 x \sin^2 x = \frac{\sin^2 2x}{4}$, а значить, коли $x = \pi n$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 7. Знайти найменший розв'язок рівняння $\sin x - \cos x = 1$, що належить проміжку $(0; \pi)$.

Вказівка:

$$\sin x - \cos x = 1, \text{ де } x \in (0; \pi)$$

$$\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$$

$$2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left(x - \frac{\pi}{4} = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$x = 45^\circ + (-1)^k \cdot 45^\circ + 180^\circ k$$

При $k = -1, x = -180^\circ < 0$

$$k = 0, x = 90^\circ;$$

$$k = 1, x = 180^\circ.$$

Відповідь: 90° .

Приклад 8. Знайти найбільший розв'язок (в градусах) рівняння $\sqrt{2} \sin 3x = \sqrt{3} - \sqrt{2} \cos 3x$, що належить проміжку $(0; \pi)$.

Вказівка:

Запишемо рівняння у вигляді

$$\sqrt{2} \sin 3x + \sqrt{2} \cos 3x = \sqrt{3}, \quad \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2}} = \frac{1}{2}.$$

Зробимо підстановку

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \varphi, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \varphi. \text{ Тоді } \cos(3x - \varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$3x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$x = 15^\circ \pm 10^\circ + 120^\circ \cdot n$$

Розглянемо випадки

$$n = -1, x_1 = 15^\circ + 10^\circ - 120^\circ = -95^\circ$$

$$x_2 = 15^\circ - 10^\circ - 120^\circ = -115^\circ$$

$$n = 0, x_1 = 15^\circ + 10^\circ + 120^\circ = 145^\circ$$

$$x_2 = 15^\circ - 10^\circ + 120^\circ = 125^\circ$$

Відповідь: 145° .

Приклад 9. Розв'яжіть рівняння $\sin^2 x - (2a + 1)\sin x + a^2 + a = 0$ для всіх значень параметра a .

Вказівка: Позначимо $t = \sin x$. Задане рівняння має вигляд

$t^2 - (2a + 1)t + a^2 + a = 0$, дискримінант рівняння $D = (2a + 1)^2 - 4(a^2 + a) = 1$, $t = \frac{2a+1 \pm 1}{2}$. Тому $t = a$ або $t = a + 1$.

Рівняння $\sin x = a$ має розв'язок, який знаходиться за формулою $x_1 = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in Z$ тільки при $a \in [-1; 1]$. Аналогічно рівняння $\sin x = a + 1$ має розв'язок $x_2 = (-1)^k \arcsin(a + 1) + \pi k$, $k \in Z$ тільки при $a + 1 \in [-1; 1]$ тобто коли $a \in [-2; 0]$.

Відповідь:

при $a \in (-\infty; -2)$ рівняння розв'язків не має,

при $a \in [-2; -1)$ $x = x_2$,

при $a \in [-1; 0]$ $x = x_1$ і $x = x_2$,

при $a \in (0; 1]$ $x = x_1$,

при $a \in (1; +\infty)$ рівняння розв'язків не має.

6. ПОКАЗНИКОВІ РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ І СИСТЕМИ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Показникова функція є математичною моделлю багатьох процесів, які відбуваються в природі та в діяльності людини.

При розв'язуванні показникових рівнянь найбільш використовуваними є методи: зведення до однакової основи; винесення спільного множника за дужки; зведення до квадратного рівняння; введення нової змінної; графічний.

При розв'язуванні показникових нерівностей використовують монотонність показникової функції.

ПРИКЛАДИ

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$2^{5x-1} \cdot 3^{4x+1} \cdot 7^{3x+3} = 504^{x-2}$$

Вказівка:

Помічаємо, що $504 = 9 \cdot 8 \cdot 7$;

$$504^{x-2} = 2^{3x-6} \cdot 3^{2x-4} \cdot 7^{x-2}.$$

Поділимо обидві частини рівняння на 504^{x-2} (тобто на $2^{3x-6} \cdot 3^{2x-4} \cdot 7^{x-2}$)

Отримаємо

$$2^{2x+5} \cdot 3^{2x+5} \cdot 7^{2x+5} = 1;$$

$$42^{2x+5} = 42^0;$$

$$2x + 5 = 0;$$

$$x = -2,5$$

Відповідь: $-2,5$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$.

Вказівка:

$$3 \cdot 2^{2x} + 2 \cdot 3^{2x} - 5 \cdot 6^x = 0$$

Поділимо задану рівність на 6^x

$$3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x - 5 = 0$$

$$\text{Нехай } t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

$$3t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{6}; \quad \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^0 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Відповідь: $x_1 = 0, x_2 = 1$.

Приклад 3. Розв'язати нерівність $27^x + 12^x \leq 2 \cdot 8^x$.

Вказівка:

Поділимо нерівність на 8^x .

Отримаємо

$$\left(\frac{27}{8}\right)^x + \left(\frac{12}{8}\right)^x \leq 2$$

$$\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2 \leq 0$$

$$\text{Нехай } t = \left(\frac{3}{2}\right)^x, \text{ тоді } t^3 + t - 2 \leq 0$$

Рівняння $t^3 + t - 2 = 0$ має корінь $t = 1$. Тоді

$$\begin{array}{r|l} \frac{t^3 + t - 2}{t^2 + t} & \frac{t-1}{t^2 + t + 2} \\ \hline - \frac{t^2 - t}{t^2 + t} & \\ \hline \frac{2t - 2}{t^2 + t} & \\ \hline - \frac{2t - 2}{t^2 + t} & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$t^2 + t + 2 > 0 \text{ для всіх } t \in (-\infty; +\infty)$$

Отже $t^3 + t - 2 \leq 0$ при $t \leq 1$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x \leq 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x \leq \left(\frac{3}{2}\right)^0 \Rightarrow x \leq 0.$$

Відповідь: $x \in (-\infty; 0]$.

Приклад 4. Знайти область визначення функції

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{3^{x+2} - 27}}.$$

Вказівка:

ДОЗ: $3^{x+2} - 27 > 0$.

Звідси легко бачити, що $x \in (1; +\infty)$.

Відповідь: $D(f) \in (1; +\infty)$.

Приклад 5. Знайти найменший розв'язок нерівності

$$(2x^2 + x - 15)(2^{x^2 - 3x} - 16) \leq 0.$$

Вказівка:

Перша проблема, яка постане перед учнями, – неможливість класифікувати дану нерівність, і тут в нагоді стане установка про певну універсальність методу інтервалів. Застосувавши його, одержимо, що $x \in [-3; -1] \cup [2, 5; 4]$, тобто найменший розв'язок дорівнює -3 .

Відповідь: -3 .

7. ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ І СИСТЕМИ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Основні методи розв'язування логарифмічних рівнянь: за означенням логарифма; метод потенціювання; метод рівносілних перетворень; використання логарифмічних формул; метод заміни; метод переходу до однієї основи; метод логарифмування; використання властивості монотонності функції; графічний метод. При цьому використовуються основні логарифмічні формули.

ПРИКЛАДИ

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3.$$

Вказівка:

Перейдемо до логарифмів з основою 2: $\frac{\log_2 16}{\log_2 x^2} + \frac{\log_2 64}{\log_2 2x} = 3$.

Так як з умови випливає, що $x > 0$, то $\log_2 x^2 = 2 \log_2 x$.

$$\text{Тоді } \frac{4}{2 \log_2 x} + \frac{6}{\log_2 2 + \log_2 x} = 3$$

Нехай $\log_2 x = t$,

$$\text{Тоді } \frac{2}{t} + \frac{6}{1+t} = 3$$

$$t = 2 \text{ або } t = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2^2 \\ x = 2^{-\frac{1}{3}} \end{cases}$$

Відповідь: $4; 2^{-\frac{1}{3}}$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$\log_7(x + 8) = -x.$$

Вказівка:

Розглянемо функції $f(x) = \log_7(x + 8)$ і $g(x) = -x$

Функція $f(x)$ – зростаюча, а функція $g(x)$ – спадна.

Тоді рівняння $f(x) = g(x)$ має не більше одного кореня.

Так як $f(-1) = g(-1)$, то $x = -1$ – єдиний корінь даного рівняння.

Відповідь: -1 .

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 4^{\frac{x+y}{x}} = 32 \\ \log_3(x - y) = 1 - \log_3(x + y) \end{cases}$$

Вказівка:

$$\begin{cases} 2^{\frac{2x+2y}{y+x}} = 2^5 \\ \log_3(x - y) + \log_3(x + y) = 1 \end{cases}$$

З першого рівняння системи випливає, що $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2}$

Тоді $\frac{x}{y} = 2$ або $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$.

Отже, дана система рівносильна сукупності двох систем

$$1) \begin{cases} \frac{x}{y} = 2 \\ \log_3(x - y) + \log_3(x + y) = 1 \end{cases}$$

$$\log_3 y + \log_3 3y = 1$$

$$\log_3 y + (\log_3 3 + \log_3 y) = 1$$

$$2\log_3 y = 0 ; y = 1. \text{ Тоді } x = 2$$

$$2) \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \\ \log_3(x - y) + \log_3(x + y) = 1 \end{cases}$$

Ця система розв'язків не має.

Відповідь: $(2; 1)$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність

$$\log_2^2(x - 1)^2 - \log_{2^{-1}}(x - 1) - 5 > 0.$$

Вказівка:

Оскільки область визначення даної нерівності проміжок $(1; +\infty)$, то виконується рівність $\log_2(x - 1)^2 = 2\log_2(x - 1)$.

Тоді дану нерівність можна переписати

$$4\log_2^2(x - 1)^2 + \log_2(x - 1) - 5 > 0$$

$$\text{Нехай } \log_2(x - 1) = t$$

$$4t^2 + t - 5 > 0$$

$$\begin{cases} t < -\frac{5}{4} \\ t > 1 \end{cases}$$

$$\text{Отже, } \begin{cases} \log_2(x - 1) < -\frac{5}{4} \\ \log_2(x - 1) > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_2(x - 1) < \log_2 2^{-\frac{5}{4}} \\ \log_2(x - 1) > \log_2 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x - 1 < 2^{-\frac{5}{4}} \\ x - 1 > 2 \\ 1 < x < 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{32}} \\ x > 3 \end{cases}$$

Відповідь: $(1; 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{32}}) \cup (3; +\infty)$

Приклад 5. Розв'язати нерівність: $\log_3(x + 7) < 4 - x$.

Вказівка: $\log_3(x + 7) + x - 4 < 0$

Розглянемо функцію $f(x) = \log_3(x + 7) + x - 4$

Вона зростає на $D(f) = (-7; +\infty)$. Зауважимо, що $f(2) = 0$. Отже, при $x > 2$ отримаємо, що $f(x) > f(2) = 0$, а при $-7 < x < 2$, отримаємо що $f(x) < f(2) = 0$

Відповідь: $(-7; 2)$.

8. РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ З ПАРАМЕТРОМ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Завдання з параметрами зводяться до знаходження умов на параметр при яких корені рівняння або нерівності систем рівнянь або нерівностей існують. Значення параметра при якому корені відсутні, належать проміжку при якому рівняння або нерівності, система рівнянь або нерівностей не мають розв'язків.

Для розв'язання таких завдань доцільно:

1. Вказати ОДЗ змінної величини і параметра.
2. Виразити змінну величину через параметр.
3. З'ясувати при яких значеннях параметра змінна величина задовольняє або не задовольняє ОДЗ.
4. Розглянути всі можливі значення параметра.
5. Вказати відповідь при кожному значенні параметра змінюючи його від мінус до плюс нескінченності.

8.1. ТИПОВІ ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ ЗАЛЕЖНО ВІД ПАРАМЕТРА a

До таких прикладів відносяться дробово-раціональні рівняння і нерівності, чисельники і знаменники яких розкладені в добуток лінійних множників. Найпростіші з них розглянуті у прикладах 1 – 4.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\frac{x+1}{x+a} = 0$ при всіх значеннях параметра a .

Вказівка:

ОДЗ: $x \in (-\infty; -a) \cup (-a; +\infty)$

Значення $x = -1$ є коренем рівняння, якщо $-1 \neq -a$, тобто при $a \neq 1$.

При $a = 1$ рівняння коренів не має.

Відповідь:

Якщо $a \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, то $x = -1$.

Якщо $a = 1$, то рівняння коренів не має.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\frac{a(x+1)}{x+a} = 0$ при всіх значеннях параметра a .

Вказівка:

ОДЗ: $x \in (-\infty; -a) \cup (-a; +\infty)$.

Якщо $a \neq 0$, то $\frac{x+1}{x+a} = 0$. Як і в прикладі 1, відмітимо, що $x = -1$ є розв'язком рівняння при $a \neq 1$, а при $a = 1$ рівняння коренів не має.

Якщо $a = 0$, то x будь-яке число, яке відмінне від 0.

Відповідь:

Якщо $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$, то $x = -1$.

Якщо $a = 0$, то $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Якщо $a = 1$, то рівняння коренів не має.

Дробово-раціональні нерівності, чисельники і знаменники яких розкладені в добуток лінійних множників, розв'язуються методом інтервалів.

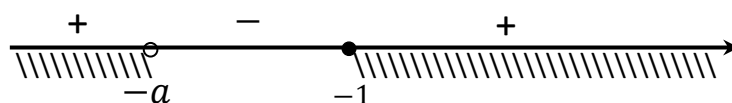
Приклад 3. Розв'язати нерівність $\frac{x+1}{x+a} \geq 0$ при всіх значеннях параметра a .

Вказівка:

ОДЗ: $x \in (-\infty; -a) \cup (-a; +\infty)$.

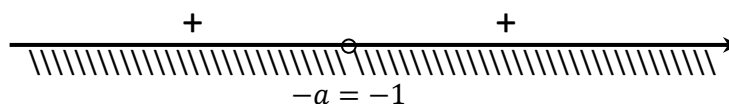
Можуть трапитися три випадки розташування параметра a відносно -1

1. $-a < -1$, тобто $a > 1$



Тоді $x \in (-\infty; -a) \cup [-1; +\infty)$

2. $-a = -1$, тобто $a = 1$



Тоді $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$

3. $-a > -1$, тобто $a < 1$



Тоді $x \in (-\infty; -1] \cup (-a; +\infty)$.

Відповідь:

Якщо $a \in (-\infty; 1)$, то $x \in (-\infty; -1] \cup (-a; +\infty)$.

Якщо $a = 1$, то $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

Якщо $a \in (1; +\infty)$, то $x \in (-\infty; -a) \cup [-1; +\infty)$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\frac{a(x+1)}{x+a} \geq 0$ при всіх значеннях параметра a .

Вказівка:

ОДЗ: $x \in (-\infty; -a) \cup (-a; +\infty)$.

Якщо $a < 0$, то $\frac{x+1}{x+a} \leq 0$. В такому разі $-a > 0 > -1$. Тоді $x \in [-1; -a)$.

Якщо $a = 0$, то x будь-яке число, яке відмінне від 0.

Якщо $a > 0$, то $\frac{x+1}{x+a} \geq 0$ і можна скористатись розв'язком прикладу 3.

Відповідь:

Якщо $a \in (-\infty; 0)$, то $x \in [-1; -a)$.

Якщо $a = 0$, то $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Якщо $a \in (0; 1)$, то $x \in (-\infty; -1] \cup (-a; +\infty)$.

Якщо $a = 1$, то $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

Якщо $a \in (1; +\infty)$, то $x \in (-\infty; -a) \cup [-1; +\infty)$.

8.2. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДІВ

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\frac{\sqrt{x^2 + (4a-4)x + 4a^2} - 2\sqrt{2a}}{5 \cdot 5^{2x} - 5^{a+x} - 5^{a-1} + 5^x} = 0$ залежно від значень параметра a .

Вказівка:

Розв'язками рівняння є значення x при яких чисельник дорівнює нулю, а знаменник відмінний від нуля.

При $a < 0$ рівняння не має змісту. Тому $a \geq 0$.

Розглянемо рівняння $\sqrt{x^2 + (4a-4)x + 4a^2} = 2\sqrt{2a}$. З нього слідує квадратне рівняння $x^2 + (4a-4)x + 4a^2 - 8a = 0$, яке має корені $-2a$ і $-2a + 4$.

Позначимо $t = 5^x$. Оскільки знаменник відмінний від нуля, то має місце нерівність $5t^2 + (1 - 5^a)t - 5^{a-1} \neq 0$. Тому $t \neq -\frac{1}{5}$ і $t \neq 5^{a-1}$. Нерівність $5^x \neq -\frac{1}{5}$ завжди виконується, а нерівність $5^x \neq 5^{a-1}$ має місце при $x \neq a - 1$.

Знайдемо умови на a , при яких $x = -2a$ є розв'язком заданого рівняння.

Це має місце, якщо $-2a \neq a - 1$, тобто при $a \neq \frac{1}{3}$.

Аналогічно $x = -2a + 4$ є розв'язком заданого рівняння, якщо $-2a + 4 \neq a - 1$, тобто при $a \neq \frac{5}{3}$.

Відповідь:

Якщо $a \in (-\infty; 0)$, то розв'язків не має.

Якщо $a \in [0; \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; \frac{5}{3}) \cup (\frac{5}{3}; +\infty)$, то розв'язками є $x = -2a$ і $x = -2a + 4$.

Якщо $a = \frac{1}{3}$, то $x = -2a + 4 = \frac{10}{3}$.

Якщо $a = \frac{5}{3}$, то $x = -2a = -\frac{10}{3}$.

Приклад 2. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} > a$ при всіх значеннях параметра a .

Вказівка:

ОДЗ: $\begin{cases} a+x \geq 0 \\ a-x \geq 0 \end{cases}$. Тому $-a \leq x \leq a$ і $2a \geq 0$. Це означає, що при $a < 0$ задана нерівність розв'язків не має.

Нехай $a \geq 0$. Піднесемо задану нерівність до квадрату. Тому

$$a+x+a-x+2\sqrt{a^2-x^2} > a^2.$$

Розв'яжемо ірраціональну нерівність $2\sqrt{a^2-x^2} > a(a-2)$.

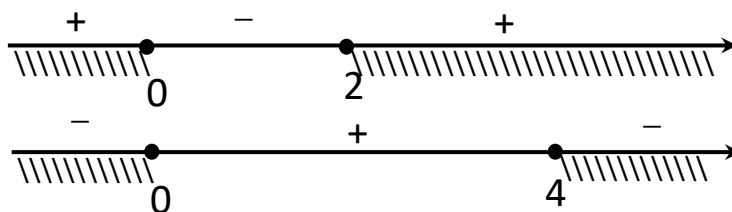
Якщо $a(a-2) < 0$, то $a \in (0; 2)$ і отримана нерівність має місце для всіх x із ОДЗ, тобто при $x \in [-a; a]$.

Якщо $a(a-2) \geq 0$, то після піднесення ірраціональної нерівності до квадрату отримуємо нерівність $4(a^2-x^2) > a^2(a-2)^2$, яка після перетворення має вигляд $4x^2 < a^3(4-a)$.

Якщо $a^3(4-a) \leq 0$, то отримана нерівність не має розв'язку.

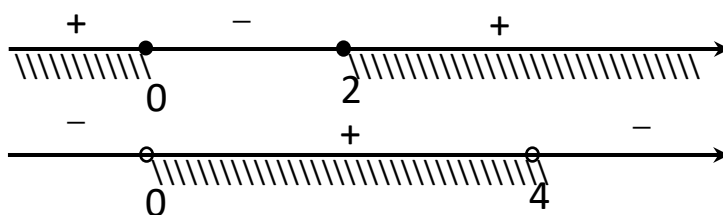
Якщо $a^3(4-a) > 0$, то $x \in (-\frac{\sqrt{a^3(4-a)}}{2}; \frac{\sqrt{a^3(4-a)}}{2})$.

Отже, якщо $\begin{cases} a(a-2) \geq 0 \\ a^3(4-a) \leq 0 \end{cases}$,



то $a \in \{0\} \cup [4; +\infty)$ і задана нерівність розв'язків не має.

Якщо $\begin{cases} a(a-2) \geq 0 \\ a^3(4-a) > 0 \end{cases}$,



то $a \in [2; 4)$ і $x \in (-\frac{a\sqrt{4a-a^2}}{2}; \frac{a\sqrt{4a-a^2}}{2})$.

Відповідь:

Якщо $a \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$, то розв'язків не має.

Якщо $a \in (0; 2)$, то $x \in [-a; a]$.

Якщо $a \in [2; 4)$, то $x \in (-\frac{a\sqrt{4a-a^2}}{2}; \frac{a\sqrt{4a-a^2}}{2})$.

Приклад 3. Нехай x_1, x_2 – корені рівняння $x^2 + ax + 2009 = 0$. При якому значенні параметра a сума квадратів коренів $x_1^2 + x_2^2$ є найменшою?

Вказівка:

Дійсні корені x_1, x_2 існують, якщо $D=a^2 - 4 \cdot 2009 \geq 0$.

Тому $a^2 \geq 4 \cdot 2009$.

За теоремою Вієта

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 2 \cdot 2009 \geq 4 \cdot 2009 - 2 \cdot 2009 = 4018.$$

Сума квадратів $x_1^2 + x_2^2$ є найменшою, якщо $a^2 = 4 \cdot 2009$.

Відповідь: $\pm 2\sqrt{2009}$.

Приклад 4. При якому значенні a корені рівняння $x^2 + 2x(a-1)x + 4a - 4 = 0$ задовольняють умову $x_1 < -2 < x_2$?

Вказівка:

Зауважимо, що графіком рівняння $y = x^2 + 2x(a-1)x + 4a - 4$ є парабола вітками вгору. Згідно умови задачі число -2 має міститися між коренями квадратичного тричлена. Отже, значення параболи при $x=-2$ має бути від'ємним (це необхідна і достатня умова того, щоб $x_1 < -2 < x_2$). Тому має виконуватись нерівність $(-2)^2 + 2(-2)(a-1)(-2) + 4a - 4 < 0$. Отже, $a < \frac{2}{3}$.

Відповідь: при $a \in (-\infty; \frac{2}{3})$.

9. СИСТЕМИ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ З ПАРАМЕТРОМ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Приклад 1. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} |x-y| = |x-a| \\ \lg(y-a) = \lg(4a^2 + x - x^2) \end{cases}$ залежно від значень параметра a .

Вказівка:

ОДЗ: $y - a = 4a^2 + x - x^2 > 0$.

Має місце система рівнянь

$$\begin{cases} x - y = \pm(x - a) \\ y - a = 4a^2 + x - x^2 \end{cases}.$$

Оскільки $y > a$, то $y \neq a$, $x - y \neq x - a$.

Тому $x - y = a - x$, $y = 2x - a$. Знайдене значення y підставимо у друге рівняння системи. Отримаємо рівняння $2(x - a) = 4a^2 + x - x^2$, яке після перетворення має вигляд $x^2 + x - 4a^2 - 2a = 0$. Знаходимо, що $x = -1 - 2a$ або $x = 2a$. Підставимо знайдені значення x в нерівність $4a^2 + x - x^2 > 0$. Отримаємо, що $x = -1 - 2a$ є розв'язком нерівності, якщо $a < -\frac{1}{3}$ і $x = 2a$, якщо $a > 0$. Відповідні значення $y = -5a - 2$ і $y = 3a$ знаходимо із рівності $y = 2x - a$.

Якщо $a \in [-\frac{1}{3}; 0]$, то коренів рівняння $x^2 + x - 4a^2 - 2a = 0$ не має.

Відповідь:

Якщо $a \in (-\infty; -\frac{1}{3})$, то розв'язком є пара чисел $(-2a - 1; -5a - 2)$.

Якщо $a \in [-\frac{1}{3}; 0]$, то розв'язків не має.

Якщо $a \in (0; +\infty)$, то розв'язком системи є пара чисел $(2a; 3a)$.

Приклад 2. Задано систему нерівностей

$$\begin{cases} \pi^2 - x^2 \geq 0 \\ (\log_3 a) \cdot (2\sin^2 x - (2a - 1)\sin x - a) \geq 0 \end{cases}$$

де x – змінна, a – додатна стала.

1. Розв'яжіть першу нерівність цієї системи.
2. Знайдіть множину розв'язків другої нерівності залежно від значень a .
3. Визначте всі розв'язки системи залежно від значень a .

Вказівка:

1. Нерівність $\pi^2 - x^2 \geq 0$ має розв'язок $x \in [-\pi; \pi]$.
2. Друга нерівність має зміст при $a > 0$.

Нехай $t = \sin x$.

Тоді друга нерівність має вигляд $(\log_3 a)(2t^2 - (2a - 1)t - a) \geq 0$.

Після розкладу квадратного тричлена на множники друга нерівність системи має вигляд $(\log_3 a)(t - a)(t + \frac{1}{2}) \geq 0$.

Можуть трапитись три випадки: $\log_3 a < 0, \log_3 a = 0, \log_3 a > 0$.

У випадку $\log_3 a < 0$

$$\begin{cases} 0 < a < 1 \\ (t - a)(t + \frac{1}{2}) \leq 0, \quad t \in [-\frac{1}{2}; a] \end{cases}$$

$$x \in \left[\pi - \arcsin a + 2\pi n; \frac{7}{6}\pi + 2\pi n \right] \cup \left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \arcsin a + 2\pi n \right], n \in \mathbb{Z}.$$

У випадку $\log_3 a = 0$

$$a = 1, \quad t \in [-1; 1], \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

У випадку $\log_3 a > 0$

$$\begin{cases} a > 1 \\ (t - a)(t + \frac{1}{2}) \geq 0, \quad t \in (-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [a; +\infty) \end{cases}$$

$$x \in \left[-\frac{5}{6}\pi + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \right], n \in \mathbb{Z}.$$

3. Розв'язки системи нерівностей є розв'язками другої нерівності системи, які належать проміжку $[-\pi; \pi]$.

Відповідь:

Якщо $0 < a < 1$, то $x \in \left[-\pi; -\frac{5}{6}\pi \right] \cup \left[-\frac{\pi}{6}; \arcsin a \right] \cup [\pi - \arcsin a; \pi]$.

Якщо $a = 1$, то $x \in [-\pi; \pi]$.

Якщо $a > 1$, то $x \in \left[-\frac{5}{6}\pi; -\frac{\pi}{6} \right]$.

Список рекомендованої літератури

1. Вишенський В.А., Перестюк М.О., Самойленко А.М. Конкурсні задачі з математики. – К.: „Вища школа”, 2001. – 432 с.
2. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язання. – Вінниця. 2000. – 226 с.
3. Горштейн П.Н., Полянський В.Б., Якір М.С. Задачі с параметрами. – Киев: РПА „Текст” МП „Око”, 1992. – 288 с.
4. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу : підручн. для 10 кл. з поглибленим вивченням математики. – Х. : Гімназія, 2014. – 415 с. : іл.
5. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра : підручн. для 11 кл. з поглибленим вивченням математики у 2 ч. – Х. : Гімназія, 2011. Ч. 1. – 256 с. : іл.
6. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра : підручн. для 11 кл. з поглибленим вивченням математики у 2 ч. – Х. : Гімназія, 2011. Ч. 2. – 272 с. : іл.
7. Орос В.М., Петечук В.М., Петечук К.М., Петечук Ю.В., Сігетій І.П. Завдання та розв'язки районних і міських олімпіад з математики 2007 – 2013 років – навчально-методичний посібник, Ужгород, Закарпатський інститут післядипломної педагогічної освіти, 2019. – 120 с.
8. Орос В.М., Петечук В.М., Петечук К.М., Петечук Ю.В., Сігетій І.П. Методичні рекомендації щодо розв'язання завдань відкритої форми з розгорнутою відповіддю зовнішнього незалежного оцінювання з математики – методичні рекомендації, Ужгород, Закарпатський інститут післядипломної педагогічної освіти, 2020. – 56 с.
9. Орос В.М., Петечук В.М., Петечук К.М. Контрольно-практичні роботи з математики. Частина І. – Ужгород: Інформаційно-видавничий центр ЗІППО, 2006 – 200с.

Вибрані розділи елементарної математики / Az elemi matematika választott fejezetei: методичні вказівки до практичних занять для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання, освітня програма: «Середня освіта (Математика)», галузь знань: «01 Освіта/Педагогіка», спеціальність (спеціалізація): «014 Середня освіта (014.04 Математика)» / Розробник: Юлія Петечук. – Берегове: ЗУІ ім. Ф.Ракоці II, 2022. – 64 с. (українською мовою).

Методичні вказівки до лекційних та практичних занять з дисципліни «Вибрані розділи елементарної математики / Az elemi matematika választott fejezetei» розроблені на основі Освітньої програми підготовки магістрів з галузі знань «01 Освіта/Педагогіка» за напрямом «014 Середня освіта (Математика)» як для студентів денної, так і заочної форми навчання. Метою методичного посібника є узагальнення, систематизація і поглиблення знань слухачів з дисципліни «Вибрані розділи елементарної математики». У роботі розглядаються методи розв’язування алгебраїчних рівнянь вищих степенів, ірраціональних, тригонометричних, показникових, логарифмічних рівнянь, нерівностей і їх систем. У методичних вказівках описані базові перетворення графіків функцій і приклади їх застосування, пропонуються підходи і побудовані на них алгоритми, які покликані полегшити пошук і розв’язання найважчих завдань з математики – завдань з параметром.

Виробничо-практичне видання
Вибрані розділи елементарної математики / Az elemi matematika választott fejezetei
Методичні вказівки до теоретичних та практичних занять
2022 р.

*Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II
(протокол № 10 від «27» травня 2022 року)*

*Розглянуто та рекомендовано Навчально-методичною радою
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол № 10 від «28» червня 2022 року)*

*Рекомендовано до видання в електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол № 7 від «13» жовтня 2022 року)*

Підготовлено до видання в електронній формі (PDF) кафедрою математики та інформатики спільно з Видавничим відділом Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Розробник методичних вказівок:

Юлія ПЕТЕЧУК – доцент кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II, кандидат фізико-математичних наук

Рецензенти:

Віктор ОРОС – завідувач кафедри природничо-математичної освіти та інформаційних технологій Закарпатського інституту післядипломної педагогічної освіти, кандидат фізико-математичних наук, заслужений вчитель України (м. Ужгород)

Мирослав СТОЙКА – доцент кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Відповідальні за випуск:

Каталін КУЧІНКА – завідувач кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II, доцент, кандидат фізико-математичних наук

Олександр ДОБОШ – начальник Видавничого відділу ЗУІ ім. Ф.Ракоці II

За зміст методичних вказівок відповідальність несе розробник.

Видавництво: Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II (адреса: пл. Кошута 6, м. Берегове, 90202. Електронна пошта: foiskola@kmf.uz.ua) *Свідомо про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції Серія ДК 7637 від 19 липня 2022 року*

Шрифт «Times New Roman». Розмір сторінок методичних вказівок: A4 (210x297мм).