

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Закарпатський угорський інститут
імені Ференца Ракоці II
кафедра математики та інформатики

ВІКТОРІЯ ДЗЯМКО

ВИЩА МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ

Частина 1

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять студентів спеціальностей

071 Облік і оподаткування

072 Фінанси, банківська справа, страхування
та фондовий ринок (Фінансова безпека)

Берегово — 2024

Навчально-методичне видання розроблене на основі освітньої програми підготовки бакалаврів з галузі знань «07 Управління та адміністрування» спеціальностей « 071 Облік і оподаткування» та «072 Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок (Фінансова безпека), а також діючого законодавства в галузі вищої освіти з метою забезпечення здобувачів освіти денної та заочної форм навчання Закарпатського угорського інституту ім. Ф.Ракоці II методичними вказівками до вивчення дисципліни «Вища математика для економістів». У методичних вказівках коротко подано теоретичний матеріал, приклади розв'язування практичних завдань та пропонуються вправи для самостійної роботи.

Затверджено до використання у навчальному процесі на засіданні кафедри математики та інформатики ЗУІ ім.Ф.Ракоці II (протокол № 1 від «13» серпня 2024 року)

Розглянуто та рекомендовано Навчально-методичною радою Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II (протокол №22 від «26» серпня 2024 року)

Рекомендовано до видання в електронній формі (PDF) рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II (протокол №7 від «27» серпня 2024 року)

Підготовлено до видання в електронній формі (PDF) кафедрою математики та інформатики спільно з видавничим відділом ЗУІ імені Ференца Ракоці II

Розробник методичних вказівок:

Вікторія ДЗЯМКО – доцент кафедри математики та інформатики ЗУІ імені Ференца Ракоці II, кандидат педагогічних наук, доцент

Рецензенти:

Тетяна БОЯРИЩЕВА – доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу УжНУ, кандидат фізико-математичних наук, доцент (м. Ужгород)

Каталін КУЧИНКА – завідувач кафедри математики та інформатики ЗУІ ім. Ф. Ракоці II, доцент, кандидат фізико-математичних наук

Відповідальні за випуск:

Каталін КУЧИНКА – завідувач кафедри математики та інформатики ЗУІ ім. Ф. Ракоці II, доцент, кандидат фізико-математичних наук,

Олександр ДОБОШ – начальник Видавничого відділу ЗУІ ім. Ф.Ракоці II
За зміст методичних вказівок відповідальність несе розробник.

Видавництво: ЗУІ ім. Ф. Ракоці II (адреса: пл. Кошута 6, м. Берегове, 90202. Електронна пошта: foiskola@kmf.uz.ua)

© **Вікторія Дзямко, 2024**

© **Кафедра математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II, 2024**

ЗМІСТ

	Стор.
Передмова	5
Елементи лінійної алгебри	7
1. Визначники	7
1.1. Визначники 2-го і 3-го порядків	7
1.2. Властивості визначників	9
1.3. Розклад визначника за елементами рядка або стовпця	11
1.4. Поняття про визначники вищих порядків	13
Завдання для самостійної роботи.....	16
2. Матриці	17
2.1. Дії над матрицями	18
2.2. Обернена матриця	21
2.3. Ранг матриці	24
Завдання для самостійної роботи.....	25
3. Системи лінійних рівнянь.....	26
3.1. Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера.....	27
3.2. Метод Гаусса розв'язування систем лінійних рівнянь.....	29
3.3. Критерій сумісності системи лінійних рівнянь.....	34
Завдання для самостійної роботи.....	35
 Елементи векторної алгебри	 36
1. Вектори і лінійні дії з ними	36
1.1. Поняття вектора	36
1.2. Лінійні дії над векторами.....	37
Завдання для самостійної роботи.....	39
2. Проекція вектора на вісь та її властивості.	40
Завдання для самостійної роботи.....	43
3. Лінійна залежність та незалежність векторів	43
4. Базис на площині та у просторі.	45
5. Лінійні операції над векторами, які подані у координатній формі.	47

6. Системи координат	48
6.1. Декартова система координат	48
6.2. Прямокутна система координат	49
6.3. Вектори в системі координат	50
6.4. Поділ відрізка в даному відношенні	51
Завдання для самостійної роботи	53
7. Скалярний добуток векторів	53
7.1. Властивості скалярного добутку	53
7.2. Скалярний добуток векторів у координатній формі	54
Завдання для самостійної роботи	56
8. Векторний добуток векторів	57
8.1. Властивості векторного добутку	57
8.2. Векторний добуток двох векторів, заданих координатами	58
Завдання для самостійної роботи	60
9. Мішаний добуток векторів	61
9.1. Властивості мішаного добутку	61
9.2. Мішаний добуток двох векторів, заданих координатами	62
Завдання для самостійної роботи	64
Елементи аналітичної геометрії	65
1. Системи координат	65
2. Перетворення координат	67
3. Рівняння лінії на площині	68
4. Пряма на площині. Різні види її рівняння	70
Завдання для самостійної роботи	79
5. Лінії другого порядку	80
5.1. Коло	80
5.2. Еліпс	81
5.3. Гіпербола	84
5.4. Парабола	88
Завдання для самостійної роботи	90
Рекомендована література	91

Передмова

Метою вивчення дисципліни «Вища математика для економістів» є формування у студентів базових математичних знань для вирішення завдань у професійній діяльності, вмінь аналітичного мислення та математичного формулювання економічних задач, що виникають на практиці. У процесі вивчення дисципліни студенти набувають знань з таких основних розділів вищої математики як лінійна алгебра, векторна алгебра, матричний аналіз, аналітична геометрія, диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної.

Вивчення курсу «Вища математика для економістів» забезпечує розвиток математичного та логічного мислення студентів, їх підготовку до вивчення спеціальних дисциплін і самостійної роботи над науковою та науково-технічною літературою, передбачає ознайомлення з основними поняттями, ідеями та методами сучасної математики, можливостями їх використання при розв'язуванні конкретних задач.

Дані методичні вказівки допоможуть студенту у практичному використанні лекційного матеріалу під час самостійної роботи. Оволодіння студентом даним навчальним матеріалом допоможе йому: пояснювати моделі соціально-економічних явищ з погляду фундаментальних принципів і знань на основі розуміння основних напрямів розвитку економічної науки; застосовувати відповідні економіко-математичні методи та моделі для вирішення економічних задач; демонструвати базові навички креативного та критичного мислення у дослідженнях та професійному спілкуванні; абстрактно мислити, застосовувати аналіз та синтез для виявлення ключових характеристик економічних систем різного рівня, а також особливостей поведінки їх суб'єктів; показувати навички самостійної роботи, демонструвати критичне, креативне та самокритичне мислення.

Методичні вказівки можуть бути використані студентами при підготовці до практичних занять з даного курсу, особливо в умовах дистанційного навчання та кризових ситуацій.

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

1. Визначники

Приклади використання визначника до розв'язування систем рівнянь містить китайський текст „Математика в дев'яти томах”, написаному ще до нашої ери, тобто ще задовго до введення визначників японським математиком Такакадзу Секі (1683) та німецьким математиком Лейбніцом (1693).

Поняття „визначник” або „детермінант” походить від латинського *determino*, що означає визначаю.

1.1. Визначники 2-го і 3-го порядків

Означення 1.1. Визначником 2-го порядку називається число або алгебраїчний вираз, що визначається за правилом

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (1.1)$$

Означення 1.2. Визначником 3-го порядку називається число або алгебраїчний вираз, що визначається за правилом

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{33}a_{11}. \quad (1.2)$$

Символи a_{ij} називаються *елементами визначника*. Перший індекс i показує номер рядка, а другий — номер стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент. Наприклад, елемент a_{32} з формули (1.2) стоїть у третьому рядку і другому стовпці.

Елементи a_{11}, a_{22} у визначнику (1.1) і a_{11}, a_{22}, a_{33} у визначнику (1.2) створюють *головну діагональ визначника*. Елементи a_{12}, a_{21} (визначник (1.1)) і a_{11}, a_{22}, a_{33} (визначник (1.2)) створюють *побічну діагональ*.

Елементами визначника можуть бути числа, алгебраїчні або тригонометричні вирази.

Обчислення визначників.

Для обчислення визначника 2-го порядку *потрібно від добутку елементів, що стоять на головній діагоналі, відняти добуток елементів, що стоять на побічній діагоналі*, тобто $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Для обчислення визначника 3-го порядку застосовують правило трикутника (рисунок 1.1). Визначник є сумою 6-и добутків, з яких 3 беруться зі знаком „+” і три – зі знаком „-”.

Доданки зі знаком „плюс” у формулі (1.2) — це добутки елементів $a_{11}a_{22}a_{33}$, розміщених на головній діагоналі визначника, і добутки елементів $a_{21}a_{32}a_{13}$ і $a_{12}a_{23}a_{31}$, розміщених у вершинах рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні головній діагоналі.

Зі знаком „мінус” беремо доданки, що є добутком елементів $a_{13}a_{22}a_{31}$, розміщених на побічній діагоналі визначника, та у вершинах рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні побічній діагоналі визначника $a_{12}a_{21}a_{33}$, $a_{23}a_{33}a_{11}$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix}$$

Рис. 1.1.

Приклади.

1.1. Обчислити визначники 2-го роду:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}; \text{ б) } \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}; \text{ в) } \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}.$$

Розв’язання. Використовуючи формулу (1.1), одержимо:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 7 \cdot 1 = 5; \text{ б) } \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - (-2) \cdot 3 = 11;$$

$$\text{в) } \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

1.2. Обчислити визначники 3-го порядку:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}; \text{ б) } \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 7 & 4 & -8 \\ 5 & -3 & -4 \end{vmatrix}.$$

Розв’язання. Використовуючи формулу (1.2), одержимо:

$$\begin{aligned} \text{а) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} &= 3 \cdot 8 \cdot 6 + 7 \cdot 5 \cdot 1 + 2 \cdot 9 \cdot 4 - 1 \cdot 8 \cdot 4 - 2 \cdot 7 \cdot 6 - 5 \cdot 9 \cdot 3 = \\ &= 144 + 35 + 72 - 32 - 84 - 135 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 7 & 4 & -8 \\ 5 & -3 & -4 \end{vmatrix} &= 3 \cdot 4 \cdot (-4) + (-2) \cdot (-8) \cdot 5 + 5 \cdot 7 \cdot (-3) - 5 \cdot 4 \cdot 5 - \\ &- 3 \cdot (-8) \cdot (-3) - (-2) \cdot 7 \cdot (-4) = -48 + 80 - 105 - 100 - 72 - 56 = -301. \end{aligned}$$

1.2. Властивості визначників

Розглянемо на прикладі визначників 3-го порядку основні властивості визначників.

Властивість 1. Визначник не зміниться, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Властивість 1 показує, що всяке твердження про визначник, пов'язане із його рядками, справедливе і для стовпців, і навпаки. Тому наступні властивості 2–8 будуть справедливими і для рядків, і для стовпців.

Властивість 2. Якщо деякий рядок (стовпець) визначника складається з нулів, то такий визначник дорівнює 0. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Властивість 3. Якщо у визначнику поміняти місцями два рядки (стовпці), то він поміняє знак на протилежний. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{31} \\ a_{22} & a_{21} & a_{32} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Приклад. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Використовуючи формулу обчислення визначника 3-го порядку (1.2), одержимо:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} &= 1 \cdot (-4) \cdot 2 + (-2) \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-5) \cdot 3 - 3 \cdot (-4) \cdot 3 - (-2) \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot (-5) = \\ &= -8 - 6 - 30 + 36 + 8 + 5 = -44 + 49 = 5; \end{aligned}$$

поміняємо місцями 1-й і 2-й стовпці:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \\ -5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot (-5) + 3 \cdot (-4) \cdot 3 - 3 \cdot 2 \cdot (-5) - (-2) \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot (-4) \cdot 2 =$$

$$= -8 - 5 - 36 + 30 - 6 - 8 = -49 + 44 = -5.$$

Властивість 4. Визначник, що містить два однакових рядки (стовпці), дорівнює нулю. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a_{31} \\ b & b & a_{32} \\ c & c & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Приклад. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. У даному визначнику 1-й і 2-й рядки однакові.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 5 + 1 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 5 - 4 \cdot 3 \cdot 1 =$$

$$= 5 + 6 + 12 - 6 - 5 - 12 = 0.$$

Властивість 5. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника помножити на число a , то і сам визначник помножиться на a . Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{32} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Зауваження. Твердження властивості 5 можна сформулювати так: *Спільний множник елементів довільного рядка (стовпця) визначника можна винести за знак визначника.*

Приклад. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -6 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-6) - (-2) \cdot 7 = -4$. Другий стовпець має спільний множник -2 . Виносимо його за знак визначника і обчислюємо визначник $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -2 \cdot (3 \cdot 3 - 7 \cdot 1) = -4$.

Властивість 6. Визначник, що містить два пропорційних рядки (стовпці), дорівнює нулю.

Приклад. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. У даному визначнику 2-й і 3-й рядки пропорційні. Зробимо його обчислення за формулою (1.2).

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot (-2) + 7 \cdot (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 6 \cdot 1 - 4 \cdot 3 \cdot 1 - 6 \cdot (-1) \cdot 3 - 2 \cdot 7 \cdot (-2) =$$

$$= -18 - 28 + 12 - 12 + 18 + 28 = 0.$$

Властивість 7. Якщо всі елементи i -го рядка (j -го стовпця) визначника є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, у одного з яких i -й рядок (j -й стовець) складається з перших доданків, а у другому – з других; всі інші рядки (стовпці) — ті ж самі, як і в даному визначнику. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{32} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Властивість 8. Якщо до елементів одного рядка(стовпця) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця) помножені на одне і те ж саме число, а всі інші рядки (стовпці) залишити без зміни, то одержаний визначник буде дорівнювати даному.

Наприклад, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + ka_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} + ka_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$

Властивість 8 має найважливіше значення для обчислення визначників вищих порядків. За її допомогою можна звести визначник до визначника, який буде мати один ненульовий рядок (або стовець).

1.3. Розклад визначника за елементами рядка або стовпця

Метод розкладу визначника за елементами рядків або стовпців є найшвидшим при обчисленні визначників великих розмірів. Замість громіздких та складних обчислень, в яких висока вірогідність

допустити помилку, знаходження визначника зводиться до великої кількості простих операцій, які під силу кожному.

Будемо розгляди визначник (1.2).

Означення 1.3. *Мінором елемента a_{ij} називається визначник M_{ij} , який одержується викресленням з визначника Δ i -го рядка та j -го стовпця, тобто викресленням того рядка і того стовпця, у яких знаходяться елемент a_{ij} .*

Наприклад, для визначника (1.2) мінорами елементів a_{11} , a_{12} , a_{13} будуть мінори:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Означення 1.3. *Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} називається число*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \quad (1.3)$$

тобто мінор елемента a_{ij} , взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$.

Приклад. Обчислити алгебраїчні доповнення для визначника

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\text{Розв'язання. } A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -19;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -14;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8; \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -6;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4.$$

Сформулюємо теорему, яка дає можливість обчислювати визначники, використовуючи мінори та алгебраїчні доповнення.

Теорема 1.1. *Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого його фіксованого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.*

Ця теорема дозволяє звести обчислення визначника n -го порядку до обчислення визначників порядку $n - 1$ порядку.

Для визначника (1.2) цей розклад за елементами 1-го рядка із врахуванням формули (1.3) буде мати вигляд:

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \\ &= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Приклад. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix}$ використовуючи

теорему 1.1 про розклад визначника до 1 рядка.

Розв'язання.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} &= 3(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = \\ &= 3 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 3(4 + 20) - 1(-2 - 0) + 2(4 - 0) = \\ &= 72 + 2 + 8 = 82. \end{aligned}$$

Обчислюючи даний визначник за допомогою формули (1.2)

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 8 + 0 - 0 + 60 + 2 = 82, \text{ одержуємо той самий}$$

результат.

1.4. Поняття про визначники вищих порядків

Теорема 1.1 дає змогу ввести означення визначника довільного порядку. За означенням визначник n -го порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника на їхні алгебраїчні доповнення. Розглянемо, визначник 4-го порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Цей визначник можна розкласти за елементами будь-якого рядка. Розкладемо, наприклад, за елементами першого рядка:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}, \quad (1.5)$$

де всі алгебраїчні доповнення є визначниками 3-го порядку. Цією формулою можна користуватися для обчислення визначника 4-го порядку.

Приклад. Обчислити визначник 4-го порядку $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Розкладемо визначник за елементами 2-го стовпця:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Перший визначник розкладемо за елементами 1-го рядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 9 - (-4 - 6) = 20.$$

Другий визначник обчислюємо за правилом (1.2):

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot (-1) + (-2) \cdot (-3) \cdot (-2) + 4 \cdot 3 \cdot 1 - [1 \cdot (-1) \cdot (-2) + \\ + 3 \cdot (-3) \cdot 3 + (-2) \cdot 4 \cdot (-1)] = 3 - 12 + 12 - (2 - 27 + 8) = 20.$$

Отже, даний визначник має розв'язок $\Delta = -20 - 2 \cdot 20 = 60$.

Такий метод обчислення визначника вищого порядку є громіздким. Тому на практиці визначники вищих порядків обчислюються таким шляхом.

Спочатку за допомогою властивості визначників 8 перетворюють визначник так, щоб у деякому рядку (стовпці) всі елементи, крім одного, стали нулями.

Розкладаючи тоді визначник згідно з теоремою 1.1 за елементами цього рядка, одержимо тільки один доданок, тому що всі інші доданки є добутками алгебраїчних доповнень на нуль.

Приклад. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -8 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & -10 & 17 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Спочатку за допомогою властивості 8 перетворимо в нулі елементи 1-го стовпця, які належать до 2, 3 і 4 рядків. Для цього додамо відповідні елементи 1-го і 2-го рядків. Одержимо:

$$a_{21} = 1 + (-1) = 0, \quad a_{22} = -2 + 3 = 1, \quad a_{23} = -1 + (-1) = -2, \quad a_{24} = 3 + (-1) = 2.$$

Щоб отримати 0 в 3-му рядку 1-го стовпця домножимо на (-3) елементи 1-го рядка і додамо до відповідних елементів 3-го рядка:

$$a_{31} = 1 \cdot (-3) + 3 = 0, \quad a_{32} = (-2)(-3) + (-8) = -2, \quad a_{33} = (-1)(-3) + 7 = 10, \quad a_{34} = 3 \cdot (-3) + 7 = -2.$$

Домножимо елементи 1-го рядка на (-2) і додамо до відповідних елементів 4-го рядка. Одержимо: $a_{41} = 1 \cdot (-2) + 2 = 0, \quad a_{42} = (-2) \cdot (-2) + 1 = 5, \quad a_{43} = (-1)(-2) + (-10) = -8, \quad a_{44} = 3 \cdot (-2) + 17 = 11$. Початковий визначник Δ внаслідок зроблених перетворень має вигляд

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -8 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & -10 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 10 & -2 \\ 0 & 5 & -8 & 11 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо одержаний визначник за елементами 1-го стовпця:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 10 & -2 \\ 0 & 5 & -8 & 11 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -2 \\ 5 & -8 & 11 \end{vmatrix}.$$

Зробимо у 1-му стовпці з елементів, які стоять у 2-му і 3-му рядках, нулі: домножимо 1-й рядок на 2 і додамо до відповідних елементів 2-го рядка; елементи 1-го рядка домножимо на -5 і додамо до відповідних елементів 3-го рядка: $a_{21} = 1 \cdot 2 + (-2) = 0; \quad a_{22} = -2 \cdot 2 + 10 = 6; \quad a_{23} = 2 \cdot 2 - 2 = 2; \quad a_{31} = 1 \cdot (-5) + 5 = 0; \quad a_{32} = -2 \cdot (-5) - 8 = 2; \quad a_{33} = 2 \cdot (-5) + 11 = 1$.

В результаті одержуємо обчислення початкового визначника:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 10 & -2 \\ 0 & 5 & -8 & 11 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -2 \\ 5 & -8 & 11 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Вправи для самостійної роботи

Обчислити визначники:

$$1) \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}; 2) \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}; 3) \begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}; 4) \begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix}; 5) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix};$$

$$6) \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}; 7) \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}; 8) \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}; 9) \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta \end{vmatrix} 10) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix};$$

$$11) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}; 12) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}; 13) \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}; 14) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix};$$

$$15) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & 3 \end{vmatrix}; 16) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ -1 & 6 & 5 \end{vmatrix}; 17) \begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix};$$

$$18) \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}; 19) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \end{vmatrix}; 20) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}; 21) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 0 \end{vmatrix};$$

$$22) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}; 23) \begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}; 24) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 & b \\ 1 & 1 & 2 & c \\ 1 & 1 & 1 & d \end{vmatrix};$$

$$25) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}; 26) \begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix};$$

$$27) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -16 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}; 28) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 1 & -2 \end{vmatrix};$$

$$29) \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}; 30) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. Матриці

Поняття матриці вперше ввели англійські математики У. Гамільтон і Д. Келі.

Означення 2.1. *Матрицею* називається прямокутна таблиця чисел a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$), розташованих у m рядках і n стовпцях і записана у вигляді

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

де числа a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) називаються *елементами матриці* A .

Скорочено матрицю (2.1) записують у вигляді $A = (a_{ij})$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) (індекс i – номер рядка, індекс j – номер стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент a_{ij}).

Означення 2.2. Добуток числа рядків m на число стовпців n називається *розміром матриці* і позначається $m \times n$.

Якщо хочуть вказати розмір матриці A , то пишуть $A_{m \times n}$.

Означення 2.3. Якщо у матриці A $m = n$, то матриця називається *квадратною матрицею*. Кількість рядків (стовпців) цієї матриці називається її *порядком*. Діагональ квадратної матриці, що йде з лівого верхнього до правого нижнього кута (тобто, що складається з елементів $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$) називається *головною діагоналлю*.

Матриця, у якій всього один рядок називається *матрицею-рядком*, а матриця, у якій всього один стовпець – *матрицею-стовпцем*.

Означення 2.4. Дві матриці $A_{m \times n} = (a_{ij})$ і $B_{m \times n} = (b_{ij})$ називаються *рівними*, якщо вони мають однакові розмірності і всі їх відповідні елементи є рівними: $a_{ij} = b_{ij}$.

Нульовою матрицею називається матриця, якої всі елементи дорівнюють нулю і позначається O .

Означення 2.5. Квадратна матриця називається *діагональною*, якщо всі її елементи, крім тих, що знаходяться на головній діагоналі,

дорівнюють одиниці і позначається буквою E . Наприклад, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Будь-якій квадратній матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

можна поставити у відповідність певне число, яке називається визначником цієї матриці і позначається символом

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

Зауваження. Прямокутна матриця розміром $m \times n$, де $m \neq n$, визначника не має.

2.1. Дії над матрицями

1. Додавання матриць. Операція додавання матриць вводиться тільки для матриць однакового розміру.

Означення 2.6. Сумою двох матриць $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ називається матриця $C(c_{ij})$, де елементи $c_{ij} = (a_{ij} + b_{ij})$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Наприклад, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, тоді

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Оскільки додавання матриць зводиться до додавання чисел, то операція додавання матриць має такі властивості

- 1) $A + B = B + A$ — комутативний закон додавання;
- 2) $A + (B + C) = (A + B) + C$ — асоціативний закон додавання;
- 3) існує нульова матриця O , яка складається з нулів, така що для довільної матриці A $A + O = O + A = A$;

4) для довільної матриці A існує протилежна їй матриця $-A$, така що $A + (-A) = (-A) + A = 0$.

Елементами матриці $-A$ є числа $-a_{ij}$, тобто $-A = (-a_{ij})$.

2. Множення матриці на число.

Означення 2.7. Добутком матриці $A = (a_{ij})$ на число k (або числа k на A) називається матриця $B = (ka_{ij})$.

Наприклад, матрицю $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ перемножимо на 3. Тоді матриця B має вигляд $B = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot 3 = \begin{pmatrix} 9 & 15 \\ 18 & -3 \end{pmatrix}$.

Операція множення матриці на число має такі властивості:

- 1) $kA = Ak$; 2) $k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$;
3) $k(A + B) = kA + kB$; 4) $1 \cdot A = A$.

3. Віднімання матриць.

Означення 2.8. Різниця матриць $A - B$ визначається як сума матриці A і матриці B , помноженої на -1 : $A - B = A + (-1)B$.

4. Множення матриць. Операція множення двох матриць вводиться лише для узгоджених матриць.

Означення 2.9. Матриця A називається узгодженою з матрицею B , якщо кількість стовпців першої матриці A дорівнює кількості рядків другої матриці B .

Якщо ця умова не виконується, тобто матриці неузгоджені, то множення таких матриць неможливе.

З узгодженості матриць A і B не впливає, взагалі кажучи, узгодженість матриці B з A .

Операція множення матриць не комутативна, тобто при множенні матриць не можна міняти місцями множники: $AB \neq BA$.

Наприклад, нехай $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Обчислимо добутки AB і BA . Будемо мати $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, тобто $AB \neq BA$.

Квадратні матриці одного порядку взаємно узгоджені.

Означення 2.10. Добутком матриці $A = (a_{ij})$ на матрицю $B = (b_{ij})$ називається матриця $C = (c_{ij})$, елементи якої одержуються за правилом: елемент c_{ij} матриці C (який розташований на перетині i -того рядка і j -того стовпця) є сумою добутків елементів i -того рядка матриці A на відповідні елементи j -того стовпця матриці B :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}; i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.3)$$

Це правило називається *правилом множення рядка на стовпець*.

Наприклад, перемножимо матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Тоді, згідно з формулою (2.3), одержимо

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) & 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \\ 6 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) & 6 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 13 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}.$$

Якщо A і B — квадратні матриці порядку n , то добутки AB і BA завжди існують і теж є матрицями порядку n . Зокрема, квадратну матрицю можна помножити саму на себе, тобто підносити до квадрата. Прямокутну неквадратну матрицю піднести до квадрата не можна.

Властивості множення квадратних матриць:

- 1) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ — асоціативний закон;
- 2) $(kA) \cdot B = k(AB) = A \cdot (kB)$;
- 3) $(A + B)C = AC + BC$ — дистрибутивний закон;
- 4) $A(B + C) = AB + AC$;
- 5) існує матриця (одинична матриця)

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

така що для довільної матриці A мають місце рівності $AE = EA = A$.

Зауваження. Прямокутні матриці A і B можна множити у тому випадку, коли число стовпців матриці A рівне числу рядків матриці B , причому число рядків матриці AB рівне числу рядків матриці A , число стовпців матриці AB рівне числу стовпців матриці B .

Приклад. Перемножити матриці $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. $AB = \begin{pmatrix} 10 & 15 & -5 \\ 11 & 10 & 10 \end{pmatrix}$.

2.2. Обернена матриця.

Знаходження оберненої матриці є важливою справою в розділі лінійної алгебри. За допомогою таких матриць, якщо вони існують, можна швидко знайти розв'язок системи лінійних рівнянь.

Означення 2.11. *Оберненою до квадратної матриці порядку n називається така матриця A^{-1} , що $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, де E – одинична матриця порядку n :*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника матриці A (формула 2.1).

Означення 2.12. Квадратна матриця порядку n називається *невиродженою*, якщо її визначник відмінний від нуля ($\det A \neq 0$), і *виродженою*, якщо $\det A = 0$.

Теорема 2.1. *Добуток матриць порядку n є невивродженою матрицею тоді і тільки тоді, коли кожна з перемножуваних матриць є невивродженою матрицею.*

Теорема 2.2. *Для існування оберненої матриці A^{-1} необхідно і достатньо, щоб матриця A була невивродженою.*

Означення 2.13. *Мінором k -го порядку матриці $A_{m \times n}$ називається визначник k -го порядку, складений з елементів, що стоять на перетині виділених рядків і стовпців (k – число, не більше чисел m і n , тобто $k \leq \min(m, n)$).*

Алгоритм знаходження оберненої матриці наступний:

1) знайти визначник матриці (2.1) $|A| = \Delta$. Якщо він не рівний нулю, то виконуємо наступні дії. В іншому випадку дана матриця вироджена і для неї не існує оберненої матриці;

2) знайти алгебраїчні доповнення $A_{11}, \dots, A_{nn}$ елементів матриці A . Вони рівні мінорам, помноженим на $(-1)^{i+j}$ в степені суми рядка і стовпця, для якого шукаємо доповнення;

$$3) \text{ складаємо обернену матрицю } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Приклади. Знайти обернені матриці до матриць

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. а) Обчислюємо визначник матриці

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 4 \cdot 5 = 21 - 20 = 1.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то обернена матриця існує. Матриця A не вироджена, тому обернену матрицю знаходимо за формулою (2.3).

Знаходимо алгебраїчні доповнення до всіх елементів даної матриці A $A_{11} = 7$; $A_{12} = -5$; $A_{21} = -4$; $A_{22} = 3$.

$$\text{Обернена матриця має вигляд } A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{б) Обчислюємо визначник матриці } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \text{ розкладаючи}$$

його за першим рядком. Одержимо:

$$\det_1 = 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4; \quad \det_2 = -1 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3; \quad \det A = 4 - 3 = 1.$$

Оскільки $\det A = 1 \neq 0$, то матриця не вироджена і існує обернена матриця. Знаходимо алгебраїчні доповнення матриці A :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 21 + 10 = 31;$$

$$A_{14} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -15 - 8 = -23;$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -14 - 5 = -19;$$

$$A_{24} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 4 = 6;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{33} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{34} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{41} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{42} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{43} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{44} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

Складаємо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

2.3. Ранг матриці

Означення 2.14. Рангом матриці A називається найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля і позначається $r(A)$.

Властивості рангу:

1. Ранг матриці рівний нулю лише для нульової матриці. В інших випадках ранг матриці рівний деякому додатному числу.

2. Ранг прямокутної матриці не перевищує меншого із двох чисел m і n , тобто $0 \leq r \leq \min(m, n)$.

3. Для квадратної матриці n -го порядку $r = n$ тоді і тільки тоді, коли матриця не вироджена.

4. У випадку квадратної матриці, якщо $r < n$, то визначник матриці дорівнює нулю.

5. Ранг матриці не зміниться, якщо виконати, якщо над матрицею виконати так звані елементарні перетворення:

а) переставити місцями два рядки (стовпці):

б) помножити кожен елемент рядка (стовпця) на один і той самий відмінний від нуля множник;

в) додати до елементів рядка (стовпця) відповідні елементи другого рядка (стовпця), помножені на одне і те саме число.

Метод знаходження рангу:

– Якщо всі мінори першого порядку дорівнюють нулю, то $r = 0$.

– Якщо хоч один з мінорів першого порядку відмінний від нуля, всі мінори другого порядку дорівнюють нулю, то $r = 0$.

– Коли є мінор 2-го порядку, відмінний від нуля, досліджуємо мінори 3-го порядку. Так продовжуємо доти, поки або всі мінори порядку k дорівнюють нулю, або мінорів порядку k не існує, тоді $r = k - 1$.

Приклад. Визначити ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ -1 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -12 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Обчислюємо мінори даної матриці:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 \\ -1 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -12 \end{vmatrix} = 24 - 24 + 6 + 24 - 6 - 24 = 0; \quad M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 0;$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 0; \quad M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 4 = 3 \neq 0. \text{ Отже, } r(A) = 2.$$

Вправи для самостійної роботи

1. Перемножити матриці:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Знайти $AB - BA$, якщо:

$$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix};$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Знайти обернену матрицю A^{-1} до матриці:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{в) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти ранг матриці:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 7 & 5 \\ -1 & 4 & 12 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{г) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

З означення добутку матриць випливає, що систему (3.1) можна представити у вигляді матричної рівності

$$A \cdot X = B. \quad (3.4)$$

Нехай матриця A (3.1) має обернену матрицю A^{-1} . Помножимо обидві частини рівності (3.4) на A^{-1} зліва: $A^{-1}AX = A^{-1}B$. Оскільки $A^{-1}A = E$ і $EX = X$, то

$$X = A^{-1}B. \quad (3.5)$$

Отже, щоб розв'язати систему рівнянь (3.5), достатньо знайти матрицю, обернену до матриці системи, і помножити її справа на матрицю з вільних членів.

Означення 3.7. Формулу (3.5) називають *матричним записом розв'язку системи* (3.4) або *розв'язком матричного рівняння* (3.4).

Зауваження. Розв'язок системи рівнянь у матричній формі можливий лише тоді, коли матриця системи не вироджена.

3.1. Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера.

Метод Крамера – метод розв'язування квадратних систем лінійних алгебраїчних рівнянь із ненульовим визначником основної матриці.

Метод було створено швейцарським математиком Габрієлом Крамером у 1750 році.

Нехай задана квадратна система n лінійних рівнянь з n невідомими, $A = (a_{ij})$ — матриця системи.

Означення 3.8. Визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

називається *визначник*, а *визначники*

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1}b_1a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1}b_2a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1}b_na_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i = (1, 2, \dots, n))$$

допоміжними визначником системи.

Теорема 3.1. Якщо задано систему з m лінійних рівнянь з n невідомими ($n > 0$)

[illegible]

і визначник системи $\Delta \neq 0$, то система є сумісною і визначеною, має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Lambda}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Lambda}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Lambda}. \quad (3.6)$$

Розглянемо систему 2-х лінійних рівнянь з двома невідомими x і y :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases} \quad (3.7)$$

Виконаємо такі елементарні перетворення системи (3.7):

– спочатку помножимо перше рівняння на a_{22} , друге – на $(-a_{12})$ і додамо їх;

– потім перше рівняння помножимо на a_{21} , а друге – на $(-a_{11})$ – додамо їх.

Одержимо систему

$$\begin{cases} x(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = b_1a_{22} - b_2a_{12}; \\ y(a_{11}a_{12} - a_{21}a_{12}) = b_2a_{11} - b_1a_{21}. \end{cases} \quad (3.8)$$

Систему (3.8) можна записати за допомогою визначників:

$$\begin{cases} x \cdot \Delta = \Delta_x; \\ y \cdot \Delta = \Delta_y, \end{cases} \quad (3.9)$$

де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ – визначник системи; $\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ і $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$ – визначники, у яких замінено стовпці при невідомих x та y вільними членами.

Розв'язуючи рівняння (3.9), можуть бути такі випадки:

1) $\Delta \neq 0$, тоді система (3.9) має єдиний розв'язок:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Lambda}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Lambda}. \quad (3.10)$$

2) $\Delta = 0$; $\Delta_x \neq 0$ або $\Delta_y \neq 0$, тоді система (3.9) не має розв'язків, тобто є невизначеною.

3) $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, тоді система (3.9) зводиться до одного рівняння і має безліч розв'язків, тобто є невизначеною.

Для системи 3-х лінійних рівнянь з трьома невідомими x, y, z при умові, що $\Delta \neq 0$, єдиний розв'язок знаходиться за формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \quad (3.11)$$

Приклад 3.2. Розв'язати систему за формулами Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3; \\ -4x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Розв'язання. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 8 - 12 + 4 + 16 + 6 = 26;$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 10 + 12 + 5 - 16 + 9 = 26;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 16 + 12 + 20 + 16 + 24 - 10 = 78;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 32 + 36 - 12 + 40 + 24 = 130.$$

За формулами Крамера знаходимо розв'язки системи:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{26}{26} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{78}{26} = 3; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{130}{26} = 5.$$

Єдиний розв'язок системи має вигляд: $x_1 = 1; x_2 = 3; x_3 = 5$.

Зауваження. Метод Крамера доцільно використовувати, коли кількість рівнянь та невідомих $n \leq 3$. У випадку, коли $n > 3$ доцільно використовувати метод Гаусса, основна ідея якого полягає у приведенні матриці до трикутної форми.

3.2. Метод Гаусса розв'язування систем лінійних рівнянь.

Метод Гаусса – класичний метод розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Названий в честь німецького математика Карла Фрідріха Гаусса. Це класичний метод послідовного виключення змінних, коли за допомогою елементарних перетворень система рівнянь

приводиться до рівносильної системи трикутного виду, із якої послідовно, починаючи з останнього за номером, знаходимо всі змінні системи.

Розглянемо систему лінійних рівнянь, яка містить m рівнянь і n невідомих

[illegible]

Матрицею цієї системи є матриця $A = (a_{ij})$ виду (3.2).

Означення 3.9. Матриця $\tilde{A}$ системи (3.12) виду

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array} \right) \quad (3.13)$$

називається *розширеною матрицею системи* (3.12).

Означення 3.10. Дві системи лінійних рівнянь називаються *еквівалентними*, якщо вони або обидві несумісні, або сумісні і множини їх розв'язків співпадають.

Лема 3.1. Дві системи лінійних рівнянь еквівалентні, якщо одна з цих систем одержується з іншої шляхом застосування скінченної послідовності елементарних перетворень.

Оскільки елементарні перетворення системи лінійних рівнянь зводяться до відповідних перетворень коефіцієнтів при невідомих і вільних членів, то їм відповідають такі *елементарні перетворення* розширеної матриці B цієї системи:

І. Перестановка місцями двох рядків матриці B .

II. Додавання до деякого рядка матриці B іншого її рядка, помноженого на довільне число.

Означення 3.11. Дві матриці B і C еквівалентних систем лінійних рівнянь будемо називати *еквівалентними* і писати $B \sim C$.

Розглянемо *алгоритм методу Гаусса* розв'язування систем лінійних рівнянь.

Нехай маємо систему m лінійних рівнянь з n невідомими виду:

визначник якої відмінний від нуля ($\Delta \neq 0$).

так далі, до n -го – помножене на $-\frac{a_{n1}}{a_{11}}$. Тоді система набуде вигляду

$$\text{де } a_{ij}^{(1)} = a_{ij} + a_{ij} \left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}} \right), \quad b_i^{(1)} = b_i + b_1 \left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}} \right), \quad i, j = 2, 3, \dots, m.$$

до 4-го рівняння додамо 2-є помножене $-\frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$ і так далі до n -го додамо

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \quad \quad \quad + a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(1)}, \\ \dots\dots\dots \\ \quad \quad \quad + a_{m3}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{mn}^{(2)}x_n = b_m^{(2)}, \end{array} \right.$$

продовжуємо доти, поки дана система прийме вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \quad \quad \quad + a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(1)}, \\ \dots\dots\dots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + a_{mn}^{(n-1)}x_n = b_m^{(n-1)}. \end{array} \right. \quad (3.14)$$

З цього моменту починаємо обернений хід методу Гаусса: x_n

обчислюємо із останнього рівняння $x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$; за допомогою

значення x_n знаходимо x_{n-1} із попереднього рівняння і так далі; значення x_1 із 1-го рівняння системи.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 8, \\ -3x - y + 2z = -11, \\ -2x + y + 2z = -3. \end{cases}$$

Розв’язання. Спочатку зробимо нулями коефіцієнти при x у 2-му і 3-му рівняннях. Для цього перше рівняння, помножене на $\frac{3}{2}$, додамо до 2-го і перше рівняння додамо до 3-го рівняння. Одержимо систему

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y - z = 8, \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 1, \\ 2y + z = 5. \end{array} \right. \text{ Далі зробимо нулі при } y \text{ в 3-му рівнянні, для чого}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y - z = 8, \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 1, \\ -z = 1. \end{array} \right.$$

Привели дану систему до трикутного вигляду. Із останнього

рівняння одержуємо, що $z = -1$. Підставляючи це значення у 2-е рівняння, одержуємо $y + 3$. Підставляючи значення y і z , знаходимо, що $x = 2$. Отже, єдиним розв'язком даної системи буде: $x = 2, y + 3, z = -1$.

Зауваження. На практиці, розв'язуючи систему лінійних рівнянь, зручніше приводити до трикутного вигляду не саму систему рівнянь, а розширену матрицю цієї системи. Виконуючи над рядками розширеної матриці елементарні перетворення, приходимо до розв'язку системи.

Теорема 3.2. Довільну матрицю шляхом елементарних перетворень лише над рядками можна звести до трикутного виду.

Приклад 3.4. Знайти розв'язок системи лінійних рівнянь

$$\text{методом Гаусса} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 = -2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Розв'язок. Випишемо розширену матрицю системи і за допомогою елементарних перетворень над її рядками приведемо цю матрицю до трикутного вигляду (зробимо нулі під головною діагоналлю матриці – прямий хід методу Гаусса).

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Спочатку, для спрощення обчислень, поміняємо місцями 1-й і 2-й рядки. Далі робимо нулі під головною діагоналлю у 1-му стовпці. Для цього від 2-го рядка відніmemo 1-й, помножений на 2, а від третього – 1-й, помножений на 3.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Робимо нулі у 2-му стовпці під діагоналлю.

Поміняємо місцями 2-й і 3-й рядки. Тоді від 3-го рядка відніmemo 2-й, помножений на 3 і 3-й рядок помножимо на $-\frac{1}{2}$.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Прямий хід методу Гаусса закінчено.

Тепер робимо обернений хід методу Гаусса, тобто робимо нулі над головною діагоналлю.

Почнемо з елементів 3-го стовпця.

Потрібно зробити таке елементарне перетворення, щоб $a_{23} = 0$. Для цього від 2-го рядка віднімемо 3-й і до 1-го рядка додамо 2-й.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обернений хід методу Гаусса закінчено.

Одержаній матриці відповідає система лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -1, \\ 0 \cdot x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 = 1, \\ 0 \cdot x_1 - 0 \cdot x_2 + x_3 = 3. \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

Отже, розв'язком даної системи є: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.

3.3. Критерій сумісності системи лінійних рівнянь.

Вичерпну відповідь про існування розв'язку системи лінійних рівнянь дає теорема Кронекера-Капеллі.

Теорема 3.3 (Кронекера-Капеллі).

Для того щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг її основної матриці дорівнював рангу розширеної матриці.

Якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної і дорівнює числу невідомих, то система має єдиний розв'язок.

Якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці, але менший від числа невідомих, то система має безліч розв'язків.

Вправи для самостійної роботи.

1. Розв'язати системи лінійних рівнянь методом Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ 4x - 5y = 40. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 7, \\ x_1 - 3x_2 = -2. \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 11. \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases} \quad \text{д) } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

2. Розв'язати системи лінійних рівнянь методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 - 5x_4 = 7, \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 1. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1, \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 - 7 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 1 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 + 7 = 0. \end{cases} \quad \text{д) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25. \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = 2 - 3x_1 + 2x_2, \\ 4x_1 + 3x_2 = 3 - 6x_1 + 4x_2. \end{cases}$$

ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

Векторна алгебра – розділ математики, в якому вивчаються дії над векторами, виникла і вдосконалювалась у зв'язку з потребами механіки і фізики. Вперше вектори застосував К. Вессель у 1799 р. для інтерпретації комплексних чисел. Проте справжній розвиток векторної алгебри розпочався лише в середині XIX ст., а систематично – викладено тільки у 80-х роках XIX ст. в роботах американського фізика Дж. Гіббса, одного із творців статистичної механіки. Зокрема, Гіббс застосував векторне числення в методі знаходження орбіт комет за трьома спостереженнями. Але лише на початку XX ст. векторне числення стало фактично апаратом для геометрії, механіки та фізики.

1. Вектори і лінійні дії з ними

1.1. Поняття вектора

Багато фізичних величин повністю визначаються своїм числовим значенням (об'єм, маса, густина, температура тощо), які називаються *скалярними* величинами. Але є й такі величини, які крім числового значення мають ще й напрям (швидкість, сила тощо). Такі величини називаються *векторними*. Термін „вектор” (від латинського vector – переносник) ввів у 1848 р. ірландський математик У. Гамільтон.

Означення 1.1. Будь-яка упорядкована пара точок A і B простору визначає *направлений відрізок*, або *вектор*, що має певну довжину і певний напрям. Першу точку A називають *початком вектора* A , а другу B – *кінцем вектора*.

Вектор, початком якого є точка A , а кінцем – точка B , позначають символом $\overline{AB}$ або однією латинською буквою $\vec{a} = \overline{AB}$. Напрямок вектора на рисунку показують стрілкою (рисунок 1.1).

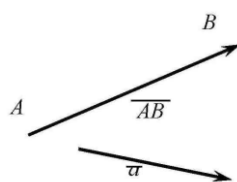


Рис. 1.1.

Означення 1.2. Довжиною або модулем вектора $\vec{a} = \overline{AB}$ називається довжина відрізка AB і позначається $|\overline{AB}|$ або $|\vec{a}|$.

Означення 1.3. Вектор називається *нульовим*, якщо початок і кінець його збігаються і позначається через $\vec{0}$. Напрямок нульового вектора невизначений, а довжина його дорівнює 0.

Означення 1.4. Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається *одичним вектором*. Одичний вектор, напрям якого збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, називається *ортом вектора $\vec{a}$* і позначається через $\vec{a}^0$: $\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$.

Означення 1.5. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих і позначається це так $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Колінеарні вектори можуть бути направлені однаково або протилежно. Для однаково напрямлених векторів використовується позначення $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$, а для протилежно напрямлених – $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$.

Означення 1.6. Два колінеарні вектори, які мають однакові довжини і протилежні напрямки, називаються *взаємнопротилежними*. Вектор, протилежний вектору $\vec{a}$, позначають як $-\vec{a}$.

Означення 1.7. Нульовий вектор колінеарний будь-якому вектору.

Означення 1.8. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *рівними* ($\vec{a} = \vec{b}$), якщо вони колінеарні, мають однакові напрямки і мають рівні модулі.

Означення 1.9. Три вектори називаються *компланарними*, якщо вони лежать в одній площині або на паралельних площинах (рисунок 1.2).

Вектори компланарні, якщо два з них або всі три колінеарні. Три вектори вважаються також компланарними, коли хоча б один з них нульовий.



Рис. 1.2.

Означення 1.10. Вектор називається *паралельним* прямій (площині), якщо при відкладанні його від довільної точки прямої (площини) він цілком належить даній прямій (площині).

1.2. Лінійні дії над векторами

До лінійних дій з векторами належать додавання і віднімання векторів, множення векторів на число.

1. Додавання векторів.

Означення 1.11 (правило трикутника). Сумою $\vec{a} + \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, початком якого є початок вектора $\vec{a}$, а кінцем – кінець вектора $\vec{b}$ за умови, що вектор $\vec{b}$ відкладено від кінця вектора $\vec{a}$. Це правило додавання називається *правилом трикутника* (рисунок 1.3).

За допомогою цього правила зручно знаходити суму будь-якої кількості векторів. Щоб побудувати суму будь-якого числа векторів, потрібно в кінці першого вектора побудувати другий, в кінці другого побудувати третій і т. д. Напрявлений відрізок, що йде з початку першого вектора в кінець останнього і буде сумою даних векторів (рисунок 1.4).

Означення 1.12 (правило паралелограма). Сумою $\vec{a} + \vec{b}$ двох неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, відкладених від спільного початку, є вектор, початком якого є спільний початок векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, кінцем – протилежна вершина паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ як на сторонах. Це правило називається *правилом паралелограма* (рисунок 1.5).

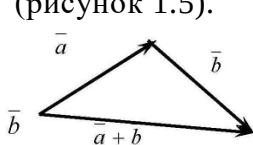


Рис. 1.3.

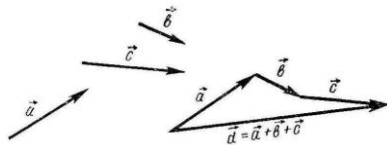


Рис. 1.4.

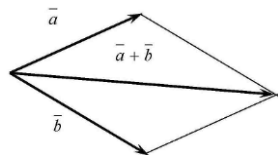


Рис. 1.5.

2. Віднімання векторів.

Ця дія визначається як, обернена додаванню.

Означення 1.13. Різницею $\vec{a} - \vec{b}$

векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор

$\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відкладені

від спільного початку, то різницею $\vec{a} - \vec{b}$ є

вектор, початком якого є кінець вектора $\vec{b}$, а кінцем – кінець вектора $\vec{a}$ (рисунок 1.6).

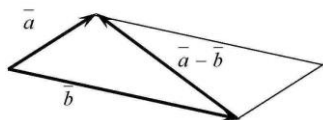
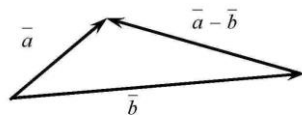


Рис. 1.6.

Властивості додавання векторів.

1) Асоціативність для довільних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

2) Комутативність для довільних векторів $\vec{a}, \vec{b}$: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

3) Існування нульового елемента: існує єдиний вектор $\vec{0}$ такий, що для будь-якого вектора $\vec{a}$ виконується рівність $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

4) Існування протилежного елемента: для будь-якого вектора $\vec{a}$ існує єдиний такий вектор $-\vec{a}$, що $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Приклад 1. Обчислити $|\vec{a} - \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=13$, $|\vec{b}|=19$ і $|\vec{a} + \vec{b}|=24$.

Розв'язання. Використовуємо таку властивість паралелограма:

сума квадратів довжин всіх сторін паралелограма дорівнює сумі квадратів довжин його діагоналей:

$$2AB^2 + 2BC^2 = DA^2 + AC^2 \quad (\text{рисунк 1.7}).$$

$$\text{Тоді } 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2 = |\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2,$$

$$\text{тобто } 2 \cdot 13^2 + 2 \cdot 19^2 = 24^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2;$$

$$338 + 722 = 576 + |\vec{a} - \vec{b}|^2; \quad |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 484;$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = \sqrt{484} = 22.$$

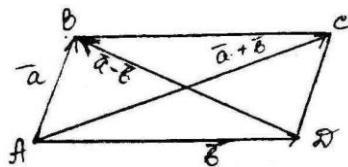


Рис. 1.7.

3. Множення вектора на число.

Нехай задані вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$ і число $\lambda \neq 0$.

Означення 1.14. Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ називається вектор $\lambda\vec{a}$ або $\vec{a}\lambda$, паралельний вектору $\vec{a}$, модуль якого дорівнює $|\lambda| |\vec{a}|$, напрям якого збігається з напрямом $\vec{a}$ при $\lambda > 0$ і протилежний напрямку $\vec{a}$ при $\lambda < 0$. Якщо $\vec{a} = \vec{0}$ або $\lambda = 0$, то $\lambda\vec{a} = \vec{0}$.

Властивості множення вектора на число.

1) Асоціативність відносно множення чисел λ, μ і довільного вектора $\vec{a}$: $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$.

2) Дистрибутивність відносно числового множника: для довільних чисел λ, μ і довільного вектора $\vec{a}$ $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$.

3) Дистрибутивність відносно векторного множника: для довільного числа λ і довільних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

4) Для довільного вектора $\vec{a}$ $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

Розглянуті властивості мають велике значення у векторній алгебрі, бо вони дають право робити перетворення в лінійних операціях з векторами так само, у звичайній алгебрі: векторні доданки можна переставляти місцями і сполучати їх в групи, виносити за дужки як скалярні, так і векторні спільні множники.

Вправи для самостійної роботи

1. По заданим векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ побудувати вектори:

а) $2\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} + 2\vec{b}$; в) $-2\vec{a} - \vec{b}$; г) $2\vec{a} - \vec{b}$; д) $-\vec{a} - \vec{b}$;

е) $3\vec{a} - \vec{b}$; є) $3\vec{b} - 2\vec{a}$; ж) $\vec{a} - 3\vec{b}$; з) $\vec{b} - \vec{a}$; к) $\frac{1}{3}\vec{a} + 3\vec{b}$; л) $\frac{1}{4}\vec{b} + 4\vec{a}$.

2. Обчислити $|\vec{a} + \vec{b}|$, якщо відомо, що $|\vec{a}|=19$, $|\vec{b}|=13$ і $|\vec{a} - \vec{b}|=24$.

3. Обчислити $|\vec{a} - \vec{b}|$, якщо відомо, що $|\vec{a}|=23$, $|\vec{b}|=11$ і $|\vec{a} + \vec{b}|=20$.

2. Проекція вектора на вісь та її властивості

Означення 2.1. Будь-яка пряма, на якій указаний напрям, називається *віссю*.

Нехай у просторі задано вісь l і вектор $\overrightarrow{AB}$.

Позначимо через A_1 та B_1 проекції на вісь l відповідно початку A і кінця B вектора $\overrightarrow{AB}$ і розглянемо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ (рисунок 2.1).

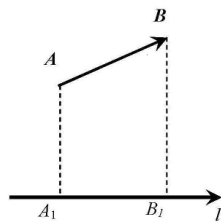


Рис. 2.1.

Означення 2.2. Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l називається додатне число $|\overrightarrow{A_1B_1}|$, якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ і вісь l однаково напрямлені ($\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow l$), і від'ємне число $-|\overrightarrow{A_1B_1}|$, якщо $\overrightarrow{A_1B_1}$ і l протилежно напрямлені ($\overrightarrow{A_1B_1} \downarrow l$). Проекцію вектора $\vec{a}$ на вісь l позначають так: $\text{пр}_l \vec{a} = \pm |\vec{a}|$.

Якщо $\vec{a} = \vec{0}$, то вважають, що $\text{пр}_l \vec{a} = 0$.

Справедливі такі властивості проєкції.

Теорема 2.1. Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь l дорівнює добутку модуля вектора $\vec{a}$ на косинус кута φ між вектором і віссю

$$\text{пр}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi. \quad (2.1)$$

Означення 2.3. Кут φ між вектором $\vec{a}$ і віссю (або між двома ненульовими векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$) називається менший з кутів, на який потрібно повернути один вектор або вісь, щоб він збігався за напрямом з другим вектором або віссю: $\varphi = \left(\vec{a}, l \right) = \left(\vec{a}, \vec{l}^0 \right) = \left(\vec{a}, \vec{b} \right)$ при $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Означення 2.4. Косинуси кутів α , β і γ , які утворює довільний вектор $\vec{a}$ відповідно з осями координат Ox , Oy і Oz , називаються *напрямними косинусами вектора $\vec{a}$* .

Нехай $\text{пр}_l \vec{a} = \text{пр}_l \overrightarrow{AB} = \pm |\overrightarrow{A_1B_1}|$ (рисунок 2.2). Тоді

$$\text{пр}_l \vec{a} = |\overrightarrow{A_1B_1}| = |\vec{a}| \cos \varphi \text{ якщо } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \text{ і } \text{пр}_l \vec{a} = -|\overrightarrow{A_1B_1}| = -|\vec{a}| \cos \varphi \text{ якщо } \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi.$$

Теорема 2.2. Якщо вектори рівні, то рівні між собою і їх проєкції на одну вісь.

Теорема 2.3. Проекція суми векторів на вісь l дорівнює сумі проєкцій векторів на вісь l (рисунк 2.2):

$$\text{пр}_l(\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_l \vec{a} + \text{пр}_l \vec{b}. \quad (2.2)$$

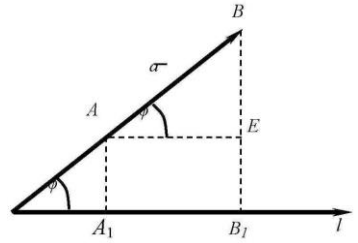


Рис. 2.2.

При умові, що $\text{пр}_l \vec{a} = \text{пр}_l \overrightarrow{AB} = \pm |\overrightarrow{A_1B_1}|$, $\text{пр}_l \vec{b} = \text{пр}_l \overrightarrow{BC} = \pm |\overrightarrow{B_1C_1}|$, побудуємо вектор $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (рисунк 2.3). Розглянемо $\text{пр}_l(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \pm |\overrightarrow{A_1B_1}|$ та

$$\text{пр}_l \overrightarrow{AB} + \text{пр}_l \overrightarrow{BC} = \pm |\overrightarrow{A_1B_1}| + (\pm |\overrightarrow{B_1C_1}|).$$

В залежності від взаємного Розміщення точок A_1, B_1, C_1 можливі різні випадки:

- а) $\text{пр}_l \vec{a} + \text{пр}_l \vec{b} = \text{пр}_l \overrightarrow{AB} + \text{пр}_l \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{A_1B_1}| + |\overrightarrow{B_1C_1}| = |\overrightarrow{A_1C_1}| = \text{пр}_l \overrightarrow{AC} = \text{пр}_l(\vec{a} + \vec{b})$ (рисунк 2.3а);
- б) $\text{пр}_l \vec{a} + \text{пр}_l \vec{b} = |\overrightarrow{A_1B_1}| - |\overrightarrow{B_1C_1}| = |\overrightarrow{A_1C_1}| = \text{пр}_l \overrightarrow{AC} = \text{пр}_l(\vec{a} + \vec{b})$ (рисунк 2.3б);
- в) $\text{пр}_l \vec{a} + \text{пр}_l \vec{b} = -|\overrightarrow{A_1B_1}| + |\overrightarrow{B_1C_1}| = -|\overrightarrow{A_1C_1}| = \text{пр}_l \overrightarrow{AC} = \text{пр}_l(\vec{a} + \vec{b})$ (рисунк 2.3в);
- г) $\text{пр}_l \vec{a} + \text{пр}_l \vec{b} = -|\overrightarrow{A_1B_1}| - |\overrightarrow{B_1C_1}| = -|\overrightarrow{A_1C_1}| = \text{пр}_l \overrightarrow{AC} = \text{пр}_l(\vec{a} + \vec{b})$ (рисунк 2.3г).

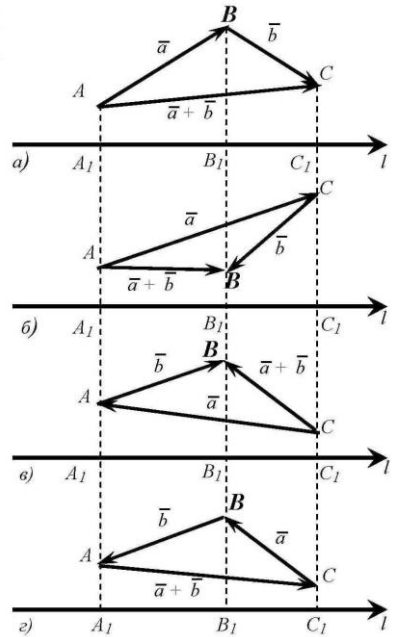


Рис. 2.3.

Теорема 2.4. При множенні вектора $\vec{a}$ на число λ його проєкція на вісь l множиться на це саме число

$$\text{пр}_l(\lambda \vec{a}) = \lambda \text{пр}_l \vec{a}. \quad (2.4)$$

Основні властивості проєкції вектора на вісь полягають в тому, що лінійні операції над векторами приводять до відповідних лінійних операцій над проєкціями цих векторів.

Приклад 1. Дано вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та вісь l . Відомо, що $|\vec{a}| = 5$;
 $|\vec{b}| = 5\sqrt{3}$; $(\hat{l}, \vec{a}) = 30^\circ$; $(\hat{l}, \vec{b}) = 60^\circ$ і вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$
 розміщені по різні сторони від осі l . Знайти величину
 кута між вектором $(\vec{a} + \vec{b})$ та віссю l .

Розв'язання. Використовуючи правило паралелограма для
 додавання векторів, побудуємо вектор $(\vec{a} + \vec{b})$ (рисунок 2.4). Тоді

$$\begin{aligned} \text{пр}_l(\vec{a} + \vec{b}) &= \text{пр}_l \vec{a} + \text{пр}_l \vec{b} = |\vec{a}| \cos(\hat{l}, \vec{a}) = \\ &= 5 \cos 30^\circ + 5\sqrt{3} \cos 60^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}. \end{aligned}$$

У той же час, $\text{пр}_l(\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a} + \vec{b}| \cos(\hat{EOC})$.

Знайдемо $|\vec{a} + \vec{b}|$ як довжину діагоналі

паралелограма $OACB$. Кут $\hat{AOB} =$

$$= \hat{AOE} + \hat{EOB} = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ,$$

тому паралелограм $OACB$ є прямокутником. Скористаємося теоремою
 Піфагора стосовно до $\triangle OBC$:

$$|OC| = \sqrt{(OB)^2 + (BC)^2} = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 + 5^2} = \sqrt{100} = 10.$$

Тоді

$$\cos(\hat{l}; (\vec{a} + \vec{b})) = \frac{\text{пр}_l(\vec{a} + \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}|} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{1}{2},$$

а сам кут $(EOC) = 60^\circ$.

Приклад 2. Дано $|\vec{a}| = 2$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$.

Обчислити проекції вектора $|\vec{a}|$ на координатні осі.

Розв'язання.

$$\text{пр}_{Ox} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \alpha = 2 \cos 45^\circ = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2};$$

$$\text{пр}_{Oy} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \beta = 2 \cos 60^\circ = 2 \frac{1}{2} = 1;$$

$$\text{пр}_{Oz} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \gamma = 2 \cos 120^\circ = -2 \sin 30^\circ = -2 \frac{1}{2} = -1.$$

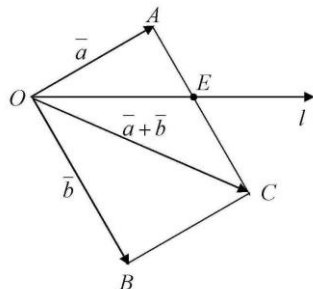


Рис. 2.4.

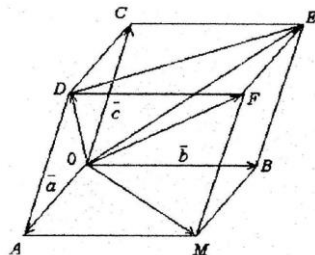
Вправи для самостійної роботи.

1. Знайти проекцію вектора $\vec{a}$ на вісь Ox , якщо відомі модуль $|\vec{a}|$ та кут φ нахилу до осі Ox :

а) $|\vec{a}| = 4$; $\varphi = \frac{\pi}{3}$; б) $|\vec{a}| = 6$; $\varphi = \frac{\pi}{4}$;

в) $|\vec{a}| = 5$; $\varphi = \frac{5\pi}{6}$; г) $|\vec{a}| = 9$; $\varphi = -\frac{\pi}{6}$.

2. На векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$, як на сторонах, побудовано паралелепіпед. Виразити через вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ діагоналі паралелепіпед, бокові грані та основи, які мають спільний початок з



векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (рисунок 2.5).

Рис. 2.5.

3. Визначити $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$, якщо:

а) вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = 120^\circ$ і $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$;

б) вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = 60^\circ$ і $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$.

3. Лінійна залежність та незалежність векторів

Розглянемо систему векторів з m n -вимірних векторів

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m. \quad (3.1)$$

Означення 3.1. Лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ називається вектор $\vec{a}_i$ ($i = 1, \dots, m$), якщо існують такі числа λ_i ($i = 1, \dots, m$), що

$$\vec{a}_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{a}_i, \quad (3.2)$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ — довільні дійсні числа, які називаються коефіцієнтами лінійної комбінації.

Означення 3.2. Вектори називаються лінійно залежними, якщо існують такі дійсні числа λ_i ($i = 1, \dots, m$), серед яких принаймні одне відмінне від 0 (тобто $\sum_{i=1}^m \lambda_i^2 \neq 0$), що справджується рівність

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{a}_i = \vec{0} \quad \text{при} \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i^2 \neq 0. \quad (3.3)$$

Означення 3.3. Вектори називаються *лінійно незалежними*, якщо рівність нулю їх лінійної комбінації можлива лише при умові, що усі коефіцієнти лінійної комбінації дорівнюють нулю, тобто

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{a}_i = \vec{0} \text{ при } \sum_{i=1}^m \lambda_i^2 = 0. \quad (3.4)$$

Щоб з'ясувати питання про лінійну залежність векторів (3.1), кожен із заданих векторів системи (3.1) $\vec{a}_i = (a_{1i}; a_{2i}; \dots; a_{ni})$ і нуль-вектор $\vec{0} = (0; 0; \dots; 0)$ запишемо як матрицю-стовпець:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

або

[illegible]

Це лінійна однорідна система рівнянь відносно невідомих λ_i .
Якщо система (3.5) має лише нульовий розв'язок, то вектори (3.1) будуть лінійно незалежними.

Якщо ж крім нульового розв'язку система (3.5) має ще й ненульові розв'язки, то вектори (3.1) лінійно залежні.

Властивості лінійної залежності

Теорема 3.1. *Якщо серед векторів (3.1) є нульовий, то ці вектори лінійно залежні.*

Теорема 3.2. *Якщо серед векторів (3.1) є p лінійно залежних векторів, то вектори (3.1) – лінійно залежні.*

Теорема 3.3. *Вектори (3.1) лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли один з них є лінійною комбінацією інших.*

Теорема 3.4. Для того, щоб два вектори були лінійно залежні необхідно та достатньо, щоб вони були колінеарні, і навпаки.

Теорема 3.5. Для того, щоб три вектори були лінійно залежні необхідно і достатньо, щоб вони були компланарні, і навпаки.

Теорема 3.6. Серед трьох некопланарних векторів не може бути двох колінеарних векторів.

Теорема 3.7. *Будь-які чотири вектори лінійно залежні.*

Поняття лінійної залежності має досить глибокий зміст і широко використовується в математиці. Розглянемо застосування цього поняття.

4. Базис на площині та у просторі

Означення 4.1. Впорядкована система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називається *базисом*, якщо система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ лінійно незалежна і кожен вектор $\vec{a}$ можна подати у вигляді лінійної комбінації векторів цієї системи.

Означення 4.2. Впорядкована пара неколінеарних векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ називається *базисом на площині*, а впорядкована трійка $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ некопланарних векторів – називається *базисом у просторі*.

Теорема 4.1. Кожен вектор $\vec{a}$ на площині єдиним способом розкладається на пару неколінеарних векторів

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2. \quad (4.1)$$

Співвідношення (4.1) називається *розкладом вектора $\vec{a}$ в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$* . Числа λ_1, λ_2 називаються *координатами вектора $\vec{a}$ в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$* і записують $\vec{a} = \{\lambda_1, \lambda_2\}$.

Теорема 4.2. Якщо в просторі вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ утворюють базис, то будь-який вектор $\vec{a}$ простору можливо єдиним способом розкласти у вигляді їх лінійної комбінації $\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3$, де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ координати вектора $\vec{a}$ у базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ і записують $\vec{a} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$.

Базисів на площині і у просторі існує нескінченна множина. Один і той самий вектор у різних базисах має різні координати.

Приклад 1. Чи можуть вектори $\vec{a}_1(2; -3; 1)$, $\vec{a}_2(3; -1; 5)$, $\vec{a}_3(1; -4; 3)$ утворювати базис? Якщо так, то знайти розклад цих векторів по даному базису.

Розв'язання. Нехай дано вектор $\vec{d}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Перевіримо, чи утворюють вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ базис. Нехай лінійна комбінація цих векторів рівна нулю, тобто $\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{a}_i = \vec{0}$. Одержимо $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \vec{0}$.

Через координати ця рівність має вигляд:

$$\lambda_1\{2; -3; 1\} + \lambda_2\{3; -1; 5\} + \lambda_3\{1; -4; 3\} = \vec{0}, \text{ або}$$

$$\{2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3; -3\lambda_1 - \lambda_2 - 4\lambda_3; \lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3\} = \{0; 0; 0\}.$$

Для знаходження $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0; \\ -3\lambda_1 - \lambda_2 - 4\lambda_3 = 0; \\ \lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Визначник цієї системи $\Delta \neq 0$. Отже, дана однорідна система має тільки нульові розв'язки $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Звідси випливає, що вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ – лінійно незалежні, а отже утворюють базис $\vec{d}(0; 0; 0)$.

Означення 4.3. Два вектори у одному базисі називаються *рівними*, якщо рівні їх відповідні координати.

Для зручності використовують *ортонормований базис*.

Означення 4.4. Базис, утворений одиничними, взаємно перпендикулярними векторами, називається *ортонормованим базисом*.

Базисні вектори ортонормованого базису (*орти*), як правило, позначаються $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, де $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, $(\vec{i}, \vec{j}) = (\vec{j}, \vec{k}) = (\vec{k}, \vec{i}) = \frac{\pi}{2}$.

Ортонормований базис у просторі буває *лівоорієнтованим* та *правоорієнтованим*. Якщо при спостереженні з кінця вектора $\vec{k}$ найкоротший поворот від вектора $\vec{i}$ до вектора $\vec{j}$ відбувається у напрямі проти годинникової стрілки, то базис називається *правоорієнтованим*, а якщо за годинниковою стрілкою – то *лівоорієнтованим* (рисунок 4.1).

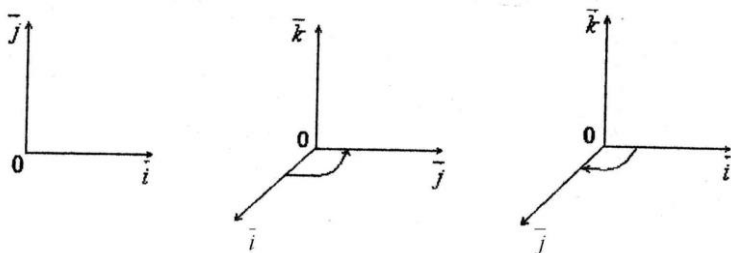


Рис. 4.1.

Координати вектора у ортонормованому базисі дорівнюють проєкціям вектора на напрям базисних векторів.

5. Лінійні операції над векторами, які подані у координатній формі.

Нехай $\vec{a} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ і $\vec{b} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ – вектори, задані своїми координатами у базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

Теорема 5.1. При множенні вектора на число усі його координати множаться на це число: $\lambda \vec{a} = (\lambda \lambda_1, \lambda \lambda_2, \dots, \lambda \lambda_n)$.

Теорема 5.2. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх координати пропорційні: $\frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \dots = \frac{\lambda_n}{\mu_n}$.

Теорема 5.3. При додаванні векторів додаються їхні відповідні координати: $\vec{a} + \vec{b} = (\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \dots, \lambda_n + \mu_n)$.

Приклад 1. Серед векторів $\vec{a} = \{5; 1; -4\}$, $\vec{b} = \{5; 1; -3\}$,
 $\vec{c} = \{-20; -4; 16\}$ знайти колінеарні.

Розв'язання. Якщо вектори колінеарні, то їх координати пропорційні.

Перевіримо колінеарність векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\frac{5}{5} = \frac{1}{1} \neq \frac{-4}{-3}$.

Отже, вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не колінеарні.

Перевіряємо колінеарність векторів $\vec{a}$ і $\vec{c}$: $\frac{5}{-20} = \frac{1}{-4} = \frac{-4}{16} = \frac{1}{4}$.

Отже, вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$ колінеарні.

Вправи для самостійної роботи.

1. Знайти розклад вектора $\vec{d} = \{1; -5\}$ по базисним векторам $\vec{a} = \{3; 7\}$; $\vec{b} = \{-4; 5\}$.

2. Знайти розклад вектора $\vec{d}$ по базису, утвореному векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

а) $\vec{a} = \{1; 4; 0\}$; $\vec{b} = \{-1; 0; -4\}$; $\vec{c} = \{2; 1; 3\}$; $\vec{d} = \{9; -1; 4\}$;

б) $\vec{a} = \{2; 7; 5\}$; $\vec{b} = \{-3; 1; 5\}$; $\vec{c} = \{2; 7; 1\}$; $\vec{d} = \{16; 6; 8\}$;

в) $\vec{a} = \{3; -2; 1\}$; $\vec{b} = \{-1; 1; -2\}$; $\vec{c} = \{2; 1; -3\}$; $\vec{d} = \{11; -6; 5\}$;

г) $\vec{a} = \{1; 5; 7\}$; $\vec{b} = \{-1; 0; 1\}$; $\vec{c} = \{2; 1; -2\}$; $\vec{d} = \{-3; 4; 11\}$.

3. Перевірити, чи колінеарні вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

а) $\vec{a} = \{1; 7; 4\}$; $\vec{b} = \{-3; -21; -12\}$; б) $\vec{a} = \{2; 4; 5\}$; $\vec{b} = \{4; 8; 9\}$;

в) $\vec{a} = \{0; 5; 6\}$; $\vec{b} = \{1; 10; 12\}$; г) $\vec{a} = \{2; -1; 0\}$; $\vec{b} = \{2; -1; -1\}$?

6. Системи координат

6.1. Декартова система координат

Розглянемо в просторі точку O і деякий базис, що задається векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (рисунок 6.1).

Означення 6.1. Сукупність точки і базису називається *декартовою системою координат в просторі* (на честь французького математика Рене Декарта).

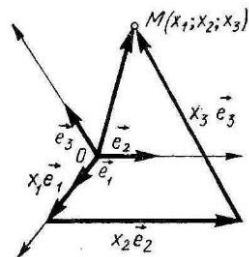


Рис. 6.1.

Точка O називається початком координат.

Осі, які проходять через початок координат в напрямі базисних векторів, називаються *осями координат*. Перша з них проходить в напрямі вектора $\vec{e}_1$ і називається *віссю абсцис*, друга вісь, яка проходить у напрямі $\vec{e}_2$ – *віссю ординат* і третя – в напрямі вектора $\vec{e}_3$ – *віссю аплікат*.

Площини, які проходять через осі координат, називаються *координатними площинами*.

Довільній точці простору можна співставити вектор $\overline{OM}$, початок якого збігається з початком координат O , а кінець – з точкою M .

Означення 6.2. Вектор $\overline{OM}$ називається *радіус-вектором точки M* по відношенню до точки O .

Згідно з теоремою 4.2 про розклад вектора по базису існують такі дійсні числа x_1, x_2, x_3 , що

$$\overline{OM} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3. \quad (6.1)$$

Означення 6.3. Координати x_1, x_2, x_3 радіуса-вектора точки M відносно початку координат називають *декартовими координатами точки M* в даній системі координат і пишуть $M(x_1, x_2, x_3)$. Координата x_1 називається *абсцисою* точки M , координата x_2 – *ординатою* і координата x_3 – *аплікатою* точки M .

Отже, якщо в просторі обрано декартову систему координат, то кожній точці простору відповідає одна упорядкована трійка дійсних

чисел – декартові координати цієї точки. І навпаки. Тобто, обрана декартова система координат установлює взаємно однозначну відповідність між точками простору і упорядкованими трійками чисел.

Зауваження. Аналогічно визначаються декартові координати на площині і на прямій. Різниця в тому, що точка на площині має дві координати, а на прямій – одну.

6.2. Прямокутна система координат.

Очевидно, декартових систем координат можна задати скільки завгодно. Серед них широко використовується прямокутна система координат.

Означення 6.4. *Прямокутною декартовою системою координат (або просто прямокутною системою координат) називається декартова систем координат, базис якої ортонормований.*

Прямокутну систему координат позначають через $Oxyz$: Ox – вісь абсцис, Oy – вісь ординат, Oz – вісь аплікат; координатні площини – через Oxy , Oyz , Ozx (рисунок 6.2).

При зображенні системи координат, як правило, показують лиш осі координат, а вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ не вказують.

Нехай задана прямокутна система координат $Oxyz$ і довільна точка M (рисунок 6.2). Радіус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ цієї точки згідно формули (6.1) запишеться у вигляді:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \text{ або } \vec{r} = (x, y, z). \quad (6.2)$$

Координати x , y , z радіуса-вектора точки M називаються *координатами точки M* і записуються $M(x, y, z)$.

Оскільки базисні вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ системи $Oxyz$ ортогональні, то координати точки M дорівнюють відповідним проєкціям радіуса-вектора цієї точки на осі координат:

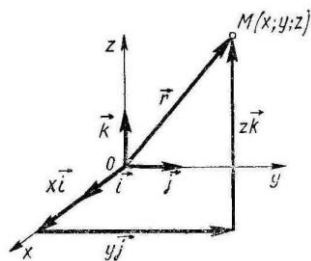


Рис. 6.2.

$$x = \text{пр}_{Ox} \overrightarrow{OM}, \quad y = \text{пр}_{Oy} \overrightarrow{OM}, \quad z = \text{пр}_{Oz} \overrightarrow{OM}. \quad (6.3)$$

Зауваження. Прямокутні координати точки на площині і на прямій визначаються аналогічним способом, як і в просторі.

Приклад 1. Знайти такі значення α та β , при яких колінеарні вектори $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ та $\vec{b} = 7\vec{i} - 42\vec{j} + \beta\vec{k}$.

Розв'язання. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ задані у вигляді $\vec{a} = \{\alpha; -3; 5\}$, $\vec{b} = \{7; -42; \beta\}$. Для того, щоб вектори були колінеарні, повинна виконуватись рівність $\frac{\alpha}{7} = \frac{-3}{-42} = \frac{5}{\beta}$. Із відношення $\frac{\alpha}{7} = \frac{-3}{-42}$ знаходимо $\alpha = \frac{7(-3)}{-42} = \frac{1}{2}$. Тоді знаходимо $\beta: \frac{-3}{-42} = \frac{5}{\beta}, \beta = \frac{-42 \cdot 5}{-3} = 70$.

6.3. Вектори в системі координат.

Для того, щоб звести операції над векторами до операцій над числами, розглянемо вектори в системі координат.

Нехай в прямокутній системі координат $Oxyz$ задано вектор $\vec{a}$.

1. *Координати вектора.* Вектор $\vec{a}$ в ортонормованому базисі

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, який задає обрану систему

координат, має вигляд $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, де a_x, a_y, a_z – координати вектора $\vec{a}$ в цьому базисі, що обчислюються за формулами:

$$a_x = \text{пр}_{Ox}\vec{a}, \quad a_y = \text{пр}_{Oy}\vec{a}, \quad a_z = \text{пр}_{Oz}\vec{a}. \quad (6.4)$$

2. *Довжина вектора.* Вектор $\vec{a}$ є діагоналю прямокутного паралелепіпеда з вимірами $|a_x|, |a_y|, |a_z|$, тому довжина цього вектора рівна

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (6.5)$$

Якщо початок вектора $\overline{AB}$ знаходиться в точці $A(x_1, y_1, z_1)$, а кінець в точці $B(x_2, y_2, z_2)$, то $a_x = x_2 - x_1, a_y = y_2 - y_1, a_z = z_2 - z_1$, тобто

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1). \quad (6.6)$$

Тоді з формули (6.5) знаходимо довжину вектора $\overline{AB}$:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (6.7)$$

За допомогою формули (6.7) знаходять відстань між точками A і B .

3. *Напрямні косинуси вектора.* Напрям довільного вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ визначається кутами α, β, γ , які утворює вектор $\vec{a}$ з осями координат.

Косинуси цих кутів називаються *напрямними косинусами*. Вони обчислюють ся за формулами:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}. \quad (6.8)$$

Сума квадратів напрямних косинусів дорівнює одиниці.

Приклад 2. Знайти вектор $\vec{c} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$, якщо $\vec{a} = \{5; 1; 4\}$ та $\vec{b} = \{2; -1; 5\}$.

Розв'язання. Оскільки лінійні операції над векторами переносяться на їх координати, маємо: $\vec{c} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$; $4\vec{a} = \{20; 4; 16\}$; $2\vec{b} = \{4; -2; 10\}$. Тоді $\vec{c} = \{20 - 4; 4 - (-2); 16 - 10\} = \{16; 6; 6\}$.

Приклад 3. Чи може вектор утворювати з осями Ox, Oy, Oz кути, що дорівнюють відповідно $30^\circ; 45^\circ; 90^\circ$?

Розв'язання. Знаходимо направляючі косинуси:

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos 90^\circ = 0.$$

Перевіримо, чи виконується основна властивість направляючих косинусів:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (0)^2 = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} + 0 = \frac{5}{4} \neq 1.$$

Отже, не існує такого вектора, який з осями координат утворює задані кути.

6.4. Поділ відрізка в даному відношенні

Нехай задано відрізок AB точками $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$ (рисунок 6.3). Знайдемо на відрізку таку точку $M(x, y, z)$, яка ділить цей відрізок у відношення λ , тобто $|\overline{AM}| : |\overline{MB}| = \lambda$. Розглянемо вектори: $\overline{OA} = (x_1; y_1; z_1)$; $\overline{OB} = (x_2, y_2, z_2)$; $\overline{OM} = (x; y; z)$ та вектори $\overline{AM}$ і $\overline{MB}$.

Очевидно, що $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$.

За умовою $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$. Тоді

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM});$$

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda \overrightarrow{OB} - \lambda \overrightarrow{OM};$$

$$\overrightarrow{OM}(1 + \lambda) = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}.$$

$$\text{Звідси } \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}}{1 + \lambda}.$$

Оскільки лінійні операції над векторами переносяться і на їх координати, одержуємо формули:

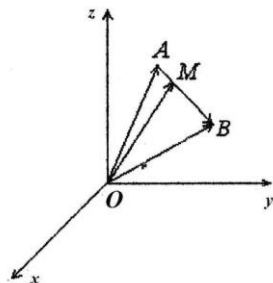


Рис. 6.3.

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}, \quad (6.9)$$

які називаються *формулами ділення відрізка у даному відношенні*.

Якщо відрізок поділяється точкою M навпіл, то $\lambda = 1$, а формули (6.9) набувають вигляду:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (6.10)$$

Зауваження. Число λ може будь-яким, окрім $\lambda = -1$. Якщо λ – число від’ємне, то це означає, що точка M знаходиться на прямій AB , але поза відрізком AB .

Приклад 4. Задані вершини трикутника $A(1; 4)$, $B(3; -9)$, $C(-5; 2)$. Обчислити довжину його медіани, проведеної з вершини B .

Розв’язання. Нехай BK – медіана трикутника ABC . Тоді K – середина відрізка AC . Знаходимо її координати:

$$x = \frac{1 + (-5)}{2} = -2, \quad y = \frac{4 + 2}{2} = 3.$$

Довжина медіани рівна $BK = \sqrt{(-2 - 3)^2 + (3 - (-9))^2} = 13$.

Вправи для самостійної роботи.

1. Знайти координати векторів $\overline{AB}$ та $\overline{BA}$:

а) $A(1;4;0)$; $B(5;1;3)$; б) $A(-1;0;2)$; $B(1;2;3)$; в) $A(7;11;-12)$; $B(4;5;7)$.

2. Знайти координати точки B , якщо відомі координати вектора $\overline{AB}$ та його початок: а) $\overline{AB}=\{4; -1; 3\}$; $A(7; 2; 1)$; б) $\overline{AB}=\{5; 2; 7\}$; $A(7; 2; 5)$.

3. Знайти направляючі косинуси вектора:

а) $\vec{a}=\{1; 3; -1\}$; б) $\vec{a}=\{5; -5; 1\}$; в) $\vec{a}=\{-1; 4; 5\}$.

7. Скалярний добуток двох векторів.

Означення 7.1. Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi, \quad (7.1)$$

де $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Якщо хоча б один з векторів $\vec{a}$ чи $\vec{b}$ нульовий, то за означенням (7.1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Оскільки проекція вектора на вісь обчислюється за формулою (2.1): $\text{пр}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi$, то означення скалярного добутку можна дати так:

Означення 7.2. Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку модуля одного з векторів на проекцію іншого вектора на вісь, що визначається першим з указаних векторів, тобто

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_a \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_b \vec{a}. \quad (7.2)$$

Зауваження. Означення 7.1 і 7.2 еквівалентні.

7.1. Властивості скалярного добутку

Алгебраїчні властивості

1. *Комутативна* властивість множення: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

2. *Асоціативна* властивість відносно числового множника:

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

3. *Дистрибутивна* властивість відносно додавання векторів:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

Геометричні властивості

1. Якщо $\vec{a} \neq 0$ і $\vec{b} \neq 0$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, коли кут $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$ – гострий, і $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, коли кут $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$ – тупий.

2. Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли ці вектори взаємно перпендикулярні.

3. Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, звідки $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

7.2. Скалярний добуток векторів у координатній формі.

Нехай задано два вектори $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ та $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$.

Теорема 7.1. Якщо вектори задані декартовими прямокутними координатними, то їх скалярний добуток дорівнює сумі добутків однойменних координат:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (7.3)$$

Наведемо ряд важливих висновків з формули (7.3).

Теорема 7.2. Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності векторів $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ та $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$ є рівність:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \quad (7.4)$$

Теорема 7.3. Довжина вектора $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ визначається за формулою:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (7.5)$$

Теорема 7.4. Кут $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$ між векторами $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ та $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$ визначається рівністю:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (7.6)$$

Якщо базисні вектори задати за допомогою координат:

$\vec{i} = \{1; 0; 0\}$, $\vec{j} = \{0; 1; 0\}$, $\vec{k} = \{0; 0; 1\}$, то за означенням скалярного добутку:

а) напрямні косинуси можна обчислити за формулами:

$$\cos \alpha = \cos(\vec{a}, \vec{i}) = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos \beta = \cos(\vec{a}, \vec{j}) = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos \gamma = \cos(\vec{a}, \vec{k}) = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}};$$

б) проекцію вектора на вісь можна обчислити за формулою:

$$\text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Приклад 1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{2}{3}\pi$. Обчислити

$$(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}), \text{ якщо } |\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4.$$

Розв'язання. За алгебраїчною властивістю скалярного добутку

$$\text{маємо: } (3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}) = 3\vec{a} \cdot \vec{a} + 3\vec{a} \cdot 2\vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{a} - 2\vec{b} \cdot 2\vec{b} =$$

$$= 3\vec{a}^2 \cdot \vec{a} + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 4\vec{b}^2 = 3\vec{a}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} - 4\vec{b}^2 =$$

$$= 3|\vec{a}|^2 + 4|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \frac{2}{3}\pi - 4|\vec{b}|^2 = 3 \cdot 9 + 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ - 4 \cdot 16 =$$

$$= 27 - 64 + 48 \cdot \cos(90^\circ + 30^\circ) = -37 - 48 \cdot \sin 30^\circ = 37 - 48 \cdot \frac{1}{2} = -37 - 24 = -61.$$

Приклад 2. Визначити, при якому значенні α вектори

$$\vec{a} = \alpha \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k} \text{ і } \vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \alpha \vec{k} \text{ взаємно}$$

перпендикулярні.

Розв'язання. Згідно з геометричною властивістю скалярного добутку, вектори перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю. Маємо $\vec{a} = \{\alpha; -3; +2\}$, $\vec{b} = \{1; 2; -\alpha\}$.

Отже, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-\alpha) = \alpha - 6 - 2\alpha = -\alpha - 6 = 0$. Звідси, $\alpha = -6$.

Вправи для самостійної роботи

1. Знайти скалярний добуток векторів, якщо:

а) $\vec{a} = \{4; 3; 2\}$, $\vec{b} = \{0; -1; 3\}$;

б) $\vec{p} = \{5; -1; 1\}$, $\vec{q} = \{0; -5; 2\}$; $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$, $\vec{b} = 4\vec{p} + 5\vec{q}$.

2. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = \sqrt{3}$,

$|\vec{b}| = 1$, обчислити кут α між векторами $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$.

3. Обчислити внутрішній кут трикутника при вершині B , якщо вершини трикутника мають координати $A(-1; -2; 4)$, $B(-4; -2; 0)$, $C(3; -2; 1)$.

4. Визначити, при якому значенні α вектори $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 4\vec{j} + 19\vec{k}$ та $\vec{b} = 3\vec{i} - 22\vec{j} + \alpha\vec{k}$ будуть перпендикулярні.

5. Знайти проекцію вектора $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$ на вектор $\vec{b}$, якщо $\vec{a} = \{2; 0; -2\}$ і $\vec{b} = \{-2; 1; 2\}$.

8. Векторний добуток двох векторів.

Означення 8.1. Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{c}$, який задовольняє трьом умовам:

- 1) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
- 2) якщо $\vec{c} \neq 0$, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів;

3) довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$, де $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$.

Векторний добуток позначається одним із символів:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a} \ \vec{b}] = [\vec{a} \times \vec{b}].$$

8.1. Властивості векторного добутку

Алгебраїчні властивості:

1. *Антикомутативність множення:* $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$, тобто від перестановки множників векторний добуток змінює знак.

2. *Асоціативність відносно скалярного множника λ :*

$$\lambda \vec{a} \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}); \quad \vec{a} \times \lambda \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}).$$

3. *Дистрибутивність відносно додавання векторів:*

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

Геометричні властивості

1. **Теорема 8.1.** Векторний добуток двох векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ці вектори колінеарні.

2. Модуль $|\vec{a} \times \vec{b}|$ векторного добутку не колінеарних векторів дорівнює площі S паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, віднесеного до спільного початку (рисунки 8.1), тобто $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$.

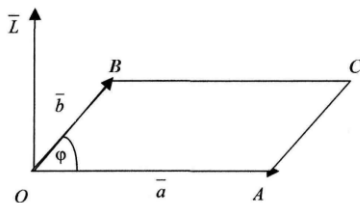


Рис. 8.1.

3. Векторні добутки ортів задовольняють такі рівності:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0;$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j};$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

8.2. Векторний добуток двох векторів, заданих координатами.

Теорема 8.2. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані декартовими прямокутними координатами $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ і $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, то їх векторний добуток знаходиться за формулою

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Якщо вектори $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ і $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ задані декартовими прямокутними координатами, то площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, що мають спільний початок, як на сторонах, знаходиться за формулою:

$$S = \sqrt{\left| \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \right|^2 + \left| \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \right|^2 + \left| \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right|^2}.$$

Якщо вектори $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ і $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ задані декартовими прямокутними координатами, то площа трикутника, побудованого на маючих спільний початок векторах, як на сторонах, знаходиться за формулою:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \sqrt{\left| \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \right|^2 + \left| \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \right|^2 + \left| \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right|^2}.$$

Приклад 1. Знайти координати векторного добутку

$$(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b}), \text{ якщо } \vec{a} = (3; -1; -2), \vec{b} = (1; 2; -1).$$

Розв'язання. Знаходимо координати векторів-співмножників:

$$(2\vec{a} - \vec{b}) = 2(3; -1; -2) - (1; 2; -1) = (6; -2; -4) - (1; 2; -1) = (5; -4; -3);$$

$$2\vec{a} + \vec{b} = (6; -2; -4) + (1; 2; -1) = (7; 0; -5).$$

Тоді

$$(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -4 & -3 \\ 7 & 0 & -5 \end{vmatrix} = (20; 4; 28).$$

Приклад 2. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{2}{3}\pi$.

Обчислити $((2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b}))$, якщо $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2$.

Розв'язання. Використовуючи алгебраїчні властивості векторного добутку, спростимо вираз

$$\begin{aligned}(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b}) &= 2(\vec{a} \times \vec{a}) + 4(\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{b} \times \vec{a} + 2(\vec{b} \times \vec{b}) = \\ &= 4(\vec{a} \times \vec{b}) - \vec{a} \times \vec{b} = 3(\vec{a} \times \vec{b}).\end{aligned}$$

Застосуємо тотожність $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ до вектора $3(\vec{a} \times \vec{b})$:

$$(3(\vec{a} \times \vec{b}))^2 = |3(\vec{a} \times \vec{b})|^2 = 9|(\vec{a} \times \vec{b})|^2 = 9(|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi)^2 = 9\left(1 \cdot 2 \cdot \sin \frac{2\pi}{3}\right)^2 = 27.$$

Вправи для самостійної роботи.

1. Знайти модуль векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, знаючи, що:

а) $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 4, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$;

б) $|\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 7, (\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}, \vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$;

в) $|\vec{a}| = 10, |\vec{b}| = 2, \vec{a} \cdot \vec{b} = 12$.

2. Визначити, при якому значенні α вектори $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 4\vec{j} + 19\vec{k}$ та $\vec{b} = 3\vec{i} - 22\vec{j} + \alpha\vec{k}$ будуть перпендикулярними.

3. Обчислити площу трикутника ABC , якщо

а) $A(1;2;0), B(3;0;-3), C(5;2;6)$;

б) $A(1;0;-1), B(2;1;0), C(-3;1;0)$;

в) $A(1;7;0), B(-2;2;2), C(3;-3;3)$.

3. Знайти координати векторних добутків $(\vec{a} \times \vec{b})$ та $((2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b}))$, якщо:

а) $\vec{a} = (1;2;0), \vec{b} = (3;-2;1)$;

б) $\vec{a} = (1;-1;1), \vec{b} = (2;3;-1)$

в) $\vec{a} = (3;0;5), \vec{b} = (-2;1;3)$.

9. Мішаний добуток векторів.

Означення 9.1. Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається число, що дорівнює скалярному добутку вектора $(\vec{a} \times \vec{b})$ на $\vec{c}$: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

9.1. Властивості мішаного добутку

Геометричні властивості мішаного добутку

Побудуємо паралелепіпед, ребрами якого є задані вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Також побудуємо вектор $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$. Тоді $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{d} \cdot \vec{c} = |\vec{d}| \cdot \text{пр}_{\vec{d}} \vec{c}$, причому $|\vec{d}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = S$, де S – площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рисунок 9.1).

Крім того, $\text{пр}_{\vec{d}} \vec{c} = H$ для правої трійки векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ та $\text{пр}_{\vec{d}} \vec{c} = -H$ – для лівої трійки векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, де H – висота паралелепіпеда.

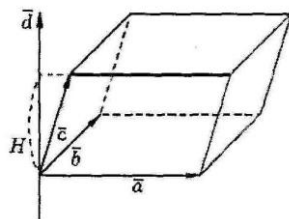


Рис.9.1.

Отже, $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = S \cdot (\pm H)$. Тобто $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \pm V$, де V – об'єм паралелепіпеді, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

1. Мішаний добуток трьох векторів дорівнює об'єму паралелепіпеді, побудованого на цих векторах, взятого зі знаком „+”, якщо вектори утворюють праву трійку, і зі знаком „-”, якщо вектори утворюють ліву трійку.

Паралелепіпед, побудований на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, як на сторонах, рівновеликий з шістьма тетраедрами, побудованими на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, як на сторонах, якщо ці вектори мають спільний початок.

2. Об'єм тетраедра, побудованого на трьох векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, які мають спільний початок, як на сторонах, визначається за формулою

$$V = \pm \frac{1}{6} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

2. Три вектори компланарні тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулю.

Алгебраїчні властивості мішаного добутку.

1. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$, тобто мішаний добуток не змінюється при перестановці місцями знаків векторного і скалярного множення.

Ця властивість дозволяє надалі позначати мішаний добуток векторів більш простим символом $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

2. Мішаний добуток змінює знак при перестановці місцями будь-яких двох векторів: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$.

3. Мішаний добуток трьох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ці вектори компланарні.

9.2. Мішаний добуток векторів, заданих координатами.

Теорема 9.1. Якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ задані декартовими координатами $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, $\vec{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$, то мішаний

векторів знаходиться за формулою $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

Теорема 9.2. Для того, щоб три вектори були компланарні необхідно і достатньо, щоб визначник, складений з їх координат,

дорівнював нулю $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$.

Теорема 9.3. Об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, $\vec{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$, які мають спільний початок,

як на сторонах, знаходиться за формулою: $V = \pm \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

Теорема 9.4. Об'єм тетраедра, побудованого на векторах $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, $\vec{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$, які мають спільний початок, як на сторонах, знаходиться за формулою:

$$V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Приклад 1. Знайти площу основи ABC , об'єм та довжину висоти трикутної піраміди, вершинами якої є точки $A(1;2;3)$, $B(0;-1;1)$, $C(2;5;2)$, $D(3;0;-2)$ (рисунок 9.2).

Розв'язання. Знаходимо координати векторів, які мають спільний початок у точці A :

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (-1; -3; -2),$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = (1; 3; -1),$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{AD} = (2; -2; -5).$$

Тоді з властивостей векторного

добутку маємо, що $S_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$.

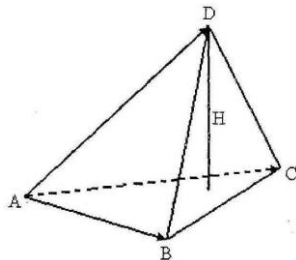


Рис. 9.2.

$$\text{Знайдемо } \vec{a} \times \vec{b}: \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} = 9\vec{i} - 3\vec{j}.$$

Тоді $S_{ABC} = \sqrt{9^2 + 3^2} = \frac{3}{2} \sqrt{10}$. Об'єм піраміди:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -5 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 24 = 4.$$

Знайдемо висоту піраміди, опущеної з вершини D :

$$H = \frac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}} = \frac{3 \cdot 4}{\frac{3}{2} \sqrt{10}} = \frac{8}{\sqrt{10}}.$$

Вправи для самостійної роботи

1. Визначити, якою є трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (правою чи лівою), якщо $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{j} + \vec{k}$.
2. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 3$, обчислити $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.
3. Встановити, чи компланарні вектори $\vec{a} = (2; -1; 2)$, $\vec{b} = (1; 2; -3)$, $\vec{c} = (3; -4; 7)$.
4. Довести, що чотири точки $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$, $D(2; 1; 3)$ лежать в одній площині.
5. Обчислити об'єм тетраедра, вершини якого співпадають з точками $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$, $D(4; 1; 3)$.

ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Аналitична геометрія – розділ геометрії, в якому геометричні фігури та їх властивості досліджуються засобами елементарної алгебри за допомогою координат. В основі цього методу лежить так званий метод координат, вперше застосований Декартом у 1637 році своїй книзі „Геометрія”. Кожному геометричному співвідношенню цей метод ставить у відповідність деяке рівняння, яке пов’язує координати фігури або тіла.

1. Системи координат

Під системою координат на площині розуміють спосіб, що дозволяє чисельно описати положення точки на площині.

Розглянемо два неколінеарні вектори, які прикладені до спільного початку – точки O . Будь-якій точці M площини AOB поставимо у відповідність вектор $\overrightarrow{OM}$, який називають радіусом-вектором точки M (рисунок 1.1).

Оскільки вектори $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}$ компланарні, то існує пара чисел (x, y) така, що $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$. Сукупність точки і двох не колінеарних прикладених до неї векторів дають змогу ввести систему координат на площині: кожній точці M

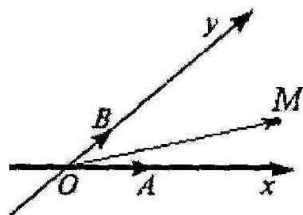


Рис. 1.1.

площини ставиться у відповідність єдина пара (x, y) така, що $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$. Числа x та y називають *координатами* точки M . І, навпаки, для кожної пари чисел (x, y) існує єдина точка площини з такими координатами. Вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ задають прямі з вибраним напрямом, які називають *осьми координат*, а точку їх перетину O – *початком координат*.

Площина, в якій задано систему координат, називають *координатною площиною*.

Найбільш зручними для застосування є прямокутна система координат та полярна система координат.

Прямокутна система координат задається точкою O – початок координат та двома взаємно перпендикулярними одиничними векторами $\vec{i} = (1, 0)$ та $\vec{j} = (0, 1)$, які визначають осі координат – вісь абсцис Ox , та вісь ординат Oy (рисунок 1.2).

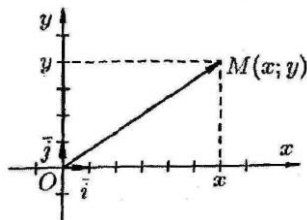


Рис. 1.2.

Зазвичай вісь абсцис розташована горизонтально і направлена зліва направо, а вісь ординат вертикально і направлена зверху вниз. Осі координат поділяють площину на чотири області, що називаються *чвертями* або *квадрантами*.

Полярна система координат задається початком відліку – точкою O , що називається *полюсом*, і віссю Op , яка називається *полярною віссю*, з вибраним на ній *ортом* $\vec{e}$. Положення довільної точки M на площині визначається двома числами: відстанню r точки M до полюса O та кутом φ , який утворює відрізок OM з віссю Op . Відлік кутів ведеться у напрямку проти годинникової стрілки. (рисунок 1.3).

Числа r та φ називаються *полярними координатами* точки M . Записують це так: $M(r, \varphi)$. При цьому r називається *полярним радіусом* точки M , а φ – *полярним кутом*, який вимірюється в радіанах.

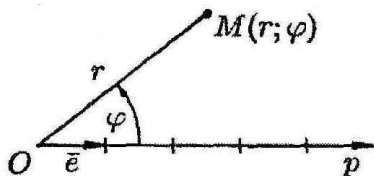


Рис. 1.3.

Для отримання всіх точок площини достатньо вважати, що $-\pi < \varphi \leq \pi$ (або $0 \leq \varphi < 2\pi$), а $0 \leq r < \infty$. В цьому випадку кожній точці M площини відповідає єдина пара чисел площини (r, φ) і навпаки кожній парі чисел (r, φ) відповідає єдина точка M площини.

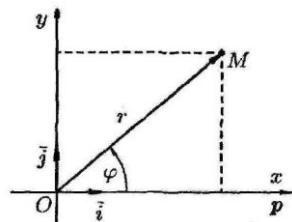
Зауваження. Полярна система координат має одну точку, де порушується взаємно однозначна відповідність між точками площини і парами чисел (r, φ) із зазначеними вище обмеженнями – точку O , якій відповідає значення $r = 0$, але полюс φ невизначений.

Встановимо зв'язок між декартовими та полярними системами координат.

Розташуємо полюс у початку прямокутної системи координат і полярну вісь сумістимо з віссю абсцис Ox (рисунк 1.4).

Нехай M – довільна точка площини і (x, y) – її декартові координати, а (r, φ) – полярні координати. Тоді (див. рисунок 1.4):

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad (1.1)$$



Формули (1.1) є формулами переходу від Рис. 1.4.

декартової прямокутної системи координат до полярної системи координат. Полярні координати виражаються через декартові наступним чином:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{або} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \end{cases} \quad (1.2)$$

2. Перетворення координат

Перехід від однієї системи координат до іншої називається *перетворенням системи координат*.

Паралельний перенос системи координат

Нехай на площині задана прямокутна система координат Oxy . Під паралельним переносом осей координат розуміють перехід від системи координат Oxy до системи координат $O'x'y'$, при якому змінюється положення початку координат, а напрям та масштаб осей залишається незмінним. Систему Oxy будемо називати старою, а $O'x'y'$ – новою системою координат.

Нехай M – довільна точка:
 (x, y) – її координати у старій системі координат, (x', y') – у новій системі, новий початок координат – точка O' має у старій системі координат Oxy координати (x_0, y_0) , тобто $O'(x_0, y_0)$ (рисунк 2.1).

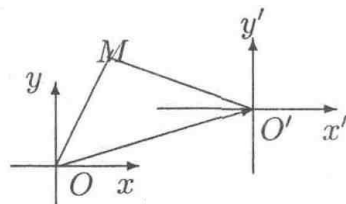


Рис. 2.1.

Теорема 2.1. При паралельному перенесенні осей старі координати довільної точки M площини дорівнюють сумі нових координат і

відповідних координат нового початку в старій системі:

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Поворот системи координат

Під поворотом осей координат розуміють таке перетворення координат, при якому обидві осі повертаються на один і той самий кут, а початок координат та масштаб залишаються незмінними.

Нехай нова система координат Ox_1y_1 отримується поворотом системи координат Oxy на кут α (рисунок 2.2).

Нехай (x, y) – координати довільної точки M у старій системі координат Oxy , а (x_1, y_1) – координати цієї точки у новій системі координат Ox_1y_1 . Позначимо довжину відрізка

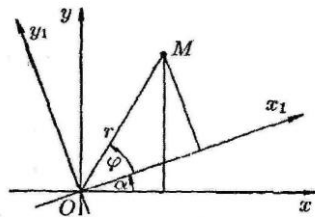


Рис. 2.2.

$|OM| = r$, яка є однаковою для обох систем координат. І нехай також φ – кут, який утворює вектор $\overrightarrow{OM}$ з віссю Ox_1 , у новій системі координат. Тоді

$$\begin{cases} x = r \cos(\alpha + \varphi), \\ y = r \sin(\alpha + \varphi) \end{cases} \quad \text{тобто} \quad \begin{cases} x = r \cos \alpha \cos \varphi - r \sin \alpha \sin \varphi, \\ y = r \sin \alpha \cos \varphi + r \cos \alpha \sin \varphi \end{cases}$$

Але $r \cos \varphi = x_1$, а $r \sin \varphi = y_1$, Тому

$$\begin{cases} x = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha, \\ y = x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha. \end{cases} \quad (2.2)$$

Одержані формули (2.2) називаються *формулами повороту осей*. Вони дозволяють визначити старі координати (x, y) точки M за новими координатами (x_1, y_1) цієї ж точки M , і навпаки.

3. Рівняння лінії на площині

Лінією (кривою) на площині називається геометричне місце точок, які мають певну спільну властивість.

Нехай на площині введена прямокутна система координат Oxy .

Означення 3.1. *Рівнянням кривої* на площині називається рівняння з двома змінними $F(x, y) = 0$, яке задовольняють всі точки $M(x, y)$ кривої, і не задовольняє жодна точка, що не належить цій кривій.

Якщо у заданій системі координат рівняння кривої відоме, то це дає можливість досліджувати геометричні властивості кривої та її форму.

Для того, щоб з'ясувати, чи лежить точка $A(x_0, y_0)$ на кривій, достатньо підставити координати цієї точки у рівняння кривої $F(x, y) = 0$. Якщо при цьому рівняння перетвориться на тотожність, тобто $F(x_0, y_0) = 0$, то точка A належить кривій, інакше, коли $F(x_0, y_0) \neq 0$, точка A не належить кривій.

Для того, щоб знайти точки перетину двох кривих, заданих своїми рівняннями $F_1(x, y) = 0$ і $F_2(x, y) = 0$, необхідно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

Якщо ця система не має розв'язків, то криві не перетинаються.

Криву на площині можна задавати за допомогою двох рівнянь:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in T, \end{cases} \quad (3.1)$$

де x та y – координати довільної точки $M(x, y)$ кривої, а t – змінна, що називається параметром і пробігає множину значень T . Параметр t визначає положення кожної точки $M(x, y)$ кривої на площині Oxy . Таке задання кривої на площині називається *параметричним*. Для того, щоб перейти від параметричного задання кривої до рівняння типу $F(x, y) = 0$, потрібно з якогось із двох рівнянь виключити змінну t .

Векторному рівнянню лінії $\vec{r} = \vec{r}(t)$ у системі координат відповідають два скалярних рівняння (3.1), тобто рівняння проєкцій на осі координат векторного рівняння лінії є її параметричні рівняння. Векторне рівняння кривої та її параметричні рівняння мають механічний зміст. Якщо точка рухається по площині, то вказані рівняння називаються рівняннями руху, а крива – траєкторією точки. При цьому параметр t – це час.

Якщо на площині задана полярна система координат, то рівняння кривої можна задати у полярній системі координат. Рівняння $f(r, \varphi) = 0$ називається *рівнянням даної кривої у полярній системі координат*, якщо всі точки $M(r, \varphi) = 0$ кривої, і тільки вони, задовольняють це рівняння.

Отже, кожній кривій на площині відповідає рівняння $F(x, y) = 0$, і навпаки, кожному рівнянню $F(x, y) = 0$ відповідає якась крива на площині, властивості якої визначаються її рівнянням.

В аналітичній геометрії на площині виникають дві основні задачі:

- 1) знаючи геометричні властивості кривої, знайти її рівняння;
- 2) за відомим рівнянням кривої $F(x, y) = 0$ вивчити її властивості та форму.

4. Пряма на площині. Різні види її рівняння.

Найпростішою лінією на площині є пряма. Вона задається алгебраїчним рівнянням першого порядку відносно змінних x і y . Розглянемо різні види її рівняння.

У прямокутній декартовій системі координат на площині пряма задається лінійним алгебраїчним рівнянням $Ax + By + C = 0$.

Теорема 4.1. *Кожну пряму на площині можна задати рівнянням $Ax + By + C = 0$, де A, B, C – сталі. Навпаки, кожне таке рівняння, в якому коефіцієнти A і B одночасно не дорівнюють нулю визначає деяку пряму.*

Найчастіше на практиці зустрічаються наступні види рівнянь прямої L на площині.

Загальне рівняння прямої

Означення. Загальним рівнянням прямої на площині з декартовою прямокутною системою координат називається рівняння вигляду

$$Ax + By + C = 0, \quad (4.1)$$

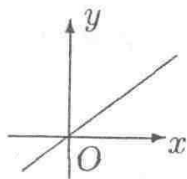
де хоча б один з коефіцієнтів A, B не дорівнює нулю.

Дослідимо це рівняння:

1) Нехай $C = 0$. Тоді рівняння прямої має вигляд $Ax + By = 0$. Пряма проходить через початок координат (рисунок 4.1а).

2) $B = 0$. Одержимо рівняння $Ax + C = 0$. Звідси $x = -\frac{C}{A}$. Пряма паралельна осі Oy (рисунок 4.1б).

3) Розглянемо випадок $A = 0$. Тоді маємо рівняння $By + C = 0$. Оскільки $B \neq 0$, то одержимо $y = -\frac{C}{B}$. Пряма паралельна осі Ox (рисунок 4.1в).



а)

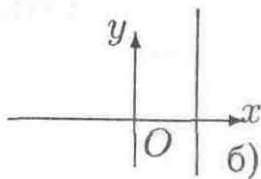
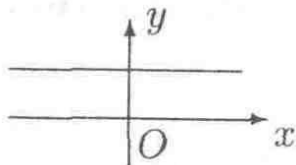


Рис. 4.1.



в)

Рівняння прямої у відрізках на осях

Нехай пряма L задана загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$.

Розглянемо випадок, коли ця пряма перетинає осі координат Ox і Oy і не проходить через початок координат.

Зауваження. Ця умова виконується лише тоді, коли $A, B, C \neq 0$.

Нехай пряма L перетинає вісь Ox у точці $M_1(a, 0)$, вісь Oy – у точці $M_2(0, b)$ (рисунок 4.2).

Знайдемо величини a, b . Підставляючи по черзі в рівняння прямої координати точок M_1 і M_2 , одержимо: $Aa + C = 0$, $Bb + C = 0$,

звідки $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$.

Нехай, навпаки, задані відрізки a і b , які відтинаються прямою на осях Ox і Oy . Складемо рівняння прямої, в яке входять тільки числа a і b . З попередніх виразів знаходимо

$A = -\frac{C}{a}$, $B = -\frac{C}{b}$. Тоді загальне рівняння прямої запишеться у вигляді $-\frac{C}{a}x - \frac{C}{b}y + C = 0$. Скоротивши на $-C$, одержимо **рівняння прямої у відрізках на осях**:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (4.2)$$

Канонічне рівняння прямої

Нехай відомо, що пряма проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ у напрямку вектора $\vec{a} = (m, n)$. Розглянемо довільну точку $M(x, y)$ прямої (рисунок 4.3). Складемо вектор

$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$. Оскільки вектор

$\overrightarrow{M_0M}$ колінеарний вектору $\vec{a}$, то

координати векторів $\overrightarrow{M_0M}$ та $\vec{a}$ пропорційні. Тому

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \quad (4.3)$$

Рівняння (4.3) називається **канонічним рівнянням прямої**, а вектор $\vec{a} = (m, n)$ називається **напрямним вектором прямої**.

Означення 4.1. *Напрямним вектором прямої називається довільний ненульовий паралельний даній прямій вектор.*

Розглянемо два частинні випадки.

1) Якщо $m = 0$, то вектор $\vec{a}$ паралельний осі Oy і пряма паралельна цій осі. Рівняння буде мати вигляд $x = x_0$.

2) Якщо $n = 0$, то вектор $\vec{a}$ паралельний осі Ox і пряма паралельна цій осі. Рівняння буде мати вигляд $y = y_0$.

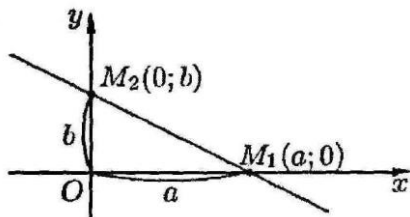


Рис. 4.2.

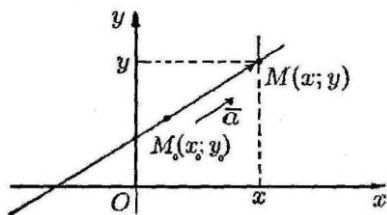


Рис. 4.3.

Параметричне рівняння прямої

З канонічного рівняння (4.3) випливає, що

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = t.$$

Виражаючи з цього рівняння змінні x та y , отримаємо рівняння прямої:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt \end{cases} \quad (4.4)$$

Рівняння (4.4) називається **параметричним рівнянням прямої**, t – параметр, який змінюється в межах від $-\infty$ до $+\infty$.

Зауваження. Значенню параметра $t = 0$ відповідає початкова точка M_0 на прямій.

Геометричний зміст параметра t полягає в тому, що $|t|$ пропорційна відстані від точки M_0 до точки $M(x, y)$ прямої, яка відповідає значенню параметра t . Якщо, крім того, вектор $\vec{a}$ є орт, то $|t|$ дорівнює довжині відрізка M_0M .

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Нехай пряма L задана точкою $M_0(x_0, y_0)$, яка належить L , і кутом α , який вона утворює з додатнім напрямом осі Ox . Позначимо $k = \operatorname{tg} \alpha$.

Означення 4.2. Тангенс кута α нахилу прямої L до осі Ox називається **кутовим коефіцієнтом прямої L** .

Виведемо із канонічного рівняння прямої її рівняння з кутовим коефіцієнтом. Нехай $\vec{a} = \{m, n\}$ – напрямний вектор прямої L і $M_0(x_0, y_0)$ – точка на прямій. Тоді $\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{n}$ із канонічного рівняння

$$\text{прямої маємо: } \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} \Leftrightarrow \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{m}{n} = k. \text{ Звідси одержимо:} \quad (4.5)$$
$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Рівняння (4.5) називається **рівнянням з кутовим коефіцієнтом**.

Часто пряма задається за допомогою кутового коефіцієнта і відрізка b , який відтинається прямою на осі Oy (рисунк 4.4).

Нехай точка $N(0, b)$ – точка перетину прямої і осі Oy . Тоді матимемо рівняння $y - b = k(x - 0)$, звідки отримуємо ще одну форму рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:

$$y = kx + b. \quad (4.6)$$

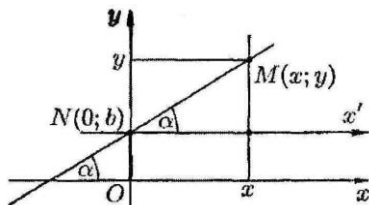


Рис. 4.4.

Кут між двома прямими на площині

Кут між двома прямими вимірюється кутом між їх напрямними векторами. Нехай L_1 та L_2 задані канонічними рівняннями

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1}, \quad L_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2}$$

з напрямними векторами $\vec{a}_1 = \{m_1, n_1\}$ та, відповідно, $\vec{a}_2 = \{m_2, n_2\}$ і кут між цими прямими (тобто кут, на який потрібно повернути у додатному напрямку пряму L_1 навколо точки перетину прямих L_1 та L_2 до співпадіння з прямою L_2): $\varphi = (\vec{a}_1, \vec{a}_2)$, $0 < \varphi < \pi$ (рисунк 4.5).

Оскільки вектори $\vec{a}_1 = \{m_1, n_1\}$ і $\vec{a}_2 = \{m_2, n_2\}$ є напрямними векторами даних прямих і

$\varphi = (\vec{a}_1, \vec{a}_2)$, то за формулою обчислення кута між векторами маємо

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}. \quad (4.7)$$

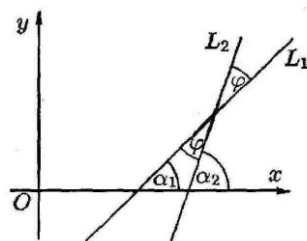


Рис. 4.5.

Якщо прямі L_1 та L_2 паралельні, то і напрямні вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ теж паралельні, тому їхні координати пропорційні, тобто

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (4.8)$$

Рівність (4.8) є умовою паралельності двох векторів.

Якщо прямі L_1 та L_2 перпендикулярні, то і напрямні вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ теж перпендикулярні і їхній скалярний добуток дорівнює нулю:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \quad (4.9)$$

Рівняння (4.9) є умовою перпендикулярності двох векторів.

Вкажемо ще одну формулу для знаходження кута між двома прямими, які задані рівняннями з кутовим коефіцієнтом.

Теорема 4.2. Кут між двома прямими, непаралельними осі Oy обчислюється за формулою

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (4.10)$$

Дійсно, позначимо через α_1 і α_2 кути, що утворюють прямі L_1 та L_2 з віссю координат, тобто $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$ і $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$. Оскільки $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$, то, якщо $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ маємо $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$, звідки легко знайти кут φ . Для того, щоб знайти гострий кут між прямими, не досліджуючи взаємне розташування прямих, праву частину останньої рівності беруть по модулю, тобто

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Нехай $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$ – дві різні точки на площині і L – єдина пряма, яка проходить через них. За напрямний вектор $\vec{a}$ прямої L можна взяти вектор $\vec{a} = \overline{M_1 M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$, який лежить на цій прямій. Запишемо рівняння L як прямої, яка проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$, паралельно вектору $\vec{a} = \overline{M_1 M_2}$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (4.11)$$

Рівняння (4.11) називається **рівнянням прямої, що проходить через 2 задані точки**.

Якщо в рівнянні (4.11) $x_2 = x_1$, то пряма паралельна осі ординат і її рівняння має вигляд: $x = x_1$. Якщо $y_2 = y_1$, то пряма паралельна осі абсцис і її рівняння має вигляд: $y = y_1$.

Нормальне рівняння прямої

Розглянемо пряму L на площині. Позначимо через $\overline{OP}$ нормаль до прямої L , проведену з початку координат, довжина якої рівна $|\overline{OP}| = p$ ($p \geq 0$); через α – кут нахилу нормалі $\overline{OP}$ до осі Ox (рисунок 4.6).

Якщо $p > 0$, то величини p і α однозначно визначають положення прямої L на площині. Знайдемо її рівняння.

Нехай точка P є основою перпендикуляра, опущеного з точки $O(0, 0)$ на пряму. Тоді $\overline{OP} = \{p \cos \alpha, p \sin \alpha\}$, і точка P має координати $P\{p \cos \alpha, p \sin \alpha\}$.

Розглянемо довільну точку $M(x, y)$ на



Рис. 4.6.

прямій і складемо вектор $\overrightarrow{PM} = (x - p \cos \alpha, y - p \sin \alpha)$. Вектор $\overrightarrow{PM}$ перпендикулярний вектору $\overrightarrow{OP}$, звідки випливає, що їх скалярний добуток дорівнює нулю. Отже,

$$\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{OP} = (x - p \cos \alpha) \cos \alpha + (y - p \sin \alpha) \sin \alpha = 0.$$

Одержали рівняння

$$\cos \alpha x + \sin \alpha y - p = 0, \quad (4.12)$$

яке називається **нормальним рівнянням прямої**.

Зауваження. Якщо $p = 0$, то пряма L проходить через початок координат і тоді одиничний вектор нормалі $\vec{n}_0 = \{\cos \alpha, \sin \alpha\}$ визначається вже неоднозначно. Але і в цьому випадку пряма L також задається рівнянням (4.12) з $p = 0$.

Загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ можна звести до нормального нормального вигляду.

Теорема 4.3. Щоб звести загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ до нормального вигляду потрібно домножити всі його члени на число

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

знак якого потрібно брати протилежним до знака C .

Множник λ називається **нормуючим множником**.

Відхилення і відстань від точки до прямої

Розглянемо пряму L , яка не проходить через початок координат. Тоді пряма ділить площину на дві півплощини, одна з яких містить точку O – початок координат, а інша – ні. Нехай на прямій задана деяка точка M . Позначимо через d віддаль точки M від даної прямої.

Означення 4.3. Відхиленням точки M від прямої L називається додатне число $\delta = d$, якщо точки M і O лежать по різні сторони від прямої, і від'ємне число $\delta = -d$, якщо вони лежать по одну сторону від прямої L .

Теорема 4.4. Відхилення точки $M_0(x_0, y_0)$ від прямої дорівнює результату підставлення координат точки M_0 в ліву частину нормального рівняння прямої $\cos \alpha x + \sin \alpha y - p = 0$, тобто

$$\delta = \cos \alpha x + \sin \alpha y - p.$$

Наслідок 4.1. Відстань від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої з нормальним рівнянням $\cos \alpha x + \sin \alpha y - p = 0$ дорівнює:

$$d = |\cos \alpha x + \sin \alpha y - p|.$$

Якщо пряма L задана загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$, то

переходячи до нормальної форми і підставляючи координати точки $M_0(x_0, y_0)$, одержимо **формулу для відстані від точки M_0 до L :**

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (4.13)$$

З формули (4.13) випливає, що відхилення обчислюється за формулою

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}},$$

де знак знаменника має бути протилежним до знак C .

Рівняння пучка прямих

Означення 4.4. *Пучком прямих на площині називається сукупність всіх прямих цієї площини, що проходять через деяку фіксовану точку S , яка називається центром пучка.*

Якщо $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ – рівняння двох різних прямих, що перетинаються в точці S , то рівняння

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \quad (4.14)$$

де α, β – довільні дійсні числа, принаймні одне з яких відмінне від нуля, визначає пряму, яка належить пучку з центром в точці S . І, навпаки, для довільної прямої, що належить пучку з центром в точці S , існують такі дійсні числа α, β , які не дорівнюють нулю одночасно, що рівняння (4.14) є рівнянням цієї прямої.

Тому рівняння (4.14) називається *рівнянням пучка* з центром в точці S .

Якщо $\alpha \neq 0$, то поділивши обидві частини рівняння (4.14) на α і поклавши $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$, одержимо

$$(A_1x + B_1y + C_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0. \quad (4.15)$$

Цим рівнянням можна визначити довільну пряму пучка із центром S , крім тієї, яка відповідає $\alpha = 0$, тобто крім прямої $A_2x + B_2y + C_2$.

Приклад 1. Звести загальне рівняння прямої $-3x + 4y + 15 = 0$ до нормального рівняння.

Розв'язання. Оскільки $C = 15 > 0$, то нормуючим множником буде число $\lambda = \frac{-1}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = \frac{-1}{5}$. Помноживши загальне рівняння

$-3x + 4y + 15 = 0$ на нормуючий множник, одержимо шукане рівняння:

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 3 = 0.$$

Отже, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$, відстань від початку координат до прямої дорівнює $p = 3$.

Приклад 2. Записати рівняння прямої, яка відтинає на осі Ox

$$a = -2, \text{ а на осі } Oy - \text{ відрізок } b = \frac{1}{3}.$$

Розв'язання. Підставивши задані величини в формулу рівняння прямої у відрізках $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = 1$, одержимо $\frac{x}{-2} + \frac{y}{\frac{1}{3}} = 1$. Звідси одержуємо загальне рівняння $-\frac{1}{2}x + 3y - 1 = 0$.

Приклад 3. Пряма проходить через точку $M_0(1, 2)$ паралельно вектору $\vec{a} = \{1, -1\}$. Записати її рівняння.

Розв'язання. Використаємо формулу канонічного рівняння

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \quad \text{і запишемо канонічне рівняння} \quad \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{-1}.$$

Звідси маємо $-(x - 1) = y - 2$ і тому $x + y - 3 = 0$ – загальне рівняння прямої. Розділимо обидві частини рівняння на число 3 (протилежне знак вільного члена в загальному рівнянні прямої), одержимо

рівняння прямої у відрізках на осях $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1$. Підставляючи

координати точки M_0 і вектора $\vec{a}$ у формулу параметричних рівнянь, одержимо параметричні рівняння $x = 1 + t$, $y = 2 - t$.

Приклад 4. Дано дві точки $M_1(1, -1)$ і $M_2(-2, 3)$. Знайти рівняння прямої, яка проходить через ці точки.

Розв'язання. Використаємо формулу рівняння прямої, яка проходить через 2 точки: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. Отже, рівняння матиме вигляд $\frac{x - 1}{-2 - 1} = \frac{y + 1}{3 - (-1)}$, звідки $\frac{x - 1}{-3} = \frac{y + 1}{4}$.

Приклад 5. Обчислити кут між прямими $x - 2y - 4 = 0$ і $2x - 4y + 3 = 0$.

Розв'язання. $\cos \varphi = \frac{1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-4)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-4)^2}} = \frac{2 + 8}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}} = \frac{10}{\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}} = 1$, звідки випливає, що $\varphi = 0$, тобто ці прямі паралельні.

Приклад 6. Визначити, при яких значеннях a і b прямі

$$ax - 2y - 1 = 0, 6x - 4y - b = 0$$

- а) мають одну спільну точку; б) паралельні;
в) співпадають.

Розв'язання. 1) Дві прямі мають одну спільну точку тоді і тільки тоді, коли система рівнянь цих прямих має єдиний розв'язок, а це можливе тоді і тільки тоді, коли визначник матриці цієї

системи відмінний від нуля: $\Delta = \begin{vmatrix} a & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = -4a + 12 \neq 0$, звідки $a \neq 3$.

Отже, дані прямі мають одну спільну точку при $a \neq 3$ і при довільному значенні b .

2) Дані прямі будуть паралельні тоді і тільки тоді, коли $\frac{a}{6} = \frac{-2}{-4}$.

Звідси $-4a = -12$, $a = 3$. Отже, дані прямі паралельні при $a = 3$ і при довільному b .

3) Дані прямі будуть співпадати тоді і тільки тоді, коли $\frac{a}{6} = \frac{-2}{-4} = \frac{-1}{-b} \Rightarrow \frac{a}{6} = \frac{1}{2} = \frac{1}{b}$, звідки $a = 3$ і $b = 2$.

Приклад 7. Точка $A(2, -5)$ є вершиною квадрата, одна з сторін якого лежить на прямій $x - 2y - 7 = 0$. Обчислити площу цього квадрата.

Розв'язання. З'ясуємо, чи проходить задана пряма через точку A : $2 - 2 \cdot (-5) - 7 = 0$; $2 + 10 - 7 \neq 0$. Отже, задана пряма не проходить через вершину A . Нехай в умові задане рівняння прямої BC . Щоб обчислити площу квадрата, досить обчислити довжину його сторони. Сторона AB квадрата дорівнює віддалі d точки A від прямої BC .

Тому $d = AB = \left| \frac{2 + 10 - 7}{\sqrt{5}} \right| = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$. Отже, $S_{\text{квадрата}} = AB^2 = 5$ (кв.од.).

Вправи для самостійної роботи

1. Визначити, які з точок $M_1(3, 1)$, $M_2(2, 3)$, $M_3(6, 3)$, $M_4(-3, -3)$, $M_5(3, -1)$, $M_6(-2, 1)$ лежать на прямій $2x - 3y - 3 = 0$, а які – ні.

2. Визначити точки перетину прямої $3x - 6y + 12 = 0$ з осями координат та побудувати цю пряму.

3. Сторони трикутника належать прямим

$$x + 5y - 7 = 0, 3x - 2y - 4 = 0, 7x + y + 19 = 0.$$

Обчислити його площу S .

4. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(-4, 2)$ і відтинає рівні відрізки на осях координат.

5. Знайти відхилення точки $M_0(1, 2)$ від прямої $3x - 4y + 1 = 0$.

6. Дано рівняння пучка прямих

$$\alpha(3x + 2y - 9 = 0) + \beta(2x + 5y + 5) = 0.$$

При якому значенні параметра C пряма $4x - 3y + C = 0$ належить цьому пучку?

7. Обчислити площу прямокутника з вершиною $A(-2, 1)$, дві сторони якого лежать на прямих $3x - 2y - 5 = 0$ і $2x + 3y + 7 = 0$.

8. Точка $A(2, 0)$ є вершиною правильного трикутника, а протилежна їй сторона лежить на прямій $x + y - 1 = 0$. Скласти рівняння двох інших сторін.

9. Задано три точки: $A(5, 2)$, $B(9, 4)$ і $C(7, 3)$. Показати, що вони лежать на одній прямій і написати її рівняння.

10. Визначити кутовий коефіцієнт k і відрізок b , що відтинається на осі Oy , для кожної з прямих:

а) $5x - y + 3 = 0$; б) $2x + 3y - 6 = 0$;

в) $3x + 2y + 2 = 0$; г) $y - 3 = 0$.

11. Визначити кут φ між двома прямими:

а) $5x - y + 7 = 0$ і $3x + 2y = 0$;

б) $3x - 2y + 7 = 0$ і $2x + 3y - 3 = 0$.

12. Задана пряма $2x + 3y + 4 = 0$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2, 1)$:

а) паралельно даній прямій;

б) перпендикулярно до даної прямої.

5. Лінії другого порядку

Більшість типів ліній другого порядку відомі давно. Їх досить добре вивчив Аполлоній. Він утворював основні типи ліній другого порядку як плоскі перерізи кругового конуса, тому в математичній літературі лінії 2-го порядку відомі ще як конічні перерізи.

Лінії 2-го порядку зустрічаються в явищах навколишнього світу: по еліпсу рухаються планети Сонячної системи, по гіперболі або параболі – комети. Траєкторія руху тіла, кинутого під кутом до горизонту, є параболою, космічні кораблі, ракети, залежно від наданої їм швидкості, рухаються по колу, еліпсу, параболі чи гіперболі.

Означення. *Лінією другого порядку* на площині називається сукупність точок, які в деякій декартовій системі координат Oxy задовольняють алгебраїчне рівняння другого порядку:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

де A, B, C, D, E, F – дійсні числа, причому хоча б одне з чисел A, B, C відмінне від нуля, тобто $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Зокрема, до ліній другого порядку належать такі лінії: коло, еліпс, гіпербола і парабола.

5.1. Коло

Означення 5.1. *Колом* називають множину точок площини, відстані яких від заданої точки площини (центра кола) дорівнюють сталому числу (радіусу).

Використаємо прямокутну систему координат Oxy , на якій позначимо через $O_1(a, b)$ – центр кола, через $M(x, y)$ – довільну точку площини і через r – радіус кола (рисунок 5.1). Точка M лежить на колі тоді і тільки тоді, коли $O_1M = r$ або

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r. \quad (5.1)$$

Рівняння (5.1) є рівнянням кола. Зручніше цим рівнянням користуватися, піднівши обидві частини його до квадрату:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \quad (5.2)$$

Значення $-r$ відкидаємо, бо за означенням $r > 0$.

Отже, рівняння (5.1) і (5.2) еквівалентні, тобто визначають одну й ту саму криву – коло.

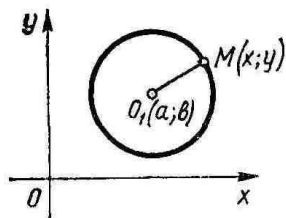


Рис. 5.1.

Якщо центр кола міститься в початку координат, то $a = b = 0$ і рівняння (5.2) набирає вигляду

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (5.3)$$

Рівняння (5.3) називається *канонічним рівнянням кола*.

Приклад 1. Знайти рівняння кола, якщо кінці одного з його діаметрів знаходяться у точках $A(1, 4)$ і $B(-3, 2)$.

Розв'язання. Нехай $O_1(a, b)$ – центр кола. Тоді $AO_1 = O_1B$. За формулами знаходження координати точки, яка ділить відрізок пополам, знаходимо координати центра кола:

$$a = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1-3}{2} = -1, \quad b = \frac{4+2}{2} = 3.$$

Тоді радіус кола $r = AO_1 = \sqrt{(1+1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{2}$.

За формулою (5.2) знаходимо рівняння шуканого кола

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 2.$$

Приклад 2. Скласти рівняння кола, що проходить через точку $A(6; 2)$, а його центр співпадає з точкою $B(2; -1)$.

Розв'язання. Рівняння кола будь-якого радіуса r з центром в точці $B(2; -1)$ згідно з (5.2) запишеться так: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = r^2$.

Залишається знайти радіус. Але $r = |\overline{AB}|$, тобто

$$r^2 = \sqrt{(6-2)^2 + (2+1)^2} = 5.$$

Таким чином, $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$ – шукане рівняння.

5.2. Еліпс

Означення 5.2. *Еліпсом* називається геометричне місце точок площини, сума відстаней яких від двох фіксованих точок площини, які називаються *фокусами*, є величина сталою і більшою за відстань між фокусами.

Зафіксуємо дві точки площини – фокуси F_1 і F_2 . Розглянемо таку декартову систему координат Oxy , що вісь Ox проходить через фокуси F_1 і F_2 , а точка O є серединою відрізка F_1F_2 . Таким чином, $F_1(-c, 0)$ і $F_2(c, 0)$, де c – відоме додатне дійсне число (рисунки 5.2).

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка еліпса, та сума відстаней від точки $M(x, y)$ до фокусів дорівнює $2a$, тобто $|MF_1| + |MF_2| = 2a$. Відрізки $|MF_1|$ і $|MF_2|$ називаються *фокальними радіусами*. Відстань

між фокусами, яку називають *фокальною*, позначимо через $2c$:
 $F_1F_2 = 2c$. За означенням $2a > 2c$,
 тобто $a > c$.

Точка $M(x, y)$ лежить на еліпсі тоді, коли $|MF_1| + |MF_2| = 2a$.

Оскільки $|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$,

$|MF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, то

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \quad (5.4)$$

По суті, рівняння (5.4) і є *рівнянням еліпса*.

Зробимо спрощення у рівнянні (5.3). Для цього перенесемо один радикал у праву частину, піднесемо обидві частини до квадрата і зведемо подібні. В результаті одержимо: $a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - c^2$.

Піднесемо обидві частини цього рівняння ще раз до квадрата та спростивши вираз, одержимо $x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$.

Оскільки $a > c$, то $a^2 - c^2 > 0$, тому можна позначити $a^2 - c^2 = b^2$. Тоді рівняння (5.4) набере вигляду $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, звідки

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (5.5)$$

Рівняння (5.5) називається *канонічним рівнянням еліпса*.

Форма та властивості еліпса.

Дослідимо за рівнянням (5.5) форму та властивості еліпса.

1) Змінні x та y входять у рівняння (5.5) у парних степенях.

Тому, якщо точка (x, y) належить еліпсу, то і точки $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$ також належать еліпсу. Отже, фігура симетрична відносно осей Ox та Oy , а також точка $O(0, 0)$, яку називають *центром еліпса*.

2) Знайдемо точки перетину еліпса з осями координат. Підставивши у рівняння (5.5) $y = 0$, одержимо, що вісь Ox перетинає у точках $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$. Поклавши $x = 0$, одержимо дві точки $B_1(0, b)$, $B_2(0, -b)$, в яких еліпс перетинає вісь Oy . Точки A_1 , A_2 , B_1 , B_2 називають *вершинами еліпса*. Відрізки A_1A_2 та B_1B_2 , а також їх довжини $2a$ і $2b$ називають відповідно *великою та малою осями еліпса*. Числа

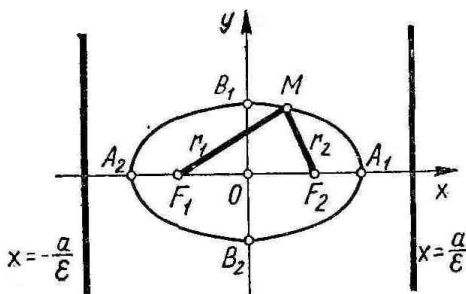


Рис. 5.2.

a і b називають відповідно *великою* та *малою півосями еліпса*.

3) З рівняння (5.5) також випливає, що $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$ і $\frac{y^2}{b^2} \leq 1$, звідки

$-a \leq x \leq a$ і $-b \leq y \leq b$. Тобто всі точки еліпса знаходяться всередині прямокутника, утвореного прямими $x = \pm a$ і $y = \pm b$.

4) Еліпс є замкнутою овальною кривою.

5) Відношення половини відстані між фокусами до більшої півосі $\frac{c}{a}$ називається *ексцентриситетом еліпса* і позначається літерою ε : $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Для еліпса $0 < \varepsilon < 1$. Перепишемо ексцентриситет

наступним чином $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, тобто $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$. Отже,

чим меншим є ексцентриситет, тим менше сплюснений еліпс.

6) Нехай $M(x, y)$ – довільна точка еліпса. Розглянемо фокальні радіуси $|MF_1| = r_1$ і $|MF_2| = r_2$. Тоді $r_1 + r_2 = 2a$, і мають місце рівності $r_1 = a + \varepsilon x$, $r_2 = a - \varepsilon x$. Прямі $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ називаються *директрисами еліпса*.

Значення директриси еліпса міститься у наступній теоремі.

Теорема 5.1. *Відношення фокальних радіусів довільної точки еліпса до відстаней цієї точки від відповідних директрис є величина стала і дорівнює ексцентриситету еліпса*

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon. \quad (5.6)$$

Приклад 3. Для еліпса $9x^2 + 16y^2 = 144$ знайти: півосі, фокуси, вершини, ексцентриситет, рівняння директрис.

Розв'язання. Знаходимо канонічне рівняння еліпса:

$$9x^2 + 16y^2 = 144 \Rightarrow \frac{9x^2}{144} + \frac{16y^2}{144} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Отже, $a^2 = 16$, $b^2 = 9$, звідки $a = 4$, $b = 3$. Тоді координатами вершин будуть: $A_1(4, 0)$, $A_2(-4, 0)$, $B_1(0, -3)$, $B_2(0, 3)$. Для еліпса $b^2 = a^2 - c^2$, тому $c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7$, і координати фокусів:

$F_1(-7, 0)$, $F_2(7, 0)$. Нарешті, знайдемо ексцентриситет: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{7}{4}$ і

рівняння директрис: $x = \pm \frac{a}{\varepsilon} \Rightarrow x = \pm \frac{16}{7}$.

Приклад 4. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо відстань між його директрисами дорівнює 32 і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Розв'язання. Відстань між директрисами еліпса дорівнює $2\frac{a}{\varepsilon}$.

Отже, із умови задачі одержуємо систему рівнянь $\begin{cases} \varepsilon = \frac{1}{2}, \\ 2\frac{a}{\varepsilon} = 32. \end{cases}$

$$2\frac{a}{\varepsilon} = 32 \Rightarrow \frac{a}{\varepsilon} = \frac{a}{\frac{1}{2}} = 16 \Rightarrow 2a = 16 \Rightarrow a = 8.$$

Але $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Отже, $\frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{c}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 4$. Нарешті, $b^2 = a^2 - c^2 = 64 - 16 = 48$.

Шукане канонічне рівняння еліпса: $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$.

5.3. Гіпербола

Означення 5.3. Гіперболою називається геометричне місце точок площини, модуль різниці відстаней яких від двох даних точок цієї площини, що називаються *фокусами*, є величина стала і менша відстані між фокусами.

Зафіксуємо дві точки площини – фокуси F_1 і F_2 . Розглянемо на площині таку декартову систему координат Oxy , що вісь Ox проходить через фокуси F_1 і F_2 , а точка O є серединою відрізка F_1F_2 . Таким чином, $F_1(-c, 0)$ і $F_2(c, 0)$, де c – відоме додатне дійсне число.

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка гіперболи (рисунок 5.3).

За означенням гіперболи модуль різниці відстаней від точки $M(x, y)$ до фокусів є сталою величиною. Це число позначимо через $2a$ ($a < c$).

Точка $M(x, y)$ площини лежить на гіперболі тоді і тільки тоді, коли $|MF_1 - MF_2| = 2a$ або

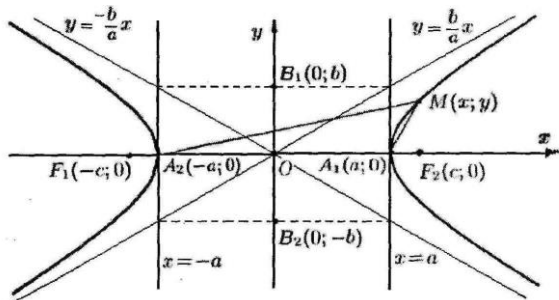


Рис. 5.3.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Відрізки MF_1 і MF_2 називаються *фокальними радіусами гіперболи* і

позначаються r_1 і r_2 відповідно.

Спростивши це рівняння, одержимо

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (5.7)$$

де $b^2 = c^2 - a^2$. Рівняння (5.7) називається **канонічним рівнянням гіперболи**.

Форма та властивості гіперболи.

Дослідимо за рівнянням (5.7) форму та розташування гіперболи.

1) Оскільки рівняння (5.7) містить тільки квадрати змінних x і y , то одночасно з координатами кожної точки $M(x, y)$ рівняння будуть задовольняти координати точок $M_1(x, -y)$, $M_2(-x, y)$, $M_3(-x, -y)$. Отже, гіпербола симетрична відносно осей Ox , Oy і початку координат $O(0,0)$.

2) Знайдемо точки перетину гіперболи з осями координат.

Якщо $y = 0$, то $\frac{x^2}{a^2} = 1$, звідки $x = \pm a$. Отже, гіпербола перетинає вісь Ox у двох точках $A_1(a, 0)$ і $A_2(-a, 0)$, які називаються *вершинами гіперболи*. Якщо $x = 0$, то $\frac{y^2}{b^2} = 1$, звідки $y = \pm b\sqrt{-1} = \pm bi$. Отже, вісь

Oy гіпербола не перетинає.

Відрізок $A_1A_2 = 2a$ називається *дійсною віссю гіперболи*, а відрізок $B_1B_2 = 2b$ — *уявною віссю гіперболи*. Числа a і b називаються відповідно *дійсною* та *уявною півосьями гіперболи*.

Прямокутник, утворений осями $2a$ та $2b$ називається *головним прямокутником гіперболи*.

3) Для частини гіперболи, яка лежить у першому координатному куті, з рівняння (5.7) одержимо:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}. \quad (5.8)$$

З рівності (5.8) випливає, що $x \geq a$. Якщо $x > a$, то $y > 0$, причому якщо x збільшується, то y також збільшується, тобто якщо $x \rightarrow +\infty$, то $y \rightarrow +\infty$. Отже, віддаляючись у нескінченність, змінна точка $M(x, y)$ гіперболи необмежено буде наближатися до прямої

$$y = \frac{b}{a} x. \quad (5.9)$$

Така пряма (5.9) називається *асимптотою гіперболи*.

Гіпербола складається з двох віток (лівої і правої) і має дві асимптоти:

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

При побудові гіперболи доцільно спочатку побудувати основний прямокутник, провести прямі, що проходять через протилежні вершини цього прямокутника (діагоналі прямокутника) – асимптоти гіперболи і визначити вершини A_1 і A_2 гіперболи.

Рівняння

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \text{або} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (5.10)$$

також визначає гіперболу, яка називається *спряженою до гіперболи* (5.7), у якій буде дійсною вісь Oy і уявною вісь Ox .

4) Гіпербола з рівними півосями ($a = b$) називається *рівносторонньою*. Її канонічне рівняння має вигляд

$$x^2 + y^2 = a^2. \quad (5.11)$$

Основним прямокутником рівносторонньої гіперболи є квадрат із стороною $2a$, а її асимптоти – бісектриси координатних кутів $y = \pm x$.

5) *Ексцентриситет гіперболи* визначається як відношення половини фокальної відстані до довжини її дійсної півосі:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \quad (5.12)$$

Оскільки $c > a$, то $\varepsilon > 1$. Крім того, з формул $b^2 = c^2 - a^2$ і (5.12) випливає, що $\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$. Отже, ексцентриситет гіперболи характеризує

її форму: чим більший ексцентриситет, тим більше відношення $\frac{b}{a}$, тобто тим більше основний прямокутник розтягується в напрямі осі Oy , а гіпербола відхиляється від осі Ox ; чим ближче ексцентриситет до одиниці, тим більше основний прямокутник розтягується в напрямі осі Ox , а гіпербола наближається до цієї осі.

6) Прямі $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$, де a – дійсна піввісь гіперболи, а ε – її ексцентриситет, називаються директрисами гіперболи. Директриси гіперболи мають ту саму властивість, що й директриси еліпса (теорема 5.1). Якщо гіпербола задана рівнянням (5.10), то директриси визначаються рівняннями $y = \pm \frac{b}{\varepsilon}$.

7) Фокальні радіуси точок правої вітки гіперболи обчислюються за

формулами: $r_1 = \varepsilon x + a$, $r_2 = \varepsilon x - a$; фокальні радіуси точок лівої вітки – за формулами: $r_1 = -\varepsilon x - a$, $r_2 = -\varepsilon x + a$.

Приклад 5. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо віддаль між фокусами $2c = 6$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$.

Розв’язання. Якщо фокуси гіперболи розташовані на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, то її рівняння буде канонічним, тобто $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. З умови задачі одержимо, що $c = 3$.

Оскільки $\varepsilon = \frac{c}{a}$, то $\frac{3}{2} = \frac{3}{a}$, звідки $a = 2$. Далі $b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b^2 = 9 - 4 = 5$.

Отже, шукане рівняння має вигляд: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.

Приклад 6. Дано рівняння гіперболи $16x^2 - 9y^2 = 144$. Знайти:
а) її півосі; б) фокуси; в) ексцентриситет;
г) рівняння асимптот; д) рівняння директрис.

Розв’язання. Зведемо дане рівняння гіперболи до канонічного вигляду $16x^2 - 9y^2 = 144 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. а) Знайдемо півосі даної гіперболи: $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$ і $b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$. Відповідь: $a = 3$ і $b = 4$.

б) Для знаходження фокусів $F_1(-c, 0)$ і $F_2(c, 0)$ гіперболи скористаємося формулою $b^2 = c^2 - a^2$. В нашому випадку $9 = c^2 - 16 \Leftrightarrow c^2 = 25 \Rightarrow c = 5$.

Таким чином, $F_1(-5, 0)$ і $F_2(5, 0)$ – фокуси даної гіперболи.

в) $\varepsilon = \frac{c}{a}$, а тому $\varepsilon = \frac{5}{3}$.

г) Згідно з рівнянням $y = \pm \frac{b}{a}x$, маємо $y = \pm \frac{4}{3}x$. Це і є рівняння асимптот даної гіперболи.

д) Згідно з формулою $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$, $x = \pm \frac{3}{\frac{5}{3}} \Leftrightarrow x = \pm \frac{9}{5}$ – рівняння директрис даної гіперболи.

5.4. Парабола

Означення 5.4. *Параболою* називається геометричне місце точок площини, кожна з яких рівновіддалена від фіксованої точки площини, що називається *фокусом*, та фіксованої прямої, яка називається *директрисою* і не проходить через фокус.

Знайдемо рівняння параболі. Нехай на площині задані фокус F і директриса, причому відстань фокуса від директриси дорівнює p . Виберемо на площині декартову систему координат так, щоб вісь Ox проходила через фокус, перпендикулярно до директриси, а вісь Oy ділила відстань між фокусом F і директрисою пополам (рисунок 5.4).

Тоді фокус має координати $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, а

рівняння директриси має вигляд $x = -\frac{p}{2}$

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка площини, відрізки MB і MF – відстані цієї точки від директриси і фокуса. Точка M тоді лежить на параболі, коли $MB = MF$ або

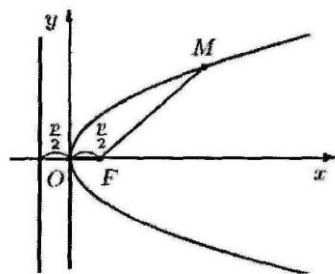


Рис. 5.4.

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}. \quad (5.13)$$

Це і є рівняння параболі. Щоб спростити його, піднесемо обидві частини рівності (5.13) до квадрата:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4},$$

тобто

$$y^2 = 2px. \quad (5.14)$$

Рівняння (5.14) називається *канонічним рівнянням параболі*.

Форма та характеристики параболі

1) У рівнянні $y^2 = 2px$ змінна y входить у парній степені, звідки випливає, що парабола симетрична відносно осі Ox . Вісь Ox є *віссю симетрії параболі*.

2) Оскільки $p > 0$, то $x \geq 0$, звідки випливає, що парабола розташована справа від осі Oy .

3) При $x = 0$ маємо $y = 0$, тобто парабола проходить через початок координат. Точка $O(0, 0)$ називається *вершиною параболі*.

4) Із зростанням x значення y також зростає. Отже, змінна точка $M(x, y)$ параболі, виходячи з початку координат із зростанням x , рухається по ній вправо і вгору.

Виконавши симетричне відображення розглянутої частини параболі відносно осі Ox , матимемо всю параболу.

5) Рівняння $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$, у яких $p > 0$ визначають також параболі.

Приклад 7. Скласти рівняння параболі, вершина якої знаходиться в початку координат, якщо:

- а) парабола розташована симетрично відносно осі Ox і проходить через точку $A(9; 6)$;
- б) парабола розташована симетрично відносно осі Oy і проходить через точку $C(1; 1)$.

Розв'язання. а) Якщо вершина параболі знаходиться в початку координат, а сама парабола симетрична відносно осі Ox , то її рівняння буде мати вигляд $y^2 = 2px$. Оскільки точка $A(9; 6)$ лежить на параболі, то її координати мусять задовольняти це рівняння, тобто $6^2 = 2 \cdot p \cdot 9 \Leftrightarrow p = 2$. Отже, $y^2 = 4x$ – шукане рівняння параболі.

б) Якщо вершина параболі знаходиться в початку координат, а сама парабола симетрична відносно осі Oy , то її рівняння буде мати вигляд $x^2 = 2py$. Оскільки точка $C(1; 1)$ лежить на цій параболі, то

$$1^2 = 2 \cdot p \cdot 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}.$$

Отже, $x^2 = y$ – шукане рівняння параболі.

Приклад 8. Скласти рівняння параболі, якщо дано її фокус $F(7; 0)$ і рівняння директриси $x + 7 = 0$.

Розв'язання. Знайдемо параметр p . Оскільки відстань від початку координат до фокуса і до точки перетину директриси з віссю Ox однакова, то $\frac{p}{2} = 7$.

Отже, рівняння параболі має вигляд $y^2 = 28x$.

Вправи для самостійної роботи

1. Скласти рівняння кола з центром у точці $C(1; -1)$, якщо пряма $5x - 12y + 9 = 0$ є дотичною до цього кола.

2. Яка лінія визначається рівнянням:

а) $y = -\sqrt{25 - x^2}$; б) $x = -\frac{2}{3}\sqrt{9 - y^2}$;

в) $y = \pm \frac{2}{5}\sqrt{x^2 + 25}$; г) $x = -5\sqrt{-y}$.

3. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо:

а) його мала вісь дорівнює 24, а віддаль між фокусами $2c = 10$;

б) його велика вісь дорівнює 20, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

в) віддаль між його директрисами дорівнює 5 і $2c = 4$;

г) його мала вісь дорівнює 6, а віддаль між директрисами – 13.

4. Дано рівняння еліпса $9x^2 + 5y^2 = 45$. Знайти:

а) його півосі; б) фокуси; в) ексцентриситет; г) рівняння директрис.

5. Визначити точки еліпса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$, віддаль яких до лівого фокуса дорівнює 2,5.

6. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо:

а) віддаль між фокусами $2c = 10$ і вісь $2b = 8$;

б) рівняння її асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$ і віддаль між фокусами $2c = 20$;

в) віддаль між директрисами дорівнює $\frac{8}{3}$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$.

7. Визначити точки гіперболи $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{32} = 1$, віддаль яких до правого фокуса дорівнює 4,5.

8. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, якщо:

а) парабола розташована симетрично відносно осі Ox і проходить через точку $A(-1; 3)$;

б) парабола розташована симетрично відносно осі Oy і проходить через точку $A(4; -8)$.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Аудиторна, самостійна та індивідуальна робота студентів забезпечується всіма навчально-методичними засобами, необхідними для вивчення навчальної дисципліни чи окремої теми: підручниками, методичними рекомендаціями (вказівками), конспектами лекцій, електронно-обчислювальною технікою, науковою літературою та періодичними виданнями.

Основна література

1. Бескровний О.І. Математика для економістів: Вища математика: конспект лекцій для студентів економічних спеціальностей / О.І. Бескровний; М-во освіти і науки України, Університет Україна, каф. КІ. – К: УУ, 2019 . – 192 с.
2. Козира В.М. Елементарна та вища математика: посібник-довідник для учнів, абітурієнтів, студентів / В.М. Козира. – Тернопіль: Астон, 2021. –168 с. ISBN 978-966-308-841-9
3. Литвин І.І., Конончук О.М., Желізняк О.Г. Вища математика, 2019 р. В-тво: ЦНЛ, 368 с. ISBN 978-611-01-0983-3.

Інформаційні ресурси в мережі Інтернет

1. www.nbuv.gov.ua(бібліотека ім.В.І.Вернадського)
2. www.mon.gov.ua (МОНМС України)