

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Закарпатський угорський інститут
імені Ференца Ракоці II
кафедра математики та інформатики

ВІКТОРІЯ ДЗЯМКО

**Теорія ймовірностей і математична статистика
Курс лекцій**

**для студентів спеціальностей
071 Облік і оподаткування
072 Фінанси, банківська справа, страхування
та фондовий ринок (Фінансова безпека)**



Берегово — 2024

Навчально-методичне видання розроблене на основі освітньої програми підготовки бакалаврів з галузі знань «07 Управління та адміністрування» спеціальностей « 071 Облік і оподаткування» та «072 Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок (Фінансова безпека), а також діючого законодавства в галузі вищої освіти з метою забезпечення здобувачів освіти денної та заочної форм навчання Закарпатського угорського інституту ім. Ф.Ракоці II коротким курсом лекцій до вивчення дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика». Коротко подано теоретичний матеріал, приклади розв'язування типових практичних завдань.

Затверджено до використання у навчальному процесі на засіданні кафедри математики та інформатики (протокол №1 від «13» серпня 2024 року)

Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості освіти Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II (протокол №5 від « 16 » жовтня 2024 року)

Рекомендовано до видання у електронній формі (PDF) рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II (протокол №9 від « 30 » жовтня 2024 року)

Підготовлено до видання у електронній формі (PDF) кафедрою математики та інформатики з Видавничим відділом Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Розробник курсу лекцій:

Вікторія ДЗЯМКО – доцент кафедри математики та інформатики ЗУІ імені Ференца Ракоці II, кандидат педагогічних наук, доцент

Рецензенти:

Тетяна БОЯРИЩЕВА – доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу УжНУ, кандидат фізико-математичних наук, доцент (м. Ужгород)

Каталін КУЧІНКА – завідувач кафедри математики та інформатики ЗУІ ім. Ф. Ракоці II, доцент, кандидат фізико-математичних наук

Відповідальні за випуск:

Каталін КУЧІНКА – завідувач кафедри математики та інформатики ЗУІ ім. Ф. Ракоці II, доцент, кандидат фізико-математичних наук,

Олександр ДОБОШ – начальник Видавничого відділу ЗУІ ім. Ф.Ракоці II
За зміст курсу лекцій відповідальність несе розробник.

Видавництво: ЗУІ ім. Ф. Ракоці II (адреса: пл. Кошута 6, м. Берегове, 90202. Електронна пошта: foiskola@kmf.uz.ua)

© Вікторія Дзямко, 2024

© Кафедра математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II, 2024

ЗМІСТ

	Вступ.....	4
§ 1.	Випадкові події.....	6
§ 2.	Ймовірність події.....	12
§ 3.	Залежність і незалежність подій.....	19
§ 4.	Випадкові величини і функції розподілу.....	24
§ 5.	Деякі характеристики випадкових величин.....	33
§ 6.	Закон великих чисел.....	39
§ 7.	Центральна гранична теорема.....	44
§ 8.	Емпірична функція	
§ 9.	розподілу.....	48
§ 10.	Оцінки невідомих параметрів.....	51
§ 11.	Перевірка статистичних гіпотез.....	55
	Елементи теорії кореляції і регресії.....	64
	Таблиці.....	72
	Література.....	80

ВСТУП

Теорія ймовірностей і математична статистика лежить в основі викладу ряду спеціальних дисциплін і є невід'ємною складовою частиною фундаментальної підготовки майбутніх фахівців з усіх областей знань. До неї постійно звертаються математики, фізики та хіміки, біологи та лікарі, економісти, історики та лінгвісти. Життя постійно вимагає від майбутніх спеціалістів знання основ теорії ймовірностей і математичної статистики, а також вироблення міцних навичок практичного моделювання і формалізації реальних масових випадкових явищ, оволодіння методами статистичної обробки експериментальних даних.

Навчальна дисципліна «Теорія ймовірностей і математична статистика» забезпечує формування у студентів комплексу професійних знань щодо організації ймовірнісних досліджень та обробки ймовірнісної інформації, а також навичок збору, обробки, систематизації та аналізу стохастичних даних. Оволодіння методами статистичного вимірювання і ймовірнісного аналізу складних процесів і явищ є невід'ємним елементом підготовки висококваліфікованих спеціалістів у різних галузях. По завершенню вивчення даної дисципліни студенти повинні **вміти**:

- проводити збір, групування та аналіз статистичних даних та інформації ймовірнісного характеру;
- подавати отримані розрахункові дані у вигляді спеціально сформованих таблиць та діаграм;
- обчислювати узагальнюючі характеристики структури сукупностей;
- розраховувати необхідні характеристики, показники та коефіцієнти;
- робити аналіз за допомогою вибіркового дослідження;
- розраховувати показники для визначення інтенсивності динаміки певного явища, визначати основні тенденції його розвитку;
- визначати ступінь взаємозв'язку між явищами, що досліджуються;
- проводити розрахунок заздалегідь визначених індексних показників.

Загальні компетентності:

ЗК08. Здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел.

ЗК12. Здатність працювати автономно

Програмні результати навчання:

ПР06. Застосовувати відповідні економіко-математичні методи та моделі для вирішення фінансових задач.

Основна тематика дисципліни

Навчальний матеріал дисципліни структурований, складається з двох складових:

«Теорія ймовірностей для розв’язування прикладних задач» та «Математична статистика».

В поданих параграфах даного курсу лекцій міститься теоретична інформація і тексти типових вправ і задач із вказівками до їх розв’язування, що дають змогу студентам–економістам орієнтуватись в новому і складному для нього матеріалі.

Увага студента привертається до важливих понять, теорем, формул курсу теорії ймовірностей та математичної статистики.

§ 1. Випадкові події

Теорія ймовірностей є математичним аналізом стохастичного (випадкового) експерименту. *Подія та ймовірність є головними поняттями цієї теорії.*

Експерименти називають стохастичними, якщо їх результати передбачити заздалегідь неможливо, тобто такі експерименти, вихід яких не однозначно визначається умовами досліду. Всі уявно можливі результати експерименту описуються деякою множиною $\Omega = \{\omega\}$, елементи якої ω зображають інформацію про ці результати. Елементи ω називаються елементарними подіями. Сукупність елементарних подій Ω називають простором елементарних подій. Структуру простору елементарних подій дають можливість описати такі приклади.

Приклад 1. Проводиться експеримент: один раз підкидають монету. Якщо з'явиться герб, тоді результат експерименту позначимо буквою Г, якщо — решітка, тоді — буквою Р. Таким чином, простір елементарних подій цього експерименту складається із двох точок: $\Omega = \{Г, Р\}$.

Приклад 2. Підкидають кубик, на шести гранях якого вибиті очки від 1 до 6. В стохастичному експерименті нас цікавлять випадання числа очок. В даному випадку простором елементарних подій є множина $\Omega = \{\omega : \omega = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Приклад 3. Якщо монету підкидають двічі, тоді простором елементарних подій є множина $\Omega = \{ГГ, ГР, РГ, РР\}$.

Приклад 4. Кубик підкидають n разів підряд. Простором Ω є множина всіх n -мірних векторів виду $(i_1, i_2, \dots, i_n)$, де кожна компонента i_k може приймати значення 1, 2, 3, 4, 5, 6.

В експериментах з підкиданням монети чи грального кубика вважається, що вони не можуть випасти ребром, кубик не може випасти вершиною, хоч в принципі і таке явище можливе.

В багатьох задачах теорії ймовірностей простори елементарних подій Ω мають нескінченну множину результатів.

Зауважимо, що термін “експеримент” в теорії ймовірностей не охоплює

технічну сторону, а лише появу чи не появу подій, які спостерігаються при даному експерименті. Всякий *результат експерименту* із випадковими наслідками в теорії ймовірностей *називають подією*. Довільну множину A точок $\omega \in \Omega$ можемо розглядати як випадкову подію A , яка настає чи не настає в залежності від того, чи належить відповідно і не належить множині A елементарна подія ω , яка повністю інформує про те, який результат експерименту. І навпаки: для кожного ω і кожного A відомо, чи поява ω веде за собою появу A чи ні. Таким чином, випадковими подіями є підмножини Ω . Подія, яка полягає в тім, що не настає подія A , називається протилежною події A і позначається $\bar{A}$.

Якщо подія A не містить жодної елементарної події, тоді вона називається неможливою і позначається $\emptyset$. Протилежною $\emptyset$ є подія Ω , яка настає при проведенні експерименту завжди. Подія Ω називається вірогідною. Якщо подія A настає завжди, коли настає подія B , тоді скажемо, що подія A є наслідком B і пишемо $B \subset A$ (або, що подія B веде за собою появу події A). Події A і B називаються еквівалентними (рівносильними) якщо $A \subset B$ і $B \subset A$.

Добутком (перерізом) *подій* A і B *називається подія* C , яка настає тоді і лише тоді, коли появляються обидві події A і B . Позначається добуток двох подій так: $C = A \cap B$. Події A і B називаються несумісними, якщо $A \cap B = \emptyset$.

Подія C , яка полягає в появі хоча б однієї із подій A чи B , *називається сумою* (об'єднанням) *подій* A і B . Для суми подій використовується позначення: $C = A \cup B$.

Вправа. Порівняйте математичні формулювання операцій над подіями та їх теоретико-множинні аналоги.

Добуток і сума визначається для довільного числа подій. Наприклад, подія $C = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$ полягає в тому, що настає хоча б одна із подій $A_1, A_2, \dots$.

Подія

$$C = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

полягає в тому, що появляються всі події $A_1, A_2, \dots$.

Різницею двох подій A і B називається така подія C , яка полягає в тому, що подія A настає, а подія B не настає. Позначається різниця так: $C = A \setminus B$.

Нехай $\{A_n\}$ — нескінченна послідовність подій, $A_n \subset \Omega$. Позначимо через A^* множину всіх тих і лише тих елементарних подій $\omega \in \Omega$, які належать

нескінченному числу подій A_n : $A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

Подія A^* називається *верхньою границею послідовності подій* і позначається

$$A^* = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n}.$$

Нехай A_* — множина тих і лише тих ω , які належать всім A_n за винятком

скінченного числа. Тоді $A_* = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Подія A_* називається *нижньою границею послідовності $\{A_n\}$* і позначається

$$A_* = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n.$$

Очевидно, $A_* \subset A^*$. Якщо $A_* = A^*$, тоді кажуть, що послідовність подій $\{A_n\}$ має границю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n.$$

Покажемо, як деякі поняття теорії множин тлумачаться в теорії ймовірностей, на такій таблиці.

Позначення	Мова теорії множин	Мова теорії ймовірностей
1	2	3
Ω	Універсальна множина.	Простір елементарних подій.
ω	Елемент.	Елементарна подія.
A	Деяка множина елементів.	Подія A (якщо $\omega \in A$, тоді кажуть, що напустила подія A).
Ω	Множина всіх ω .	Вірогідна подія.
$\emptyset$	Порожня множина.	Неможлива подія.
$A \subset B$	A підмножина B .	Із появи події A з необхідністю випливає поява події B .
$A \cup B$	Об'єднання множин A і B ;	Подія полягає в тому, що напустила подія A або B .
$A \cap B$	Множина точок, що входять або в A , або в B .	Подія, яка полягає в тому, що наступить і подія A і подія B .
$A \cap B = \emptyset$	Переріз множин A і B ; множина точок, які входять і в A , і в B .	A і B — несумісні події.
$A \setminus B$	Множини A і B не перетинаються.	Подія, яка полягає в тому, що
	Різниця множин A і B .	

1	2	3
$\overline{\lim} A_n$	Множина всіх тих ω , які належать нескінченному числу множин із $\{A_n\}$.	Подія, яка полягає в тому, що наступить нескінченне число подій із послідовності подій $\{A_n\}$.
$\underline{\lim} A_n$	Множина всіх тих ω , які належать всім A_n , за винятком їх скінченного числа (множина тих ω , які не належать лише скінченному числу множин A_n).	Подія, яка полягає в тому, що наступлять всі події A_n , за винятком скінченного числа (подія, яка полягає в тому, що не наступить лише скінченне число із подій послідовності $\{A_n\}$).
$\lim A_n$	Якщо $\underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n$, тоді послідовність множин $\{A_n\}$ має границю $\lim A_n = \overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n$.	Якщо $\underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n$, тоді послідовність подій $\{A_n\}$ має границю $\lim A_n = \underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n$.

Клас H подій із Ω називається алгеброю, якщо:

- 1) $\Omega \subset H$;
- 2) із того, що $A \subset H$, випливає, що $\bar{A} \subset H$;
- 3) із того, що $A \subset H, B \subset H$, випливає, що $A \cup B \subset H$.

Алгебра G подій із Ω називається сигма-алгеброю, якщо із того, що

$A_i \subset G$ ($i = 1, 2, \dots, n, \dots$), випливає, що $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset H$.

Нехай K – деякий клас подій із Ω . Сигма-алгебра $\sigma(K)$ називається найменшою сигма-алгеброю, що містить клас K , якщо

- 1) $K \subset \sigma(K)$;
- 2) для довільної сигма-алгебри G такої, що $K \subset G$, маємо $\sigma(K) \subset G$.

Справедлива **теорема**. Для довільного класу подій K існує найменша сигма-алгебра $\sigma(K)$, що містить в собі клас K .

Вправи, задачі та приклади

№ 1. При яких подіях A і B можлива рівність $A \cap B = A$?

Розв'язання. Добуток $A \cap B$ є подія, яка полягає в тому, що наставають обидві події A і B . Якщо $A \cap B = A$, тоді подія B містить в собі подію A .

№ 2. Довести, що $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$.

Доведення. Нехай $\omega \in \bar{A} \cup \bar{B}$. Тоді справедливо, що $\omega \in \bar{A}$ або $\omega \in \bar{B}$.

Очевидно, це рівносильно тому, що $\omega \notin A$ або $\omega \notin B$. Але в цьому випадку $\omega \in A \cap B$, тобто $\omega \in \overline{A \cap B}$.

Якщо ж $\omega \in \overline{A \cap B}$, тоді $\omega \notin A \cap B$. Отже, маємо, що $\omega \notin A$ або $\omega \notin B$.

Таким чином, $\omega \in \bar{A}$ або $\omega \in \bar{B}$, тобто $\omega \in \bar{A} \cup \bar{B}$, що й треба було довести.

№ 3. Монету підкидають до тих пар, покине випаде герб. Що є простором елементарних подій?

Вказівка. Простором елементарних подій даного експерименту є множина

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$, де $\omega_n = \underbrace{PP \dots P}_n \Gamma$ елементарна подія, яка полягає в тому, що $n - 1$ раз випала решіткою і герб випав вперше при n -му підкиданні монети. Елементарна подія ω_∞ відповідає тій можливості, що герб ніколи не з'явиться, тобто наш експеримент продовжується нескінченно.

№ 4. Задача про зустріч. Дві особи A і B домовились зустрітись на проміжку часу $[0, T]$. Що є простором елементарних подій в даному експерименті?

Вказівка. Якщо x – момент приходу A , y – момент приходу B , тоді простором елементарних подій є множина точок координатної площини, що заповнює суцільно квадрат:

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq T, 0 \leq y \leq T\}.$$

№ 5. Довести, що якщо G – сигма-алгебра подій, тоді із того, що $A \subset G$, $B \subset G$ випливає $A \cap B \subset G$.

Вказівка. Дійсно, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $A \cap B = \overline{A \cup B}$.

№ 6. Перевірити, чи справедливі такі співвідношення між подіями:

$$\begin{aligned} A \cup A &= A, \quad A \cap A = A, \quad A \cup \bar{A} = \Omega, \quad A \cap \bar{A} = \emptyset, \quad A \cup \Omega = \Omega, \\ A \cap \Omega &= A, \quad A \cup \emptyset = A, \quad A \setminus B = A \cap \bar{B}, \quad A \cup B = A \cup (B \setminus A), \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap C, \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C, \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \\ \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i &= \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i}, \quad \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i = \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i}. \end{aligned}$$

№ 7. Довести, що якщо $A \subset B$, $B \subset C$, тоді $A \subset C$.

§ 2. Ймовірність події

Надалі ми будемо керуватись припущенням, що розглядаються лише такі експерименти, які можемо повторювати довільне число разів: при повторенні експерименту події, які наступили при попередніх експериментах, не впливають на події, що появляються при даному експерименті.

Нехай при n -кратному повторенні експерименту подія A настає при m експериментах. Відношення $\nu(A) = m/n$ називається частотою події A при n проведених експериментах.

Частота $\nu(A)$ володіє такими властивостями:

1) $0 \leq \nu(A) \leq 1$;

2) $\nu(\Omega) = 1$;

3) якщо A і B дві несумісні події, що наступили при даному експерименті, тоді $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$.

Якщо при великих n частота $\nu(A)$ появи події A мало відрізняється від деякого фіксованого числа p , тоді скажемо, що подія A стохастично стійка, а число p є ймовірністю події A .

Дане визначення стохастичної стійкості та ймовірності події не є формальним визначенням. Для формального визначення ймовірності треба аксіоматизувати властивості ймовірності. Після формулювання аксіом, ми можемо довільні величини, що задовольняють сформульованій системі аксіом, назвати ймовірністю. В розвитку формальної теорії неістотно, який реальний смисл ми вкладаємо в поняття ймовірності. Тому надалі ми будемо постулювати існування ймовірності і до стохастичних експериментів відносити лише такі, у яких з кожною подією пов'язана певна ймовірність цієї події.

Отже, під стохастичним експериментом будемо розуміти сукупність трьох об'єктів: простору елементарних подій Ω , сигма-алгебри G його підмножин (які називаються випадковими подіями) і ймовірності P , визначення якої

подано нижче. Коротко стохастичний експеримент будемо позначати $\{\Omega, G, P\}$. Трійку цих об'єктів називають також імовірнісним простором. Пара $\{\Omega, G\}$ називається вимірним простором. Якщо побудований імовірнісний простір, тоді кажуть, що побудована імовірнісна модель експерименту.

Будемо говорити, що на $\{\Omega, G\}$ задана ймовірність P , якщо кожній множині $A \subset G$ поставлено у відповідність число $P(A)$ і виконуються такі умови:

- 1) для всіх A $0 \leq P(A) \leq 1$;
- 2) якщо $\emptyset$ — неможлива подія, тоді $P(\emptyset) = 0$;
- 3) $P(\Omega) = 1$;
- 4) якщо A і B несумісні події, тоді $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
- 5) якщо A_n — послідовність подій, попарно несумісних, тоді

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Ці умови називаються аксіомами ймовірності. Число $P(A)$ називається ймовірністю події A .

Аксіоми ймовірності не є незалежні. Так аксіоми $P(\emptyset) = 0$ і $P(A) \leq 1$ можуть бути виведені з аксіом 3), 4) і невід'ємності $P(A)$. Сформульовані аксіоми показують, що ймовірність є мірою, яка означена на сигма-алгебрі подій G , що задовольняє умові, даної аксіомою 3). Міра, що задовольняє аксіомі 3), називається нормованою. Отже, ймовірність P є нормована міра на вимірному просторі $\{\Omega, G\}$.

Нехай стохастичний експеримент має скінченну чи зліченну множину результатів $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ і кожній елементарній події ω_n приписано деяку “вагу” p_i , яку називають ймовірністю елементарної події ω_i і

які мають такі властивості: $p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Ймовірністю $P(A)$ випадкової події A називають суму ймовірностей елементарних подій, що утворюють подію A : $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$.

Сформулюємо класичне визначення ймовірності.

Якщо стохастичний експеримент має n однаково можливих результатів і події A сприяє m із цих результатів, тоді ймовірністю події A називається число $P(A) = m/n$.

Зміст геометричної ймовірності можна подати в такому вигляді. В деякій області Ω n -вимірному простору навмання беруть точку. Під виразом “точку взято навмання” ми розуміємо таке: ймовірність $P(A)$ того, що точка попаде в область $A \subset \Omega$ дорівнює $P(A) = m(A)/m(\Omega)$, де m — міра Лебега на Ω .

Введені ймовірності задовольняють аксіомам 1)–5).

Важливі наступні поняття.

Нехай H — деяка алгебра підмножин із Ω . Функція множин $P(A)$ називається скінченно-аддитивною ймовірнісною мірою на H , якщо:

- 1) $P(A) \geq 0$ для кожного $A \subset H$;
- 2) $P(\Omega) = 1$;
- 3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, якщо $A \subset H, B \subset H, A \cap B = \emptyset$.

Скінченно-адитивна ймовірнісна міра на алгебрі H називається злічено-аддитивною ймовірнісною мірою на H , якщо для всіх $A_i \subset H, i = \overline{1, \infty}$, таких що $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset H$ справедлива рівність

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Важливу роль в теорії ймовірностей відіграє наступна теорема про продовженні міри.

Теорема 1. Нехай P_0 злічено-аддитивна ймовірнісна міра на алгебрі H . Тоді існує єдина злічено-аддитивна ймовірнісна міра P , визначена на найменшій сигма-алгебрі $\sigma(H)$, що містить в собі H , і є продовженням міри P_0 .

Під продовженням міри P_0 до міри P ми будемо розуміти, що міра P задовольняє такій рівності: $P(A) = P_0(A)$ для кожного $A \subset H$.

Із аксіоматичного визначення ймовірності можна одержати ряд теорем, що встановлюють властивості ймовірності.

Теорема 2. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Доведення. Дійсно, $A \cup \bar{A} = \Omega, A \cap \bar{A} = \emptyset$. Тоді згідно з аксіомою 3) $P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega)$, що доводить твердження.

Теорема 3. Якщо випадкові події A і B такі, що $A \subset B$, тоді $P(B \setminus A) = P(A) + P(B)$.

Доведення. Очевидно, із $A \subset B$ випливає $B = A \cup (B \setminus A)$. Однак $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Тому за аксіомою 3) $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$, що доводить теорему.

Теорема 4 (Теорема додавання ймовірностей). Для довільних випадкових подій A і B справедлива формула $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Доведення теореми випливає із такого представлення суми подій $A \cup B$:

$$A \cup B = (A \setminus A \cap B) \cup (B \setminus A \cap B) \cup (A \cap B)$$

І аксіоми 3), теореми 2:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \setminus A \cap B) + P(B \setminus A \cap B) + P(A \cap B) = \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

Теорему 4 узагальнюють на скінченне число подій $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n).$$

Доведення проводиться методом математичної індукції.

Теорема 5. Для довільного скінченного або зліченного числа випадкових подій $\{A_k\}$ справедливі такі нерівності:

$$P\left(\bigcup_k A_k\right) \leq \sum_k P(A_k), \quad P\left(\bigcap_k A_k\right) \geq 1 - \sum_k P(\bar{A}_k).$$

Вправи, задачі та приклади

№ 1. В урні є 10 куль: 4 білих і 6 чорних. Із урни навмання виймають одну кулю. Яка ймовірність того, що вона чорна?

Розв’язування. Нехай кулі мають номери 1, 2, 3, ..., 10, причому чорні кулі отримали номери 1, 2, ..., 6. Позначимо через ω_i , $i = 1, 2, \dots, 10$, подію — вийнята куля з номером i . Тоді події $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{10}$ є елементарними результатами даного експерименту. Слово “навмання” в умові задачі служить вказівкою на те, що всі події ω_i , $i = \overline{1, 10}$ рівноможливі. Події “вийнята куля чорна”, яку позначимо буквою A , сприяють результати $\omega_1, \dots, \omega_6$. Отже, в даній задачі $n = 10$, $m = 6$, $P(A) = 6/10 = 3/5$.

Вказівка 1. При розв’язуванні задач на підрахунок ймовірностей за класичним визначенням важливе значення має правильний вибір елементарних подій. Труднощі при розв’язуванні такого роду задач виникають тому, що вибір елементарних подій в умові задачі не оговорюється і їх треба вводити, виходячи із змісту задачі.

Вказівка 2. При набутті певних умінь можна коротше міркувати, розв’язуючи задачі на застосування класичного визначення ймовірностей. Так, наприклад, в задачі № 1 експеримент має всі 10 рівноможливих випадків, із них сприятливими подіями є шість. Отже, $P(A) = 6/10 = 3/5$.

№ 2. Двічі підкидається гральний кубик. Яка ймовірність того, що сума очок при обох підкиданнях стане більшою шести?

Вказівка. Позначимо буквою A подію “сума очок при обох підкиданнях стане більше шести”, буквою ω_{ij} подію “при першому підкиданні випало i очок, а при другому j ”. Тоді 36 подій

$$\begin{array}{cccc} \omega_{11} & \omega_{12} & \cdots & \omega_{16} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \cdots & \omega_{26} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_{61} & \omega_{62} & \cdots & \omega_{66} \end{array}$$

ми можемо розглядати як рівно можливі елементарні події експерименту: підкидання грального кубика двічі. Легко підрахувати число подій ω_{ij} , в яких сума $i + j$ очок більша шести.

№ 3. Десять книг навмання розставлені на полиці. Яка ймовірність того, що три конкретні із цих десяти книг (наприклад, підручники математики, фізики, хімії) виявляться поставленими поруч?

Розв’язування. Нехай A — подія “три конкретні книги поставлені поруч”. Елементарною подією треба вважати будь-яку перестановку десяти книг на полиці. Оскільки розставляються книги навмання, тому всі елементарні події рівноможливі. Число всіх можливих перестановок дорівнює $n = 10!$

Для підрахунку числа перестановок, сприятливих появі події A , можемо уявити собі три дані книги складені в одну “малу” папку. Одну папку і сім книг можемо розглядати знову і переставляти $8!$ Способами. Крім того, 3 книги в папці можуть переставлятися $3!$ Способами. Таким чином, всіх сприятливих появі події A перестановок $m = 8! \cdot 3!$. Отже, $P(A) = \frac{8! \cdot 3!}{10!} = \frac{1}{15}$.

№ 4. Маємо n комірок, в які випадковим способом розміщують n дробинок, причому так, щоб всі дробинки попадали в різні комірки. Всіх можливих способів розміщення дробинок по коміркам є $n!$ і вони рівноможливі. Всі комірки і дробинки перенумеровані числами $1, 2, 3, \dots, n$. Знайти ймовірність події A , яка полягає в тому, що хоча б одна дробинка попадає в комірку з тим же номером

Вказівка. Позначимо через A_i — подію “ i -а дробинка попаде в i -у комірку”.

Тоді $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$. Якщо $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n$, тоді $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}$ — подія “в i_1 -у комірку попаде i_1 -а дробинка, ..., в i_r -у комірку попаде i_r -а дробинка”. При цьому $n - r$ дробинок можуть як-завгодно розміщатись в решеті $n - r$ комірках. Тому

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}) = \frac{(n-r)!}{n!},$$

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}) = C_n^r \cdot \frac{(n-r)!}{n!} = \frac{1}{r!},$$

$$P(A) = \sum_{r=1}^n \frac{(-1)^{r-1}}{r!}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(A) = 1 - \frac{1}{e}.$$

№ 5. На полиці розміщені випадково 15 підручників, причому 5 з них переплетені. Навмання взято 3 підручники. Знайти ймовірність того, що хоча б один із взятих підручників переплетений.

№ 6. На відрізок $[0, 1]$ навмання кинута матеріальна точка. Нехай ξ — її координата. Знайти функції $F(x) = P\{\xi < x\}$, $F'(x)$. Побудувати їх графіки.

№ 7. Яка ймовірність вийняти із колоди в 52 карти фігуру будь-якої масті або карту пікової масті (фігурою називається валет, дама, король).

№ 8. Двоє по черзі підкидають монету. Виграє той, у кого раніше з'явиться герб. Визначити ймовірність виграшу для кожного гравця.

§ 3. Залежність і незалежність подій

В аксіоматичному визначенні ймовірності частотна інтерпретація явно не приймає участі, однак всі аксіоми і визначенні обмотивовуються тими властивостями, які повинна мати ймовірність, що визначається за частотою.

Дійсно, якщо подія A складається із деяких елементарних подій ω_i , $i \in I$, тоді частота появи події A в серії дослідів дорівнюватиме сумі частот елементарних

подій $\omega_i \in A$. Очевидно, $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$. Оскільки ймовірність достовірної події Ω дорівнює 1, тоді $\sum_{\omega_i \in \Omega} P(\omega_i) = 1$.

Застосовуючи такі міркування до двох подій A і B , легко зрозуміти математичне визначення умовної ймовірності.

Умовною частотою події A при умові, що подія B напустила, називається частота події A , обчислена не по сукупності всіх експериментів, а лише по числу експериментів, при яких подія B напустила. Отже, якщо n — число всіх експериментів, μ_B — число появи події B , μ_{AB} — число появи $A \cap B$, тоді умовна частота виражається числом

$$\frac{\mu_{AB}}{\mu_B} = \frac{\frac{\mu_{AB}}{n}}{\frac{\mu_B}{n}}.$$

Число $\frac{\mu_{AB}}{\mu_B}$ тлумачиться як наближене значення умовної ймовірності появи

події A при умові, що B напустила $P(A/B)$, число $\frac{\mu_{AB}}{n} \approx P(A \cap B)$, число $\frac{\mu_B}{n} \approx P(B)$.

Отже, приходимо до такого визначення

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (1)$$

Це визначення має сенс, якщо $P(B) \neq 0$. Умовні ймовірності $P(A/B)$ володіють всіма властивостями безумовних.

Теорема 1. $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$.

Ця формула називається формулою множення ймовірності. Якщо умовна ймовірність події A при умові B рівна безумовній ймовірності події A : $P(A/B) = P(A)$, тоді подія A називається незалежною від події B .

За визначенням незалежності подій A і B приймають таку рівність:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \quad (2)$$

Сенс цієї формули полягає в тому, що поява чи не поява однієї з незалежних подій, не впливає на ймовірність появи другої події.

Теорема 2. Якщо події A і B незалежні, тоді події $\bar{A}$ і B незалежні, A і $\bar{B}$ незалежні, $\bar{A}$ і $\bar{B}$ незалежні.

Події $A_1, A_2, \dots, A_n$ називаються незалежними в сукупності, якщо для довільних m подій із них ($m \leq n$) справедлива рівність:

$$P\left(\bigcap_{k=1}^m A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^m P(A_{i_k}). \quad (3)$$

Події $A_1, A_2, \dots, A_n$ називаються попарно незалежними, якщо рівність (3) виконується лише при $m = 2$.

Зауважимо, що із попарної незалежності подій не випливає незалежність їх в сукупності.

$$S_i \cap S_k = \emptyset \quad i \neq k$$

Якщо $\Omega = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$, де $i \neq k$, тоді для довільної події A має місце формула повної ймовірності

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(S_i) P\left(\frac{A}{S_i}\right), \quad (4)$$

справедливість якої перевіряють, скориставшись теоремою додавання ймовірності для несумісних подій і теоремою множення ймовірності

$$A = \bigcup_{i=1}^n (A \cap S_i) \quad (A \cap S_i) \cap (A \cap S_j) = \emptyset \quad i \neq j,$$

(5)

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap S_i) = \sum_{i=1}^n P(S_i) P\left(\frac{A}{S_i}\right).$$

Зауваження. Формула повної ймовірності може застосовуватись для визначення ймовірностей на множині елементарних подій.

В тісному зв'язку з формулою повної ймовірності є формула Байєса, яку можемо інтерпретувати так. Нехай перед початком дослідів маємо попарно несумісний гіпотез $S_1, \dots, S_n$ про хід явище, з кожною з яких може наступити подія A . Ці гіпотези мають ймовірності $P(S_1), \dots, P(S_n)$, які називаються апіорними. Потім проводимо дослід, в результаті якого наступила подія A . Цей факт сам по собі ще не дозволяє сказати, яка із подій $S_1, S_2, \dots, S_n$ мала місце в досліді. Однак,

Однак, можемо знайти ймовірності $P\left(\frac{S_1}{A}\right), P\left(\frac{S_2}{A}\right), \dots, P\left(\frac{S_n}{A}\right)$ кожної з гіпотез в припущенні, що наступила подія A , по формулі Байєса

$$P\left(\frac{S_i}{A}\right) = \frac{P(S_i) P\left(\frac{A}{S_i}\right)}{\sum_{i=1}^n P(S_i) P\left(\frac{A}{S_i}\right)}, \quad (6)$$

яка просто одержується із рівностей

$$P(A \cap S_i) = P(A) P\left(\frac{S_i}{A}\right) = P(S_i) P\left(\frac{A}{S_i}\right),$$

прирівнюючи праві частини яких, ми одержуємо

$$P\left(\frac{S_i}{A}\right) = \frac{P(S_i) P\left(\frac{A}{S_i}\right)}{P(A)}.$$

У формулах повної ймовірності і формулі Байєса припускається, що $P(S_i) > 0$, $i = \overline{1, n}$.

Вправи, задачі та приклади

№ 1. В комірника в кишені 10 ключів, із яких лише один підходить до дверей. Ключі послідовно виймаються (без повернення) до того часу, поки ще появиться потрібний ключ. Знайти ймовірність того, що потрібний ключ появиться при 5-му вийманні.

Розв’язування. A_k — подія “потрібний ключ появиться при k -му випробуванні”,

$k = 1, 2, \dots, 10$. $A_5 = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 \cap A_5$. За теоремою множення ймовірностей

$$\begin{aligned} P(A_5) &= P(\bar{A}_1) \cdot P\left(\frac{\bar{A}_2}{\bar{A}_1}\right) \cdot P\left(\frac{\bar{A}_3}{\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2}\right) \cdot P\left(\frac{\bar{A}_4}{\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3}\right) \cdot P\left(\frac{A_5}{\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4}\right) = \\ &= \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{10}, \end{aligned}$$

оскільки $P(\bar{A}_1) = \frac{9}{10}$ (всіх можливостей є 10, несприятливих подій є 9), $P\left(\frac{\bar{A}_2}{\bar{A}_1}\right) = \frac{8}{9}$ (після виймання одного непотрібного ключа залишилось всіх ключів 9, а з них несприятливих є 8 і 1 потрібний).

Аналогічно $P\left(\frac{\bar{A}_3}{\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2}\right) = \frac{7}{8}$, $P\left(\frac{\bar{A}_4}{\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3}\right) = \frac{6}{7}$.

Після виймання 4 непотрібних ключів, залишаються ще 6 ключів, серед

яких є один потрібний: $P\left(\frac{A_5}{\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4}\right) = \frac{1}{6}$.

№ 2. В посудині 5 білих і 4 чорні кулі. Навмання виймають із посудини одну кулю, а потім — другу. Знайти ймовірність того, що в другому випадку була вийнята біла куля (кулі в посудину не повертаються).

Вказівка. A — “перший раз вийняли чорну кулю”, B — “другий раз

вийняли білу кулю”, події A і $\bar{A}$ утворюють повну групу. По формулі повної

ймовірності
$$P(B) = P(A) \cdot P\left(\frac{B}{A}\right) + P(\bar{A}) \cdot P\left(\frac{B}{\bar{A}}\right) = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} + \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{9}.$$

№ 3. При обстеженні хворого є підозра на одно із двох захворювань S_1 і S_2 , ймовірності яких $P(S_1) = 0,6$, $P(S_2) = 0,4$. Для уточнення діагнозу назначають аналіз, результатом якого є позитивна чи негативна реакція. У випадку хвороби S_1 позитивна реакція має ймовірність появи 0,9, негативна — 0,1, у випадку хвороби S_2 позитивні й негативні реакції рівноможливі. Аналіз провели двічі, обидва рази реакція виявилась від’ємною (подія A). Знайти ймовірність кожного захворювання після проведення аналізів.

Вказівка.
$$P\left(\frac{A}{S_1}\right) = 0,1 \cdot 0,1 = 0,01, \quad P\left(\frac{A}{S_2}\right) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25.$$

За формулою Байєса

$$P\left(\frac{S_1}{A}\right) = \frac{P\left(\frac{A}{S_1}\right) \cdot P(S_1)}{P(S_1) \cdot P\left(\frac{A}{S_1}\right) + P(S_2) \cdot P\left(\frac{A}{S_2}\right)} = \frac{0,01 \cdot 0,6}{0,01 \cdot 0,6 + 0,25 \cdot 0,4} = 0,06.$$

№ 4. Відомо, що при підкиданні 10 гральних кубиків появилась, принаймні, одна одиниця. Яка ймовірність того, що появились дві або більше одиниць?

№ 5. В першій посудині 2 білі і 3 чорні кулі, в другій — 1 біла і 4 чорні кулі. Із першої посудини в другу переклали дві кулі. Знайти ймовірність того, що вийнята із другої посудини куля виявиться білою?

№ 6. Відомо, що 5% всіх чоловіків і 0,25% всіх жінок дальтоніки. Навмання вибрана особа, що хворіє дальтонізмом. Яка ймовірність того, що це чоловік? (Покладаємо, що чоловіків і жінок однакова кількість).

§ 4. Випадкові величини і функції розподілу

Нехай $\{\Omega, G, P\}$ — довільний ймовірносний простір.

Випадковою величиною ξ називається функція $\xi = \xi(\omega)$, яка визначена на Ω і приймає дійсні значення.

Для простоти обмежимося розглядом випадкових величин з дійсними значеннями.

Нехай проводиться дослід, в результаті якого настає одна з подій A_i , $i \in I$, I — скінченна чи нескінченна множина індексів. Тобто

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j).$$

Якщо кожній події A_i поставлено у відповідність деяке дійсне число x_i , тоді кажуть, що задано дискретну випадкову величину ξ . Нехай x — довільне дійсне число. Подія $\{\xi = x\}$ еквівалентна тому, що в досліді настигла подія A_i , причому $x_i = x$. Таким чином,

$$P\{\xi = x\} = \sum_{i: x_i = x} P(A_i).$$

Припускають, що всі x_i попарно різні.

Законом розподілу дискретної випадкової величини називається сукупність пар чисел (x_i, p_i) , де x_i — різні значення випадкової величини, а p_i — ймовірності, з

якими вона приймає ці значення, причому $\sum_{i \in I} p_i = 1$.

Зауваження. Визначення (x_i, p_i) при $i \in I$ рівносильно заданню функції

$P\{\xi = x\}$ при $-\infty < x < \infty$. Справді, при $x = x_i$ $P\{\xi = x\} = p_i$, при $x \notin \{x_i\}$, $i \in I$, $P\{\xi = x\} = 0$.

Ймовірність того, що випадкова величина $\xi < x$ визначається так:

$$P\{\xi < x\} = P\{\omega : \xi(\omega) < x\} = \sum_{i: x_i < x} p_i.$$

Функція $F(x) = P(\xi < x)$ як функція змінної $x \in (-\infty, \infty)$ називається функцією розподілу випадкової величини ξ .

Припустимо, що проводяться n незалежних випробувань, при кожному з яких подія A може наступити з ймовірністю p і не наступити з ймовірністю $q = 1 - p$. Така ситуація називається схемою Бернуллі.

Позначимо через μ число появи події при n випробуваннях. Покладемо $\omega_i = 1$, якщо при i -му випробуванні подія A наступила, $\omega_i = 0$, якщо A — не наступила. Введемо в розгляд вектори $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, які будуть точками простору Ω . Очевидно, що точки ω_n однозначно визначають результати всіх n

випробувань. Тому $\mu = \sum_{i=1}^n \omega_i$ є дискретна випадкова величина, визначена на Ω . Оскільки випробування незалежні, ймовірність появи і не появи події A одна й та ж при кожному випробуванні, тоді

$$P(\omega) = P(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = P(\omega_1)P(\omega_2) \dots P(\omega_n) = p^{\sum_{i=1}^n \omega_i} \cdot q^{\sum_{i=1}^n (1-\omega_i)}. \quad (1)$$

Дійсно, в (1) стільки співмножників рівних p , скільки серед ω_i одиниць, а решта співмножників рівна q . Закон розподілу випадкової величини μ визначається так:

$$P\{\mu = k\} = P\left\{\sum_{i=1}^n \omega_i = k\right\} = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad (2)$$

оскільки за формулою (1) $P(\omega) = p^k \cdot q^{n-k}$ і всіх векторів $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, у яких k компонент є одиницями, а $n - k$ — нулями, число рівне C_n^k .

Із формули розкладу біному Ньютона одержується формула:

$$1 = (p + q)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k}. \quad (3)$$

Закон розподілу, що заданий формулою (3) називають біноміальним з параметрами n, p , а формулу (2) — формулою Бернуллі. Часто позначають $P\{\mu = k\} = P_n(k)$.

Якщо n зафіксувати, тоді $P_n(k)$ обертається в деяку функцію від аргументу k : $k = 0, 1, 2, \dots, n$. При якому значенні аргументу ця функція досягає максимуму? Іншими словами, яке з чисел $P_n(0), P_n(1), \dots, P_n(n-1), P_n(n)$ є найбільшим? З цією

метою розглядають два сусідні числа $P_n(k), P_n(k+1)$, між якими має місце

$$\begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix}$$

одне із трьох співвідношень: $P_n(k) > P_n(k+1)$. Якщо замість $P_n(k)$ в праву і ліву частину останньої нерівності підставити їх значення

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad P_n(k+1) = C_n^{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1},$$

Враховуючи, що $C_n^{k+1} = C_n^k \cdot \frac{n-k}{k+1}$, ми одержимо $k > np - q$.

Для всіх $k < np - q$ $P_n(k) < P_n(k+1)$, при $k = np - q$ (тобто $np - q$ ціле число) $P_n(k) = P_n(k+1)$, при $k > np - q$ $P_n(k) > P_n(k+1)$.

Отже, при $k < np - q$ функція $P_n(k)$ зростає, при $k = np - q$ — спадає.

Найбільш ймовірним числом появи події A є ціле число k_0 , яке належить інтервалу: $np - q < k_0 < np + p$.

Якщо $np - q$ ціле число, тоді є два рівні між собою максимуми: при $k = np - q$ і при $k = np - q + 1 = np + p$.

Теорема 1 (Пуассона). Якщо $n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0, np \rightarrow a$, де a — фіксоване

додатне число, тоді ймовірність $P\{\mu = k\}$ в схемі Бернуллі прямує до $\frac{a^k e^{-a}}{k!}$ при довільному $k = 0, 1, 2, \dots$.

Дискретна випадкова величина ξ із законом розподілу

$$P\{\xi = x\} = \frac{a^x e^{-a}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Називається розподіленою за законом Пуассона.

Для перевірки того, що даний розподіл є справді законом розподілу

ймовірностей, достатньо перевірити, що $\sum_{x=0}^{\infty} P\{\xi = x\} = 1$.

Теорема 2 (Локальна гранична теорема Муавра-Лапласа). Нехай

$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$. Якщо $n \rightarrow \infty$, p — фіксоване, $p \neq 0$, $q \neq 0$, k змінюється так, що $|x| \leq T$, де T — фіксоване число, тоді рівномірно по x на відрізку $[-T, T]$

$$P\{\mu = k\} : \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x^2}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad (5)$$

Теорема 3 (Інтегральна теорема Муавра-Лапласа). Якщо $p \in (0, 1)$ — фіксоване, тоді при $n \rightarrow \infty$ рівномірно по a і b ($a \leq b$)

$$P\left\{a \leq \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} < b\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (6)$$

Важливий є наступний

Наслідок. Якщо $F_n(x)$ — функція розподілу випадкової величини

$$\xi_n = \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad \text{тоді} \quad \text{рівномірно по } x \in (-\infty, \infty)$$

$$F_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x)$$

Функція $\Phi(x)$ називається нормальною функцією розподілу.

Теорема Пуассона дає змогу наближено оцінювати ймовірність $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

при великих n і відносно малих k (малих в тому сенсі, що $\frac{k^2}{n}$ повинно бути малим). Локальна теорема Муавра-Лапласа дозволяє оцінювати окремі значення $P_n(k)$ як функції k при великих n . Інтегральна гранична теорема дає можливість оцінювати функцію розподілу випадкової величини μ .

Зауважимо, що клас дискретних випадкових величин недостатній для опису реальних величин, що залежить від випадку (наприклад, температура, тиск та інші). Сформулюємо визначення випадкової величини без обмеження її можливих значень.

Числова функція $\xi = \xi(\omega)$ називається випадковою величиною, якщо для довільного дійсного числа x множина тих ω , для яких $\xi(\omega) < x$ належить σ -алгебрі G .

Смисл цього визначення полягає в тому, що сигма-алгебра є класом подій, для кожного з яких визначена ймовірність. Отже, для довільного x повинна бути визначена ймовірність події $\{\omega : \xi(\omega) < x\}$.

Функція $F_{\xi}(x) = P\{\omega : \xi(\omega) < x\}$ називається функцією розподілу випадкової величини.

Властивості функції розподілу:

1. $F_{\xi}(x)$ — неспадна функція x , $-\infty < x < \infty$.
2. $P\{x \leq \xi < y\} = F(y) - F(x)$ при $x \leq y$.
3. $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$; $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.
4. $P\{\xi \geq x\} = 1 - F(x)$.
5. $F(x)$ неперервна зліва в довільній точці x , $-\infty < x < \infty$.
6. $P\{\xi \leq x\} = F(x + 0) = \lim_{y \rightarrow x+0} F(y)$.
7. $P\{\xi = x\} = F(x + 0) - F(x)$.
8. Всі елементи H мінімальної сигма-алгебри числових множин, що містить множини виду $(-\infty, x)$, $-\infty < x < \infty$ мають певні ймовірності.
9. Нехай $F(x)$ — не спадна, неперервна зліва функція, $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.
Тоді існує ймовірносний простір $\{\Omega, H, P\}$ і визначена на ньому випадкова величина ξ , для якої $F_{\xi}(x) = F(x)$.

Розподіл випадкової величини ξ називається неперервним, якщо існує така

інтегрована функція $p(x)$, $-\infty < x < \infty$, що в довільній точці x

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$$

 Функція $p(x)$, $-\infty < x < \infty$ називається щільністю розподілу випадкової величини ξ .

Точку x називають точкою росту функції розподілу $F(x)$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ виконується нерівність $F(x + \varepsilon) - F(x - \varepsilon) > 0$.

Теорема 4 (Лебега). Кожна функція розподілу $F(x)$ єдиним способом може бути представлена у виді суми $F(x) = F_q(x) + F_s(x) + F_c(x)$ трьох не спадних функцій, де

- 1) $F_q(x)$ — дискретна функція, яка має вид:

$$F_q(x) = \sum_{i: \omega_i < x} p(\omega_i), \quad p(\omega_i) \geq 0, \quad \sum_i p(\omega_i) \leq 1;$$

- 2) $F_s(x)$ — абсолютно неперервна функція

$$F_s(x) = \int_{-\infty}^x p(t)dt, \quad p(t) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} p(t)dt = 1;$$

3) $F_c(x)$ — так званий сингулярний розподіл, який є неперервною функцією, множина точок росту якої має лебегову міру нуль.

Нехай на імовірнісному просторі $\{\Omega, H, P\}$ визначені випадкові величини $\xi_1 = \xi_1(\omega), \dots, \xi_n = \xi_n(\omega), \omega \in \Omega$. Кожному ω ці величини ставлять у відповідність n -мірний вектор. Функцію від змінних

$$x_1, x_2, \dots, x_n : F_{\xi_1 \dots \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = P\{\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n\}$$

назвемо багатовимірною функцією розподілу вектора $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. Випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ називаються незалежними в сукупності або просто незалежними, якщо при довільних дійсних $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$F_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot F_{\xi_2}(x_2) \cdot \dots \cdot F_{\xi_n}(x_n).$$

Випадковий вектор $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ називають вектором абсолютно неперервного

типу, якщо існує функція $p_{\xi_1 \dots \xi_n}(x_1, \dots, x_n)$ така, що при довільних $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$F_{\xi_1 \dots \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\xi_1 \dots \xi_n}(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n.$$

Функція $p_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається щільністю розподілу випадкового вектора $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$.

Приклад. Рівномірним розподілом в плоскій обмеженій вимірній області V називається розподіл з густиною

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\text{пл. } V}, & \text{якщо } (x, y) \in V, \\ 0, & \text{якщо } (x, y) \notin V. \end{cases}$$

Вправи, задачі та приклади

№ 1. Із партії, яка містить N виробів, серед яких n бракованих, взято навмання k виробів. Яка ймовірність того, що серед них t бракованих (подія A).

Розв'язування. В партії із $N - n$ не бракованих. Число різних партій, що містять n бракованих дорівнює C_N^k , серед них є $C_n^s \cdot C_{N-n}^{k-s}$ партій, що містять рівно s бракованих. Тоді

$$P(A) = \frac{C_n^s C_{N-n}^{k-s}}{C_N^k}.$$

Якщо ξ — випадкова величина, що означає число бракованих виробів

серед взятих k , тоді

$$P(\xi = s) = \frac{C_n^s C_{N-n}^{k-s}}{C_N^k}.$$

Такий набір ймовірностей називається гіпергеометричним розподілом.

№ 2. Монета підкидається 10 разів. Яка ймовірність того, що герб при цьому випадає 3 рази?

Розв'язання. По формулі Бернуллі $p = q = \frac{1}{2}$, $P_{10}(3) = C_{10}^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{15}{128}$.

№ 3. Гральний кубик підкидають 20 разів. Яке найбільш ймовірне число випадання грані “4”?

Розв'язування. $n = 20, p = \frac{1}{6}, q = \frac{5}{6}, np - q = 2,5, np + p = 3,5$. Отже, найбільш ймовірне число випадання грані “4” є 3.

№ 4. Система складається із 10000 елементів, кожен з яких протягом заданого часу може незалежно від інших виходити з ладу з ймовірністю 0,00005. Скільки треба взяти запасних елементів, щоб всі елементи, які вийшли з ладу, можна було замінити новими, з ймовірністю, не меншою 0,95?

Розв'язування. Застосуємо теорему Пуассона: $n = 10000, p = 0,00005, np = 0,5$.

Нехай ξ — число елементів, що вийшли з ладу. Випадкова величина ξ може наближено вважатись розподіленою по закону Пуассона. Тоді

$$P\{\xi = 0\} \approx e^{-0,5}, P\{\xi = 1\} \approx 0,5 \cdot e^{-0,5},$$

$$P\{\xi = 2\} \approx \frac{1}{2} \cdot (0,5)^2 \cdot e^{-0,5}, \dots, P\{\xi = m\} \approx \frac{1}{m!} \cdot (0,5)^m \cdot e^{-0,5}.$$

Нехай m — число запасних елементів, тоді m треба вибрати із умови

$$P\{\xi = 0\} + \dots + P\{\xi = m - 1\} < 0,95 \leq P\{\xi = 0\} + \dots + P\{\xi = m\}.$$

За допомогою таблиці знаходимо, що цій умові задовольняє $m = 2$.

№ 5. Монету підкидають 100 разів. Яка ймовірність того, що при цьому герб випаде рівно 50 разів?

Розв'язування. Маємо $npq = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 25 > 0$, оскільки $p = q = \frac{1}{2}$.
Скористаємось локальною теоремою Муавра-Лапласа:

$$P_{100}(50) \approx \frac{1}{\sqrt{25}} \varphi \left(\frac{50 - 100 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{25}} \right) = \frac{1}{5} \varphi(0).$$

Із таблиці знаходимо, що $\varphi(0) = 0,397$. Отже, $P_{100}(50) \approx 0,08$.

№ 6. На підприємстві ймовірність браку дорівнює 0,02. Перевіряють 500 виробів гостової продукції. Знайти ймовірність того, що серед них виявиться не менше 10 і не більше 20 бракованих.

Розв'язування. Використаємо інтегральну теорему Муавра-Лапласа:

$$P\{10 \leq \mu \leq 20\} \approx \Phi\left(\frac{20-10}{\sqrt{9,8}}\right) - \Phi\left(\frac{10-10}{\sqrt{9,8}}\right) \approx \Phi(3) - \Phi(0),$$

оскільки $np = 500 \cdot 0,02 = 10$, $npq = 500 \cdot 0,02 \cdot 0,98 = 9,8$. Із таблиць для функцій $\Phi(x)$ знаходимо $\Phi(0) \approx 0,0$; $\Phi(2) \approx 0,498$. Отже, $P\{10 \leq \mu \leq 20\} \approx 0,498$.

№ 7. Ймовірність появи події в кожному із 625 незалежних випробувань дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи події відхилиться від її ймовірності по абсолютній величині не більше, ніж на 0,04.

Розв'язування. Користуючись інтегральною теоремою Муавра-Лапласа, маємо

$$\begin{aligned} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right\} &= P\left\{-\varepsilon \leq \frac{m}{n} - p \leq \varepsilon\right\} = P\left\{-\varepsilon \leq \frac{m - np}{n} \leq \varepsilon\right\} = \\ &= P\left\{-\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \leq \frac{m - np}{\sqrt{n}} \leq \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right\} = P\left\{-\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right\} = 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \end{aligned}$$

Оскільки $n = 625$, $p = 0,8$, $q = 1 - p = 0,2$, $\varepsilon = 0,04$, тоді

$$P\left\{\left|\frac{m}{625} - 0,8\right| \leq 0,04\right\} = 2\Phi\left(0,04 \cdot \sqrt{\frac{625}{0,8 \cdot 0,2}}\right) = 2\Phi(2,5) \approx 2 \cdot 0,4938 = 0,9876.$$

№ 8. В партії із 10 деталей є 8 стандартних. Навмання відібрані дві деталі. Записати закон розподілу числа стандартних деталей серед відібраних. Побудувати функцію розподілу ймовірностей.

Розв'язування. Нехай ξ — число стандартних деталей серед відібраних.

Очевидно, $\xi = 0, 1, 2$.

$$P\{\xi=0\} = \frac{C_8^0 \cdot C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}; \quad P\{\xi=1\} = \frac{C_8^1 \cdot C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{16}{45}; \quad P\{\xi=2\} = \frac{C_8^2 \cdot C_2^0}{C_{10}^2} = \frac{28}{45}.$$

Закон розподілу має вигляд:

№ 9. Знайти ймовірність того, що подія A наступить 1400 разів в 2400 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події при кожному випробуванні дорівнює 0,6.

№ 10. Ймовірність появи події A при кожному із 2100 незалежних випробувань дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що подія A наступить не менше 1470 і не більше 1500 разів.

№ 11. Прилад складається з 5 елементів, що працюють незалежно. Ймовірність вийти з ладу елемента дорівнює 0,2. Знайти наймовірніше число елементів, що вийшли з ладу.

№ 12. В партії із 6 деталей є 4 стандартні. Навмання відібрані 3 деталі. Записати закон розподілу ймовірностей випадкової величини ξ — число стандартних деталей серед відібраних і її функцію розподілу.

§ 5. Деякі характеристики випадкових величин

Закон розподілу випадкової величини є її вичерпною характеристикою. Однак, деколи достатньо одного або двох чисел, які б відображали найбільш важливі особливості закону розподілу (середнє значення випадкової величини, середній

розмір відхилення випадкової величини від свого середнього значення тощо). Такого роду числа називаються числовими характеристиками випадкових величин або відповідних законів розподілу.

Найважливіше місце серед числових характеристик займає математичне сподівання випадкової величини.

Нехай $\xi(\omega)$ — випадкова величина на імовірнісному просторі (Ω, G, H) .

Математичним сподіванням випадкової величини $\xi(\omega)$ називається число

$$M\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega),$$

якщо інтеграл Лебега в правій частині рівності існує.

Користуючись інтегралом Стільт'єса, можемо $M\xi$ записати у виді

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\xi}(x).$$

Математичним сподіванням $M\xi$ випадкової величини $\xi(\omega)$ визначеної на

дискретному імовірнісному просторі (Ω, G, H) називається число $M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi(\omega_k) p_k$, якщо ряд абсолютно збіжний (в протилежному випадку кажуть, що математичне сподівання не існує).

Якщо випадкова величина $\xi(\omega)$ має щільність розподілу $p(x)$, тоді $M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx$, причому інтеграл в правій частині абсолютно збіжний.

Теорема 1. Якщо ξ — неперервна випадкова величина, що має щільність

$p(x)$, і інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| p(x) dx$ збіжний, тоді існує $M[\varphi(\xi)]$ і справедлива формула:

$$M[\varphi(\xi)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) p(x) dx.$$

Властивості математичних сподівань:

- 1) Якщо c — стала, тоді $Mc = c$, $M(c\xi) = c \cdot M\xi$.
 - 2) Для довільних випадкових величин ξ, η : $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$.
 - 3) Для довільних випадкових величин ξ : $|M\xi| \leq M|\xi|$.
 - 4) Якщо випадкові величини ξ, η незалежні, тоді $M(\xi\eta) = M\xi M\eta$.
- Зауважимо, що із існування довільних двох математичних сподівань у 2-4-ій властивостях впливає існування третього математичного сподівання.

Дисперсією $D\xi$ випадкової величини ξ називається число $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$, якщо математичне сподівання в правій частині існує.

Скориставшись властивостями математичного сподівання, маємо

$$D\xi = M(\xi^2 - 2\xi \cdot M\xi + (M\xi)^2) = M\xi^2 - 2M\xi \cdot M\xi + (M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

Властивості дисперсії:

1) Якщо c — стала, тоді $D(c\xi) = c^2 D\xi$, $Dc = 0$.

2) Для незалежних випадкових величин ξ, η : $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$.

Для довільних випадкових величин ξ, η маємо

$$\begin{aligned} D(\xi + \eta) &= M[(\xi + \eta) - M(\xi + \eta)]^2 = M[(\xi - M\xi) + (\eta - M\eta)]^2 = \\ &= M(\xi - M\xi)^2 + (\eta - M\eta)^2 + 2M\{(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)\}. \end{aligned}$$

Вираз $M\{(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)\} = \text{cov}(\xi, \eta)$ називається коваріацією величин ξ, η .

Для незалежних випадкових величин $\text{cov}(\xi, \eta) = M(\xi - M\xi) \cdot M(\eta - M\eta) = 0$, що не є достатньою умовою незалежності випадкових величин.

Якщо $\text{cov}(\xi, \eta) \neq 0$, тоді величини ξ, η залежні. В ролі кількісної

характеристики степені залежності випадкових величин ξ, η використовується

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}}$$

коефіцієнт кореляції

Поряд з розглянутими математичним сподіванням і дисперсією використовують моменти вищих порядків. Моментом порядку k випадкової величини ξ називається число $M\xi^k$. Число $M(\xi - M\xi)^k$ називається центральним моментом порядку k .

Для дослідження розподілів довільних випадкових величин вводяться характеристичні функції. Комплексно-значною випадковою величиною називається функція $\xi_1(\omega) + i\xi_2(\omega)$, де $\omega \in \Omega$, (ξ_1, ξ_2) — випадковий вектор.

Покладемо $M(\xi_1 + i\xi_2) = M\xi_1 + iM\xi_2$.

Характеристичною функцією дійсної випадкової величини ξ називається

$$f_\xi(t) = Me^{it\xi}, \text{ де } t \text{ — дійсне число, } -\infty < t < \infty;$$

$$\text{для дискретної випадкової величини } f_\xi(t) = \sum_{k=1}^n e^{it\xi(\omega_i)} \cdot p(\omega_i);$$

$$\text{для абсолютно неперервної випадкової величини } f_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p_\xi(x) dx.$$

Теорема 2. Якщо $f_\xi(t)$ характеристична функція випадкової величини ξ , тоді

1) $f_\xi(t)$ визначена для всіх дійсних t .

2) $f_\xi(0) = 1, |f_\xi(t)| \leq 1$.

3) Якщо $\xi_1, \dots, \xi_n$ — незалежні випадкові величини, тоді характеристична функція суми $s_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ рівна $f_{s_n}(t) = f_{\xi_1}(t) \cdot f_{\xi_2}(t) \cdot \dots \cdot f_{\xi_n}(t)$.

4) $f_\xi(t)$ є рівномірно неперервною функцією для $t \in (-\infty, \infty)$.

5) Якщо існує k -ий момент $M|\xi|^k < \infty$, $k \geq 1$, тоді існує неперервна k -а

похідна $f_\xi(t)$, причому $f_\xi^{(k)}(0) = i^k M\xi^k$.

6) Відповідність, що встановлюється формулою $f_\xi(t) = Me^{it\xi}$ між множиною характеристичних функцій $f_\xi(t)$ і множиною функцій розподілу, є взаємно однозначною.

Для одержання граничних розподілів для сум незалежних випадкових величин використовується наступна теорема про неперервну відповідність множини характеристичних функцій множині функцій розподілу.

Теорема 3. Нехай $f_n(t)$, $n=\overline{1, \infty}$ — послідовність характеристичних функцій і $F_n(x)$, $n=\overline{1, \infty}$ послідовність відповідних функцій розподілу.

а) Якщо $f_n(t) \rightarrow f(t)$ при $n \rightarrow \infty$ для довільного t і $f(t)$ неперервна при $t = 0$, тоді $f(t)$ — характеристична функція, що відповідає деякій функції розподілу $F(x)$ і $F_n(x)$ слабо збіжна до $F(x)$ при $n \rightarrow \infty$.

б) Якщо $F_n(x)$ слабо збіжна до функції розподілу $F(x)$, тоді $f_n(t) \rightarrow f(t)$, де $f(t)$ — характеристична функція, що відповідає функції розподілу $F(x)$.

Вправи, задачі та приклади

№ 1. Знайти математичне сподівання, дисперсію і характеристичну функцію випадкової величини ξ , розподіленої по нормальному закону.

Розв'язування. Щільність нормального розподілу випадкової величини

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Тоді

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = a,$$

що одержується заміною $z = (x-a)/\sigma$ і врахуванням, що $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}$, $\int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0$,

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 p(x) dx = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

що одержується заміною $z = (x-a)/\sigma$.

Інтегруючи по частинах, знаходимо

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = -z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}.$$

Отже, $D\xi = \sigma^2$. Ми одержали важливий результат, який розкриває

імовірнісний смисл параметрів, що визначають нормальний закон: параметр a нормального закону дорівнює математичному сподіванню, а σ дорівнює $\sqrt{D\xi}$.

Таким чином нормальний закон розподілу повністю визначений математичним сподіванням і дисперсією, що використовується в теоретичних дослідженнях.

Характеристична функція величини ξ визначається з допомогою підстановки $z = (x-a)/\sigma - it\sigma$:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx - \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = e^{iat - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty - it\sigma}^{\infty - it\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = e^{iat - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = e^{iat - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Користуючись теоремою 2, § 5, можемо обчислювати моменти для нормального розподілу.

№ 2. Знайти математичне сподівання, дисперсію і характеристичну функцію випадкової величини ξ , розподіленої по закону Пуассона

$$P\{\xi = m\} = \frac{a^m e^{-a}}{m!}, \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Розв'язування.

$$M_{\xi} = \sum_{m=0}^{\infty} m \cdot \frac{a^m e^{-a}}{m!} = \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot \frac{a^m e^{-a}}{m!} = a e^{-a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^{m-1}}{(m-1)!} = a e^{-a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} = a;$$

$$\begin{aligned} M_{\xi}^2 &= \sum_{m=0}^{\infty} m^2 \cdot \frac{a^m e^{-a}}{m!} = \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot \frac{a^m e^{-a}}{(m-1)!} = \sum_{m=1}^{\infty} [(m-1)+1] \frac{a^m e^{-a}}{(m-1)!} = \\ &= \sum_{m=2}^{\infty} \frac{a^m e^{-a}}{(m-2)!} + a e^{-a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^{m-1}}{(m-1)!} = a^2 e^{-a} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{a^{m-2}}{(m-2)!} + e^{-a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^{m-1}}{(m-1)!} = \\ &= a^2 \cdot e^{-a} \cdot e^a + a \cdot e^{-a} \cdot e^a = a^2 + a. \end{aligned}$$

$$D\xi = M_{\xi}^2 - (M_{\xi})^2 = a.$$

Отже, параметр a в розподілі Пуассона є математичним сподіванням і дисперсією випадкової величини.

$$\begin{aligned} \text{Характеристична функція } f(t) &= M e^{it\xi} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} e^{itm} \frac{a^m e^{-a}}{m!} = e^{-a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a e^{it})^m}{m!} = e^{-a} \cdot e^{-a e^{it}} = e^{a(e^{it}-1)} \end{aligned}$$

3. Знайти математичне сподівання, дисперсію і характеристичну функцію випадкової величини ξ , рівномірно розподіленої в інтервалі (a, b) .

Розв'язування. Рівномірний розподіл на (a, b) випадкової величини ξ має вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{якщо } a < x \leq b; \\ 1, & \text{якщо } x > b. \end{cases}$$

Тоді щільність

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при } a < x < b, \\ 0 & \text{при } x \notin [a, b]; \end{cases}$$

$$M_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}.$$

Таким чином, математичне сподівання випадкової величини, рівномірно розподіленої на (a, b) є серединою цього відрізка. Оскільки

$$M_{\xi}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = \frac{a^2 + ab + b^2}{3},$$

тоді

$$D\xi = M_{\xi}^2 - (M_{\xi})^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

Дисперсія рівномірно розподіленої випадкової величини пропорційна квадрату довжин відрізка, в якому вона розподілена. Отже, вона характеризує степінь розсіяння значень випадкової величини навколо свого математичного сподівання.

Характеристична функція відшуковується так:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x) dx = \int_a^b e^{itx} \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}.$$

№ 4. Нехай ξ — число випробувань в схемі Бернуллі до появи першого успіху включно. Знайти $M\xi$, $D\xi$, f_ξ .

№ 5. Величини ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 незалежні і нормально розподілені з параметрами $(1, 1)$, $(0, 2)$, $(-1, 1)$. Знайти дисперсію і характеристичну функцію випадкової величини $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$.

§ 6. Закон великих чисел

Коли маємо справу з однією подією, тоді ми можемо лише сподіватись, що вона наступає чи не наступає. Якщо розглядається єдина випадкова величина, тоді вона може прийняти одно із своїх можливих значень. Практично достовірні висновки ми можемо зробити, якщо розглядаємо велике число випадкових подій чи випадкових величин.

Важливою є нерівність Чебишева $P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$, яка має місце для довільного $\varepsilon > 0$ і яка показує, що при малій дисперсії великі відхилення ξ від $M\xi$ малоймовірні.

Експериментатори спостерігали, що хоч результати окремих вимірів

$\xi_1, \dots, \xi_n$ можуть значно відрізнятись одна від одної, але їх середні арифметичні $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k$ мало відрізняються в різних серіях дослідів.

Сформулюємо теорему, яка відображає реальний факт стійкості середніх.

Вона є законом великих чисел у формі Чебишева.

Теорема 1 (теорема Чебишева). Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — послідовність попарно незалежних випадкових величин і $D\xi_k < c$, $k = \overline{1, \infty}$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ при $n \rightarrow \infty$ маємо

$$P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M\xi_k\right| > \varepsilon\right\} \rightarrow 0$$

Наслідок. Якщо $M\xi_1 = \dots = M\xi_n = a$, тоді для довільного $\varepsilon > 0$ при $n \rightarrow \infty$

$$P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - a\right| > \varepsilon\right\} \rightarrow 0$$

Цей наслідок виражає стійкість середнього.

Зауважимо, що з даних тверджень, як і з інших математичних теорем не впливає той чи інший результат експерименту, оскільки на практиці не могла гарантувати виконання умов теореми.

Якщо для випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ виконується теорема 1, тоді говорить, що до них можна застосувати закон великих чисел.

Окремим випадком теореми 1 є

Теорема 2 (теорема Бернуллі). Нехай μ — число успіхів в схемі Бернуллі,

p — ймовірність успіху при окремому випробуванні. Тоді при довільному $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Ця теорема стверджує, що частота $\frac{\mu}{n}$ появи успіхів в схемі Бернуллі близько до ймовірності p , що встановлюється експериментально. Звернемо увагу на оцінку для ймовірності відхилення частоти появи в серії із n дослідів від ймовірності

$$P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2},$$

яка одержується з нерівності

Чебишева. З теореми Бернуллі не можна зробити висновок, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu}{n} = p$ з ймовірністю 1.

Кажуть, що послідовність випадкових величин $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ збіжна по ймовірності до випадкової величини ξ , якщо для довільного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\right\} = 0.$$

Таким чином, законом великих чисел називаються теореми, які

стверджують, що різниця $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M\xi_k$ збіжна до нуля по ймовірності. Нехай A — подія “послідовність випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$

збіжна до ξ при $n \rightarrow \infty$ ”. Її можна записати так:

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \left\{|\xi_n - \xi| < \frac{1}{k}\right\}.$$

Якщо

$$P\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi\right\} = P\left\{\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} |\xi_n - \xi| < \frac{1}{k}\right\} = 1.$$

Тоді кажуть, що послідовність $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ збіжна до випадкової величини ξ з ймовірністю 1.

Із збіжності по ймовірності не випливає збіжність з ймовірністю 1, тому

з теореми Бернуллі не можна зробити висновок, що $P\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu}{n} = p\right\} = 1$. Збіжність по ймовірності послідовності випадкових величин не виключає випадку, коли

$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega)$ ні при якому ω не існує.

Посиленим законом великих чисел називають такі теореми, які стверджують,

що різниця $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M \xi_k$ збіжна з ймовірністю 1 до нуля.

Теорема 3 (посилений закон великих чисел Колмогорова). Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$

— незалежні випадкові величини, для яких $M \xi_n, D \xi_n$ існують.

Якщо $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} D \xi_k < \infty$, тоді $P \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\xi_k - M \xi_k) = 0 \right\} = 1$.

Теорема 4 (посилений закон великих чисел Бореля). Якщо μ — число

успіхів при n незалежних випробуваннях в схемі Бернуллі, де p — ймовірність

успіху при кожному випробуванні. Тоді $P \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu}{n} = p \right\} = 1$.

Таким чином, в теоремах закону великих чисел можемо замінити збіжність по ймовірності збіжністю з ймовірністю 1.

Теорема 4 свідчить про те, що частоту події можемо використовувати для обчислення ймовірності.

Зауваження. Із теореми 4 не випливає, що частоту появи події можна використовувати для логічного визначення ймовірності.

Вправи, задачі та приклади

№ 1. Користуючись нерівністю Чебишева, оцінити ймовірність того, що випадкова величина ξ відхилиться від свого математичного сподівання менше, ніж на три середніх квадратичних відхилення.

$$P\{|\xi - M\xi| < 3\sigma\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{9\sigma^2} = \frac{8}{9}, \quad \sigma^2 = D\xi.$$

Відповідь.

№ 2. Прилад складається із 10 елементів, що незалежно працюють. Ймовірність виходу з ладу кожного елемента за час T дорівнює 0,05. З допомогою нерівності Чебишева оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між числом елементів, що вийшли з ладу і їх математичним сподіванням за час T не менше двох.

Вказівка. ξ — “число елементів, що вийшли з ладу за час T ”.

$$M\xi = np = 10 \cdot 0,05 = 0,5; \quad D\xi = npq = 10 \cdot 0,05 \cdot 0,95 = 0,475.$$

За нерівністю Чебишева

$$P\{|\xi - M\xi| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2}, \quad P\{|\xi - 0,5| < 2\} \geq 1 - \frac{0,475}{4} = 0,88,$$
$$P\{|\xi - 0,5| \leq 2\} \geq 1 - P\{|\xi - 0,5| < 2\} \leq 1 - 0,88 = 0,12.$$

№ 4. Ймовірність появи події A при кожному випробуванні дорівнює $1/2$. Оцінити ймовірність того, що число ξ появи події A при 100 незалежних випробувань попаде в проміжок (40; 60).

Вказівка. $M\xi = np = 100 \cdot 1/2 = 50$; $D\xi = npq = 25$; $\varepsilon = 60 - 50 = 10$.

$$P\{|\xi - 50| < 10\} \geq 1 - \frac{25}{10^2} = 0,75.$$

Скористаємось нерівністю Чебишева:

№ 5. Дискретна випадкова величина ξ задана законом розподілу

$$\begin{array}{cccc} \xi & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ p & 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \end{array}.$$

Оцінити ймовірність того, що $|\xi - M\xi| < 0,2$.

Вказівка. $M\xi = 0,1 \cdot 1/8 + 0,2 \cdot 1/8 + 0,3 \cdot 1/4 + 0,4 \cdot 1/2 = 5/16$.

Обчислюємо дисперсію $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$ і використовуємо нерівність Чебишева при $\varepsilon = 0,2$.

№ 6. Дискретна випадкова величина ξ задана біноміальним законом розподілу при $p = q = 1/2$. Оцінити ймовірність того, що $|\xi - M\xi| < 0,001$.

№ 7. Перевірити, що для послідовності незалежних випадкових величин

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$, які задані законом розподілу

$$\xi_k = \begin{cases} -k & \text{з ймовірністю } \frac{1}{2k^2}, \\ 0 & \text{з ймовірністю } 1 - \frac{1}{k^2}, \\ k & \text{з ймовірністю } \frac{1}{2k^2}, \end{cases}$$

можна застосувати теорему Чебишева.

§ 7. Центральна гранична теорема

В § 6 сформульовані теореми 1–4, які встановлюють збіжність послідовностей випадкових величин по ймовірності та з ймовірністю 1.

В даному параграфі розглянемо групу граничних теорем, які встановлюють збіжність законів розподілу для послідовностей сум випадкових величин. Цю групу теорем називають центральною граничною теоремою. Вона дуже важлива як для теорії, так і для застосувань.

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа є окремим випадком більш загальних теорем, які розглянемо далі.

Нехай ξ — число появи події при n незалежних випробувань, при кожному з яких ймовірність успіху одна й та ж і дорівнює p . Теорема

Муавра-Лапласа стверджує, що при довільному x має місце співвідношення:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} < x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (1)$$

Безпосередньо перевіряється, що $M\mu = np$, $D\mu = npq$.

Отже, (1) можемо переписати так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\mu - np}{\sqrt{D\mu}} < x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (2)$$

Позначимо через ξ_k випадкову величину, яка дорівнює 1 чи 0, в залежності від появи чи не появи успіху при k -му випробуванні схеми Бернуллі. Очевидно,

$$\xi_k = \begin{cases} 1 & \text{з ймовірністю } p, \\ 0 & \text{з ймовірністю } 1-p=q. \end{cases}$$

Тоді $\mu = \sum_{k=1}^n \xi_k$ і (1) можемо переписати так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k - \sum_{k=1}^n M\xi_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^n D\xi_k}} < x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (4)$$

Функція $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ називається нормальною функцією розподілу.

Виникає питання: чи справедливе співвідношення (4) для незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ більш загального виду, ніж (3)?

Відповідь на поставлене питання дає центральна гранична теорема.

Нехай маємо послідовність серій випадкових величин: при кожному n

маємо n незалежних випадкових величин $\{\xi_{nk}\}$, $k = \overline{1, n}$. Позначимо

$$F_{\xi_{nk}}(x) = F_{nk}(x), \quad s_n = \sum_{k=1}^n \xi_{nk}, \quad M\xi_{nk} = a_{nk}, \quad D\xi_{nk} = b_{nk}^2, \quad B_n^2 = Ds_n = \sum_{k=1}^n b_{nk}^2.$$

Теорема 1 (Ліндеберга). Якщо при довільному $\tau > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|x-a_{nk}| > \tau B_n} (x-a_{nk})^2 dF_{nk}(x) = 0, \quad (5)$$

тоді для послідовності нормованих сум $\frac{s_n - Ms_n}{\sqrt{Ds_n}}$ має місце збіжність послідовності їх функцій розподілу до нормальної функції розподілу:

$$P\left\{\frac{s_n - Ms_n}{\sqrt{Ds_n}} < x\right\} : P\left\{\frac{1}{B_n} \left(\sum_{k=1}^n \xi_{nk} - \sum_{k=1}^n a_{nk}\right) < x\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x). \quad (6)$$

Співвідношення (5) називається умовою Ліндеберга.

Величину B_n^2 запишемо так:

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} (x-a_{nk})^2 dF_{nk}(x) = \sum_{k=1}^n \int_{|x-a_{nk}| \leq \tau B_n} (x-a_{nk})^2 dF_{nk}(x) + \sum_{k=1}^n \int_{|x-a_{nk}| > \tau B_n} (x-a_{nk})^2 dF_{nk}(x). \quad (7)$$

Перший доданок при фіксованому $\tau > 0$ в правій частині (7) є внеском в дисперсію s_n абсолютних відхилень ξ_{nk} від $M\xi_{nk}$: $|\xi_{nk} - M\xi_{nk}| \leq \tau B_n$, а другий — більших від τB_n .

Окремим випадком теореми 1 є

Теорема 2 (теорема Леві-Ліндеберга). Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ послідовність

незалежних однаково розподілених випадкових величин з математичним сподіванням a і дисперсією $\sigma^2 < \infty$. Тоді послідовність функцій розподілу

нормованих сум $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (\xi_k - a)$ збіжна до нормальної функції розподілу. В застосуваннях часто використовують наступну теорему.

Теорема 3 (теорема Ляпунова). Нехай $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots, \xi_{nn}, \dots$ незалежні при

кожному n випадкові величини з скінченними дисперсіями, в сумі рівними B_n^2 .

Якщо виконується умова Ляпунова $\sum_{k=1}^n M|\xi_{nk} - M\xi_{nk}|^{2+\tau} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ для всякого $\tau > 0$, тоді для послідовностей функцій розподілу нормованих сум $\frac{s_n - Ms_n}{\sqrt{Ds_n}}$ має місце збіжність до нормальної функції розподілу.

Зауважимо, що хоч на практиці дослідник зустрічається в основному з скінченним числом випадкових величин $\xi_1, \dots, \xi_n$, суму яких досліджують, однак в математичних теоремах (див. теореми 1, 3) розглядають подвійну послідовність випадкових величин $\{\xi_{nk}\}$. Це пов'язано з тим, що вказані теореми є граничні. Яке б велике число n не було, на практиці воно завжди конкретне. Але при певних умовах практики вважають його великим і наближено використовують формули, які справедливі при $n \rightarrow \infty$.

Вправи, задачі та приклади

№ 1. Одержати інтегральну теорему Муавра-Лапласа як наслідок теореми 2.

№ 2 Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ — незалежні однаково розподілені випадкові

величини з $M\xi_1 = M\xi_2 = \dots = a$, $D\xi_1 = D\xi_2 = \dots = \sigma^2 < \infty$. Вказати, що для $s_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ виконується співвідношення

$$P\left\{\frac{s_n - A_n}{B_n} < x\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad A_n = an, B_n = \sigma\sqrt{n}.$$

№ 3. Випадкові незалежні величини $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ задані так:

$$\xi_k = \begin{cases} -k^2 & \text{з ймовірністю } \frac{1}{2}, \\ k^2 & \text{з ймовірністю } \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Показати, що при $\alpha > -\frac{1}{2}$ до них можна застосувати теорему Ляпунова.

№ 4. Довести, що при $n \rightarrow \infty$ $e^n \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} \rightarrow \frac{1}{2}$.

Вказівка. Застосувати теорему Ляпунова до суми випадкових величин, розподілених по закону Пуассона з параметром $a = 1$.

§ 8. Емпірична функція розподілу

Головна задача математичної статистики є одержання певних висновків із даних експерименту, до якого можна застосувати теоретико-ймовірнісний підхід. Такими задачами є оцінки параметрів розподілів, перевірка статистичних гіпотез.

Загальними поняттями статистики є вибірковий простір (генеральна сукупність), вибірка, розподіл вибірки (емпірична функція розподілу), вибіркова дисперсія.

Нехай ξ — випадкова величина, функція розподілу якої $F_{\xi}(x)$ нам невідома. Спостерігаючи за цією величиною, ми здійснюємо n раз експеримент, в якому дістаємо n значень випадкової величини $\xi : x_1, x_2, \dots, x_n$. Множина $X = \{x\}$ всіляких можливих результатів спостережень називається вибірковим простором. По суті це є вимірний простір $\{X, G\}$, так що для кожної множини $A \subset G$, можемо говорити про ймовірності $P\{x \in A\}$ того, що результат спостереження x міститься в цій множині A .

Вибіркою об'єму n для даної випадкової величини ξ називається набір $x_1, \dots, x_n$ незалежних спостережень цієї величини. Значення $x_1, \dots, x_n$ називаються вибірковими значеннями. Коли з цих значень ми можемо прийняти як значення n незалежних випадкових величин $\xi_1, \dots, \xi_n$, які мають той же розподіл $F_{\xi}(x)$, що й величина ξ . Функція $F_{\xi}(x)$ називається теоретичною функцією розподілу.

Виберемо із значень $x_1, \dots, x_n$ всі різні і розмістимо їх по порядку їх зростання. Одержаний таким чином набір значень $x_1^*, \dots, x_m^*$ називається варіаційним рядом.

Нехай ξ — дискретна випадкова величина. Емпіричним законом розподілу є таблиця частот, в якій дана частота, з якою спостерігалось те чи інше значення:

$$\begin{array}{cccc} x_1^* & x_2^* & \cdots & x_m^* \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_m \end{array},$$

де $\mu_i = \frac{k_i}{n}$ ($i = \overline{1, m}$) — частоти, n — число всіх дослідів, k_i — число дослідів, в яких наступала подія $\xi = a_i$.

Якщо ξ — неперервна випадкова величина, тоді її емпіричний закон розподілу задають з допомогою інтервальної таблиці частот, яка має вид:

$$\begin{array}{cccc} (c_1, c_2) & (c_2, c_3) & \cdots & (c_l, c_{l+1}) \\ \tilde{\mu}_1 & \tilde{\mu}_2 & \cdots & \tilde{\mu}_l \end{array},$$

де весь діапазон зміни величини ξ розбитий на інтервали (c_i, c_{i+1}) , число $\tilde{\mu}_i$ ($i = \overline{1, l}$) є частота попадання в i -й інтервал, тобто $\tilde{\mu}_i = \frac{\tilde{k}_i}{n}$, де $\tilde{k}_i$ — кількість чисел у вибірці $x_1, \dots, x_n$, які попадають на i -й інтервал. Інтервальна таблиця частот зображується графічно у виді гістограми, яка є ступінчатою лінією, основою кожної ступеньки є інтервали (c_i, c_{i+1}) ($i = \overline{1, l}$), а площею цієї ступеньки є $\tilde{\mu}_i$.

Емпіричною функцією розподілу є $F_n(x) = \frac{\nu}{n}$, де ν — число тих x_i^* , для яких $x_i^* < x$. Вибіркове середнє $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l x_i^*$, вибіркова дисперсія $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l (x_i^* - \bar{x})^2$. Зауважимо, що оскільки вибіркові характеристики є функціями від випадкових величин $x_1^*, \dots, x_l^*$, то вони самі є випадковими величинами. Емпірична функція розподілу і вибіркові характеристики є наближеннями відповідно до теоретичної функції розподілу — відповідних теоретичних числових характеристик при досить великих n .

Вправи, задачі та приклади

№ 1. Знайти емпіричну функцію по даному розподілу вибірки:

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

.

Побудувати гістограму. Знайти вибіркове середнє і вибірккову дисперсію.

Вказівка. Об'єм вибірки $n = 10 + 15 + 25 = 50$

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1, \\ 0,2 & \text{при } 1 < x \leq 4, \\ 0,5 & \text{при } 4 < x \leq 6, \\ 1 & \text{при } x > 6. \end{cases}$$

№ 2. Побудувати гістограму відносних частот по заданому розподілу вибірки:

Номер інтервалу	Частковий інтервал	Сума частот, варіант часткового інтервалу
1	(0,2)	20
2	(2,4)	30
3	(4,6)	50
		$n = \sum_{i=1}^3 n_i = 100$

§ 9. Оцінки невідомих параметрів

На практиці часто досліднику відомий закон розподілу ймовірностей із теоретичних міркувань, однак невідомі його деякі параметри, від яких він залежить. Наприклад, нормальний закон розподілу залежить від двох параметрів: математичне сподівання і дисперсія.

Нехай C — деякий параметр теоретичного розподілу ймовірностей $F_{\xi}(x, c)$. Числове значення цього параметра не задано. Як оцінити значення параметра C , виходячи із набору значень $x_1, \dots, x_n$ випадкової величини ξ , одержаного в результаті незалежних спостережень? Будь-яка оцінка для C є деяка функція $\gamma^{(n)} = \gamma(x_1, \dots, x_n)$, що залежить від спостережених значень $x_1, \dots, x_n$ і є випадковою величиною, яка приймає свої значення в результаті n дослідів над ξ .

Функцію $\gamma^{(n)}$ називають *статистикою*. До оцінки ставлять певні вимоги, а саме: оцінка повинна бути спроможною, незсуненою, ефективною.

Оцінка $\gamma^{(n)}$ параметру C називається *незсуненою*, якщо при будь-якому натуральному $M\gamma^{(n)} = C$. В протилежному випадку оцінка зсунена. Вимога незсуненості особливо важлива при малому числі дослідів.

Оцінка $\gamma^{(n)}$ параметру C називається *спроможною*, якщо при $n \rightarrow \infty$ $D\gamma^{(n)} \rightarrow 0$, тобто із зростанням числа дослідів n значення випадкової величини $\gamma^{(n)}$ групувалися тісніше навколо C .

Оцінка $\gamma_1^{(n)}$ називається *більш ефективною*, ніж оцінка $\gamma_2^{(n)}$, якщо

$$M(\gamma_1^{(n)} - C)^2 < M(\gamma_2^{(n)} - C)^2.$$

Розглянемо нижню грань $\inf M(\gamma^{(n)} - C)^2$ множини величин $M(\gamma^{(n)} - C)^2$ по всім можливим функціям $\gamma^{(n)}$, для яких таке математичне сподівання існує. Оцінка $\gamma^{(n)}$, для якої досягається нижня грань, називається ефективною оцінкою параметру C .

Нехай щільність розподілу випадкової величини $\xi \in f(x, c)$, де C невідомий параметр. Функцію
$$I(c) = M \left[\frac{\partial}{\partial c} \ln(\xi, c) \right]^2$$
 називають кількістю інформації по Фішеру.

Джерелом такої точки зору є нерівність Крамера-Рао:
$$M \left| \tilde{\gamma}^{(n)}(\xi) - C \right|^2 \geq \frac{1}{I(c)},$$
 де $\tilde{\gamma}^{(n)}(\xi)$ є оцінкою параметра $\gamma^{(n)}(c)$. Якщо нерівність переходить в рівність, тоді оцінка $\tilde{\gamma}^{(n)}(c)$ є оптимально незсуненою оцінкою в тому сенсі, що вона має мінімальну дисперсію серед всіх незміщених оцінок параметра $\gamma^{(n)}(c)$. Така оцінка ефективна.

Метод оцінки параметру C , який ґрунтується на такому інтуїтивному уявленні, що частіше в дослідах спостерігається те значення вектора ξ , при якому щільність $f(x, c)$ близька до максимального значення. Тому в ролі оцінки $\gamma^{(n)}$ параметра C приймають розв'язок рівняння:
$$f(\xi, \gamma^{(n)}) = \max_c f(\xi, c),$$
 якщо це рівняння має сенс і його розв'язок існує. Розв'язки рівняння називаються оцінками максимальної правдоподібності. На практиці метод максимуму правдоподібності часто приводить до складних систем рівнянь.

Оцінки невідомого параметра C , які ми розглядали вище, є точковими оцінками, які близькі до C , при великому числі дослідів. Якщо ж число дослідів невелике, тоді випадкова величина $\gamma^{(n)}$ може істотно відрізнятись від C . Тому розглядають задачі оцінки параметру C не одним числом, а цілим інтервалом (γ_1, γ_2) так, щоб $P \left\{ \gamma_1^{(n)} < C < \gamma_2^{(n)} \right\} \geq \alpha$, де α — дане число.

Число α називається надійною ймовірністю, а відповідний інтервал $(\gamma_1^{(n)}, \gamma_2^{(n)})$ — надійним інтервалом, $\gamma_1^{(n)}, \gamma_2^{(n)}$ — надійними межами для параметра C . Тут $\gamma_i^{(n)} = \gamma_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = \overline{1, 2}$.

Вправи, задачі та приклади

№ 1. За вибіркою об'єму n : $x_1, \dots, x_n$ методом моментів знайти точкову невідомого параметру закону Пуассона, по якому розподілена випадкова величина ξ .

Розв'язування. Метод моментів оцінки невідомого параметру заданого розподілу полягає в прирівнюванні теоретичних моментів відповідним вибірковим моментом того ж порядку.

Оскільки розподіл Пуассона визначається одним параметром, то для його відшукування прирівнюють один теоретичний момент одному емпіричному моменту того ж порядку.

Закон Пуассона $P_m(x_i) = \frac{a^{x_i} e^{-a}}{x_i!}$ виражається через m -число випробувань, що проведено в одному досліді, x_i — число появи події в i -му досліді. Математичне сподівання випадкової величини ξ розподіленої по закону Пуассона дорівнює параметру a цього розподілу, $\bar{x}$ — вибіркове середнє. Тоді маємо $a = \bar{x}$. Отже, точковою оцінкою параметру a розподілу Пуассона є вибіркове середнє: $a^* = \bar{x}$.

№ 2. Випадкова величина ξ — “число бракованих деталей в партії” розподілена по закону Пуассона. Заданий розподіл ξ при $n = 1000$ обстеженнях деталей:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	405	366	175	40	8	4	2

Знайти методом моментів точкову оцінку невідомого параметра розподілу Пуассона.

Вказівка. Див. задачу № 1:

$$a^* = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^k x_i \cdot n_i = \frac{1}{1000} (0 \cdot 405 + 1 \cdot 366 + 2 \cdot 175 + 3 \cdot 40 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 2) = \frac{1}{1000} \cdot 900 = 0,9.$$

№ 3. Знайти методом максимуму правдоподібності по вибірці $x_1, \dots, x_n$ точкову оцінку невідомого параметру a показникового розподілу, щільність якого $p(x) = ae^{-ax}$ ($x \geq 0$).

Розв'язування. Оскільки $p(x, a) = ae^{-ax}$, тоді функція правдоподібності

$$L = p(x_1, a) \cdot p(x_2, a) \cdots p(x_n, a) = \prod_{i=1}^n ae^{-ax_i} = a^n \cdot e^{-a \sum_{i=1}^n x_i};$$

$$\ln L = n \ln a - a \sum_{i=1}^n x_i; \quad \frac{d \ln L}{da} = \frac{n}{a} - \sum_{i=1}^n x_i.$$

Запишемо рівняння правдоподібності, для чого прирівняємо похідну нулю:

$$\frac{n}{a} - \sum_{i=1}^n x_i = 0. \quad \text{Розв'яжемо одержане рівняння відносно } a: \quad a = n / \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{\bar{x}}.$$

Друга похідна $\frac{d^2 \ln L}{da^2} = -\frac{n}{a^2}$ при $a = \frac{1}{\bar{x}}$ від'ємна. Отже, $a = \frac{1}{\bar{x}}$ є точкою максимуму функції правдоподібності L . Отже, в ролі оцінки найбільшої правдоподібності приймаємо величину, обернену вибіркового середньому $a^* = \frac{1}{\bar{x}}$.

§ 10. Перевірка статистичних гіпотез

1. Основні поняття. В математичній статистиці виникають задачі коли на основі вибірки висуваються і перевіряються деякі гіпотези (припущення) про властивості розподілу досліджуваної величини (генеральної сукупності).

Гіпотеза, в якій говориться про тип розподілу досліджуваної величини, про значення параметрів розподілу, про однорідність декількох вибірок називається статистичною.

Зміст гіпотези записують після двокрапки. Наприклад, гіпотеза H , яка стверджує, що невідома ймовірність p настання події не перевищує p_0 , записується так: $H : p \leq p_0$. Гіпотеза, що підлягає перевірці, називається основною, або нульовою. Разом із основною гіпотезою H_0 розглядають гіпотезу H_1 , що суперечить основній. Її називають конкуруючою або альтернативною.

Практичне застосування математичної статистики полягає у перевірці відповідності (узгодженості) статистичних даних висунутій гіпотезі. Перевірка статистичних гіпотез пов'язана із задачами побудови статистичних оцінок.

Для перевірки статистичної гіпотези вибирається деяка величина, яка залежить від результатів спостережень (отже, є статистикою). Статистика, яка вибирається для перевірки гіпотези, називається критерієм. Тому критерій

є випадкова величина, розподіл якої можна знайти за розподілом результатів спостережень. Із множини значень критерію виділяємо підмножину таких його значень, при яких основна гіпотеза відкидається. Цю підмножину називають критичною областю. Множина значень критерію, при яких основна гіпотеза приймається, називається областю прийняття гіпотези. Ці області для одновимірних випадкових величин є інтервалами. Точки, що відділяють критичну область і область прийняття гіпотези називають критичними точками. Якщо значення критерію, обчислене по вибірці ($K_{\text{сп}}$ — спостережуване значення критерію), попадає в критичну область, то гіпотеза відкидається. Якщо ж це значення попадає в область прийняття гіпотези, то гіпотеза приймається. Але це ще не означає, що гіпотеза правильна. Ми можемо зробити лише висновок, що статистичні дані їй не суперечать. Якщо гіпотеза відкидається, то вона також може бути як правильною так і не правильною. Таким чином, при перевірці гіпотези ми можемо допустити помилки двох родів. Помилка першого роду полягає в тому, що нульова гіпотеза відкидається, хоч вона є правильна. Помилка другого роду — прийняття неправильної гіпотези. Ймовірність α допустити помилку першого роду називається рівнем значущості критерію. Якщо β — ймовірність допустити помилку другого роду, то $1 - \beta$ називають потужністю критерію. Завжди бажано вибирати такі критерії, щоб ймовірності помилок першого і другого родів були як можна менші. Але це не завжди можна зробити.

Таким чином, можна запропонувати загальну схему побудови статистичного критерію перевірки гіпотези:

- а) визначити тип гіпотези H_0 , що висувається;
- б) запропонувати і обґрунтувати конкретний вид функції K від результатів спостережень, на основі значень якої приймаються рішення;
- в) вказати спосіб виділення із множини можливих значень критерію області відкидання основної гіпотези, щоб виконувалась вимога до величини ймовірності помилкового відхилення гіпотези (рівня значущості критерію α);
- г) на основі вибірових даних знаходять конкретне значення критерію $K_{\text{сп}}$ (спостережуване значення критерію). Якщо воно належить до області прийняття гіпотези, то гіпотеза H_0 приймається (не суперечить вибіровим даним). В

протилежному випадку гіпотеза відкидається (цей висновок супроводжується ймовірністю помилки, рівною α).

2. Перевірка гіпотези про ймовірності. Така задача виникає, коли необхідно перевірити, що доля p деякої ознаки в генеральній сукупності дорівнює p_0 . Розглянемо перевірку гіпотези $H_0 : p = p_0$ проти альтернативної гіпотези $H_1 : p \neq p_0$. За критерій виберемо відносну частоту W_n . При великих n випадкова величина $(W_n - p) / \sqrt{\frac{pq}{n}}$ наближено розподілена за стандартним нормальним законом. Тому за заданим рівнем значущості α знаходимо критичне значення критерію $Z_{\text{кр}}$ із рівняння (табл.. 2):

$$P\left\{|W_n - P| < Z_{\text{кр}} \sqrt{\frac{pq}{n}}\right\} = 2\Phi(Z_{\text{кр}}) = 1 - \alpha,$$

де $\Phi(x)$ — функція Лапласа. За результатами спостережень знаходимо W_n . Якщо

$|W_n - P| < Z_{\text{кр}} \sqrt{\frac{pq}{n}}$, то гіпотеза приймається. В протилежному випадку гіпотеза відкидається.

3. Перевірка гіпотез про середні. Розглядають два типи гіпотез відносно середніх: порівняння середньої із стандартом, або порівняння середніх двох сукупностей. Перевірка гіпотез першого типу еквівалентна побудові довірчих інтервалів. Така задача розглядалась у попередньому параграфі. Перевірка гіпотез про рівність середніх двох сукупностей виникає, якщо необхідно порівняти математичні сподівання.

Нехай величини X і Y мають нормальний розподіл із відомими дисперсіями $D(X)$ і $D(Y)$. Необхідно перевірити гіпотезу $H_0 : M(x) = M(y)$. Вибіркова середня є оцінкою для математичного сподівання, тому порівнювати математичні сподівання будемо порівнянням вибірових середніх. Критерій перевірки гіпотези виберемо у вигляді:

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}},$$

де n і m — об'єми вибірок із генеральних сукупностей X і Y .

Випадкова величина Z має нормальний розподіл. При справедливості нульової гіпотези $M(Z) = 0$, $D(Z) = 1$. Будемо перевіряти нульову гіпотезу при конкуруючій $H_1 : M(X) \neq M(Y)$. По рівні значущості α можна знайти критичні точки із рівностей $P\{Z < Z_1\} = \frac{\alpha}{2}$, $P\{Z < Z_2\} = \frac{\alpha}{2}$. Випадкова величина Z має

стандартний нормальний розподіл, отже критичні точки будуть симетричні відносно нуля. Тому можна обмежитись знаходженням тільки правої критичної точки $Z_{кр}$, яку можна знайти із рівняння: $P\{|Z| < Z_{кр}\} = 2\Phi(Z_{кр}) = 1 - \alpha$. Тут $\Phi(x)$ — функція Лапласа. До таблиці 2 значень функції Лапласа знаходимо $Z_{кр}$. По вибіркових середніх знаходимо спостережуване значення критерію $Z_{сп}$. Якщо $|Z_{сп}| < Z_{кр}$, то гіпотеза про рівність математичних сподівань приймається, в протилежному випадку відкидається.

Приклад розв'язування задач.

Із двох генеральних сукупностей X і Y , що мають нормальні розподіли із дисперсіями $D(X) = 120$ і $D(Y) = 100$ знайдені вибірки об'ємів $n = 30$ і $m = 20$. При рівні значущості $\alpha = 0,01$ перевірити гіпотезу про рівність математичних сподівань $H_0 : M(X) = M(Y)$ при конкуруючій гіпотезі $H_1 : M(X) \neq M(Y)$, якщо $\bar{X} = 15,9$, $\bar{Y} = 17,7$.

Розв'язання. Знаходимо спостережуване значення критерію

$$Z_{сп} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n} + \frac{D(Y)}{m}}} = \frac{15,9 - 17,7}{\sqrt{\frac{120}{30} + \frac{100}{20}}} = -0,6$$

За рівнем значущості $\alpha = 0,01$ із рівняння $2\Phi(Z_{кр}) = 1 - \alpha$ знаходимо критичну точку $Z_{кр}$: $2\Phi(Z_{кр}) = 1 - 0,01 = 0,99$, $\Phi(Z_{кр}) = 0,495$. За таблицею 2 значень функції Лапласа знаходимо $Z_{кр} = 2,57$. $|Z_{сп}| < Z_{кр}$. Тому гіпотеза про рівність математичних сподівань приймається.

Нехай випадкові величини X і Y розподілені нормально але дисперсії їх невідомі. Тоді для перевірки гіпотези $H_0 : M(X) = M(Y)$ при конкуруючій $H_1 : M(X) \neq M(Y)$ використовуються критерій

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}} \cdot \sqrt{\frac{m \cdot n(m+n-2)}{m+n}},$$

де S_x^2, S_y^2 — виправлені дисперсії. Величина T при справедливості нульової гіпотези має розподіл Стюдента з $K = m + n - 2$ ступенями вільності. Для побудови критичної області по рівні значущості α знаходимо критичну точку $T_{\text{кр}}$ із рівняння $P\{|T| > T_{\text{кр}}\} = \alpha$. $T_{\text{кр}}$ можна знайти за таблицею 3. Якщо $|T_{\text{сп}}| < T_{\text{кр}}$, то гіпотеза приймається, в протилежному випадку гіпотеза відкидається.

4. Перевірка гіпотез про рівність дисперсій двох нормальних розподілів.

Дана задача виникає, коли необхідно перевірити стабільність деякого технологічного процесу, при вивченні однорідності двох сукупностей відносно деякої ознаки, при перевірці гіпотези про рівність середніх. Нехай задано дві сукупності X і Y , що мають нормальний розподіл із дисперсіями $D(X)$ і $D(Y)$. Оскільки дисперсії невідомі, то гіпотезу $H_0 : D(X) = D(Y)$ будемо перевіряти по виправлених дисперсіях S_1^2 і S_2^2 : якщо відношення $S_1^2 : S_2^2$ близьке до одиниці, то немає підстав відкидати гіпотезу; якщо воно значно відрізняється від одиниці, то гіпотезу необхідно відкинути.

Критерієм перевірки гіпотези H_0 вибираємо відношення більшої виправленої дисперсії до меншої: $F = \frac{S_6^2}{S_m^2}$. Величина F має розподіл Фішера-Снедекора з $K_1 = n_1 - 1$ і $K_2 = n_2 - 1$ ступенями вільності, де n_1 — об'єм вибірки, за якою знайдена більша виправлена дисперсія, n_2 — об'єм вибірки, за якою знайдена менша виправлена дисперсія. Нехай більша дисперсія обчислена за вибіркою із генеральної сукупності X . Тоді конкуруюча гіпотеза буде мати вигляд

$H_1 : D(X) > D(Y)$. Для знаходження критичної області (критичної точки) при заданому рівні значущості α підберемо $F_{кр}$ так, щоб виконувалась рівність $P\{F > F_{кр}\} = \alpha$. Критичну точку $F_{кр}$ знаходять за таблицею критичних точок розподілу Фішера-Снедекора (таблиця 5). По вибірках знаходимо $F_{сп}$, поділивши більшу виправлену дисперсію на меншу. Якщо $F_{сп}$ попадає в критичну область, тобто $F_{сп} > F_{кр}$, то гіпотезу відкидають, якщо ж $F_{сп} < F_{кр}$, то гіпотеза приймається.

Приклад розв'язування задач.

За двома незалежними вибірками об'ємами $n_1 = 10$ і $n_2 = 16$, взятих із генеральних сукупностей X і Y , знайдені виправлені дисперсії $S_x^2 = 3,6$ і $S_y^2 = 2,4$.

При рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити гіпотезу $H_0 : D(X) = D(Y)$ при конкуруючій $H_1 : D(X) > D(Y)$.

Розв'язання. Знаходимо відношення більшої дисперсії до меншої:

$$F_{сп} = \frac{3,6}{2,4} = 1,5.$$

За таблицею 5 критичних точок розподілу Фішера-Снедекора при рівні значущості $\alpha = 0,05$ і числу ступенів вільності $K_1 = 10 - 1 = 9$ і $K_2 = 16 - 1 = 15$ знаходимо $F_{кр} = 2,59$. Гіпотеза про рівність дисперсій приймається, бо $F_{сп} < F_{кр}$.

5. Перевірка гіпотез про вигляд розподілу. *Критерії перевірки гіпотез про вигляд розподілу* (про узгодженість емпіричного розподілу з теоретичним) називають *критеріями згоди*. На основі теоретичних міркувань ми можемо висунути гіпотезу, що досліджувана випадкова величина має розподіл $F(x)$. Для перевірки таких гіпотез найбільш широко використовується критерій згоди Пірона (критерій χ^2). Критерій χ^2 (хікватрат) полягає у порівнянні теоретичних і емпіричних частот. Нехай множина всіх значень досліджуваної величини розбита на s інтервалів. Позначимо через n_i частоту i -го інтервалу, а через n_i' — теоретичну частоту: $n_i' = n \cdot p_i$, де p_i дорівнює ймовірності того, що досліджувана випадкова величина прийме значення з i -го інтервалу. Ймовірності p_i можуть бути обчислені за $F(x)$. Емпіричні частоти для різних вибірок будуть відрізнятись, тому їх можна розглядати як випадкові величини. Розглянемо статистику

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^s \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$$

Незалежно від вигляду розподілу $F(x)$ дана величина при зростанні n швидко наближається до розподілу χ^2 з $K = s - 1 - r$ ступенями вільності, де r — число параметрів генерального розподілу, що оцінюються за вибіркою.

Чим менша величина χ^2 , тим менше буде відрізнятися емпіричний розподіл від теоретичного $F(x)$. Виберемо рівень значущості α близький до нуля і знайдемо критичне значення критерію χ^2 за формулою $P\{\chi^2 > \chi_{\text{кр}}^2\} = \alpha$. За заданим рівнем значущості α і числу ступенів вільності $K = s - 1 - r$, за таблицею розподілу χ^2 , находимо критичну точку критерію $\chi_{\text{кр}}^2$. На основі емпіричних і теоретичних частот знаходимо спостережуване значення критерію $\chi_{\text{сп}}^2$. Якщо $\chi_{\text{сп}}^2 < \chi_{\text{кр}}^2$, то гіпотеза приймається, в протилежному випадку — відкидається.

Даний критерій може бути застосований і для перевірки гіпотези про нормальний розподіл. Для нормального розподілу по вибірці оцінюється два параметри a і σ , тому число ступенів вільності $K = s - 3$.

Приклад розв'язування задач.

При рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності, якщо відомі емпіричні n_i і теоретичні n'_i частоти:

n_i	6	12	16	40	13	8	5
n'_i	4	11	15	43	15	6	6.

Розв'язання. Застосуємо критерій χ^2 Пірсона. Знайдемо спостережуване значення критерію

$$\chi_{\text{сп}}^2 = \sum_{i=1}^s \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i} = \frac{(6-4)^2}{4} + \frac{(12-11)^2}{11} + \frac{(16-15)^2}{15} + \frac{(40-43)^2}{43} + \frac{(13-15)^2}{15} + \frac{(8-6)^2}{6} + \frac{(5-6)^2}{6} \approx 2,5.$$

За рівнем значущості $\alpha = 0,05$ і числі ступенів вільності $K = s - 1 - r = 7 - 1 - 2 = 4$ знаходимо з таблиці $\chi_{\text{кр}}^2 = 9,5$. Оскільки $\chi_{\text{сп}}^2 < \chi_{\text{кр}}^2$, то немає підстав відкидати нульову гіпотезу. Отже, результати спостережень узгоджуються з

гіпотезою про нормальний розподіл.

Особливо простим у використанні є критерій Колмогорова перевірки гіпотези про вигляд закону розподілу. За критерій вибирається величина

$$D_n = \sqrt{n} \cdot \max_x |F_n^*(x) - F(x)|$$

Колмогоров показав, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{D_n > \lambda\} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} e^{-m^2 \lambda^2} = K(\lambda)$$

Тобто даний критерій оснований на порівнянні емпіричної і теоретичної функції розподілу. За результатами спостережень і функцією $F(x)$ можна знайти спостережуване значення критерію D_n , а за рівнем значущості α із рівняння $K(\lambda) = \alpha$ знаходимо λ_α . Якщо $D_n < \lambda_\alpha$, то гіпотеза приймається.

§ 11. Елементи теорії кореляції і регресії

1. Основні поняття. В економіці часто виникає потреба у встановленні взаємозв'язку між різними показниками (ознаками, випадковими величинами). Наприклад, залежність обсягу виробництва від розміру основних фондів, продуктивності праці від рівня енергооснащеності. Для таких зв'язків характерно, що кожному значенню однієї величини відповідає деяка множина значень іншої.

Залежність, яка характеризується тим, що зміна однієї величини супроводжується зміною середнього значення іншої, називається кореляцією. Задача кореляції полягає у виявленні на основі спостережень вигляду кореляційної залежності і встановленні сили кореляційної залежності.

Нехай досліджується залежність між величинами X і Y . Тоді вибірка об'єму n представляє собою сукупність n пар чисел: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. Допоміжними засобами аналізу вибірових даних за двома ознаками є кореляційне

поле (одержується нанесенням на координатну площину вибірових точок (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$) і кореляційна таблиця. За характером розміщення точок можна зробити попередній висновок про форму залежності між величинами. Для числової обробки результати групують і представляють у вигляді кореляційної таблиці. Для побудови кореляційної таблиці різні значення $x_1, x_2, \dots, x_m$ величини X (або інтервали групування) записують в перший рядок, а значення $y_1, y_2, \dots, y_k$ величини Y (або відповідні інтервали групування) записують у перший стовпчик. В клітці на перетині i -го стовпчика і j -го рядка записують частоту n_{ij} пари (x_i, y_j) (n_{ij} — число таких пар у всій вибірці). В останньому рядочку записують частоти n_{x_i} , а в останньому стовпчику частоти n_{y_j} .

Y	X						
	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_m	n_{y_j}
y_1	n_{11}	n_{21}	$\dots$	n_{i1}	$\dots$	n_{m1}	n_{y_1}
y_2	n_{12}	n_{22}	$\dots$	n_{i2}	$\dots$	n_{m2}	n_{y_2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_i	n_{1j}	n_{2j}	$\dots$	n_{ij}	$\dots$	n_{mj}	n_{y_i}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_k	n_{1k}	n_{2k}	$\dots$	n_{ik}	$\dots$	n_{mk}	n_{y_k}
n_{x_i}	n_{x_1}	n_{x_2}	$\dots$	n_{x_i}	$\dots$	n_{x_m}	n

Тут

$$n_{x_i} = \sum_{j=1}^k n_{ij}, \quad n_{y_j} = \sum_{i=1}^m n_{ij}, \quad \sum_{i=1}^m n_{x_i} = \sum_{j=1}^k n_{y_j} = n.$$

Наведемо приклад кореляційної таблиці, що характеризує взаємозв'язок собівартості продукції і продуктивності праці:

Собівартість одиниці продукції, грн. (Y)	Місячна продуктивність праці, тис. шт. (X)					n_y
	10–12	12–14	14–16	16–18	18–20	
6–8			1	1	2	4
8–10			3	4	1	8
10–12		3	7	4		14
12–14	2	4	5			11
14–16	2	1				3
n_x	4	8	16	9	3	$n = 40$

Для обробки даних необхідно інтервали замінити їх серединами, в результаті чого одержимо таку кореляційну таблицю:

У	Х					
	11	13	15	17	19	n_y
7			1	1	2	4
9			3	4	1	8
11		3	7	4		14
13	2	4	5			11
15	2	1				3
n_x	4	8	16	9	3	$n = 40$

Із кореляційної таблиці видно, що при зростанні продуктивності праці собівартість має тенденцію до зменшення.

При вивченні вигляду залежності результати експериментів інтерпретуються по відношенню до змінної X по різному: значення величини Y знаходять при фіксованих значеннях величини X ; результати спостережень (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, n$) є вибіркою із двовимірної сукупності. Методи дослідження вигляду залежності однакові в обох випадках.

Закон зміни середнього значення однієї величини від деякої іншої або від декількох величин називають регресією. Зв'язок між величинами представляють у вигляді рівняння регресії.

Нехай $\bar{Y}_x$ — середнє арифметичне тих значень величини Y , які спостерігаються разом з $X = x$ ($\bar{Y}_x$ називають умовною середньою Y по X). Тоді $\bar{Y}_x$ змінюється із зміною x , тобто є функцією від x , яку позначимо $f(x)$. Функція $f(x)$ називається вибірковою регресією Y по X , а рівняння $\bar{Y}_x = f(x)$ називають вибірковим рівнянням регресії Y по X . Графік функції $f(x)$ називають вибірковою лінією регресії Y по X . Наближеним графічним зображенням лінії регресії є емпірична ламана регресії Y

по X — це ламана, вершини якої лежить в точках $(x_i, \bar{Y}_{x_i})$. Наприклад, по заданій кореляційній таблиці знаходимо:

$$\begin{aligned}\bar{Y}_{11} &= \frac{13 \cdot 2 + 15 \cdot 2}{4} = 14; & \bar{Y}_{13} &= \frac{11 \cdot 3 + 13 \cdot 4 + 15 \cdot 1}{8} = 12,5; \\ \bar{Y}_{15} &= \frac{7 \cdot 1 + 9 \cdot 3 + 11 \cdot 7 + 13 \cdot 5}{16} = 11; & \bar{Y}_{17} &= \frac{7 \cdot 1 + 9 \cdot 4 + 11 \cdot 4}{9} = 9,7; & \bar{Y}_{19} &= \frac{7 \cdot 2 + 9 \cdot 1}{3} = 7,7.\end{aligned}$$

Емпірична ламана регресії Y по X близька до прямої, тому можна прийняти

гіпотезу про те, що $f(x)$ є лінійною функцією. При зростанні об'єму вибірки емпірична ламана регресії наближається до деякої згладженої лінії — лінії регресії.

практиці вигляд регресії $f(x)$ нам не відомий, його можна підбирати по вигляду емпіричної ламаної регресії. При цьому функція буде залежати від деяких параметрів, які необхідно оцінити по вибіркових даних. Аналогічно розглядається регресія X по Y .

Встановлення сили кореляційного зв'язку полягає у оцінці розсіювання значень величини Y біля лінії регресії. Найуживанішими характеристиками кореляції є вибірковий коефіцієнт кореляції і вибіркове відношення.

2. Вибірковий коефіцієнт кореляції визначається за формулою

$$r_B = \frac{\frac{1}{h} \sum_{i,j} n_{ij} (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{\sigma_x \cdot \sigma_y},$$

де $\bar{x}$, σ_x , $\bar{y}$, σ_y — вибірка середня і вибіркове середнє квадратичне відхилення відповідно величин X і Y , і є оцінкою для коефіцієнта кореляції між випадковими величинами X і Y .

Відзначимо, що $|r_B| \leq 1$. Значення $r_B = -1$ і $r_B = 1$ свідчать про те, що між величинами X і Y існує повна кореляція, тобто між величинами X і Y існує лінійна функціональна залежність. Тому коефіцієнт кореляції є мірою лінійного зв'язку між величинами. Якщо $|r_B|$ близький до одиниці, то це підтверджує

наявність лінійного зв'язку між величинами, $r_B = 0$ вказує на відсутність лінійного зв'язку, але не заперечує можливості існування іншого вигляду зв'язку між величинами.

При обчисленні коефіцієнта кореляції корисно пам'ятати, що його величина не змінюється при переході до умовних варіант $u = \frac{X - c_1}{h_1}$ і $v = \frac{Y - c_2}{h_2}$, де c_1, c_2 — довільні дійсні числа, а $h_1 \neq 0$ і $h_2 \neq 0$:

$$r_B = \frac{\sum u_{uv} \cdot u \cdot v - n \cdot \bar{u} \cdot \bar{v}}{n \cdot \sigma_u \cdot \sigma_v},$$

де $\bar{u} = \frac{1}{n} \sum n_u \cdot u$; $\bar{v} = \frac{1}{n} \sum n_v \cdot v$; $\sigma_u = \sqrt{\bar{u}^2 - (\bar{u})^2}$; $\sigma_v = \sqrt{\bar{v}^2 - (\bar{v})^2}$; $\bar{u}^2 = \frac{1}{n} \sum n_u \cdot u^2$; $\bar{v}^2 = \frac{1}{n} \sum n_v \cdot v^2$.

Для прикладу знайдемо коефіцієнт кореляції по наведеній раніше кореляційній таблиці. Виберемо $c_1 = 15$, $c_2 = 11$, $h_1 = h_2 = 2$ і складемо кореляційну таблицю в умовних варіантах. Знайдемо $\bar{u}$; $\bar{v}$; $\bar{u}^2$; $\bar{v}^2$; σ_u ; σ_v :

$$\bar{u} = \frac{1}{n} \sum n_u \cdot u = \frac{1}{40} (-2 \cdot 4 + (-1) \cdot 8 + 0 \cdot 16 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot 3) = -0,025;$$

$$\bar{v} = \frac{1}{n} \sum n_v \cdot v = \frac{1}{40} (-2 \cdot 4 + (-1) \cdot 8 + 1 \cdot 11 + 2 \cdot 3) = 0,025;$$

$$\bar{u}^2 = \frac{1}{n} \sum n_u \cdot u^2 = \frac{1}{40} \left((-2)^2 \cdot 4 + (-1)^2 \cdot 8 + 1^2 \cdot 9 + 2^2 \cdot 3 \right) = 1,125;$$

$$\bar{v}^2 = \frac{1}{n} \sum n_v \cdot v^2 = \frac{1}{40} \left((-2)^2 \cdot 4 + (-1)^2 \cdot 8 + 1^2 \cdot 11 + 2^2 \cdot 3 \right) = 1,175;$$

$$\sigma_u = \sqrt{\bar{u}^2 - (\bar{u})^2} = \sqrt{1,125 - (-0,025)^2} \approx 1,06; \quad \sigma_v = \sqrt{\bar{v}^2 - (\bar{v})^2} = \sqrt{1,175 - (0,025)^2} \approx 1,08.$$

V	U					
	-2	-1	0	1	2	n_v
-2			1	1	2	4
-1			3	4	1	8
0		3	7	4		14
1	2	4	5			11
2	2	1				3
n_u	4	8	16	9	3	$n = 40$

Знайдемо тепер $\sum u_{uv} \cdot u \cdot v$. Для цього перемножуємо значення u і v на відповідні їм частоти n_{uv} (доданки, в які входять множники рівні нулю, записувати не будемо):

$$\sum u_{uv} \cdot u \cdot v = 1 \cdot 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot 2 = -34.$$

$$\text{Отже, } r_b = \frac{-34 - 40 \cdot (-0,025) \cdot 0,025}{40 \cdot 1,06 \cdot 1,08} \approx -0,74.$$

Для перевірки гіпотези значущості зв'язку використовують статистику $t = \frac{r \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$, яка у випадку нормально розподіленої вибірки, має розподіл Стюдента. Щоб перевірити значущість зв'язку ми перевіряємо, чи суттєво r_b відрізняється від нуля, тобто перевіряємо гіпотезу $H_0 : r = 0$. При цьому величина вибіркового коефіцієнта кореляції вважається істотно відмінною від нуля, якщо виконується нерівність $r_b > \left(1 + \frac{n-2}{t_\alpha^2}\right)^{-1}$, де t_α є критична точка розподілу Стюдента з $n - 2$ ступенями вільності, що відповідає рівню значущості α .

3. Вибіркове кореляційне відношення U до X знаходиться за формулою

$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\bar{y}_x}}{\sigma_y}$, де $\sigma_{\bar{y}_x}^2 = \frac{1}{n} \sum n_x (\bar{y}_x - \bar{y})^2$ — між групова дисперсія, що характеризує розсіювання умовних середніх $\bar{y}_x$ відносно загальної середньої $\bar{y}$.

Вибіркове кореляційне відношення використовується для характеристики

довільного зв'язку між величинами і задовольняє нерівність $0 \leq \eta_{yx} \leq 1$. Якщо $\eta_{yx} = 0$, то ознака Y кореляційною залежністю з ознакою X не зв'язана. Якщо $\eta_{yx} = 1$, то ознака Y зв'язана з X точною функціональною залежністю. Відзначимо, що $\eta_{yx} \geq |r_{yx}|$.

4. Вибіркові рівняння прямої лінії регресії. Знаходження рівняння регресії, вигляд функції регресії якої вважається відомим, означає перш за все визначення параметрів, від яких залежить регресія. Ці параметри знаходять частіше методом найменших квадратів, згідно якого за статистичні оцінки

підбирають такі значення, які перетворюють в мінімум вираз $\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 = F$, тобто, щоб сума квадратів відхилень фактичних значень величини Y від значень знайдених за рівнянням регресії $\bar{y}_x = f(x)$ була найменшою. Якщо продиференціюємо F по параметрах і прирівняємо частинні похідні до нуля, то одержимо систему нормальних рівнянь, розв'язок якої дає оцінки невідомих параметрів за методом найменших квадратів.

Нехай рівняння регресії є лінійне: $\bar{y}_x = \rho x + b$. Підберемо ρ і b так, щоб $\sum_{i=1}^n (\rho x_i + b - y_i)^2 = F(\rho, b)$ була мінімальною. Прирівняємо до нуля частинні похідні по параметрах ρ і b . Тоді одержимо систему нормальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \rho} = 2 \sum_{i=1}^n (\rho x_i + b - y_i) \cdot x_i = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (\rho x_i + b - y_i) = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши систему знаходимо $\rho = r_b \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$, $b = \bar{y} - \rho \cdot \bar{x}$.

Коефіцієнт ρ називають коефіцієнтом регресії Y по X і позначають ρ_{yx} .

Рівняння прямої лінії регресії можна записати тоді у вигляді

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_b \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}).$$

Знайдемо рівняння прямої лінії регресії Y по X по заданій вище кореляційній таблиці. Нам лишилось знайти $\bar{x}$, $\bar{y}$, σ_x , σ_y . Використаємо формули $\bar{x} = h_1 \bar{u} + c_1$, $\bar{y} = h_2 \bar{v} + c_2$, $\sigma_x = h_1 \sigma_u$, $\sigma_y = h_2 \sigma_v$. Тоді

$$\bar{x} = 2 \cdot (-0,025) + 15 = 14,95; \quad \bar{y} = 2 \cdot 0,025 + 11 = 11,05;$$

$$\sigma_x = 2 \cdot 1,06 = 2,12; \quad \sigma_y = 2 \cdot 1,08 = 2,16.$$

Підставимо знайдені значення і $r_b = -0,74$ у рівняння прямої регресії, тоді одержуємо

$$\bar{y}_x - 11,05 = -0,74 \cdot \frac{2,16}{2,12} (x - 14,95), \text{ або } \bar{y}_x = -0,75x + 22,26.$$

5. Нелінійна регресія. Поняття про множинну кореляцію. Побудувавши емпіричну ламану регресії, можна зробити висновок, що регресія не буде лінійною. Найпростішими випадками нелінійної регресії Y по X є параболічна

$$\bar{y}_x = ax^2 + bx + c, \text{ гіперболічна } \bar{y}_x = \frac{a}{x} + b.$$

Кореляційна залежність між трьома і більше ознаками називається множинною. Нехай ознака Z залежить від ознак X і Y . Залежність $\bar{z}_{xy} = f(x, y)$ є поверхнею регресії. Для аналізу зв'язку між величинами використовують множинні і частинні коефіцієнти кореляції.

Таблиці

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Таблиця 1. Значення функції

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3969	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

x	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0
$\varphi(x)$	0,00013	0,0000589	0,0000249	0,0000101	0,0000040	0,0000015

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Таблиця 2. Значення функції Лапласа

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41308	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	49865	49869	49874	49878	49882	49886	49889	49893	49897	49900
3,1	49903	49906	49910	49913	49916	49918	49921	49924	49926	49929
3,2	49931	49934	49936	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49950
3,3	49952	49953	49955	49957	49958	49960	49961	49962	49964	49965
3,4	49966	49968	49969	49970	49971	49972	49973	49974	49975	49976
3,5	49977	49978	49978	49979	49980	49981	49981	49982	49983	49983
3,6	49984	49985	49985	49986	49986	49987	49987	49988	49988	49989
3,7	49989	49990	49990	49990	49991	49991	49992	49992	49992	49992
3,8	49993	49993	49993	49994	49994	49994	49994	49995	49995	49995
3,9	49995	49995	49996	49996	49996	49996	49996	49996	49997	49997

x	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0
$\Phi_0(x)$	0,4999683	0,4999867	0,4999946	0,4999979	0,4999992	0,4999997

Таблиця 3. Квантилі хі-квадрат розподілу $\chi^2_{p,k}$

k	P										
	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,5	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995
1	0,04	0,03	0,001	0,004	0,016	0,46	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	1,39	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	2,37	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	3,36	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	4,35	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	5,35	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	6,35	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	7,34	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	8,34	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	9,34	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	10,3	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	11,3	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	12,3	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	13,3	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	14,3	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	15,3	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	16,3	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	17,3	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19	6,84	7,63	8,91	10,4	11,7	18,3	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	19,3	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	20,3	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	21,3	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	22,3	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	23,3	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	24,3	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	25,3	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1	26,3	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	27,3	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8	28,3	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	29,3	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
35	17,2	18,5	20,6	22,5	24,8	34,3	46,1	49,8	53,2	57,3	60,3
40	20,7	22,2	24,4	26,5	29,1	39,3	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
45	24,3	25,9	28,4	30,6	33,4	44,3	57,5	61,7	65,4	70,0	73,2
50	28,0	29,7	32,4	34,8	37,7	49,3	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
75	47,2	49,5	52,9	56,1	59,8	74,3	91,1	96,2	100,8	106,4	110,3
100	67,3	70,1	74,2	77,9	82,4	99,3	118,5	124,3	129,6	135,6	140,2

Таблиця 4. Квантилі розподілу Стюдента $t_{y,k}$.

k	P						
	0,750	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995	0,999
1	1,000	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	318
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,3
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,2
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160
∞	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090

Таблиця 5. Квантилі розподілу Фішера-Снедекора $F_p(k_1, k_2)$

(k_1 — число ступенів вільності більшої дисперсії, k_2 — число ступенів вільності меншої дисперсії)

$$p = 0,95$$

k_2	k_1								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38
3	16,13	9,55	9,78	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77
6	5,99	5,14	4,75	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02
11	4,85	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,93	2,90
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46
19	4,30	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,37	2,30
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88

$(p = 0,95)$

k_2	k_1								
	10	12	15	20	24	30	40	60	120
1	241,9	243,9	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3
2	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49
3	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55
4	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66
5	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40
6	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70
7	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27
8	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97
9	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75
10	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58
11	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45
12	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34
13	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25
14	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18
15	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11
16	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06
17	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01
18	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97
19	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93
20	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90
21	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87
22	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84
23	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81
24	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79
25	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77
26	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75
27	2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73
28	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71
29	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70
30	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68
40	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58
60	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47
120	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35
∞	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22

$$p = 0,99$$

k_2	k_1								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4052	4999,5	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07
40	7,31	5,18	4,31	3,53	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41

$(p = 0,99)$

k_2	k_1								
	10	12	15	20	24	30	40	60	120
1	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339
2	99,40	99,42	99,43	99,45	99,46	99,47	99,47	99,48	99,49
3	27,23	27,05	26,87	26,69	26,60	26,50	26,41	26,32	26,22
4	14,55	14,37	14,20	14,02	13,93	13,84	13,75	13,65	13,56
5	10,05	9,89	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,20	9,11
6	7,87	7,72	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,06	6,97
7	6,62	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,74
8	5,81	5,67	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,03	4,95
9	5,26	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,40
10	4,85	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4,00
11	4,54	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,78	3,69
12	4,30	4,16	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,45
13	4,10	3,96	3,82	3,66	3,59	3,51	3,43	3,34	3,25
14	3,94	3,80	3,66	3,51	3,43	3,35	3,27	3,18	3,09
15	3,80	3,67	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96
16	3,69	3,55	3,41	3,26	3,18	3,10	3,02	2,93	2,84
17	3,59	3,46	3,31	3,16	3,08	3,00	2,92	2,83	2,75
18	3,51	3,37	3,23	3,08	3,00	2,92	2,84	2,75	2,66
19	3,43	3,30	3,15	3,00	2,92	2,84	2,76	2,67	2,58
20	3,37	3,23	3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,61	2,52
21	3,31	3,17	3,03	2,88	2,80	2,72	2,64	2,55	2,46
22	3,26	3,12	2,98	2,83	2,75	2,67	2,58	2,50	2,40
23	3,21	3,07	2,93	2,78	2,70	2,62	2,54	2,45	2,35
24	3,17	3,03	2,89	2,74	2,66	2,58	2,49	2,40	2,31
25	3,13	2,99	2,85	2,70	2,62	2,54	2,45	2,36	2,27
26	3,09	2,96	2,81	2,66	2,58	2,50	2,42	2,33	2,23
27	3,06	2,93	2,78	2,63	2,55	2,47	2,38	2,29	2,20
28	3,03	2,90	2,75	2,60	2,52	2,44	2,35	2,26	2,17
29	3,00	2,87	2,73	2,57	2,49	2,41	2,33	2,23	2,14
30	2,98	2,84	2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,21	2,11
40	2,80	2,66	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,02	1,92
60	2,63	2,50	2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,84	1,73
120	2,47	2,34	2,19	2,03	1,95	1,86	1,76	1,66	1,53
∞	2,32	2,18	2,04	1,88	1,79	1,70	1,59	1,47	1,32

ЛІТЕРАТУРА

1. Васильків І.М. В Основи теорії ймовірностей і математичної статистики : навч. посібник. – Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2020. – 184 с. ISBN 978–617–10–0354–5
2. Теорія ймовірностей та математична статистика (конспект лекцій + тести) : навчальний посібник. Вид. 2-ге, допов. / Я.Т.Соловко, П.Г.Остафійчук, О.З.Гарпуль, С.А.Войтик. – Івано-Франківськ: Репозитарій / ЗВО «Університет Короля Данила», 2021. – 150 с.
3. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. посібник. у 2 ч. Ч. I. Теорія ймовірностей / В. І.Жлуктенко , С. І. Наконечний – К.: КНЕУ, 2019. — 304 с
4. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навчальний посібник / М. К.Бугір – Тернопіль, «Підручники й посібники», 2020 р. — 404 с.
5. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навчальний посібник / Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К. – Київ: Центр навчальної літератури, 2019. — 424 с.
6. Теорія ймовірностей і математична статистика: Посібник з розв'язування задач / Г.І. Кармелюк – Київ: Центр навчальної літератури, 2019. — 576 с.

Теорія ймовірностей і математична статистика. Курс лекцій «Теорія ймовірностей і математична статистика» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання, розроблена для підготовки бакалаврів з галузі знань «07 Управління та адміністрування» спеціальностей « 071 Облік і оподаткування» та «072 Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок (Фінансова безпека)

/ Розробник: Дзямко В.Й. – Берегове: ЗУІ ім. Ф.Ракоці ІІ, 2024. 82 с. (українською мовою).

Навчально-методичне видання розроблене на основі Освітньої програми підготовки бакалаврів з галузі знань «07 Управління та адміністрування» спеціальностей « 071 Облік і оподаткування» та «072 Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок (Фінансова безпека)», а також діючого законодавства в галузі вищої освіти з метою забезпечення здобувачів освіти денної та заочної форм навчання Закарпатського угорського інституту ім. Ф.Ракоці ІІ коротким курсом лекцій до вивчення дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика». Коротко подано теоретичний матеріал, приклади розв'язування типових практичних завдань.

Виробничо-практичне видання

**Теорія ймовірностей і математична статистика
Курс лекцій, 2024 р.**

Затверджено до використання у навчальному процесі на засіданні кафедри математики та інформатики (протокол №1 від «13» серпня 2024 року)

Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості освіти Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II (протокол № 5 від « 16 » жовтня 2024 року)

Рекомендовано до видання у електронній формі (PDF) рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II (протокол № 9 від « 30 » жовтня 2024 року)

Підготовлено до видання у електронній формі (PDF) кафедрою математики та інформатики з Видавничим відділом Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Розробник курсу лекцій:

Вікторія ДЗЯМКО – доцент кафедри математики та інформатики ЗУІ імені Ференца Ракоці II, кандидат педагогічних наук, доцент

Рецензенти:

Тетяна БОЯРИЩЕВА – доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу УжНУ, кандидат фізико-математичних наук, доцент (м. Ужгород)

Каталін КУЧІНКА – завідувач кафедри математики та інформатики ЗУІ ім. Ф. Ракоці II, доцент, кандидат фізико-математичних наук

Відповідальні за випуск:

Каталін КУЧІНКА – завідувач кафедри математики та інформатики ЗУІ ім. Ф. Ракоці II, доцент, кандидат фізико-математичних наук,

Олександр ДОБОШ – начальник Видавничого відділу ЗУІ ім. Ф.Ракоці II
За зміст курсу лекцій відповідальність несе розробник.

Видавництво: ЗУІ ім. Ф. Ракоці II (адреса: пл. Кошута 6, м. Берегове, 90202. Електронна пошта: foiskola@kmf.uz.ua)

© **Вікторія Дзямко, 2024**

© **Кафедра математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II, 2024**

Видавництво: Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II (адреса: пл. Кошута 6, м. Берегове, 90202. Електронна пошта: foiskola@kmf.uz.ua) *Статут «Закарпатського угорського інституту імені*

Ференца Ракоці II» (Затверджено протоколом загальних зборів Благодійного фонду За ЗУІ, протокол №1 від 09.12.2019р., прийнято Загальними зборами ЗУІ ім. Ф.Ракоці II, протокол №2 від 11.11.2019р., зареєстровано Центром надання адміністративних послуг Берегівської міської ради, 12.12.2019р.)

Шрифт «Times New Roman». Розмір сторінок методичних вказівок: А4 (210х297мм).