

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
UKRAJNA OKTATÁSI ÉS TUDOMÁNYOS MINISZTERIUMA**

**Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці ІІ
II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola**

**Кафедра математики та інформатики
Matematika és Informatika Tanszék**

dr. Kucsinka Katalin

**Диференціальні рівняння/ Közönséges
differenciálegyenletek**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
До практичних занять**

**Módszertani segédlet
gyakorlati foglalkozásokhoz**



Beregszász, 2024

Навчально-методичне видання розроблене на основі Освітньої програми підготовки бакалаврів з галузі знань «01 Освіта/Педагогіка» за напрямом «014 Середня освіта (Інформатика)», «014 Середня освіта (Математика)» та діючого законодавства з метою забезпечення здобувачів освіти денної та заочної форм навчання Закарпатського угорського інституту ім. Ф.Ракоці II методичними вказівками до вивчення дисципліни «Диференціальних рівнянь». У методичних вказівках розкрито зміст, структуру, програму навчальної дисципліни та наведено завдання для практичних занять.

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II
(протокол № 1 від «13» серпня 2024 року)

Розглянуто та рекомендовано Навчально-методичною радою
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол № від « » 2024 року)

Рекомендовано до видання в електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту імені
Ференца Ракоці II (протокол № від « » жовтня 2024 року)

Підготовлено до видання в електронній формі (PDF) кафедрою математики та
інформатики спільно з Видавничим відділом Закарпатського угорського інституту імені
Ференца Ракоці II

Розробник методичних вказівок:

Каталін КУЧІНКА – завідувач кафедри математики та інформатики Закарпатського
угорського інституту імені Ференца Ракоці II, доцент, кандидат фізико-
математичних наук

Рецензенти:

Ганна Сливка-Тилищак – завідувач кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу
УжНУ, доктор фізико-математичних наук, професор (м. Ужгород)

Мирослав СТОЙКА – доцент кафедри математики та інформатики Закарпатського
угорського інституту імені Ференца Ракоці II, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Відповідальні за випуск:

Каталін КУЧІНКА – завідувач кафедри математики та інформатики Закарпатського
угорського інституту імені Ференца Ракоці II, доцент, кандидат фізико-
математичних наук *Олександр ДОБОШ* – начальник Видавничого відділу ЗУІ ім.
Ф.Ракоці II

За зміст методичних вказівок відповідальність несе розробник.

Видавництво: Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II (адреса: пл.
Кошута 6, м. Берегове, 90202. Електронна пошта: foiskola@kmf.uz.ua)

A módszertani kiadvány a hatályos jogszabályok alapján készült, melynek célja, hogy a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola a nappali és levelező tagozatos hallgatóinak módszertani útmutatást adjon a „Differenciálegyenletek” című tantárgy elsajátításához. A kiadványban a szerző leírja a tantárgy tartalmát, felépítését és programját, valamint feladatokat ad a gyakorlati órákhoz.

Az oktatási folyamatban történő felhasználását jóváhagyta a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszéke
(2024. augusztus 13, 1. számú jegyzőkönyv).

Megjelentetésre javasolta a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Oktatási és Módszertani Tanácsa
(2024. _____, ____ . számú jegyzőkönyv).

Elektronikus formában (PDF fájlformátumban) történő kiadásra javasolta a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Tudományos Tanácsa
(2024. -----, ---. számú jegyzőkönyv).

Kiadásra előkészítette a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszéke, valamint Kiadói Részlege.

A módszertani útmutató kidolgozója:
KUCSINKA KATALIN –fiz.-mat. tud. kandidátusa(PhD), docens, a Matematika és Informatika Tanszék vezetője.

Szakmai lektorok:

Slyvka-Tylyshchak Ganna – Az UNE Információs vezérlési Rendszerek és Technológiák Tanszékének vezetője, a fizikai és matematikai tudományok doktora, professzor

SZTOJKA Mirosláv – a fizikai és matematikai tudományok kandidátusa, docens, a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének docense

A kiadásért felelnek:

KUCSINKA Katalin – PhD, a fizikai és matematikai tudományok kandidátusa, a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének tanszékvezetője és docense *DOBOS Sándor* – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Kiadói Részlegének vezetője

A segédlet tartalmáért kizárólag a módszertani útmutató kidolgozója felel.

Kiadó: II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola (cím: 90 202, Beregszász, Kossuth tér 6. E-mail: foiskola@kmf.uz.ua)

© Kucsinka Katalin, 2024

© A II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszéke,
2024

Tartalom

1. A tantárgy leírása	5
2. A gyakorlati foglalkozások témakörei	6
3. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek	7
Feladatok	9
4. Szöveges feladatok megoldása differenciálegyenletek segítségével	11
Feladatok	13
5. Homogénfokszámú differenciálegyenletek	14
Feladatok	15
6. Homogén fokszámú differenciálegyenletre visszavezethető egyenletek	17
Feladatok	19
7. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek	20
Feladatok	21
8. Lineárisra visszavezethető differenciálegyenletek	22
9. Egzakt differenciálegyenletek és Egzaktra visszavezethető differenciálegyenletek	23
Feladatok:	27
10. Elsőrendű implicit alakú differenciálegyenletek	27
Feladatok:	30
11. Magasabb rendű differenciálegyenletek fogalma	32
Feladatok	34
12. Állandó együtthatós magasabb rendű homogén lineáris differenciálegyenletek	35
Feladatok	39
13. Állandó együtthatós magasabb rendű homogén lineáris differenciálegyenletekre visszavezethető differenciálegyenletek	40
Feladatok	43
14. Magasabb rendű inhomogén lineáris differenciálegyenletek	43
Feladatok	45
Felhasznált irodalom	47

1. A tantárgy leírása

Найменування показників / A jellemzők megnevezése	Характеристика навчальної дисципліни / A tantárgy jellemzői	
	денна форма навчання / nappali tagozat	заочна форма навчання/ levelező tagozat
Кількість кредитів / Kreditszám – 5	Обов'язкова / Kötelező	
	Курс / Évfolyam:	
	3.	
	Семестр / Félév	
	6.	
	Лекції / Előadások	
	28 год/22 óra	6 год/6 óra
	Практичні, семінарські/ Gyakorlati, szeminárium	
	32 год/32 óra	0 год/0 óra
	Лабораторні/Laboratóriumi	
	0 год	0 óra
	Самостійна робота/Önálló munka	
	90 год/90 óra	144 год/144 óra
	Вид контролю:/Az ellenőrzés formája: Іспит/Vizsga	

A tantárgy általános ismertetése

A Közönséges differenciálegyenletek tárgy BSc szintű képzéshez készült képzési terület: «01 Oktatás/Peadgógia» képzési szakirány 014 Középsikolai oktatás (Matematika) és 014 Középsikolai oktatás (Informatika) programokhoz.

A tantárgy célja, hogy megismertesse a hallgatót a differenciálegyenletek alapvető fogalmaival és eredményeivel. Tegye képessé arra, hogy önállóan gondolkodva tudjon feladatokat megoldani, olyanokat, melyek illeszkednek az előadás anyagához. A félév során a hallgató alkalmazhatja azokat az ismereteket, megoldási módszereket, amelyek a matematikai analízis. tantárgy tanulása közben elsajátított.

A kurzus során a hallgató által elsajátítandó általános és szakmai kompetenciákkal ill. a a program eredményeivel a tantárgy syllabuszában lehet megismerkedni.

2. A gyakorlati foglalkozások témakörei

1. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek
2. Szöveges feladatok megoldása differenciálegyenletek segítségével
3. Homogénfokszámú differenciálegyenletek
4. Homogén fokszámú differenciálegyenletre visszavezethető egyenletek
5. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek.
6. Lineárisra visszavezethető differenciálegyenletek
7. Egzakt differenciálegyenletek és Egzaktra visszavezethető differenciálegyenletek
8. Elsőrendű implicit alakú differenciálegyenletek
9. Magasabb rendű differenciálegyenletek fogalma
10. Állandó együtthatós magasabb rendű homogén lineáris differenciálegyenletek.
11. Állandó együtthatós magasabb rendű homogén lineáris differenciálegyenletekre visszavezethető differenciálegyenletek
12. Magasabb rendű inhomogén lineáris differenciálegyenletek

3. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

1 Explicit alakú elsőrendű differenciálegyenletek

$$a) \quad y' = f(x);$$

$$y = \int f(x)dx + c, \text{ ahol } c\text{-állandó;}$$

1. Feladat Oldjuk meg a differenciálegyenletet: $y' = 2\sin x$

Megoldás:

$$\frac{dy}{dx} = 2\sin x;$$

$$dy = 2\sin x dx;$$

$$\int dy = \int 2\sin x dx;$$

$$y = -2\cos x + C$$

Felet: $y = -2\cos x + C$

$$b) \quad y' = f(x)g(y)$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$

2. Feladat Adjuk meg a differenciálegyenlet megoldását: $xy' + y = y^2$!

Megoldás:

$$x \frac{dy}{dx} + y = y^2;$$

$$x \frac{dy}{dx} = y^2 - y$$

Ha $y^2 - y \neq 0$, és $x \neq 0$, akkor

$$\frac{1}{y^2 - y} dy = \frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{1}{y(y-1)} dy = \int \frac{dx}{x};$$

Meghatározzuk a jobb oldali integrál értékét:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y(y-1)} dy &= \int \left(\frac{A}{y} + \frac{B}{y-1} \right) dx = \int \left(\frac{-1}{y} + \frac{1}{y-1} \right) dy = -\ln |y| + \ln |y-1| = \\ &= \ln \left| \frac{y-1}{y} \right|; \end{aligned}$$

Visszatérve az integrálegyenlethez:

$$\ln x = \ln \left| \frac{y-1}{y} \right| + \ln C;$$

$$x = \left| \frac{y-1}{y} \right| \cdot C - \text{ ez az általános megoldás,}$$

Megvizsgálva az $y = 0$ és $y = 1$ eseteket is szignuláris megoldásokat kapunk.

Felelet: $y = 0, y = 1, x = \left| \frac{y-1}{y} \right| \cdot C$

2 Általános alakú szétválasztható változójú differenciálegyenletek

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = C,$$

3. Feladat Adjuk meg a differenciálegyenlet megoldását: $e^x dx - (1 + e^x)y dy = 0!$

Írjuk fel azt a megoldást, amely áthalad a $P(0;1)$ koordinátájú ponton!

Megoldás:

$$e^x dx - (1 + e^x)y dy = 0;$$

$$\frac{e^x}{1 + e^x} dx - y dy = 0;$$

$$\int \frac{e^x}{1 + e^x} dx = \int y dy;$$

$$\ln(1 + e^x) = \frac{y^2}{2} + C;$$

$$y^2 = 2 \cdot (\ln(1 + e^x) - c)$$

Felírjuk a $P(0;1)$ ponton áthaladó megoldást:

$$y(0) = 1;$$

$$1^2 = 2(\ln 2 - c);$$

$$\ln 2 - c = \frac{1}{2};$$

$$c = \ln 2 - \frac{1}{2};$$

$$y^2 = 2 \left(\ln(1 + e^x) - \ln 2 + \frac{1}{2} \right);$$

$$y^2 = 2 \left(\ln \frac{1 + e^x}{2} + \frac{1}{2} \right);$$

$$y^2 = 2\ln \frac{1+e^x}{2} + 1.$$

Felelet: $y^2 = 2\ln \frac{1+e^x}{2} + 1.$

Feladatok

Oldja meg a szétválasztható változójú differenciálegyenletet:

1. $y(x+1)dy - x(y+1)dx = 0$

2. $y(1+x^2)y' = 1+y^2.$

3. $3e^x \operatorname{tg} y dx + (1-e^x) \cos^{-2} y dy = 0.$

4. $(y^2 + xy^2)y' + x^2 - yx^2 = 0.$

5. $y' + \sin \frac{x+y}{2} = \sin \frac{x-y}{2} (\sqrt{xy} - \sqrt{x}) dy + y dx = 0.$

6. $\sqrt{1-y^2} = \sqrt{1+x^2} y'$

7. $-\sqrt{1-x^2} y' = \sqrt{1-y^2}$

8. $(x+1)y' = y-2$, 1. ált. mo=?, 2. $y(-3) = 1$ kezdeti érték feladat megoldása ?

$$(x^2 - 1)yy' = \frac{1}{(y^2 + 1)^2}$$

9. $x^2 y' + y = 0$

10. $y' = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$

11. $yy' = \frac{1-2x}{y}$

12. $y'(x^2+1) = 2xy$

13. $y = 2y'\sqrt{x}$, якщо $y(4) = 1$.

14. $y' = (2y+1) \operatorname{ctg} x$, якщо $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

15. $y' \operatorname{ctg} x + y = 2; y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.$

16. $(y^2 + xy^2) y' + x^2 - yx^2 = 0.$

17. $e^y (1+x^2) dy - 2x (1+e^y) dx = 0.$

18. $(xy^2 + x) dx + (y - x^2 y) dy = 0.$

19. $(x+2)e^y dx + y\sqrt{x+1} dy = 0.$

20. $(1+y^2) dx - \left(y\sqrt{1+y^2}\right) (1+x^2)^{\frac{3}{2}} dy = 0.$

21. $(1+y^4) (\cos x + \sin x) dx + y\sqrt{\sin 2x} dy = 0; M\left(\frac{\pi}{2}; 0\right).$

22. $y - xy' = a(1 + x^2y')$, a – параметр.

23.

24. $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0.$

25. $y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}.$

26. $(1 + y^2)(e^{2x} dx - e^y dy) - (1 - y) dy = 0.$

4. Szöveges feladatok megoldása differenciálegyenletek segítségével

1. Egy 100 l teli víztartályban 4g klórmész van oldott állapotban. A tartályba 5 l/min sebességgel tiszta víz folyik-be, és az oldat ugyanilyen sebességgel túlfolyón kifolyik. Mennyi lesz a víz klórméstartalma félóra múlva, ha a klórmész egyenletes eloszlását állandó keveréssel biztosítjuk?

Megoldás: vezessük be a következő jelöléseket
 t perc – a megfigyelés kezdetétől eltelt idő;

$x(t)$ kg – az oldat aktuális klórmész tartalma t időpontban;

$k = \frac{x(t)}{100}$ g/l – az oldat koncentrációja;

dt – valamilyen kis időváltozás;

$dx(t)$ – a klórméstartalom változása dt időváltozás alatt;

dt idő alatt $5dt$ tisztavíz folyik be a tartályba és $5dt$ oldat folyik ki, ami $5kdt$ gramm klórméstartalommal. Így a klórmész csökkenése felírható az alábbi alakban:

$$dx(t) = -5k \cdot dt = -5 \frac{x}{100} dt$$

Tudjuk, hogy kezdetben 4g klórmész volt a tartályban így $x(0) = 4$, felhasználva az utóbbi két összefüggést, kapjuk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{x} = -0,05 dt \\ x(0) = 4 \end{cases}$$

Ezt megoldva azt szükséges meghatározni, hogy mennyi az $x(30)$ értéke.

$$\ln x(t) = -0,05t + \ln C;$$

$$x(t) = e^{-0,05t} \cdot C;$$

$$x(0) = e^{-0,05 \cdot 0} C = C = 4;$$

$$x(30) = e^{-0,05 \cdot 30} \cdot 4 \approx 0,892 \text{ (g)}$$

Felelet: fél óra múlva megközelítőleg 0,9 g klórmész lesz a tartályban.

2. Tudjuk, hogy az olvadás sebessége egyenesen arányos a felülettel. Mekkora lesz a nagyobbik hógolyó abban a pillanatban, amikor a kisebbik teljesen elolvad?

Megoldás:

vezessük be a következő jelöléseket

t – a megfigyelés kezdetétől eltelt idő;

$r(t)$ – a kisebb hógolyó sugara t időpillanatban;

$R(t)$ – a nagyobb hógolyó sugara t időpillanatban;

$m(t)$ – a kisebb hógolyó tömege t időpillanatban;

dt – valamilyen kis időváltozás;

$dm(t)$ – a hógolyó tömegének változása dt időváltozás alatt;

A hógolyó teljesen elolvad, ha a tömege 0-val egyenlő.

A kisebb hógolyó térfogatát és felszínét az alábbi képletekből határozhatjuk meg:

$$V(r(t)) = \frac{4\pi}{3} r^3(t);$$

$$S(r(t)) = 4\pi r^2(t).$$

Az tömeg és a térfogat összefüggése: $m(t) = \rho \cdot V(t)$, ahol ρ – a hógolyó sűrűségét leíró állandó.

$dm(t) = -kA(r(t))dt$, ahol k – állandó, arányosági tényező

$$\frac{dm(t)}{dt} = -kA(r(t))$$

Oldjuk meg a fenti differenciálegyenletet:

$$\frac{d}{dt} \rho V(r(t)) = -kA(r(t)) \Rightarrow \frac{d}{dt} V(r(t)) = \frac{-k}{\rho} A(r(t));$$

$$\frac{d}{dt} \left(\rho \frac{4\pi}{3} r^3(t) \right) = \frac{-k}{\rho} A(r(t));$$

$$\rho \frac{4\pi}{3} 3r^2(t) \frac{dr(t)}{dt} = \frac{-k}{\rho} 4\pi r^2(t);$$

$$\frac{dr(t)}{dt} = -\frac{k}{\rho};$$

$$dr(t) = -\frac{k}{\rho} dt;$$

integrálás után kapjuk:

$$r(t) = -\frac{k}{\rho} t + C.$$

A fenti egyenlet írja le, hogy változik a kisebb hógolyó sugara az idő függvényében. Ebből fel tudjuk írni, hogy a kezdeti időpontban $r(0) = C$, a fenti egyenlet felírható a következő képpen:

$$r(t) = -\frac{k}{\rho} t + r(0).$$

Arra a t_1 időpontra vagyunk kíváncsiak, amikor $r(t_1) = 0$.

$$0 = -\frac{k}{\rho}t_1 + r(0);$$

$t_1 = r(0)\frac{\rho}{k}$, ekkor olvad el teljesen a kisebb hógolyó.

A nagyobb hógolyó sugarának viselkedését vizsgálva az előzőhöz hasonló gondolatmenettel kajuk:

$$R(t) = \frac{-k}{\rho}t + R(0);$$

tudjuk, hogy kezdetben a nagyobb hógolyó sugara kétszer akkora volt, mint a kisebbiké, ezért

$$R(t) = \frac{-k}{\rho}t + 2r(0).$$

Most vizsgáljuk meg az $R(t)$ értékét a t_1 időpontban:

$$R(t_1) = \frac{-k}{\rho}r(0)\frac{\rho}{k} + 2r(0) = r(0).$$

Felelet: nagyobbik hógolyó sugara, abban a pillanatban, amikor a kisebbik teljesen elolvad akkora lesz, mint a kisebbikké a kezdeti időpontban.

Feladatok

1. A 10 liter vizet tartalmazó edénybe literenként 0.3 kg sót tartalmazó oldat folyik be folyamatosan 2 liter /min sebességgel. Az edénybe belépő folyadék összekeveredik a vízzel, és a keverék ugyanilyen sebességgel kifolyik az edényből. Mennyi só lesz az edényben 5 perc múlva?
2. Állapítsuk meg, hogy a rádium hány százaléka bomlik el 100 év alatt, ha tudjuk, hogy a rádium felezési ideje 1590 év, azaz ennyi idő alatt bomlik el a jelen lévő atommagok számának a fele.
3. Egy kőzet megvizsgált darabja 100mg uránt és 14mg ólmot tartalmaz. Ismert, hogy az urán felezési ideje $4.5 \cdot 10^9$ év, és hogy 238 g urán teljes elbomlásakor 206 g ólom keletkezik. Állapítsuk meg a kőzet korát!
4. A 200 m^3 térfogatú szobában 0.15% szén-dioxid gáz van. A ventillátor percenként 20 m^3 0.04% széndioxidot tartalmazó levegőt fűj be. Mennyi idő múlva csökken a szoba levegőjében lévő széndioxid mennyisége a harmadára?
5. A szobába berepült két hógolyó, az egyik sugara éppen kétszer akkora, mint a másiké.
6. Egy baktériumtenyészetben a baktériumok számának növekedési sebessége egyenesen arányos a baktériumok számával. Ha a baktériumok száma 48 óra alatt 100-ról 1000-re nő, akkor hány baktérium volt a 24. óra végén?
7. A szobába berepült két hógolyó, az egyik sugara éppen kétszer akkora mint a másiké. Tudjuk, hogy az olvadás sebessége egyenesen arányos a felülettel. Mekkora lesz a nagyobbik hógolyó abban a pillanatban, amikor a kisebbik teljesen elolvad?

5. Homogénfokszámú differenciálegyenletek

Definíció: Az $f(x, y)$ m -ed rendű homogénfokszámú függvénynek nevezzük, ha tetszőleges x, y, t estére teljesül:

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y).$$

Például: $f_1(x, y) = \sqrt[3]{2x^3 + y^3}$ első rendű homogénfokszámú függvény, és $f_2(x, y) = \arcsin \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ 0-ad rendű homogénfokszámú függvény

$$\begin{aligned} f_1(tx, ty) &= \sqrt[3]{2(tx)^3 + (ty)^3} = t \cdot \sqrt[3]{2x^3 + y^3} = t^1 \cdot f_1(x, y), \\ f_2(tx, ty) &= \arcsin \frac{(tx)^2 - (ty)^2}{(tx)^2 + (ty)^2} = \arcsin \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = t^0 \cdot f_2(x, y). \end{aligned}$$

Definíció: A következő alakú differenciálegyenletet:

$$y' = f(x, y) \quad (3.1)$$

homogén differenciálegyenletnek nevezzük, ha $f(x, y)$ egy 0-ad rendű homogén függvény.

Következmény: Az $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ alakú egyenlet homogénfokszámú differenciálegyenlet, ha $M(x, y)$ és $N(x, y)$ azonos rendű homogénfokszámú függvények.

Tétel: Bármely homogén differenciálegyenletet változó csere segítségével visszavezethetünk szétválasztható változójú differenciálegyenletre.

4. Feladat Oldjuk meg az $(x^3 + y^3)dx - 3xy^2dy = 0$ differenciálegyenletet!

Megoldás: Az $(x^3 + y^3)dx - 3xy^2dy = 0$ egyenletet vizsgáljuk homogenitás szempontjából: $M(x, y) = (x^3 + y^3)$; $N(x, y) = -3xy^2$ mindkét esetben $n = 3$ fokszámot állapíthatunk meg, így az egyenlet homogénfokszámú. Bevezetjük az új változót: $t = \frac{y}{x}$; $y = xt$; $dy = tdx + xdt$.

$$(x^3 + x^3t^3)dx - 3x \cdot x^2t^2(tdx + xdt) = 0;$$

$$x^3(1 + t^3 - 3t^3)dx - 3x^4dt = 0;$$

$$\frac{x^3}{x^4}dx = \frac{3t^2}{1-2t^3}dt; \text{ ha } x \neq 0, 1-2t^3 \neq 0;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{3t^2}{1-2t^3}dt;$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2} \int \frac{d(-t^3)}{\frac{1}{2}-t^3};$$

$$\ln |x| = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{2} - t^3 \right| + \frac{1}{2} \ln C;$$

$$x^2 = \frac{c}{\frac{1}{2} - t^2};$$

$$y^3 = \frac{1}{2} x^3 - cx.$$

Felet: $y = \sqrt[3]{\frac{1}{2} x^3 - Cx}.$

5. Feladat Oldjuk meg az $(x^2 + y^2)dx = xydy$ differenciálegyenletet!

Megoldás: Az $(x^2 + y^2)dx = xydy$ egyenletet vizsgáljuk homogenitás szempontjából:

$M(x, y) = (x^2 + y^2); N(x, y) = -xy$ mindkét esetben $n = 2$ fokszámot állapíthatunk meg, így az egyenlet homogénfokszámú. Bevezetjük az új változót:

$$t = \frac{y}{x}; y = xt; dy = tdx + xdt.$$

$$(x^2 + x^2 t^2)dx = x^2 t(xdt + tdx);$$

$$x^2(1 + t^2)dx = x^3 tdt + x^2 t^2 dx;$$

$$x^2 dx = x^3 \cdot tdt;$$

$$\frac{x^2}{x^3} dx = tdt, \text{ ha } x \neq 0,$$

integrálás után:

$$\ln |x| + \ln C = \frac{t^2}{2},$$

$$\frac{y^2}{x^2} = 2 \ln(x \cdot c);$$

$$y = \sqrt{2x^2 \ln(x \cdot c)}.$$

Felet: $y = |x| \sqrt{2 \ln(x \cdot C)}.$

Feladatok

Oldja meg a változóban homogén differenciálegyenletet

- $x \sin \frac{y}{x} - y \cos \frac{y}{x} + xy' \cos \frac{y}{x} = 0$
- $(2x + y)dx + (y + x)dy = 0$

3. Határozzuk meg az $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy = 0$ egzakt differenciálegyenletnek azt a partikuláris megoldását, amely az $x = 0, y = -2$ kezdeti feltételt kielégíti!
4. $y' = \frac{y}{x} + 5 \cos^2 \frac{y}{x}$.
5. $y' + \sqrt{4 - \frac{y^2}{x^2}} = \frac{y}{x}$.
6. $xy' - y = \sqrt{y^2 + 2x^2}$.
7. $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$
8. $(x^2 + 3xy + y^2)dx - x^2 dy = 0$
9. $xy' = y \ln \frac{y}{x}$, якщо $y(1) = 1$.
10. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$

6. Homogén fokszámú differenciálegyenletre visszavezethető egyenletek

Vizsgáljuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \quad (3.2)$$

ahol $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ – állandó; c_1, c_2 nullától különböző számok.

Tétel: A (3.2) képletben szereplő differenciálegyenlet változó csere segítségével visszavezethető homogénfokszámú differenciálegyenletre.

Ha

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$x = \xi + \alpha,$$

$$y = \eta + \beta$$

ahol α és β következő egyenletrendszer megoldásai
$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \text{ akkor az új változó } z \doteq a_2x + b_2y.$$

6. Feladat Oldjuk meg az $y' = \frac{3x+2y+1}{3x+2y-1}$ differenciálegyenletet!

Megoldás:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0;$$

tehát vezessünk be új változót:

$$z = 3x + 2y;$$

$$y = \frac{1}{2}(z - 3x);$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{dz}{dx} - \frac{3}{2};$$

$$y' = \frac{1}{2} \frac{dz}{dx} - \frac{3}{2}$$

Az y és y' értékeket a kapott kifejezésekkel helyettesítsük, így

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dz}{dx} - 3 \right) = \frac{z+1}{z-1}$$

$$\frac{dz}{dx} - 3 = 2 \cdot \frac{z+1}{z-1}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2z + 2 + 3z - 3}{z - 1}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{5z - 1}{z - 1}$$

$$\frac{z-1}{5z-1} dt = dx$$

$$\int \frac{z-1}{5z-1} dz = \frac{1}{5} \int \frac{z-1}{z-\frac{1}{5}} dz = \frac{1}{5} \int \frac{z-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-1}{z-\frac{1}{5}} dz = \frac{1}{5} \int \left(1 - \frac{4}{5} \frac{1}{z-\frac{1}{5}} \right) dz =$$

$$= \frac{1}{5} \left(z - \frac{4}{5} \ln \left| z - \frac{1}{5} \right| \right) + c.$$

$$\text{Így } \frac{1}{5} \left(z - \frac{4}{5} \ln \left| z - \frac{1}{5} \right| \right) + c = x.$$

Visszahelyettesítve az eredeti változókat kapjuk:

$$3x + 2y - \frac{4}{5} \left| 3x + 2y - \frac{1}{5} \right| = 5x - 5$$

$$\textbf{Felelet: } 3x + 2y - \frac{4}{5} \left| 3x + 2y - \frac{1}{5} \right| = 5x - 5$$

7. Feladat

8. Feladat Oldjuk meg az $y' = \frac{3x+2y+1}{3x+2y-1}$ differenciálegyenletet!

Megoldás:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0;$$

tehát vezessünk be új változót:

$$z = 3x + 2y;$$

$$y = \frac{1}{2}(z - 3x);$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{dz}{dx} - \frac{3}{2};$$

$$y' = \frac{1}{2} \frac{dz}{dx} - \frac{3}{2}$$

Az y és y' értékeket a kapott kifejezésekkel helyettesítsük, így

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dz}{dx} - 3 \right) = \frac{z+1}{z-1}$$

$$\frac{dz}{dx} - 3 = 2 \cdot \frac{z+1}{z-1}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2z+2+3z-3}{z-1}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{5z-1}{z-1}$$

$$\frac{z-1}{5z-1} dt = dx$$

$$\int \frac{z-1}{5z-1} dz = \frac{1}{5} \int \frac{z-1}{z-\frac{1}{5}} dz = \frac{1}{5} \int \frac{z-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-1}{z-\frac{1}{5}} dz = \frac{1}{5} \int \left(1 - \frac{4}{5} \frac{1}{z-\frac{1}{5}} \right) dz =$$

$$= \frac{1}{5} \left(z - \frac{4}{5} \ln \left| z - \frac{1}{5} \right| \right) + c.$$

$$\text{Így } \frac{1}{5} \left(z - \frac{4}{5} \ln \left| z - \frac{1}{5} \right| \right) + c = x.$$

Visszahelyettesítve az eredeti változókat kapjuk:

$$3x + 2y - \frac{4}{5} \left| 3x + 2y - \frac{1}{5} \right| = 5x - 5$$

$$\textbf{Felelet: } 3x + 2y - \frac{4}{5} \left| 3x + 2y - \frac{1}{5} \right| = 5x - 5$$

Feladatok

Oldja meg a változóban homogén foksámúra visszavezethető differenciálegyenletre

1. $y' = \frac{x+7y+2}{3x+5y+6}$
2. $y' = \frac{3x+2y+1}{3x+2y-1}$
3. $(x-2y+3)dy + (2x+y-1)dx = 0.$
4. $(x-y+4)dy + (x+y-2)dx = 0.$
5. $2(x+y)dy + (3x+3y-1)dx = 0, y(0) = 2$
6. $(2x+y+1)dx - (4x+2y-3)dy = 0;$
7. $x-y-1 + (y-x+2)y' = 0;$
8. $2x-4y+6)dx + (x+y-3)dy = 0;$
9. $(x+4y)y' = 2x+3y-5 ;$
10. $(y+2)dx = (2x+y-4)dy;$
11. $y' = 2 \left(\frac{y+2}{x+y-1} \right)^2$

7. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek.

Definíció: Elsőrendű lineáris differenciálegyenletnek nevezzük a következő alakú differenciálegyenletet:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Tétel: az $y' + p(x)y = q(x)$

lineáris differenciálegyenlet megoldása felírható a következő alakban:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right).$$

Elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletek megoldása az állandó variálásnak módszerével.

9. Feladat Oldjuk meg az $y' + \frac{4}{x}y = x^4$ differenciálegyenletet!

Megoldás: Vizsgáljuk a homogén egyenletet:

$$y' + \frac{4}{x}y = 0;$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4y}{x};$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{4}{x}dx;$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{4}{x}dx;$$

$$\ln y = -4\ln x + \ln c;$$

$$y_0 = x^{-4} \cdot c \text{ a homogén egyenlet általános megoldása.}$$

Tekintsük a c -t az x változó függvényének:

$$y = x^{-4}c(x);$$

$$-\frac{4x^{-5}}{c(x)} + x^{-4}c'(x) + \frac{4}{x}x^{-4}c(x) = x^4$$

$$\frac{dc(x)}{dx} = x^4 \cdot x^4 ; ;$$

$$c(x) = \frac{x^9}{9} + \hat{c} ;$$

$$y = x^{-4} \left(\frac{x^9}{9} + \hat{c} \right).$$

Felelet: $y = x^{-4} \left(\frac{x^9}{9} + \hat{c} \right)$

Új változó bevezetésének módszere.

10. Feladat Oldjuk meg az $y' = 3x^2y + x^2$ differenciálegyenletet!

Megoldás:

$$y = u \cdot v;$$

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Az utolsó két kifejezést az eredeti egyenletbe helyettesítve kapjuk:

$$u' \cdot v + u \cdot v' - 3x^2 \cdot u \cdot v = x^2$$

$$u' \cdot v + u(v' - 3x^2 \cdot v) = x^2.$$

Mivel a v függvényt tetszőlegesen választhatjuk meg, ezért legyen a v olyan, hogy teljesül:

$$v' - 3x^2 \cdot v = 0;$$

$$\frac{dv}{dx} = 3x^2 v;$$

$$\ln v = x^3 + C;$$

$$v = e^{x^3+C}.$$

Mivel a v függvényt tetszőlegesen módon választhatjuk, meg legyen $C=0$, tehát

$$v = e^{x^3}.$$

A v függvény értékét visszahelyettesítve, az egyenletbe, kapjuk:

$$u' \cdot e^{x^3} = x^2;$$

$$u' = e^{x^2} \cdot e^{-x^3};$$

$$\frac{du}{dx} = x^2 e^{-x^3};$$

$$\int du = -\frac{1}{3} \int e^{-x^3} d(-x^3);$$

$$u = -\frac{1}{3} e^{-x^3} + C;$$

$$y = \left(-\frac{1}{3} e^{-x^3} + C\right) \cdot e^{x^3} = -\frac{1}{3} + C \cdot e^{x^3}.$$

Felelet: $y = -\frac{1}{3} + C \cdot e^{x^3}.$

Feladatok

Oldja meg a lineáris differenciálegyenletet

1. $y' + xy - x = 0$

2. $y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x.$

3. $(x^2 + 1)y' + 4xy = 3.$

4. $y' - y = e^x.$

5. $y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x$

$$6. \quad y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, \text{ якщо } y(0) = 0.$$

$$7. \quad (1-x^2)y' + xy = 1, \text{ якщо } y(0) = 1.$$

8.

8. Lineárisra visszavezethető differenciálegyenletek

Definíció: Bernoulli-féle differenciálegyenletnek nevezzük az alábbi alakú egyenletet

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha, \quad (4.7)$$

ahol α valósszám.

Az egyenlet $z = y^{1-\alpha}$ változó bevezetésével lineárisra vezethető vissza.

11. Feladat Oldjuk meg az $y' + 2xy = 2xy^2$ Bernoulli-féle differenciálegyenletet!

Megoldás: A mi esetünkben $\alpha = 2$. Alakítsuk át az egyenletet,

$$y' + 2xy = 2xy^2 \quad |: y^2$$

$$\frac{y'}{y^2} + 2x \frac{1}{y} = 2x$$

Vezessünk be új változót:

$$z = y^{-1};$$

így

$$z' = -1y^{-2}y',$$

visszahelyettesítünk az egyenletbe:

$$-z' + 2xz = 2x;$$

$$z' - 2xz = -2x$$

az utolsó kifejezés egy lineáris differenciálegyenlet, amit meg tudunk oldani.

Helyettesítsünk be a lineáris egyenlet megoldó képletébe:

$$z = e^{\int 2x dx} \left(c + \int -2x e^{\int -2x dx} dx \right);$$

$$z = e^{x^2} (c + e^{-x^2}).$$

Fejezzük ki az y függvényt:

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{e^{x^2} \cdot c + 1}.$$

Felelet: $y = \frac{1}{e^{x^2} \cdot c + 1}$ és szinguláris megoldás az $y = 0$.

Definíció: Riccati-féle differenciálegyenletnek nevezzük az alábbi alakú egyenletet

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x), (4.9)$$

ahol a $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ függvények folytonosak valamilyen $a < x < b$ intervallumon.

Keressük a megoldást $y = y_1 + z$, alakban, ahol $z = z(x)$ ismeretlen függvény.

12. Feladat Oldjuk meg az $xy' - (2x + 1)y + y^2 = -x^2$ Riccati -féle

differentiálegyenletet, ha van olyan partikuláris megoldása, mely $y = a \cdot x$ alakú

Megoldás: Az $y = a \cdot x$ megoldást az eredeti egyenletbe helyettesítve:

$$xa - (2x + 1)ax + (ax)^2 = -x^2$$

kapjuk, hogy az egyenlet partikuláris megoldása: $y = x$. Így a megoldás $y = x + z$ alakban keresendő. Ezt az értéket visszahelyettesítve az eredeti egyenletünkbe, kapjuk:

$$x(1 + z') - (2x + 1)(x + z) + (x + z)^2 = -x^2$$

$$x \cdot z' - z + z^2 = 0.$$

Az utóbbi egy Bernoulli-típusú differentiálegyenlet. Az $u = z^{1-2}$ új változó bevezetése után kapjuk az

$$-u' - \frac{1}{x}u = -\frac{1}{x}.$$

Amit a változók szétválasztásával is megoldhatunk: $u = x \cdot C + 1$ általános megoldást kapjuk.

Így $z^{-1} = x \cdot C + 1$ és $z=0$ megoldásokat kell figyelembe venni.

Tehát $y = \frac{1}{1+Cx}$ és $y = x$.

Felelet: $y = \frac{1}{1+Cx}$ és $y = x$

9. Egzakta differenciálegyenletek és Egzaktra visszavezethető differenciálegyenletek

Definíció: Az

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (5.1)$$

elsőrendű differentiálegyenletet egzaktnak nevezzük, ha létezik olyan $U(x, y)$ kétváltozós valós függvény, melyre igaz

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = dF(x, y).$$

Tétel: Legyenek az (5.1) összefüggésben $M(x, y)$ és $N(x, y)$ folytonosak az (x_0, y_0) pont valamely környezetében és a két függvény nem vehet fel egyidejűleg 0 értéket, ill. létezzon

parciális deriváltak: $\frac{\partial M}{\partial y}$ és $\frac{\partial N}{\partial x}$. Ahhoz, hogy az (5.1) differenciálegyenlet egzakt legyen szükséges és elégséges, hogy teljesüljön a következő összefüggés

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Gyakorlatban a keresett $F(x, y)$ függvényt az alább rendszerből találhatjuk meg

$$\left. \begin{aligned} F(x, y) &= \int M(x, y) dx + \varphi(y) \\ F(x, y) &= \int N(x, y) dy + \psi(x) \end{aligned} \right\}$$

az $\varphi(y)$ és $\psi(x)$ függvények alkalmas választásával.

13. Feladat Oldjuk meg az $(x^3 + xy^2)dx + (y^3 + yx^2)dy = 0$ differenciálegyenletet!

Megoldás: Vizsgáljuk, hogy egzakt-e az egyenlet, ehhez számoljuk ki a parciális deriváltakat:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial (x^3 + xy^2)}{\partial y} = 2xy$$

Egzakt differenciálegyenlettel van dolgunk.

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial (y^3 + yx^2)}{\partial x} = 2xy$$

$$\left. \begin{aligned} F(x, y) &= \int (x^3 + xy^2) dx + \varphi(y) \\ F(x, y) &= \int (y^3 + yx^2) dy + \psi(x) \end{aligned} \right\};$$

$$\left. \begin{aligned} F(x, y) &= \frac{x^4}{4} + \frac{x^2 y^2}{2} + \varphi(y) \\ F(x, y) &= \frac{y^4}{4} + \frac{x^2 y^2}{2} + \psi(x) \end{aligned} \right\}$$

Ahhoz, hogy fenti összefüggés igaz legyen a következő választás szükséges

$$\left. \begin{aligned} \psi(x) &= \frac{x^4}{4} \\ \varphi(y) &= \frac{y^4}{4} \end{aligned} \right\}$$

Így $F(x, y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{y^4}{4}$ vagyis az általános megoldás: $\frac{x^4}{4} + \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{y^4}{4} = \hat{C}$, $\hat{C} > 0$ vagy $(x^2 + y^2)^2 = C$, ahol $C = 4\hat{C}$.

Felet: $(x^2 + y^2)^2 = C$.

Vannak olyan esetek, amikor az eredeti (5.1) egyenletünk nem egzakt, de létezik olyan $m(x, y)$ függvény mellyel mindkét oldalát megszorozva egzakt egyenletet kapunk:

$$m(x, y)M(x, y)dx + m(x, y)N(x, y)dy = 0. \quad (5.3)$$

Ebben az esetben az $m(x, y)$ függvényt integráló szorzónak nevezzük.

Legyen $m = m(x)$, vagyis az integráló szorzó csak az x -változótól függ és $N(x, y) \neq 0$, ekkor

$$m(x) = e^{\int \varphi(x) dx}$$

Legyen $m = m(y)$, vagyis az integráló szorzó csak az y -változótól függ és $M(x, y) \neq 0$, ekkor

$$m(y) = e^{\int \psi(y) dy}$$

14. Feladat Oldjuk meg az $(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0$ differenciálegyenletet!

Megoldás: Vizsgáljuk, hogy egzakt-e az egyenlet, ehhez számoljuk ki a parciális deriváltakat:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial (x^2 + y^2 + x)}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial xy}{\partial x} = y$$

Ez az egyenlet nem egzakt típusú. Ezért vizsgáljuk a következő kifejezést:

$$\left(\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right) \frac{1}{N(x, y)} = (2y - y) \frac{1}{xy} = \frac{1}{x}$$

vagyis

$$\left(\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right) \frac{1}{N(x, y)} = \varphi(x) = \frac{1}{x}.$$

Ekkor az integráló szorzót a következő alakban keressük:

$$m(x) = e^{\int \varphi(x) dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = x.$$

Szorozzuk meg az eredeti egyenlet mindkét oldalát $m(x) = x$ kifejezéssel:

$$x \cdot (x^2 + y^2 + x)dx + x^2 y dy = 0$$

Vizsgáljuk meg, hogy az így kapott egyenlet egzakt-e!

$$\frac{\partial M_1(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial (x^3 + x \cdot y^2 + x^2)}{\partial y} = 2xy,$$

$$\frac{\partial N_1(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial x^2 y}{\partial x} = 2xy.$$

Most már egzakt differenciálegyenlettel van dolgunk.

$$\left. \begin{aligned} F(x, y) &= \int (x^3 + x \cdot y^2 + x^2) dx + \varphi(y) \\ F(x, y) &= \int x^2 y dy + \psi(x) \end{aligned} \right\};$$

$$\left. \begin{aligned} F(x, y) &= \frac{x^4}{4} + \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \varphi(y) \\ F(x, y) &= \frac{x^2 y^2}{2} + \psi(x) \end{aligned} \right\}$$

Ahhoz, hogy fenti összefüggés igaz legyen a következő választás szükséges

$$\left. \begin{aligned} \psi(x) &= \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \\ \varphi(y) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Így $F(x, y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ vagyis az általános megoldás: $\frac{x^4}{4} + \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{x^3}{3} = C$.

Felet: $\frac{x^4}{4} + \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{x^3}{3} = C$.

15. Feladat Oldjuk meg a $(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0$ differenciálegyenletet!

Megoldás: Vizsgáljuk, hogy egzakt-e az egyenlet, ehhez számoljuk ki a parciális deriváltakat:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial(2xy^2 - y)}{\partial y} = 4y - 1;$$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial(y^2 + x + y)}{\partial x} = 1.$$

Ez az egyenlet nem egzakt típusú. Ezért vizsgáljuk a következő kifejezést:

$$\left(\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right) \frac{1}{-M(x, y)} = (4y - 1 - 1) \frac{1}{-(2xy^2 - y)} = \frac{-2}{y}.$$

Ekkor az integráló szorzót a következő alakban keressük:

$$m(y) = e^{\int \psi(y) dy} = e^{\int \frac{-2}{y} dy} = \frac{1}{y^2}.$$

Szorozzuk meg az eredeti egyenlet mindkét oldalát $m(y) = \frac{1}{y^2}$ kifejezéssel:

$$\left(2x - \frac{1}{y} \right) dx + \left(1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y} \right) dy = 0$$

Vizsgáljuk meg, hogy az így kapott egyenlet egzakt-e!

$$\frac{\partial M_1(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \left(2x - \frac{1}{y} \right)}{\partial y} = \frac{1}{y^2},$$

$$\frac{\partial N_1(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \left(1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y} \right)}{\partial x} = \frac{1}{y^2}.$$

Egzakt differenciálegyenlettel van dolgunk.

$$\left. \begin{aligned} F(x, y) &= \int \left(2x - \frac{1}{y} \right) dx + \varphi(y) \\ F(x, y) &= \int \left(1 + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y} \right) dy + \psi(x) \end{aligned} \right\};$$

$$\left. \begin{aligned} F(x, y) &= x^2 - \frac{x}{y} + \varphi(y) \\ F(x, y) &= y - \frac{x}{y} + \ln y + \psi(x) \end{aligned} \right\}$$

Ahhoz, hogy fenti összefüggés igaz legyen a következő választás szükséges

$$\left. \begin{aligned} \psi(x) &= x^2 \\ \varphi(y) &= \ln y \end{aligned} \right\}$$

Így $F(x, y) = x^2 - \frac{x}{y} + \ln y$ vagyis az általános megoldás: $x^2 - \frac{x}{y} + \ln y = C$

Felelet: $x^2 - \frac{x}{y} + \ln y = C$.

Feladatok:

Oldja meg az egzakt és egzakra visszavezethető differenciálegyenletet

1. $(4x^3y^3 - 2xy)dx + (3x^4y^2 - x^2)dy = 0$
2. $e^y dx + (x \cdot e^y - 2y)dy = 0;$ (63 i)
3. $(x^2 + y) dx - xdy = 0;$ (63 iii)
4. $e^y(ydx - dy) = e^x(xdy - dx);$ (63iv)
5. $(3xy + 2y^2)dx + (3xy + 2x^2)dy = 0.$
6. $(x + \sin y)dx + (x \cos y + \sin y)dy = 0 ;$
7. $(x + e^x \sin y)dx + (y + e^x \cos y)dy = 0 ;$
8. $(xy + \sin y)dx + (x \cos y + 0.5x^2)dy = 0 ;$
9. $(x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x + e^y)dy = 0; y(0) = 0 ;$
10. $(\arcsin x + 2xy)dx + (x^2 + 1 + \arctg y)dy = 0 ;$
11. $(tgy - y \cos ec^2 x)dx + (ctgx + x \sec^2 y)dy = 0 ;$
12. $(2xye^{x^2} + \ln y)dx + (e^{x^2} + \frac{x}{y})dy = 0; y(0) = 1$

10. Elsőrendű implicit alakú differenciálegyenletek

Definíció: Elsőrendű implicit differenciálegyenletnek nevezzük az

$$F(x, y, y') = 0$$

kifejezést, ahol az $F(x, y, z)$ függvény folytonos valamely D tartomány felett, $D \subset \mathbf{R}^3$.

1. Hiányos változójú elsőrendű implicit alakú differenciálegyenletek

I. $F(x, y') = 0$

a) Az egyenlet megoldható az x változóhoz képest, tehát felírható a következő alakban

$$x = \varphi(y')$$

vezessük be a p változót: $y' = p$.

b) az $F(x, y') = 0$ egyenletből nem fejezhető ki elemi úton az x változó:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y' = \psi(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y' = \psi(t) \end{cases}$$

így

$$\begin{cases} dx = \varphi'(t)dt \\ dy = \psi(t)dx \end{cases}$$

Ekkor a megoldás így alakul:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \int \psi(t)\varphi'(t) dt + C. \end{cases}$$

II $F(y, y') = 0$, ekkor

$F(y, y') = F\left(y, \frac{1}{x'}\right) = G(y, x')$ így a I) típusú egyenletet kapunk.

III) $F(y') = 0$, ebben az esetben a

$$F(\alpha_k) = 0; \rightarrow y = \alpha_k \quad \alpha_k = \frac{y-c}{x}, \text{ így } F\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0.$$

2. Általános formájú implicit differenciálegyenletek

Vizsgáljuk: $F(x, y, y') = 0$, nem hiányzik változó.

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ y' = \chi(u, v) \end{cases}$$

Vizsgáljunk részeseteket:

a)

$$\begin{cases} y = f(x, p) \\ x = x \\ y' = p \end{cases}$$

b) $x = f(y, y')$;

$$\begin{cases} y' = p \\ x = f(y, p) \end{cases}$$

16. Feladat Oldjuk meg az $y' - \sin y' - x = 0$ differenciálegyenletet!

Megoldás: Hiányzik $F(x, y') = 0$

$$y' - \sin y' - x = 0$$

vezessük be a p változót:

$$y' = p,$$

$$dy = p dx$$

$$dx = \frac{dy}{p}$$

$$x = \ln p - \sin p$$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{1}{p} - \cos p;$$

$$\frac{dy}{p dp} = \frac{1}{p} - \cos p;$$

$$dy = p \left(\frac{1}{p} - \cos p \right) dp;$$

$$y = \int (1 - p \cos p) dp = p - \int p \cos p dp =$$

$$= \left| \begin{matrix} f = p & y' = \cos p \\ f' = 1 & y = \sin p \end{matrix} \right| = p - p \sin p + \int \sin p dp =$$

$$= p - p \sin p - \cos p + c.$$

$$\left| \begin{matrix} f = p & y' = \cos p \\ f' = 1 & y = \sin p \end{matrix} \right| = p - p \sin p + \int \sin p dp =$$

$$= p - p \sin p - \cos p + c$$

$$y = p - p \sin p - \cos p + c$$

Felelet: $\begin{cases} x = \ln p - \sin p \\ y = p - p \sin p - \cos p + c \end{cases}$

$$F(y, y') = 0$$

17. Feladat Oldjuk meg az $y = y^2 + 2y^3$ differenciálegyenletet!

Megoldás: $y' = p$; $dy = p dx$;

$$y = p^2 + 2p^3;$$

$$\frac{dy}{dp} = 2p + 6p^2;$$

$$\frac{p dx}{dp} = 2p + 6p^2;$$

$$dx = \left(\frac{2p}{p} dp + \frac{6p^2}{p} \right) dp;$$

$$x = 2p + 3p^2 + c$$

Felelet: $\begin{cases} x = 2p + 3p^2 + c \\ y = p^2 + 2p^3 \end{cases}$

18. Feladat Oldjuk meg az $y'^2 - 4y' + 2 = 0$ differenciálegyenletet!

Megoldás:

$$(y' = p$$

$$\left(\frac{y-c}{x}\right)^2 - 4\left(\frac{y-c}{x}\right) + 2 = 0$$

19. Feladat Oldjuk meg az $y = xy' - y'^3$ differenciálegyenletet!

Megoldás:

$$y' = p; dy = p dx;$$

$$y = xp - p^3;$$

$$dy = x dp + p dx - 3p^2 dp;$$

$$x dp - 3p^2 dp = 0$$

$$dp = 0;$$

$$p = c$$

$$y = cx - c^3$$

vagy

$$x - 3p^2 = 0$$

$$p = \pm \sqrt{\frac{x}{3}};$$

$$y = \frac{2}{3\sqrt{3}} x^{\frac{3}{2}} + \hat{C}$$

Felelet: $y = \frac{2}{3\sqrt{3}} x^{\frac{3}{2}} + \hat{C}$ vagy $y = cx - c^3$

$$4(y - c)x + 2x^2 = 0$$

Feladatok:

Oldja meg hiányos másodrendű differenciálegyenletet

12. $\varphi'' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \in (-1,1));$

13. $2\varphi\varphi'' + (\varphi')^2 + (\varphi')^4 = 0;$

14. $\varphi + \varphi'' = 0;$

- $$(x \cdot \ln x) \cdot \varphi'' - \varphi' = 0.$$
- 15.
 16. $y'' = 6x$,
 17. $xy'' - y'^2 + y'^3 = 0$
 18. $xy'' - y' = 0$.
 19. $(1 + \sin x)^2 y'' + \cos x = 0$
 20. $y'' = 93y^3$, ha $y(1) = 1$ $y'(1) = 7$

Oldja meg a differenciálegyenletet

- $$y = xy' - x^2 y'^3$$
- 1.
 2. $y'^2 - 2xy' = 8x^2$
 3. $x = y' \sqrt{y'^2 + 1}$
 4. $y = y'x + 2(y')^2$ (Clairaut)
 5. $y = \frac{xy'^2}{2} + \frac{y'^2}{x^2}$.
 6. $6x^2y - 6y'^2 + (12x^2 - 3x^2)y' - 6x^4 + x^3 = 0$.
 7. $y'(x - \ln y') = 1$. $y'^4 - y'^2 = y^2$.
 - 8.
 9. $y' = \exp\left(\frac{xy'}{y}\right)$.
 10. $y(y - 2xy')^3 = y'^2$.
 11. $y = -\frac{y'^3}{12} + \frac{xy'}{2} + \frac{y'^2}{4} + \frac{x^2}{y'^2} + x$.
 12. $x = \frac{y}{y'} \ln y - \frac{y'^2}{y^2}$.
 13. $y'^3 + y^2 = xy y'$.
 14. $x = y' \sqrt{1 + y'^2}$.
 15. $x(y'^2 - 1) = 2y'$.
 16. $2xy' - y = y' \ln y y'$.
 17. $y'^4 = 2y y' + y^2$.
 18. $2y y' = x(y'^2 + 4)$.

19. $y = xy' - y'^2.$
 20. $y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}.$
 21. $y = x(1 + y') + y'^2.$
 22. $2y(y' + 2) = xy'^2.$
 23.

11. Magasabb rendű differenciálegyenletek fogalma

Definíció: Az

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

kifejezést magasabb rendű differenciálegyenletnek nevezzük.

1 Hiányos magasabb rendű differenciálegyenletek

I) $F(x, y^{(n)}) = 0$

a) $y^{(n)} = f(x)$

$$y = \underbrace{\int \dots \int}_n f(x) \frac{dx \dots dx}{n} + \frac{c_1}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{c_2}{(n-2)!} x^{n-2} + \dots + c_{n-1} x + c_n$$

b) $y^{(n)}$ nem lehet vagy csak nehezen lehet kifejezni

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y^{(n)} = \psi(t) \end{cases}$$

$$F(\varphi(t), \psi(t)) = 0$$

$$\begin{cases} x = \varphi_n(t) \\ y = \psi_n(t, c_1, c_n) \end{cases}$$

II)

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$$

$$y^{(k)} = z, \text{ így}$$

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0$$

$$z = \omega(x, c_1, \dots, c_{n-k}) - \text{általános megoldás}$$

$$y^{(k)} = \omega(x, c_1, \dots, c_{n-k})$$

nem tartalmaz x változót

$F(y, y_1', \dots, y^{(n)}) = 0$ lehet eggyel csökkenteni a fokszámot:

$$y = y(x), \quad z = z(y)$$

$$y' = z;$$

III) Homogén az y változóhoz és deriváltjaihoz képest

$$F(x, ty, ty', \dots, ty^{(u)}) = t^m \cdot f(x, y, y_1', y^{(u)})$$

IV) $z = \frac{y'}{y}$ A baloldal valamely függvény pontos deriváltja:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \text{ pontos derivált;}$$

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

3. Hiányos változójú elsőrendű implicit alakú differenciálegyenletek

20. Feladat Oldjuk meg az $y''' = \sin^2 x$ differenciálegyenletet!

Megoldás:

$$y''' = \sin^2 x$$

$$y'' = \int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c_1, \text{ itt felhasználtuk } \sin^2 x = \frac{1 - \cos^2 x}{2}$$

$$y' = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{8}\cos 2x + c_1x + c_2;$$

$$y = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{16}\sin 2x + c_1x^2 + c_2x + c_3.$$

$$\textbf{Felelet: } y = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{16}\sin 2x + c_1x^2 + c_2x + c_3.$$

III) nem tartalmaz x változót

$$F(y, y_1', \dots, y^{(n)}) = 0$$

21. Feladat Oldjuk meg az $y'' = y'^3 + y'$ differenciálegyenletet!

$$\textbf{Megoldás: } y'' = y'^3 + y';$$

$$y' = z(y); y'' = z \cdot z'$$

$$z \cdot z' = z^3 + z;$$

$$z \neq 0$$

$$z \cdot z' = z^3 + z \, / : z$$

$$z' = z^2 + 1;$$

$$\frac{dz}{dy} = z^2 + 1;$$

$$\frac{dz}{z^2+1} = dy;$$

$$c_1 + y = \operatorname{arctg} z;$$

$$z = \operatorname{tg}(y + c_1);$$

$$y' = \operatorname{tg}(y + c_1);$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(y + c_1);$$

$$\frac{dy}{\operatorname{tg}(y+c_1)} = dx;$$

$$x = \int \frac{\cos(y + c_1)}{\sin(y + c_1)} dy = \ln|\sin(y + c_1)| + c_2$$

vizsgáljuk a $z = 0$ esetet, akkor $y = C$.

Felelet: $y = C$ vagy $x = \ln|\sin(y + c_1)| + c_2$

Feladatok

Oldja meg hiányos másodrendű differenciálegyenletet

13. $\varphi'' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \in (-1,1));$

14. $2\varphi\varphi'' + (\varphi')^2 + (\varphi')^4 = 0;$

15. $\varphi + \varphi'' = 0;$

16. $(x \cdot \ln x) \cdot \varphi'' - \varphi' = 0.$

17. $y'' = 6x,$

18. $yy'' - y'^2 + y'^3 = 0$

19. $xy'' - y' = 0.$

20. $(1 + \sin x)^2 y'' + \cos x = 0$

21. $y'' = 93y^3$, ha $y(1) = 1 \quad y'(1) = 7$

22. $yy'' = y'^2 + 2xy^2.$

23. $y''^2 - yy''' = \left(\frac{y'}{x}\right)^2.$

24. $y'' + \frac{2}{x} y' + y^2 = 0.$

25. $y'^2 + 2xyy'' = 0.$

26. $y''' + (y - 2)y' = 0.$
27. $y'''y'^2 = 1.$
28. $x^2(y^2y''' - y'^3) - 2y^2y' - 3xyy'^2 = 0.$
29. $y^2(y'y''' - 2y''^2) - yy'^2y'' = 2y'^4.$
30. $yy'y''' + 2y'^2y'' = 3yy''^2.$
31. $x^2yy'' + 1 = (1 - y)xy'.$
32. $y'' + 2yy'^2 = \left(2x + \frac{1}{x}\right)y'.$
33. $y(2xy'' + y') = xy'^2 + 1.$

A teljes differenciál kijelölése segítségével oldja meg:

34. $y'' = 2yy'.$
35. $yy''' - y'y'' = 0.$
36. $yy'' = y'.$
37. $y'' = y'^2y.$
38. $yy'' = y'(y' + 1).$
39. $y''y + y'^2 = 1.$
40. $xy'' = 2yy' - y'.$
41. $y'' = xy' + y + 1.$
42. $xy'' - y' = x^2yy'.$
43. $5y'''^2 - 3y''y'''' = 0.$

12. Állandó együtthatós magasabb rendű homogén lineáris differenciálegyenletek.

Definíció: Magasabb állandó függvény együtthatós lineáris differenciálegyenletnek nevezzük a következő alakú differenciálegyenletet:

$$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x),$$

ahol $a_1, a_2, \dots, a_n$ valós számok.

$$P(k) \equiv k^n + a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} + \dots + a_{n-1}k + a_n$$

karakterisztikus polinomnak nevezzük.

A polinom $k_1, k_2, \dots, k_n$ gyökeit karakterisztikus számoknak nevezzük.

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor a karakterisztikus polinom $k_1, k_2, \dots, k_n$ különböző valós számok. Ekkor az

$$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}, \dots, y_n = e^{k_n x}$$

függvények az állandó együtthatós egyenlet alaprendszeréé lesz.

Tehát az általános megoldás felírható

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \dots + C_n e^{k_n x},$$

alakban, ahol $C_1, C_2, \dots, C_n$ tetszőleges számok.

Az összes karakterisztikus szám különböző, de köztük vannak komplexek is, akkor minden egyes valós k gyök az e^{kx} megoldást adja és minden egyes konjugált komplex $a \pm bi$ gyökpár két valós lineárisan független részmegoldást $e^{ax} \cos bx$, $e^{ax} \sin bx$ alakban. Összeségében n valós részmegoldásunk van a következő alakban

$$e^{kx}, e^{ax} \cos bx, e^{ax} \sin bx,$$

melyek alaprendszert alkotnak.

A karakterisztikus polinom rendelkezik ismétlődő gyökökkel. Ekkor

$$e^{k_1 x}, x e^{k_1 x}, x^2 e^{k_1 x}, \dots, x^{s-1} e^{k_1 x}.$$

az egyenlet megoldásai. Amint az könnyen megmutatható, ezek lineárisan függetlenek a $(-\infty, +\infty)$ intervallumon. Ha a k_1 szám valós, akkor a függvények is valósak lesznek. Így minden s multiplicitású k_1 valós karakterisztikus számhoz s valós lineárisan független megoldás tartozik.

Ha van egy s multiplicitású $a+bi$ komplex karakterisztikus számunk, akkor az $a-bi$ konjugált szám is ugyanilyen multiplicitású karakterisztikus szám lesz. Az $a+bi$ szám s komplex megoldást von maga után:

$$e^{(a+ib)x}, x e^{(a+ib)x}, x^2 e^{(a+ib)x}, \dots, x^{s-1} e^{(a+ib)x}.$$

A valós és képzetes részek elkülönítésével $2s$ valós megoldást kapunk:

$$\begin{cases} e^{ax} \cos bx, & x e^{ax} \cos bx, \dots, & x^{s-1} e^{ax} \cos bx \\ e^{ax} \sin bx, & x e^{ax} \sin bx, \dots, & x^{s-1} e^{ax} \sin bx \end{cases}$$

22. Feladat Adjuk meg az $y'' + 5y' - 6y = 0$ egyenlet általános megoldását!

Megoldás:

Felírjuk a karakterisztikus polinomot:

$$P(k) = k^2 + 5k - 6;$$

Megkeressük a gyökeket:

$$k^2 + 5k - 6 = 0$$

$$k_1 = 1, k_2 = -6, .$$

Adjunk meg egy alaprendszert:

$$y_1(x) = e^x, y_2(x) = e^{-6x},$$

így az általános megoldás felírható: $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$ alakban.

Felelet: az egyenlet általános megoldása $y = C_1 e^x + C_2 e^{-6x}$ ahol C_1, C_2 , tetszőleges számok.

23. Feladat Adjuk meg az $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ egyenlet általános megoldását!

Megoldás:

Felírjuk a karakterisztikus polinomot:

$$P(k) = k^3 - 6k^2 + 11k - 6;$$

Megkeressük a gyökeket:

$$k^3 - 6k^2 + 11k - 6 = 0$$

$$k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 3 .$$

Adjunk meg egy alaprendszert:

$$y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}, y_3 = e^{3x},$$

így az általános megoldás felírható: $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$ alakban.

Felelet: az egyenlet általános megoldása $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$ ahol C_1, C_2, C_3 tetszőleges számok.

24. Feladat Adjuk meg az $y'' - 4y' + 5y = 0$ egyenlet általános megoldását!

Megoldás:

Felírjuk a karakterisztikus polinomot:

$$P(k) = k^2 - 4k + 5;$$

Megkeressük a gyökeket:

$$\begin{aligned} k^2 - 4k + 5 &= 0 \\ k_{1,2} &= 2 \pm i \end{aligned}$$

Adjunk meg egy alaprendszert:

$$y_1(x) = e^{2x} \cos x, \quad y_2(x) = e^{2x} \sin x,$$

így az általános megoldás felírható: $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ alakban.

Felelet: az egyenlet általános megoldása $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ ahol C_1, C_2 , tetszőleges számok.

25. Feladat Oldjuk meg a következő Cauchy feladatot:

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$$

Megoldás:

Első lépésként felírjuk a differenciálegyenlet általános megoldását. A karakterisztikus polinom:

$$P(k) = k^2 + 4;$$

Megkeressük a gyökeket:

$$\begin{aligned} k^2 + 4 &= 0 \\ k_{1,2} &= \pm 2i \end{aligned}$$

Adjunk meg egy alaprendszert:

$$y_1(x) = \cos 2x, \quad y_2(x) = \sin 2x,$$

így az általános megoldás felírható: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ alakban.

A kezdeti értékek segítségével meghatározzuk a C_1, C_2 számok értékét, felírjuk az $y(0)$ és $y'(0)$ kifejezéseket, majd a kapott egyenletrendszert megoldjuk

$$\begin{cases} C_1 + C_2 \cdot 0 = 1, \\ -2C_1 \cdot 0 + 2C_2 = 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 2, \end{cases} y = \cos 2x + 2\sin 2x$$

Felelet: a Cauchy feladat megoldása $y = \cos 2x + 2\sin 2x$.

26. Feladat Adjuk meg az $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ egyenlet általános megoldását!

Megoldás:

Felírjuk a karakterisztikus polinomot:

$$P(k) = k^3 - 3k^2 + 3k - 1;$$

Megkeressük a gyökeket:

$$\begin{aligned} k^3 - 3k^2 + 3k - 1 &= 0 \\ k_1 = k_2 = k_3 &= 1. \end{aligned}$$

Adjunk meg egy alaprendszer:

$$y_1(x) = e^x, y_2(x) = xe^x, y_3(x) = x^2e^x, y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x$$

,

így az általános megoldás felírható: $y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x$ alakban.

Felelet: az egyenlet általános megoldása $y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x$ ahol C_1, C_2, C_3 tetszőleges számok.

27. Feladat Adjuk meg az $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$ egyenlet általános megoldását!

Megoldás:

Felírjuk a karakterisztikus polinomot:

$$P(k) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1;$$

Megkeressük a gyökeket:

$$\begin{aligned} k^3 + 3k^2 + 3k + 1 &= 0 \\ k_1 = k_2 = k_3 &= -1. \end{aligned}$$

Adjunk meg egy alaprendszer:

$$y_1(x) = e^{-x}, y_2(x) = xe^{-x}, y_3(x) = x^2e^{-x},$$

,

így az általános megoldás felírható: $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3x^2e^{-x}$ alakban.

Felelet: az egyenlet általános megoldása $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3x^2e^{-x}$ ahol C_1, C_2, C_3 tetszőleges számok.

Feladatok:

Oldja meg

44. $y'' - 6y' + 9y = 0$

45. $y'' + 2y' + 5y = 0$

46. $y'' - 6y' + 25y = 0$

47. $y'' - 2y = 0.$

48. $y'' - 6y' + 8y = 0.$

49. $y'' - y' - 2y = 0.$

50. $y^{(n)} - y = 0.$

51. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0.$

52. $y'' + 4y = 0.$

53. $y^{(4)} - y = 0.$

54. $y''' - y = 0.$

55. $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0.$

56. $y'' = 0.$

57. $y''' + 8y = 0.$

58. $y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y''' = 0.$

59. $y^{(4)} - y = 0.$

60. $4y'' + 4y' + y = 0.$

61. $y^{(5)} - 10y''' + 9y' = 0.$

62. $y^{(4)} - 2y'' + y = 0.$

13. Állandó együtthatós magasabb rendű homogén lineáris differenciálegyenletekre visszavezethető differenciálegyenletek

Euler-féle homogén differenciálegyenek nevezzük:

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0.$$

Ebben az esetben az új változó

$$x = e^t.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
y'_x &= y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = y'_t \cdot e^{-t}, \\
y''_{x^2} &= (y''_{t^2} \cdot e^{-t} - y'_t \cdot e^{-t})e^{-t} = (y''_{t^2} - y'_t)e^{-2t}, \\
y'''_{x^3} &= (y'''_{t^3} - 3y''_{t^2} + 2y'_t)e^{-3t}, \dots, \\
y^{(n)}_{x^n} &= (y^{(n)}_{t^n} + \dots + (-1)^{n-1}(n-1)!y'_t)e^{-nt}.
\end{aligned}$$

Definíció: -Lagrange-féle differenciálegyenletnek nevezzük az

$$\begin{aligned}
(ax + b)^n y^{(n)} + (ax + b)^{n-1} p_1 y^{(n-1)} + \dots \\
\dots + (ax + b) p_{n-1} y' + p_n y = f(x),
\end{aligned}$$

ahol $a, b, p_1, p_2, \dots, p_n$ állandók.

Lagrange-féle differenciálegyenlet nem más, mint az Euler-féle egyenlet általánosítása. Ha az $ax + b = q$ helyettesítést használjuk, és $q = e^t$ -t jelölünk, vagy a független változót rögtön az $ax + b = e^t$ képlettel helyettesítjük, akkor a kezdeti egyenlet állandó együtthatós lineáris egyenletre redukálódik.

28. Feladat Adjuk meg az $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$ egyenlet általános megoldását!

Megoldás: Legyen

$$\begin{aligned}
x &= e^t, \\
y'_x &= y'_t \cdot e^{-t}, \\
y''_{x^2} &= (y''_{t^2} - y'_t)e^{-2t}.
\end{aligned}$$

Behelyettesítve a fenti kifejezéseket az eredeti egyenletbe, kapjuk:

$$e^{2t}(y'' - y')e^{-2t} - 4e^t y' e^{1-t} + 6y = 0.$$

Az utolsó egyenletben az ismertlen függvény $y = y(t)$.

$$y'' - y' - 4y' + 6y = 0;$$

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Felírjuk a karakterisztikus polinomot:

$$P(k) = k^2 + 5k + 6;$$

Megkeressük a gyökeket:

$$k^2 + 5k + 6 = 0$$

$$k_1 = 2 \quad k_2 = 3.$$

Adjunk meg egy alaprendszer:

$$y_1(t) = e^{2t}, y_2(t) = e^{3t},$$

így az általános megoldás felírható: $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$ alakban.

Végül visszahelyettesítjük $t = \ln x$ vagyis $e^t = x$ értéket

$$y(x) = C_1 x^2 + C_2 x^3$$

Felelet: az egyenlet általános megoldása $y(x) = C_1 x^2 + C_2 x^3$ ahol C_1, C_2 , tetszőleges számok.

29. Feladat Adjuk meg az $(x-2)^2 y'' - 3(x-2)y' + 4y = 0$ egyenlet általános megoldását!

Megoldás: Legyen

$$x - 2 = e^t, \text{ ekkor } x = e^t + 2, \text{ és } x'_t = e^t \text{ ezért;}$$

$$y'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = y'_t \cdot e^{-t};$$

$$y''_{x^2} = y''_{t^2} \cdot \frac{1}{x'^2_t} e^{-t} + y'_t \cdot e^{-t} \cdot (e^{-t})' = (y''_{t^2} - y'_t) e^{-2t}.$$

Behelyettesítve a fenti kifejezéseket az eredeti egyenletbe, kapjuk:

$$2t(y''_{t^2} - y'_t)e^{-2t} - 3e^t y'_t e^{-t} + 4y = 0$$

Az utolsó egyenletben az ismertlen függvény $y = y(t)$.

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

Felírjuk a karakterisztikus polinomot:

$$P(k) = k^2 - 4k + 4 = 0;$$

Megkeressük a gyökeket:

$$k^2 - 4k + 4 = 0$$

$$(k - 2)^2 = 0$$

$$k_1 = k_2 = 2.$$

Adjunk meg egy alaprendszer:

$$y_1(t) = e^{2t}, y_2(t) = t e^{2t},$$

így az általános megoldás felírható: $y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t}$ alakban.

Végül visszahelyettesítjük $t = \ln |x - 2|$ vagyis $e^t = x - 2$ értéket

$$y(x) = C_1(x - 2)^2 + C_2 \ln |x - 2| \cdot (x - 2)^2$$

Felelet: az egyenlet általános megoldása $y(x) = C_1(x - 2)^2 + C_2 \ln |x - 2| \cdot (x - 2)^2$ ahol C_1, C_2 , tetszőleges számok.

Feladatok

Oldja meg az állandó együtthatósra visszavezethető egyenletet:

1. $x^2 y'' - xy' + 4y = \cos(\ln x) + x \sin(\ln x)$

2. $x^2 \varphi'' - 3x\varphi' + 3\varphi = x;$

3. $(2x + 1)^2 \varphi'' - 4(2x + 1)\varphi' + 8\varphi = 0..$

4. $x^2 y'' - 3xy' + 4y = x + x^2 \ln x$

14. Magasabb rendű inhomogén lineáris differenciálegyenletek.

Vizsgáljuk

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

állandó együtthatós lineáris inhomogén n -ed rendű differenciálegyenletet, ahol $a_1, a_2, \dots, a_n$ - valós számok, az $f(x)$ függvény folytonos valamely (a, b) intervallumon.

Röviden így jelöljük:

$$L[y] = f(x) \quad (12.1)$$

ahol

$$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y$$

Ha a (12.1) egyenlet jobb oldala speciális alakú, akkor a próbafüggvény módszere használható az egyenlet parciális megoldásának meghatározására.

1. Eset Legyen az $f(x)$ függvény egy polinom és egy exponenciális függvény szorzata, vagyis

$$L[y] = R_m(x)e^{\alpha x},$$

ahol $R_m(x) = r_0x^m + r_1x^{m-1} + \dots + r_{m-1}x + r_m$ - m -ed rendű valós együtthatós polinom (ha $m=0$, akkor egy számról beszélünk) és α valós vagy komplex szám.

A) Legyen α egy nem karakterisztikus szám, azaz $P(\alpha) \neq 0$ ($P(\alpha)$ karakterisztikus polinom). Ekkor a (12.11) egyenlet $Y = Y(x)$ parciális megoldása a következőképpen írható fel:

$$Y = Q_m(x)e^{\alpha x} \quad (12.2)$$

ahol $Q_m(x) = q_0x^m + q_1x^{m-1} + \dots + q_{m-1}x + q_m$ - egy m -ed rendű ismeretlen együtthatós polinom.

B) Legyen α k multiplicitású karakterisztikus szám, azaz $P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$, ahol $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$. Ebben az esetben (12.2) alakú próbafüggvény segítségével parciális megoldása nem konstruálható, mert $P(\alpha) = 0$. Most a próbafüggvényt a következő alakban fogjuk keresni:

$$Y = x^k Q_m(x)e^{\alpha x}, \quad (12.4)$$

ahol $Q_m(x)$ - m -ed rendű ismeretlen együtthatós polinom.

2. Eset Legyen az $f(x)$ függvény a következő alakú

$$f(x) = e^{\alpha x} \left(R_m^{(1)}(x) \cos bx + R_m^{(2)}(x) \sin bx \right), \quad (12.4)$$

ahol $R_m^{(1)}(x)$ és $R_m^{(2)}(x)$ polinomok fokszáma m -nél nem magasabb, és legalább egyikük m fokú (lehetnek konstans számok is, egyikük lehet pontosan nulla).

Vagyis az egyenletünk így néz ki:

$$L[y] = e^{\alpha x} \left(R_m^{(1)}(x) \cos bx + R_m^{(2)}(x) \sin bx \right),$$

ekkor a próba függvény

$$Y(x) = e^{\alpha x} \left(Q_m^{(1)}(x) \cos bx + Q_m^{(2)}(x) \sin bx \right),$$

ahol $Q_m^{(1)}(x)$ és $Q_m^{(2)}(x)$ - ismeretlen együtthatós polinomok m fokszámmal.

30. Feladat Adjuk meg az $y'' + 3y' - 4y = 4x^2 + 3$ egyenlet általános megoldását!

Megoldás: Mivel ez egy magasabb rendű állandó együtthatós inhomogén egyenlet, ezért az általános megoldás a következő alakban keresendő:

$$y = y_0 + Y$$

ahol y_0 a homogén egyenlet általános megoldása, Y az inhomogén egyenlet egy parciális megoldása

Oldjuk meg $y'' + 3y' - 4y = 0$ homogén egyenletet!

Akkor a karakterisztikus polinom és karakterisztikus számok:

$$k^2 + 3k - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 1, \\ k_2 = -4 \end{cases}$$

így az általános megoldás: $y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}$.

Határozzuk meg az inhomogén egyenlet parciális megoldását! A jobb oldal $R_m(x)e^{\alpha x}$ alakú, ahol $\alpha = 0$ i $m = 2$, az α nem karakterisztikus szám, így a próbafüggvény:

$$Y = Ax^2 + Bx + C.$$

Kiszámoljuk a próbafüggvény megfelelő deriváltjait:

$$Y' = 2Ax + B, Y'' = 2A.$$

majd visszahelyettesítjük a kezdeti egyenletbe:

$$\begin{aligned} 2A + 3(2Ax + B) - 4(Ax^2 + Bx + C) &= 4x^2 + 3 \\ -4Ax^2 + (6A - 4B)x + 2A + 3B - 4C &= 4x^2 + 3. \end{aligned}$$

Meghatározzuk az ismeretlen együtthatókat:

$$\begin{aligned} x^2 \quad &-4A = 4, \\ x^1 \quad &6A - 4B = 0, \\ x^0 \quad &2A + 3B - 4C = 3, \end{aligned}$$

tehát $A = -1, B = -3, C = -4$.

Vagyis $Y = -x^2 - 3x - 4$.

Így az általános megoldás felírható: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} - x^2 - 3x - 4$.

Felelet: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} - x^2 - 3x - 4$.

Feladatok

Oldjuk meg az állandó a próbafüggvény módszerével:

1. $y'' + 5y' + 4y = 3 - 2x - x^2$
2. $y'' - 6y' + 13y = x + 3 \sin x$
3. $y'' + 6y' + 9y = 2e^{-3x}$
4. $y'' - 6y' + 25y = 6e^{2x}$

5. $y'' + 2y' + 5y = -4x^2 \cos(2x)$
6. $y'' - 6y' + 13y = (8x + 4)e^{3x}$
7. $y'' + 3y' = 6 + 9 \sin 3x + 4e^{-3x}$
8. $y'' - 2y' - 3y = 2 \cos 3x$
9. $y'' + 6y' + 34y = 17x^2 - 62x + 23$
10. $y'' - y = (2x + 3)e^x + xe^{2x}$
11. $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 2)$
12. $y'' - y = xe^x \sin x.$
13. $y'' + y = x \cos x.$
14. $y'' + y' = e^{-x} + 2x - 1.$
15. $y'' + 7y' + 10y = xe^{-2x} \cos 5x.$
16. $y''' + y' = \sin x + x \cos x.$
17. $y'' - 2y' + 5y = 2xe^x + e^x \sin 2x.$
18. $y'' - 6y' + 8y = 5xe^x + 2e^{4x} \sin x.$
19. $y''' - y' = e^x \sin x + 2x^2.$
20. $y'' + 4y = \cos x \cdot \cos 3x.$
21. $y'' - 6y' + 13y = x^2 e^{3x} - 3 \cos 2x.$
22. $y'' - 2y' + 2y = (x + e^x) \sin x.$
23. $y^{(4)} + 5y'' + 4y = \sin x \cdot \cos 2x.$
24. $y'' + 4y = x^2 \sin^2 x.$
25. $y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = e^x(\sin x + x \cos x).$
26. $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = e^{2x} \sin 2x + 2x^2.$
27. $y'' - 8y' + 20y = 5xe^{4x} \sin 2x.$
28. $y'' - 2y' + y = 2xe^x + e^x \sin 2x.$
29. $y'' + y' + ky = x.$
30. $y'' + ky = e^{ax}.$

Felhasznált irodalom

1. Lajkó Károly Differenciálegyenletek/Debrecen. : Egyetemi Kiadó, 2003 – 83 old.
2. Lajkó Károly Kalkulus II. példatár - II.kötet a kalkulus II. és a differenciálegyenletek tárgyakhoz Debrecen. : Egyetemi Kiadó, 2003
3. Lajkó Károly Analízis III Debrecen. : Egyetemi Kiadó, 2003
4. Самойленко А. М., Парасюк І.О., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння. Підручник Либідь, 2003, - 600 стор
5. Перестюк М Збірник задач з диференціальних рівнянь: Навч.посібник К.ТВиМС, 2004 224 стор

Диференціальні рівняння методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Диференціальних рівнянь» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання, освітня програма: «Середня освіта (Інформатика)» галузь знань: «01 Освіта/Педагогіка», спеціальність (спеціалізація): «014 Середня освіта (014.09 Інформатика)», «Середня освіта (Математика)» галузь знань: «01 Освіта/Педагогіка», спеціальність (спеціалізація): «014 Середня освіта (014.04 Математика)»/ Розробник: Кучінка К. – Берегове: ЗУІ ім. Ф.Ракоці II, 2024. 52 с. (угорською мовою).

Навчально-методичне видання розроблене на основі Освітньої програми підготовки бакааврів з галузі знань «01 Освіта/Педагогіка» за напрямом «014 Середня освіта (Інформатика)», «014 Середня освіта (Математика)» та діючого законодавства з метою забезпечення здобувачів освіти денної та заочної форм навчання Закарпатського угорського інституту ім. Ф.Ракоці II методичними вказівками до вивчення дисципліни «Диференціальних рівнянь». У методичних вказівках розкрито зміст, структуру, програму навчальної дисципліни та наведено завдання для практичних занять.

Диференціальні рівняння/ Közönséges differenciálegyenletek

Методичні вказівки до практичних занять

2024 р.

Затверджено до використання у навчальному процесі на засіданні кафедри математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II (протокол № 1 від «13» серпня 2024 року)

Розглянуто та рекомендовано Навчально-методичною радою Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II (протокол № 26 серпня 2024 року)

Рекомендовано до видання в електронній формі (PDF) рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II (протокол № 7 від 27 серпня 2024 року)

Підготовлено до видання в електронній формі (PDF) кафедрою математики та інформатики спільно з Видавничим відділом Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Розробники методичних вказівок:

Рецензенти:

Ганна Сливка-Тилищак – завідувач кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу УжНУ, доктор фізико-математичних наук, професор (м. Ужгород)

Мирослав СТОЙКА – доцент кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Відповідальні за випуск:

Каталін КУЧІНКА – завідувач кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II, доцент, кандидат фізико-математичних наук

Олександр ДОБОШ – начальник Видавничого відділу ЗУІ ім. Ф.Ракоці II

За зміст методичних вказівок відповідальність несуть розробники.

Видавництво: Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II (адреса: пл. Кошута 6, м. Берегове, 90202. Електронна пошта: foiskola@kmf.uz.ua) *Статут «Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II» (Затверджено протоколом загальних зборів Благодійного фонду За ЗУІ, протокол №1 від 09.12.2019р., прийнято Загальними зборами ЗУІ ім. Ф.Ракоці II, протокол №2 від 11.11.2019р., зареєстровано Центром надання адміністративних послуг Берегівської міської ради, 12.12.2019р.)*

Шрифт «Times New Roman». Розмір сторінок методичних вказівок: А4 (210x297мм).