

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
UKRAJNA OKTATÁSI ÉS TUDOMÁNYOS MINISZTERIUMA**

**Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II
II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola**

**Кафедра математики та інформатики
Matematika és Informatika Tanszék**

dr. Kucsinka Katalin

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

курс лекцій

**Közönséges differenciálegyenletek
előadás jegyzet**



Beregszász, 2024

Навчально-методичне видання розроблене на основі Освітньої програми підготовки бакалаврів з галузі знань «01 Освіта/Педагогіка» за напрямом «014 Середня освіта (Інформатика)», «014 Середня освіта (Математика)» та діючого законодавства з метою забезпечення здобувачів освіти денної та заочної форм навчання Закарпатського угорського інституту ім. Ф.Ракоці II методичними вказівками до вивчення дисципліни «Диференціальних рівнянь». У методичних вказівках розкрито зміст, структуру, програму навчальної дисципліни та наведені необхідні теоритичні відомості.

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II
(протокол № 1 від «13» серпня 2024 року)

Розглянуто та рекомендовано Навчально-методичною радою
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол №22 від «26» серпня 2024 року)

Рекомендовано до видання в електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту імені
Ференца Ракоці II (протокол №7 від « 27» серпня 2024 року)

Підготовлено до видання в електронній формі (PDF) кафедрою математики та
інформатики спільно з Видавничим відділом Закарпатського угорського інституту імені
Ференца Ракоці II

Розробник методичних вказівок:

Каталін КУЧІНКА – завідувач кафедри математики та інформатики Закарпатського
угорського інституту імені Ференца Ракоці II, доцент, кандидат фізико-
математичних наук

Рецензенти:

Ганна Сливка-Тилищак – завідувач кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу
УжНУ, доктор фізико-математичних наук, професор (м. Ужгород)

Мирослав СТОЙКА – доцент кафедри математики та інформатики Закарпатського
угорського інституту імені Ференца Ракоці II, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Відповідальні за випуск:

Каталін КУЧІНКА – завідувач кафедри математики та інформатики Закарпатського
угорського інституту імені Ференца Ракоці II, доцент, кандидат фізико-
математичних наук *Олександр ДОБОШ* – начальник Видавничого відділу ЗУІ ім.
Ф.Ракоці II

За зміст методичних вказівок відповідальність несе розробник.

Видавництво: Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II (адреса: пл.
Кошута 6, м. Берегове, 90202. Електронна пошта: foiskola@kmf.uz.ua)

© Каталін Кучінка, 2024

© Кафедра математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II, 2024

A módszertani kiadvány a hatályos jogszabályok alapján készült, melynek célja, hogy a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola a nappali és levelező tagozatos hallgatóinak módszertani útmutatást adjon a „Differenciálegyenletek” című tantárgy elsajátításához. A kiadványban a szerző leírja a tantárgy tartalmát, felépítését és programját, valamint kurzus teljesítéséhez szükséges elméleti tananyagot.

Az oktatási folyamatban történő felhasználását jóváhagyta a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszéke
(2024. augusztus 13, 1. számú jegyzőkönyv).

Megjelentetésre javasolta a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Oktatási és Módszertani Tanácsa
(2024. augusztus 26., 22. számú jegyzőkönyv).

Elektronikus formában (PDF fájlformátumban) történő kiadásra javasolta a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Tudományos Tanácsa
(2024. augusztus 27., 7. számú jegyzőkönyv).

Kiadásra előkészítette a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszéke, valamint Kiadói Részlege.

A módszertani útmutató kidolgozója:
KUCSINKA KATALIN –fiz.-mat. tud. kandidátusa(PhD), docens, a Matematika és Informatika Tanszék vezetője.

Szakmai lektorok:

Slyvka-Tylyshchak Ganna – Az UNE Információs vezérlési Rendszerek és Technológiák Tanszékének vezetője, a fizikai és matematikai tudományok doktora, professzor

SZTOJKA Mirosláv – a fizikai és matematikai tudományok kandidátusa, docens, a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének docense

A kiadásért felelnek:

KUCSINKA Katalin – PhD, a fizikai és matematikai tudományok kandidátusa, a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének tanszékvezetője és docense

DOBOS Sándor – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Kiadói Részlegének vezetője

A segédlet tartalmáért kizárólag a módszertani útmutató kidolgozója felel.

Kiadó: II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola (cím: 90 202, Beregszász, Kossuth tér 6. E-mail: foiskola@kmf.uz.ua)

© Kucsinka Katalin, 2024

© A II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszéke,
2024

Tartalom

A tantárgy leírása	5
Az előadások témakörei	6
1. Differenciálegyenletek és a matematikai modellezés	7
2. Elemi úton megoldható differenciálegyenletek	9
3. Homogénfokszámú és homogénfokszámúra visszavezethető differenciálegyenletek	13
4. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek. Lineárisra visszavezethető differenciálegyenletek	18
5. Egzakt és egzakra visszavezethető differenciálegyenletek.....	21
6. Elsőrendű implicit alakú differenciálegyenletek	27
7. Magasabb rendű differenciálegyenletek fogalma. Hiányos magasabb rendű differenciálegyenletek	31
8. Magasabb rendű lineáris differenciálegyenletek partikuláris megoldásai. Lineárisan független függvény rendszerek.	33
9. Állandó együtthatós magasabb rendű homogén lineáris differenciálegyenletek.....	35
10. Állandó együtthatós magasabb rendű homogén lineáris differenciálegyenletekre visszavezethető differenciálegyenletek	40
11. Állandó együtthatós magasabb rendű homogén lineáris differenciálegyenletek.....	42
12. Magasabb rendű inhomogén lineáris differenciálegyenletek. Lineáris inhomogén állandó együtthatós egyenletek megoldása próbafüggvény módszere.....	46
Felhasznált irodalom	49

A tantárgy leírása

Найменування показників / A jellemzők megnevezése	Характеристика навчальної дисципліни / A tantárgy jellemzői	
	денна форма навчання / nappali tagozat	заочна форма навчання/ levelező tagozat
Кількість кредитів / Kreditszám – 5	Обов'язкова / Kötelező	
	Курс / Évfolyam:	
	3.	
	Семестр / Félév	
	6.	
	Лекції / Előadások	
	28 год/22 óra	6 год/6 óra
	Практичні, семінарські/ Gyakorlati, szeminárium	
	32 год/32 óra	0 год/0 óra
	Лабораторні/Laboratóriumi	
	0 год	0 óra
	Самостійна робота/Önálló munka	
	90 год/90 óra	144 год/144 óra
	Вид контролю:/Az ellenőrzés formája: Іспит/Vizsga	

A tantárgy általános ismertetése

A Közönséges differenciálegyenletek tárgy BSc szintű képzéshez készült képzési terület: «01 Oktatás/Peadgógia» képzési szakirány 014 Középsikolai oktatás (Matematika) és 014 Középsikolai oktatás (Informatika) programokhoz.

A tantárgy célja, hogy megismertesse a hallgatót a differenciálegyenletek alapvető fogalmaival és eredményeivel. Tegye képessé arra, hogy önállóan gondolkodva tudjon feladatokat megoldani, olyanokat, melyek illeszkednek az előadás anyagához. A félév során a hallgató alkalmazhatja azokat az ismereteket, megoldási módszereket, amelyek a matematikai analízis. tantárgy tanulása közben elsajátított.

A kurzus során a hallgató által elsajátítandó általános és szakmai kompetenciákkal ill. a a program eredményeivel a tantárgy syllabuszában lehet megismerkedni.

Az előadások témakörei

1. Differenciálegyenletek és a matematikai modellezés
2. Elemi úton megoldható differenciálegyenletek
3. Homogénfokszámú és homogénfokszámúra visszavezethető differenciálegyenletek
4. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek. Lineárisra visszavezethető differenciálegyenletek
5. Egzakt és egzakra visszavezethető differenciálegyenletek
6. Elsőrendű implicit alakú differenciálegyenletek
7. Magasabb rendű differenciálegyenletek fogalma. Hiányos magasabb rendű differenciálegyenletek
8. Magasabb rendű lineáris differenciálegyenletek partikuláris megoldásai. Lineárisan független függvény rendszerek.
9. Állandó együtthatós magasabb rendű homogén lineáris differenciálegyenletek.
10. Állandó együtthatós magasabb rendű homogén lineáris differenciálegyenletekre visszavezethető differenciálegyenletek
11. Állandó együtthatós magasabb rendű homogén lineáris differenciálegyenletek.
12. Magasabb rendű inhomogén lineáris differenciálegyenletek. Lineáris inhomogén állandó együtthatós egyenletek megoldása próbafüggvény módszere

1. Differenciálegyenletek és a matematikai modellezés

A különböző fizikai jelenségek, a tudomány és a technológia számos területén zajló technológiai folyamatok, a közgazdaságtanban, az ökológiában és más társadalomtudományokban felmerülő egyes folyamatok tanulmányozása során nem mindig lehetséges közvetlenül nyomon követni az adott folyamatot vagy jelenséget leíró értékek közötti kapcsolatot. Sok esetben azonban lehetséges a folyamat meghatározó jellemzői (függvények), azok változási sebessége és az idő közötti funkcionális kapcsolat kimutatása, azaz a kívánt függvényeket és azok deriváltjait tartalmazó egyenletek megtalálása. Az ilyen egyenleteket differenciálegyenleteknek nevezzük, az ismeretlen függvény (megoldás) megtalálását pedig differenciálegyenlet integrálásnak nevezzük.

Egy valós jelenség vagy folyamat vizsgálata során kapott differenciálegyenletet e jelenség vagy folyamat differenciálmodelljének nevezzük. A differenciálmodelleket az általuk leírt valós objektumok dinamikus matematikai modelljeinek is nevezik. Az ilyen modellek a kívánt függő változókon kívül tartalmazzák a keresett függvények (sebesség, gyorsulás stb.) deriváltjait is. A differenciálmodellek segítenek megérteni a vizsgált jelenségeket és folyamatokat, lehetővé teszik állapotuk minőségi és mennyiségi jellemzőinek megállapítását, és felhasználhatók a folyamatok fejlődési mechanizmusának leírására és további fejlődésének előrejelzésére a gyakran túl költséges vagy lehetetlen jellegű valódi kísérletek nélkül.

Feladat: Adjuk meg a tudományos információáramlás növekedésének törvényét (a tudományos publikációk számának növekedése), ha tudjuk, hogy a növekedési ráta egyenesen arányos a publikációk számának elért szintjével. Határozza meg, hogy mennyi időbe telik, amíg a publikációk száma megduplázódik a kiindulási számhoz képest, ha a relatív növekedési ráta 7%.

Legyen $y(t)$ a publikációk száma t időpontban, y_0 pedig a kezdeti publikációk száma, azaz $y(0)=y_0$. Az információáramlás növekedési üteme mint változás mértéke

$$y'(t) = ky(t)$$

ahol $k>0$, k az arányossági tényező, amely egy adott tudományterületen a publikációk értékeléseit jellemzi.

A későbbiek megtanuljuk, hogy a vizsgált egyenlet megoldása

$$y(t) = y_0 e^{kt},$$

ahol $y(0) = y_0$ kezdetben a publikációk száma.

Most megkeressük azt a T időt, amely alatt a tudományos információáramlás a kezdeti mennyiséghez képest megduplázódik. A feladat feltétele szerint az információáramlás növekedésének relatív y'/y üteme 7%, tehát $k=0,07$. Mivel $y(T) = 2y_0$, akkor

$$y(T) = y_0 e^{kT} = 2y_0 \Rightarrow T = \frac{\ln 2}{0,07} \approx 10 \text{ év.}$$

Alapfogalmak.

Azokat az egyenleteket, amelyekben az ismeretlen függvény és deriváltjai is előfordulnak differenciálegyenletnek nevezzük.

Definíció: A közönséges differenciálegyenletnek nevezzük x független változó és az $y = y(x)$ függőváltozó valamint az $y', y'', \dots, y^{(n)}$ deriváltjai közötti összefüggést:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.1)$$

ahol F folytonos függvény.

A fenti definícióban használt jelölés nem lényeges: a független változót jelölhetjük t -vel, a keresett függvényt lehet s, f, φ s.

Definíció: Egy közönséges differenciálegyenlet rendjének nevezzük az egyenletben szereplő ismeretlen függvény legnagyobb deriváltjának rendjét.

Az (1.1) egyenletben feltételezzük, hogy a kívánt függvény n -edik rendű deriváltja valóban szerepel az egyenletben, míg a többi paraméter jelenléte opcionális.

Az alábbiakban példákat találunk a közönséges differenciálegyenletekre:

$$y = xy' + y'^3, \quad y' + |y'| = 0, \quad y'' + y = \cos x, \\ y^{IV} - 4y''' + 5y'' - 2y' + y = xe^x, \quad y^{(10)} = x.$$

Перші два з наведених рівнянь мають перший порядок, третє рівняння - другий порядок, четверте рівняння - четвертий порядок, п'яте - десятий порядок.

Az első két egyenlet elsőrendű, a harmadik egyenlet másodrendű, a negyedik egyenlet negyedrendű, az ötödik egyenlet pedig tizedrendű.

Ha egy differenciálegyenlet egy ismeretlen függvény több független változó szerinti parciális deriváltjait tartalmazza, akkor parciális differenciálegyenletről beszélünk. Nézzünk néhány példát az ilyen egyenletekre:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z).$$

A továbbiakban csak közönséges differenciálegyenleteket fogunk vizsgálni, és mind a független változót, mind a keresett függvényt valósnak tekintjük.

Definíció: valamely (a, b) , $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, nyílt intervallumon az (1.1) egyenlet megoldásának nevezzük az n -szer differenciálható $y = y(x)$ függvényt, amelyre teljesül

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) \equiv 0$$

tetszőleges $x \in (a, b)$ esetére.

Példa. Az $y = \cos 2x$ megoldása az $y'' + 4y = 0$ másodrendű differenciálegyenletnek a $(-\infty, +\infty)$.

Ezt könnyen ellenőrizhetjük, ha a másodrendű derivált értékét behelyettesítjük. De zgyanígy megoldás lesz $y = \sin 2x, y = 3\cos 2x, y = \cos 2x - \sin 2x$. Sőt általában minden $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ alakú függvény megoldása a vizsgált egyenletnek, ahol C_1, C_2 tetszőleges számok.

Geometria szempontból egy differenciálegyenlet megoldása a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben egy görbének felel meg, amelyet integrálgörbének nevezünk.

A tetszőleges konstansoktól függő integrálgörbék halmazát integrál görbesereg nevezzük.

Például az $y'' = 2$ egyenlet megoldásai az $y = x^2 + C_1 x + C_2$ parabolák kétparaméteres görbeseregét alkotják, amelyek mindegyike egy-egy integrálgörbe.

A differenciálegyenletek tantárgy keretein belül a fő feladata a A differenciálegyenletek elméletének fő feladata az összes megoldásának megtalálása és tulajdonságaik tanulmányozása összes megoldásának megtalálása és tulajdonságaik tanulmányozása.

2. Elemi úton megoldható differenciálegyenletek

Az elsőrendű differenciálegyenletet általános módon fel lehet írni az alábbi formában

$$F(x, y, y') = 0,$$

ahol x egy független változó, y az x ismeretlen függvénye, $F(x, y, y')$ az $x, y, y' = \frac{dy}{dx}$ változók adott függvénye.

Ha a (2.1) egyenlet megoldható a derivált vonatkozásában, akkor végül is a következő alakban írható fel.

$$y' = f(x, y).$$

A differenciálegyenlet ilyen formában történő felírását **normál vagy explicit alaknak** nevezzük.

Ebben az alakban gyakran előfordul, hogy elemi úton megoldható differenciálegyenleteket kapunk.

Lássunk néhány esetet!

1. Explicit alakú elsőrendű differenciálegyenlet

a) $y' = f(x);$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$y = \int f(x)dx + c, \text{ ahol } c\text{-állandó};$$

b) $y' = f(y)$

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \quad (f(y) \neq 0 \text{ mivel, ha } f(y) = 0 \text{ akkor } y = c)$$

$$\frac{dy}{f(y)} = dx;$$

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int dx + c, \text{ ahol } c\text{-állandó.}$$

Nézzünk egy példát!

Példa: Oldjuk meg az elsőrendű differenciálegyenletet: $y' = y - 1$!

Megoldás: Vizsgáljuk az első esetet, ha $y = 1$, ekkor $y' = 0$, így $y = c$, azaz $y = 1$; abban az esetben, ha $y \neq 1$, akkor rendezés után kapjuk:

$$\frac{dy}{y-1} = dx;$$

az integrálást követően:

$$\ln|y-1| = x + \ln C_1;$$

$$\text{így } |y-1| = Ce^{x^2}$$

Felelet: $y = 1$; $y = 1 + Ce^x$, $y = 1 - C \cdot e^x$; $C > 0$.

c) $y' = f(x)g(y)$

két részesetet vizsgálunk:

$$\text{A) } g(y) = 0 \Rightarrow y^* = C_1$$

$$\text{B) } g(y) \neq 0 \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

integrálás után kapjuk:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C_2.$$

Tehát az egyenlet megoldása felírható $y = C_1$ vagy a B) pontban kapott integrálegyenlet megoldásaként.

Példa: Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet: $y' = x + xy^2$

Megoldás: Rendezés után kapjuk: $y' = x(1 + y^2)$ 1

két részesetet vizsgálunk:

A) $y = 0; y = 0;$

B) $y \neq 0$, akkor

$$\frac{dy}{1 + y^2} = x dx$$

Integrálás után kapjuk:

$$\arctg y = \frac{x^2}{2} + C$$

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

Felelet: $y = 0$; vagy $y = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$.

2. Szétválasztható változójú elsőrendű differenciálegyenlet

Definíció: Az

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \quad (2.1)$$

alakú differenciálegyenletet szétválasztható változójúnak vagy szeparábilisnek nevezzük.

A fenti egyenlet integrálásához biztosítani kell, hogy a dx előtt álló együttható csak x -től, a dy előtti együttható pedig csak y -től függjön. Ezt úgy érjük el, hogy az egyenlet mindkét oldalát elosztjuk az $M_2(x)N_1(y)$, szorzatával, természetesen feltételezve, hogy $\begin{cases} N_1(y) \neq 0 \\ M_2(x) \neq 0 \end{cases}$.

Megszorozzuk az egyenlet mindkét oldalát

$$\mu = \frac{1}{N_1 M_2}.$$

Ezután megkapjuk

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = 0. \quad (2.2)$$

A z utolsó egyenletet differenciálok egyenlőségének tekinthetjük, így az integrálok egy konstanssal különböznek a differenciáloktól, azaz.

$$\int_{x_0}^x \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \int_{y_0}^y \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = C,$$

ahol C egy tetszőleges konstans, x_0, y_0 pedig az egyenlet együtthatóinak folytonossági tartományából származó számok. Ez az összefüggés az eredeti egyenlet általános megoldása. Felírható a következő formában is

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = C,$$

mert a változó felső határú határozott integrálok és a határozatlan integrálok ugyanazon függvények primitívjei, és ezért csak a C -be felvehető konstansokban különböznek.

Ha az a szám megoldása az $M_2(x) = 0$, egyenletnek, akkor $x = a$ a (2.1) egyenlet megoldása, mivel $dx = 0$, és $M_2(a) = 0$. Hasonlóképpen, ha b az $N_1(y) = 0$ egyenlet gyöke, akkor $y = b$ a (2.1) egyenlet gyöke.

A (2.2) differenciálegyenletet általánosabb formában is felírhatjuk:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

Az általános megoldás felírható a következő alakban:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C.$$

Példa: Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$x(y^2 - 1)dx - y(x^2 - 1)dy = 0$$

Megoldás: Rendezés után kapjuk

$$\mu = \frac{1}{(y^2-1)} \cdot \frac{1}{(x^2-1)}$$

ha $y \neq \pm 1; x \neq \pm 1$

$$\frac{x}{x^2-1} dx = \frac{y}{y^2-1} dy$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{x^2-1} = \frac{1}{2} \int \frac{dy^2}{y^2-1} + \frac{1}{2} \ln C$$

$$\ln|x^2-1| = \ln|y^2-1| + \ln C$$

$$\frac{x^2-1}{y^2-1} = C$$

$$x^2-1 = y^2 C - C$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{x^2-1+C}{C}}$$

így megkaptuk az általános megoldást.

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy $|x| = 1$ $|y| = 1$ szintén megoldásai az egyenletnek.

Felelet: $|x| = 1, |y| = 1, = \pm \sqrt{\frac{x^2-1+C}{C}}$

3. Homogénfokszámú és homogénfokszámúra visszavezethető differenciálegyenletek

Definíció: Az $f(x, y)$ m -ed rendű homogénfokszámú függvénynek nevezzük, ha tetszőleges x, y, t estére teljesül:

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y).$$

Például: $f_1(x, y) = \sqrt[3]{2x^3 + y^3}$ első rendű homogénfokszámú függvény, és $f_2(x, y) =$

$\arcsin \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 0-ad rendű homogénfokszámú függvény

$$f_1(tx, ty) = \sqrt[3]{2(tx)^3 + (ty)^3} = t \cdot \sqrt[3]{2x^3 + y^3} = t^1 \cdot f_1(x, y),$$

$$f_2(tx, ty) = \arcsin \frac{(tx)^2 - (ty)^2}{(tx)^2 + (ty)^2} = \arcsin \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = t^0 \cdot f_2(x, y).$$

Definíció: A következő alakú differenciálegyenletet:

$$y' = f(x, y) \quad (3.1)$$

homogén differenciálegyenletnek nevezzük, ha $f(x, y)$ egy 0-ad rendű homogén függvény.

Következmény: Az $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ alakú egyenlet homogénfokszámú differenciálegyenlet, ha $M(x, y)$ és $N(x, y)$ azonos rendű homogénfokszámú függvények.

Tétel: Bármely homogén differenciálegyenletet változó csere segítségével visszavezethetünk szétválasztható változójú differenciálegyenletre.

Bizonyítás: Megmutatjuk, hogy egy tetszőleges homogén differenciálegyenlet visszavezethető szétválasztható változójú egyenletre. Ha a (3.1) egyenlet jobb oldala egy 0-ad rendű homogén fokszámú függvény, akkor definíció szerint $f(tx, ty) = f(x, y)$. Ha $t = 1/x$ -et helyettesítjük, akkor $(x, y) = f(1, y/x)$, és így a (3.1) egyenletet felírhatjuk $y' = f(1, y/x)$ alakban, ami azt mutatja, hogy a (3.1) alakú homogén egyenletben a jobb oldal valójában csak az y/x törttől függ. Ezt szem előtt tartva, helyettesítsük $u = y/x$, azaz

$$y = ux$$

ahol $u = u(x)$ az x változó egy új függvénye. Ekkor

$$y' = u'x + u \Rightarrow u'x + u = f(1, u) \Rightarrow x \frac{du}{dx} = f(1, u) - u.$$

Tehát szétválasztható változójú egyenletet kaptunk. van. Integráljuk azt:

$$\frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x} \quad (f(1, u) \neq u, x \neq 0) \Rightarrow$$

$$\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \ln |x| + C.$$

Ha bevezetjük a következő jelölést: $F(u) \equiv \int \frac{du}{f(1, u) - u}$, akkor a (3.1) homogén egyenlet általános integrálja a következőképpen írható fel

$$F(y/x) = \ln |x| + C.$$

A (3.1) homogén egyenlet megoldásai lehetnek az $y = ax (x \neq 0)$, függvények is, ahol $f(1, a) = a$ és $x = 0 (y \neq 0)$, ami a változók szétválasztásakor elveszhet. Ezek a szinguláris megoldások lehetnek.

Példa: Oldjuk meg a differenciálegyenletet:

$$x \sin \frac{y}{x} - y \cos \frac{y}{x} + xy' \cos \frac{y}{x} = 0.$$

Megoldás:

$$x \sin \frac{y}{x} - y \cos \frac{y}{x} + xy' \cos \frac{y}{x} = 0;$$

$$\left(\sin \frac{y}{x} - \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} \right) + 8 \cos \frac{y}{x} \cdot y' = 0;$$

$$y' = - \frac{\left(\sin \frac{y}{x} - \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} \right)}{8 \cos \frac{y}{x}}, \quad \text{ha } \cos \frac{y}{x} \neq 0;$$

$$f(x, y) = - \frac{\left(\sin \frac{y}{x} - \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} \right)}{8 \cos \frac{y}{x}} \text{ homogén fokszámú függvény } n = 0.$$

Vezessük be a következő változót: $\frac{y}{x} = t$; így $y' = t + x \frac{dt}{dx}$.

Ezeket az eredeti egyenletbe helyettesítve kapjuk:

$$\sin t - t \cos t + \left(t + x \frac{dt}{dx} \right) \cos t = 0;$$

$$\sin t - t \cos t + t \cdot \cos t + x \cdot \cos t \frac{dt}{dx} = 0;$$

$$\frac{\cos t}{\sin t} \frac{dt}{dx} \cdot x = -1;$$

$$\frac{\cos t}{\sin t} dx = - \frac{dx}{x}.$$

Integrálás után kapjuk:

$$\ln |\sin t| = -\ln |x| + \ln C;$$

$$\sin t = \frac{c}{x};$$

A t változó helyére vissza helyettesítve az eredeti értéket kapjuk:

$$\sin \frac{y}{x} = C.$$

Felelet: $\sin \frac{y}{x} = C.$

Homogénfokszámú differenciálegyenletre visszavezethető egyenletek.

Vizsgáljuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \quad (3.2)$$

ahol $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ – állandó; c_1, c_2 nullától különböző számok.

Tétel: A (3.2) képletben szereplő differenciálegyenlet változó csere segítségével visszavezethető homogénfokszámú differenciálegyenletre.

Bizonyítás: Vezessük be a következő jelölést:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

A továbbiakban 2 esetet vizsgálunk:

1) $\Delta \neq 0$, tehát $a_1b_2 \neq a_2b_1$, válaszuk ki az α és β állandókat úgy, hogy azok megoldásai legyenek a következő egyenletrendszernek:

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Mivel $\Delta \neq 0$, ezért a fenti egyenletrendszerből az α és β egyértelműen meghatározható.

A (3.2) egyenlet estére végezzük el a következő változó cserét: $x = \xi + \alpha$, $y = \eta + \beta$, ahol ξ , η új változó, α és β (3.3) egyenletrendszer megoldása. Ekkor

$$\begin{aligned} dy &= d\eta; \\ dx &= d\xi. \end{aligned}$$

Így

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \left(\frac{a_1\xi + b_1\eta + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a_2\xi + b_2\eta + a_2\alpha + b_2\beta + c_2} \right),$$

mivel α és β (3.3) egyenletrendszer megoldása ezért

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta} \right)$$

az utolsó egyenlet homogén fokszerű.

2) $\Delta = 0$, $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ tehát $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda$, ahol λ – állandó.

Vezessük be a következő változót:

$$z \doteq a_2x + b_2y.$$

Így: $z' = a_2 + b_2y'$, a (3.2)-es egyenletet rendezve és a fenti változót helyettesítve kapjuk:

$$y' = \frac{\lambda(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2};$$

$$(z' - a_2) \frac{1}{b_2} = \frac{\lambda \cdot z + c_1}{z + c_2}.$$

Az utóbbi pedig egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. $\square$

Következmény: A fenti helyettesítések segítségével az

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right),$$

egyenlet is visszavezethető homogénfokszerű differenciálegyenletre, ahol $f(u)$ – folytonos függvény.

Példa: Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$y' = 2 \left(\frac{y+1}{x+y-2} \right)^2$$

Megoldás: $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$

1) eset: $x = \xi + \alpha, y = \eta + \beta.$

$$\begin{cases} \beta + 1 = 0; & \beta = -1; \\ \alpha + \beta - 2 = 0; & \alpha = 3 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \xi + 3 \\ y = \eta - 1 \end{cases}$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = 2 \left(\frac{\eta}{\xi+\eta} \right)^2;$$

$$\frac{\eta}{\xi} = t; \quad \frac{d\eta}{d\xi} = t + \frac{dt}{d\xi} \cdot \xi;$$

$$t + \frac{dt}{d\xi} \xi = 2 \left(\frac{t}{1+t} \right)^2.$$

A szétválasztható változójú differenciálegyenletet integrálva és a változók értékeit visszahelyettesítve kapjuk:

$$(y+1) \exp \left\{ 2 \operatorname{arctg} \frac{y+1}{x-3} \right\} = C$$

Felelet:

$$(y+1) \exp \left\{ 2 \operatorname{arctg} \frac{y+1}{x-3} \right\} = C, \quad C \geq 0$$

4. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek. Lineárisra visszavezethető differenciálegyenletek

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Definíció: Elsőrendű lineáris differenciálegyenletnek nevezzük a következő alakú differenciálegyenletet:

$$A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0, \quad (4.1)$$

ahol $A(x), B(x), C(x)$ folytonos függvények.

Ha egy adott intervallumon $A(x) \neq 0$, a (4.1) egyenértékű a következő egyenlettel

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (4.2)$$

ahol $p(x) = \frac{B(x)}{A(x)}, q(x) = -\frac{C(x)}{A(x)}$.

Ha a $q(x)$ függvény azonosan egyenlő nullával, akkor a (4.2) egyenletet lineáris homogén differenciálegyenletnek nevezzük, ellenkező esetben pedig lineáris inhomogén differenciálegyenletnek nevezzük.

Tétel: a (4.2) lineáris differenciálegyenlet megoldása felírható a következő alakban:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right).$$

Bizonyítás1 (Az állandó variálásának módszere (Lagrange-módszer):

Először integráljuk a lineáris homogén egyenletet

$$y' + p(x)y = 0, \quad (4.3)$$

amely egy szétválasztható változójú rendelkező egyenlet:

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx \quad (y \neq 0) \Rightarrow$$

$$\ln |y| = -\int p(x)dx + C \Rightarrow$$

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}. \quad (4.4)$$

A (4.4) képlet a (4.3) egyenlet összes megoldását leírja, mivel az $y=0$ megoldás, amely a változók szétválasztásakor elveszhet, de ez benne van az általános megoldás képletében (ha $C=0$).

A (4.2) lineáris inhomogén egyenlet megoldását a (4.4) formában keressük, a tetszőleges C konstans helyett valamilyen $C(x)$ függvénnyel, azaz a következő formában

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}. \quad (4.5)$$

A (4.5) kifejezés értékét a (4.2) egyenletbe behelyettesítve a következőket kapjuk

$$\begin{aligned} C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + \\ + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow \\ C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C, \end{aligned}$$

ahol C egy tetszőleges állandó. Az így leírt $C(x)$ függvényt a (4.5)-be behelyettesítve megkapjuk a (4.2) lineáris egyenlet általános megoldásának képletét:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right).$$

Bizonyítás1 (Új változó bevezetésének módszere (Bernoulli-módszer):

A (4.2) lineáris inhomogén egyenlet megoldását két differenciálható függvény $u = u(x)$ és $v = v(x)$ szorzataként keressük, azaz $y = uv$ alakban.

Ezt a (4.2) egyenletbe behelyettesítve megkapjuk a következőket

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x) \Rightarrow$$

$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x). \quad (4.6)$$

Mivel kezdetben a v függvényt tetszőleges ezért, úgy választjuk, hogy az a

$$v' + p(x)v = 0,$$

egyenlet megoldása legyen, tehát

$$v = e^{-\int p(x)dx} + C$$

Az így kapott v függvényt $C=0$ értékkel behelyettesítjük a (4.6) összefüggésbe. Ekkor

$$u' \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow u = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C.$$

Az így kapott u és v függvényeket az $y = uv$ képletbe behelyettesítve ismét az

$$y = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right)$$

összefüggést kapjuk.

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletre visszavezethető egyenletek

Bernoulli-féle differenciálegyenlet.

Definíció: Bernoulli-féle differenciálegyenletnek nevezzük az alábbi alakú egyenletet

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha, \quad (4.7)$$

ahol α valósszám.

Ha $\alpha = 0$ a (4.7) egyenletben, akkor egy lineáris inhomogén egyenletet kapunk, ha $\alpha = 1$, akkor egy szétválasztható változójú egyenletet, ezért feltételezzük, hogy $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$.

A Bernoulli-egyenlet megoldásához, akárcsak egy lineáris egyenlet esetében, az állandó variálásnak módszerét fogjuk használni. Integráljuk először az

$$y' + p(x)y = 0$$

egyenletet. Melynek az általános megoldása:

$$y = C e^{-\int p(x)dx}$$

A Bernoulli-egyenlet megoldása a következő módon adható meg

$$y = C(x) e^{-\int p(x)dx}, \quad (4.8)$$

ahol $C(x)$ – ismeretlen függvény. Az utóbbi kifejezést a (4.7) egyenletbe helyettesítve kapjuk:

$$\begin{aligned} C'(x) e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x) e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x) e^{-\int p(x)dx} &= \\ &= q(x)C^\alpha(x) e^{-\alpha \int p(x)dx} \Rightarrow \\ C'(x) &= q(x)C^\alpha(x) e^{(1-\alpha) \int p(x)dx} \Rightarrow \\ \int \frac{dC(x)}{C^\alpha(x)} &= \int q(x) e^{(1-\alpha) \int p(x)dx} dx + C_1 \Rightarrow \\ \frac{C^{1-\alpha}(x)}{1-\alpha} &= \int q(x) e^{(1-\alpha) \int p(x)dx} dx + C_1. \end{aligned}$$

Tehát,

$$C(x) = \left((1-\alpha) \int q(x) e^{(1-\alpha) \int p(x)dx} dx + C \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

ezt a $C(x)$ függvényt behelyettesítve a (4.8) egyenletbe, megkapjuk a Bernoulli-egyenlet általános megoldását:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left((1-\alpha) \int q(x) e^{(1-\alpha) \int p(x)dx} dx + C \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Az $y=0$ megoldás elveszhet, ha $\alpha > 0$. $\alpha \leq 0$ esetén az $y=0$ függvény nem megoldása a Bernoulli-egyenletnek.

5. Egzakt és egzakttra visszavezethető differenciálegyenletek

Egzakt differenciálegyenletek

Definíció: Az

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (5.1)$$

elsőrendű differenciálegyenletet egzaktnak nevezünk, ha létezik olyan $U(x, y)$ kétváltozós valós függvény, melyre igaz

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = dF(x, y).$$

A definíció alapján az (5.1) kifejezés átírható $dU = 0$ alakba, ezért az egzakt differenciálegyenlet általános megoldása felírható a következő képen $U(x, y) = C$.

Például: Adjuk meg az $x dx + y dy = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását!

Megoldás: Könnyen észrevehetjük, hogy az $F(x, y) = \frac{y^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ függvényt teljes differenciálja megegyezik a fenti differenciálegyenlet megoldásával, így az általános megoldás felírható:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$$

alakban.

Előfordulhatnak olyan esetek is, amikor nem is olyan könnyű „kitalálni” a megoldást, sőt még azt is el kellene dönteni, hogy egyáltalán egzakt differenciálegyenlettel van-e dolgunk. Ebben nyújt segítséget a következő tétel.

Tétel: Legyenek az (5.1) összefüggésben $M(x, y)$ és $N(x, y)$ folytonosak az (x_0, y_0) pont valamely környezetében és a két függvény nem vehet fel egyidejűleg 0 értéket, ill. létezzen parciális deriváltak: $\frac{\partial M}{\partial y}$ és $\frac{\partial N}{\partial x}$. Ahhoz, hogy az (5.1) differenciálegyenlet egzakt legyen szükséges és elégséges, hogy teljesüljön a következő összefüggés

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Bizonyítás:

$\Rightarrow$: (5.2) egzakt tehát létezik, olyan $F(x, y)$ függvény, hogy $M(x, y)dx + N(x, y)dy = dF(x, y)$ ezért

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y).$$

Mivel $M(x, y), N(x, y)$ függvények parciális deriváltjai léteznek, ezért a vegyes deriváltjaik is egyenlők

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Ezért: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$

$\Rightarrow$: Tudjuk, hogy $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Az $F(x, y)$ függvény megválasztható úgy, hogy

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y)$$

akkor megadható a következő alakban:

$$F(x, y) = \int M(x, y) dx + C(y) \quad (5.2)$$

ahol $C(y)$ tetszőleges, folytonos függvénye az y változónak. Olyan $F(x, y)$ függvényt keresünk, melyre $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$, így felhasználva az (5.2) összefüggést, kapjuk

$$\frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx + C'(y) = N(x, y)$$

vagyis

$$C'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx. \quad (5.3)$$

Tehát az a kérdés, hogy létezik-e olyan $C(y)$ függvény mely nem függ az x -től csak az y változótól. Ahhoz, hogy megválaszoljuk ezt a kérdést vizsgáljuk az (5.3) jobb oldalának x változó szerinti parciális deriváltját:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right) = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int M(x, y) dx \right) \\
&= \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 0.
\end{aligned}$$

Mivel a (5.3) kifejezés jobb oldalának x szerinti deriváltja 0, ezért a $C(\cdot)$ is csak az y -változótól függhet.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Példa: Oldjuk meg:

$$(x^3 + y)dx + (x - y)dy = 0.$$

Megoldás:

Ellenőrizzük, hogy egzakt-e az egyenlet:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1. \text{ Tehát a feltétel teljesül, így keressük meg azt az } F(x, y) \text{ függvényt,}$$

melyre igaz:

$$\left. \begin{aligned} F(x, y) &= \int M(x, y) dx + \varphi(y) \\ F(x, y) &= \int N(x, y) dy + \psi(x) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} F(x, y) &= \frac{x^4}{4} + xy + \varphi(y) \\ F(x, y) &= xy - \frac{y^2}{2} + \psi(x) \end{aligned} \right\}$$

így

$$\left. \begin{aligned} \varphi(y) &= -\frac{y^2}{2} \\ \psi(x) &= \frac{x^4}{4} \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Tehát: } F(x, y) = \frac{x^4}{4} + xy - \frac{y^2}{2}, \text{ vagyis az egyenlet általános megoldás: } C = \frac{x^4}{4} + xy - \frac{y^2}{2}.$$

Felelet: $C = \frac{x^4}{4} + xy - \frac{y^2}{2}$

Egzaktra visszavezethető differenciálegyenletek

Vannak olyan esetek, amikor az eredeti (5.1) egyenletünk nem egzakt, de létezik olyan $m(x, y)$ függvény, mellyel mindkét oldalát megszorozva egzakt egyenletet kapunk:

$$m(x, y)M(x, y)dx + m(x, y)N(x, y)dy = 0. \quad (5.3)$$

Ebben az esetben az $m(x, y)$ függvényt integráló szorzónak nevezzük.

Tehát, amennyiben sikerül helyesen kiválasztani az integráló szorzót, akkor (5.3) egyenlet, már egzakt lesz, vagyis:

$$\frac{\partial}{\partial y}(m(x, y) \cdot M(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x}(m(x, y) \cdot N(x, y));$$

$$\frac{\partial m(x, y)}{\partial y} \cdot M(x, y) + m(x, y) \cdot \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial m(x, y)}{\partial x} N(x, y) - m(x, y) \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 0$$

rendezve:

$$N(x, y) \frac{\partial m(x, y)}{\partial x} - M(x, y) \frac{\partial m(x, y)}{\partial y} = \left(\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right) \cdot m(x, y). \quad (5.4)$$

Vizsgáljunk néhány egyszerű esetet:

- 1) Legyen $m = m(x)$, vagyis az integráló szorzó csak az x -változótól függ és $N(x, y) \neq 0$. Adjuk meg az $m(x)$ függvényt.

Ekkor az (5.4) kifejezés a következő alakot veszi fel:

$$N(x, y) \frac{\partial m(x)}{\partial x} = \left(\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right) m(x);$$

$$\frac{m'}{m} = \frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{N(x, y)}. \quad (5.5)$$

Amennyiben az (5.5) kifejezés jobb oldala csak az x -változótól függ, meg tudjuk határozni az $m(x)$ függvényt. Ehhez vezessük be a következő jelölést:

$$\varphi(x) = \left(\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right) \frac{1}{N(x, y)}$$

$$m(x) = c \cdot e^{\int \varphi(x) dx};$$

ebben az esetben a c állandó, lehet eggyel egyenlő

$$m(x) = e^{\int \varphi(x) dx}$$

- 2) Legyen $m = m(y)$, vagyis az integráló szorzó csak az y -változótól függ és $M(x, y) \neq 0$. Adjuk meg az $m(y)$ függvényt.

Ekkor az (5.4) kifejezés a következő alakot veszi fel:

$$-M(x, y) \frac{\partial m(y)}{\partial y} = \left(\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right) \cdot m(y).$$

$$\frac{m'}{m} = - \frac{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}{M(x, y)}. \quad (5.6)$$

Amennyiben az (5.6) kifejezés jobb oldala csak az y -változótól függ, meg tudjuk határozni az $m(y)$ függvényt. Ehhez vezessük be a következő jelölést:

$$\psi(y) = \left(\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \right) \frac{1}{-M(x, y)}$$

$$m(y) = c \cdot e^{\int \psi(y) dy};$$

ebben az esetben a c állandó, lehet eggyel egyenlő

$$m(y) = e^{\int \psi(y) dy}.$$

Riccati-féle differenciálegyenlet.

Definíció: Riccati-féle differenciálegyenletnek nevezzük az alábbi alakú egyenletet

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x), \quad (4.9)$$

ahol a $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ függvények folytonosak valamilyen $a < x < b$ intervallumon.

Bizonyos feltételek mellett a Riccati-féle egyenlet a Bernoulli-féle egyenletre vezethető vissza. A (4.9) egyenlet speciális esetként tartalmazza a korábban vizsgált egyenleteket: ha $p(x) \equiv 0$, akkor lineáris egyenletet kapunk, ha $r(x) \equiv 0$, akkor a Bernoulli-féle egyenletet.

Nézzük meg, hogy milyen feltételek mellett tudjuk megoldani a Riccati-féle egyenletet.

Ha p , q és r állandók, akkor (4.9) egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet.

Az $y' = \varphi(x) \cdot (ay^2 + by + c)$ egyenlet, ahol a , b és c konstansok és $a^2 + b^2 \neq 0$, szétválasztható változójú differenciálegyenlet.

Az $y' = a \frac{y^2}{x^2} + b \frac{y}{x} + c$ egyenlet, ahol $a^2 + b^2 \neq 0$ egy homogénfokszámú egyenlet.

Az $y' = ay^2 + b \frac{y}{x} + \frac{c}{x^2}$ egyenlet egy általánosított homogén egyenlet ($m=-1$).

Miután $y = zx^{-1}$ helyettesítjük, egy szétválasztható változójú differenciálegyenletet kapunk $xz' = az^2 + (b+1)z + c$.

A Riccati-féle egyenlet általános megoldását nem mindig tudjuk felírni, bár a Cauchy-tétel szerint van megoldása bármely $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltétel esetén, ahol az $x = x_0$ pont a $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ függvények folytonossági intervallumába tartozik.

Ha a Riccati-féle egyenlet valamely partikuláris megoldása ismert, akkor ez az egyenlet visszavezethető a Bernoulli-féle egyenletre.

Legyen $y_1 = y_1(x)$ a (4.9) egyenlet megoldása, azaz.

$$y_1' = p(x)y_1^2 + q(x)y_1 + r(x). \quad (4.10)$$

Keressük a megoldást $y = y_1 + z$, alakban, ahol $z = z(x)$ a ismeretlen függvény. Ekkor, figyelembe véve a (4.10) összefüggést, az alábbiakat kapjuk

$$y_1' + z' = p(x)y_1^2 + 2p(x)y_1z + p(x)z^2 + q(x)y_1 + q(x)z + r(x) \Rightarrow$$

$$z' - (2p(x)y_1 + q(x))z = p(x)z^2.$$

Az utolsó egyenlet a Bernoulli-féle differenciálegyenlet a z függvényre nézve, amelynek meg tudjuk határozni az általános megoldását. A Riccati-féle egyenlet szinguláris megoldása lehet az $y = y_1(x)$ függvény.

6. Elsőrendű implicit alakú differenciálegyenletek

Definíció: Elsőrendű implicit differenciálegyenletnek nevezzük az

$$F(x, y, y') = 0 \quad (6.1)$$

kifejezést, ahol az $F(x, y, z)$ függvény folytonos valamely D tartomány felett, $D \subset \mathbf{R}^3$.

Definíció: az $y = y(x)$ függvényt a (6.1) egyenlet megoldásának nevezzük, ha az folytonos valamely (a, b) intervallumon és az egyenletbe helyettesítve tetszőleges x érték esetére igaz egyenlőséget kapunk:

$$F(x, y(x), y'(x)) \equiv 0, \forall x \in (a, b).$$

Amennyiben a (6.1) egyenlet megoldása során az y' kifejezhető elemi függvények segítségével, akkor néhány $y' = f_k(x, y)$, ($k = 1, 2, \dots, f_k(x, y)$ valós függvény) explicit alakú differenciálegyenlet megoldása után megkapjuk az eredeti (6.1) megoldását is.

Példa: Oldjuk meg a következő implicit alakú differenciálegyenletet:

$$y'^2 + (y^2 - 1)y' - y^2 = 0$$

Megoldás: Az egyenletre tekinthetünk úgy, mint egy másodfokú egyenletre, ahol a változó az ismeretlen függvény, tehát legyen $y' = t$,

$$t^2 + (y^2 - 1)t - y^2 = 0,$$

határozzuk meg a diszkrimináns értékét:

$$D = y^4 - 2y^2 + 1 + 4y^2 = (y^2 + 1)^2 \geq 0$$

$$t_1 = -\frac{y^2+1}{2} - \frac{1}{2} + y^2 + 1 = 1,$$

$$y = x + C_1,$$

$$t_2 = \frac{-y^2+1-y^2-1}{2} = -y^2.$$

$$y = \frac{1}{x+c_2}$$

Ezért az általános megoldás felírható a következő alakban

$$(y - x - c_1) \left(y - \frac{1}{x+c_2} \right) = 0.$$

1. Hiányos változójú elsőrendű implicit alakú differenciálegyenletek

I. $F(x, y') = 0$

a) Az egyenlet megoldható az x változóhoz képest, tehát felírható a következő alakban

$$x = \varphi(y'), \quad (6.2)$$

vezessük be a p változót:

$$y' = p,$$

$$dy = p dx$$

a (6.2) egyenletből: $\frac{dx}{dp} = \varphi'(p)$,

$$dx = \varphi'(p) dp$$

vissza helyettesítve az eredeti egyenletbe a következőt kapjuk:

$$\begin{cases} x = \varphi(p) \\ y = \int p \varphi'(p) dp + C \end{cases}$$

Példa: $x = sh y' + y'$.

Megoldás: $y' = p$;

$$x = sh p + p$$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{d(sh p + p)}{dp} = ch p + 1$$

$$dy = p(ch p + 1) dp.$$

$$\begin{cases} x = shp + p \\ y = \int p(chp + 1)dp + C \end{cases}$$

Az általános megoldás:

$$\begin{cases} x = shp + p \\ y = p \cdot shp - chp + \frac{p^2}{2} + C \end{cases}$$

b) az $F(x, y') = 0$ egyenletből nem fejezhető ki elemi úton az x változó:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y' = \psi(t) \end{cases}$$

így

$$\begin{cases} dx = \varphi'(t)dt \\ dy = \psi(t)dx \end{cases}$$

Ekkor a megoldás így alakul:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \int \psi(t)\varphi'(t) dt + C. \end{cases}$$

II) $F(y, y') = 0$, ekkor

$F(y, y') = F\left(y, \frac{1}{x'}\right) = G(y, x')$ így a I) típusú egyenletet kapunk.

III) $F(y') = 0$, ebben az esetben a

$$F(\alpha_k) = 0; \rightarrow y = \alpha_k \quad \alpha_k = \frac{y-c}{x}, \text{ így } F\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0.$$

2. Általános formájú implicit differenciálegyenletek

Vizsgáljuk: $F(x, y, y') = 0$, nem hiányzik változó.

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ y' = \chi(u, v) \end{cases}$$

a) Vizsgáljunk részeseteket:

$$\begin{cases} y = f(x, p) \\ x = x \\ y' = p \end{cases}$$

$$y = f(x, y');$$

$$y' = p;$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x};$$

$$p - \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx};$$

$$\frac{dp}{dx} - p: \frac{\partial f}{\partial p} = -\frac{\partial f}{\partial x}: \frac{\partial f}{\partial p}.$$

Az utóbbi, egy lineáris differenciálegyenlet.

$$b) \quad x = f(y, y');$$

$$\begin{cases} y' = p \\ x = f(y, p) \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dy};$$

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dy};$$

$$\frac{dp}{dy} = \left(\frac{1}{p} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) : \frac{\partial f}{\partial p}$$

Az utóbbi, szintén egy lineáris differenciálegyenlet.

7. Magasabb rendű differenciálegyenletek fogalma. Hiányos magasabb rendű differenciálegyenletek

Magasabb rendű differenciálegyenletek fogalma

Definíció: Az

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (7.1)$$

kifejezést magasabb rendű differenciálegyenletnek nevezzük.

Definíció: Legyen az $y = y(x)$ n -szer folytonosan differenciálható az (a, b) , intervallumon.

Az $y = y(x)$ függvényt a (7.1) egyenlet megoldásának nevezzük az (a, b) intervallumon, ha azt az egyenletbe helyettesítve minden $x \in (a, b)$ esetére igaz egyenlőséget kapunk.

1 Hiányos magasabb rendű differenciálegyenletek

$$I) \quad F(x, y^{(n)}) = 0$$

$$a) \quad y^{(n)} = f(x)$$

$$y^{(n-1)} = \int f(x) dx + c_1;$$

$$y = \underbrace{\int \dots \int}_n f(x) \underbrace{dx \dots dx}_n + \frac{c_1}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{c_2}{(n-2)!} x^{n-2} + \dots + c_{n-1} x + c_n$$

$$b) \quad y^{(n)} \text{ nem lehet vagy csak nehezen lehet kifejezni}$$

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y^{(n)} = \psi(t) \end{cases}$$

$$F(\varphi(t), \psi(t)) = 0$$

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx = \int \psi(t) \varphi'(t) dt;$$

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t) \varphi'(t) dt + c_1 \equiv \psi_1(t, c_1);$$

$$y^{(n-2)} = \int \psi_1(t, c_1) \varphi'(t) dt + c_2 \equiv \psi_2(t, c_1, c_2);$$

$$y = \psi_n(t, c_1, \dots, c_n);$$

$$\begin{cases} x = \varphi_n(t) \\ y = \psi_n(t, c_1, c_n) \end{cases}$$

II)

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$$

$$y^{(k)} = z, \text{ így}$$

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0$$

$$z = \omega(x, c_1, \dots, c_{n-k}) - \text{általános megoldás}$$

$$y^{(k)} = \omega(x, c_1, \dots, c_{n-k})$$

III) nem tartalmaz x változót

$$F(y, y_1', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Megmutatjuk, hogy lehet eggyel csökkenteni a fokszámot:

$$y = y(x), \quad z = z(y)$$

$$y' = z;$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z'_y \cdot z$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dz}{dy} \cdot z \right) \frac{dy}{dx} = (z'' \cdot z + z'^2) \cdot z$$

$$y^{(n)} = \omega(z, z', \dots, z^{(n-1)})$$

$$F(y, z, z' \cdot z, \dots, \omega(z, z', \dots, z^{(n-1)})) = 0$$

$$z' = \varphi(y, c_1, \dots, c_{n-1})$$

$$y' = z \Rightarrow \int \frac{dy}{\varphi} = x + C_n$$

IV) Homogén az y változóhoz és deriváltjaihoz képest

$$F(x, ty, ty', \dots, ty^{(u)}) = t^m \cdot f(x, y, y_1', y^{(u)})$$

$$z = \frac{y'}{y} \Rightarrow y = e^{\int z(x) dx};$$

$$y' = y \cdot z;$$

$$y'' = y'z + y \cdot z' = y(z^2 + z')$$

$$y''' = y'(z^2 + z') + y(2z \cdot z' + z'') = yz^3 + yzz' + 2yz \cdot z' + y \cdot z'' = y(z^3 + 3z \cdot z' + z'');$$

$$y^{(n)} = y \cdot \psi(z, z_1', z^{(n-1)});$$

$$y^m \cdot F(x, 1, z, z^2 + z', \dots, \psi(z, z_1', \dots, z^{(n-1)})) = 0;$$

$$y = c_n \cdot \exp \left\{ \int \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}) dx \right\}.$$

V) A baloldal valamely függvény pontos deriváltja:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \text{ pontos derivált};$$

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

8. Magasabb rendű lineáris differenciálegyenletek partikuláris megoldásai. Lineárisan független függvény rendszerek.

1. Általános fogalmak

Definíció: Magasabb rendű függvény együtthatós lineáris differenciálegyenletnek nevezzük a következő alakú differenciálegyenletet:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x). \quad (8.1)$$

ha $f(x) = 0$ akkor homogén n -ed rendű differenciálegyenletről beszélünk;

$f(x) \neq 0$ akkor inhomogén n -ed rendű egyenlettel van dolgunk.

Vizsgáljuk a (8.1) egyenlet megoldásának a létezésének a kérdését. Ha a legmagasabb rendű deriváltat kifejezzük, akkor a következőket kapjuk:

$$y^{(n)} = f(x) - p_1(x)y^{(n-1)} - \dots - p_{n-1}(x)y' - p_n(x)y.$$

Ha a $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ és $f(x)$ függvények folytonosak valamely (a, b) intervallumon, akkor az utolsó egyenlet jobb oldala folytonos függvény az (a, b) és rendelkezik folytonos, tehát korlátos deriváltakkal az $[a_1, b_1] \subset (a, b)$ szakaszon. Vagyis a Cauchy tétel értelmében tetszőleges

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, x_0 \in (a, b)$$

kezdeti feltételekre esteére a (8.1) egy és csak egy megoldása az $y = y(x)$. Ez a megoldás n szer differenciálható az (a, b) intervallumon. A (8.1) egyenletnek nincs szinguláris megoldása.

A egyszerűség kedvéért jelöljük a (8.1) egyenlet bal oldalát $L[y]$ -val:

$$L[y] \doteq y^{(n)} + p_f(x)y^{(n-1)} + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y$$

vagyis az L a következő műveletek végrehajtását jelöli:

$$L \equiv \frac{d^{d_1}}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x) \frac{d}{dx} + p_n(x)$$

ekkor az L megfeleltetést n -ed lineáris differenciáloperátornak nevezzük.

A lineáris differenciáloperator tulajdonságai:

- 1 Az állandó tényező kivethető a lineáris differenciáloperátor elé: $\forall C - \text{const } L[Cy] = CL[y]$
- 2 $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$

Az L operátor használatával a lineáris inhomogén egyenletet $L[y] = f(x)$, míg a lineáris homogén egyenlet

$$L[y] = 0 \quad (8.2)$$

alakban írható fel.

2. A magasabb rendű lineáris differenciálegyenletek partikuláris megoldásainak tulajdonságai

Tétel: Ha y_1 a (8.2) lineáris homogén egyenlet partikuláris megoldása, akkor $y = c \cdot y_1$, ahol c egy tetszőleges konstans, szintén megoldása ennek az egyenletnek.

Bizonyítás: Mivel $L[y_1] \equiv 0, \forall a < x < b$, akkor az L operátor 1. tulajdonsága szerint $L[c \cdot y_1] = c L[y_1] \equiv 0$, és ezért $c \cdot y_1$ a (8.2) egyenlet megoldása.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Tétel: Ha y_1 és y_2 a (8.2) lineáris homogén egyenlet partikuláris megoldásai, akkor az összegük szintén megoldása ennek az egyenletnek.

Bizonyítás:

Mivel $L[y_1] \equiv 0, L[y_2] \equiv 0, \forall a < x < b$, akkor az L operátor 2. tulajdonsága szerint $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] \equiv 0$. így $y_1 + y_2$ a (8.2) egyenlet megoldása.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Tétel: Ha $y_1, y_2, \dots, y_n$ a (8.2) lineáris homogén egyenlet partikuláris megoldásai, akkor az összegük lineáris kombinációja szintén megoldása ennek az egyenletnek.

Bizonyítás:

Az előző két tétel alapján, ha $y_1, y_2, \dots, y_n$ megoldás, akkor szintén megoldás lesz a következő függvény

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n.$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

9. Állandó együtthatós magasabb rendű homogén lineáris differenciálegyenletek.

Definíció: Magasabb állandó függvény együtthatós lineáris differenciálegyenletnek nevezzük a következő alakú differenciálegyenletet:

$$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

ahol $a_1, a_2, \dots, a_n$ valós számok.

Ha $f(x) \neq 0$ akkor inhomogén n -ed rendű egyenlettel van dolgunk

amennyiben $f(x) = 0$ akkor homogén n -ed rendű differenciálegyenletről beszélünk;

$$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (9.1)$$

Az előzőekben bizonyítottuk, hogy az általános megoldás felírásához elegendő megtalálni az egyenlet egy alaprendszerét: $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$. Ekkor az általános megoldás felírható a következő alakban:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x),$$

ahol $C_1, C_2, \dots, C_n$ – tetszőleges számok.

Triviális, hogy a $y' + ay = 0$ egyenlet megoldása lesz az $y_1 = e^{-ax}$ függvény.

Ellenőrizzük le, hogy magasabb rendű egyenletek estében is megadható-e a k együttható olyan módon, hogy az

$$y = e^{kx}$$

partikuláris megoldás legyen!

Helyettesítsük be (9.1) egyenletbe felhasználva, hogy

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{kx}) = k^n e^{kx}$$

kapjuk:

$$L[e^{kx}] = (k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_{n-1} k + a_n) \cdot e^{kx}.$$

tehát az $y = e^{kx}$ akkor és csak akkor lesz a (9.1) megoldása, ha k gyöke lesz a

$$P(k) \equiv k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_{n-1} k + a_n \quad (9.2)$$

polinomnak, vagyis ha megoldása a lenti egyenletnek

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0.$$

Definíció: A (9.2) képletben szereplő

$$P(k) \equiv k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_{n-1} k + a_n$$

kifejezést az (9.1) egyenlet karakterisztikus polinomjának nevezzük.

Definíció: A polinom $k_1, k_2, \dots, k_n$ karakterisztikus számoknak nevezzük.

Állandó együtthatós, homogén, n-ed rendű lineáris differenciálegyenletek megoldása. Egyszeres valós gyökök esete.

Világos, hogy (9.1) egyenlet alapszisztemének struktúrája függ a (9.2) karakterisztikus polinom gyökeitől. Vizsgáljuk azt az esetet, amikor a karakterisztikus polinom $k_1, k_2, \dots, k_n$ különböző valós számok. Ekkor az

$$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}, \dots, y_n = e^{k_n x} \quad (9.3)$$

függvények a (9.1) egyenlet n-db megoldása lesz, mely az x változó minden értékére értelmezve van. Tehát ahhoz, hogy a (9.3) alapszisztem alkosson elég megmutatni, hogy független rendszert alkotnak.

Vizsgáljuk a (9.3)-as függvények Wronski-determinánsát:

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & \dots & e^{k_n x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} & \dots & k_n e^{k_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1^{n-1} e^{k_1 x} & k_2^{n-1} e^{k_2 x} & \dots & k_n^{n-1} e^{k_n x} \end{vmatrix} = \\ &= e^{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \dots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

A fenti összefüggésben a Vandermonde determinánst kaptuk, mely értéke

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \dots & k_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i < j} (k_i - k_j)$$

Mivel a karakterisztikus számok különbözőek, ezért $W[x] \neq 0$, így (9.3) függvényrendszer lineárisan független és alrendszer lesz a (9.1) egyenletnek, tehát az általános megoldás felírható

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \dots + C_n e^{k_n x},$$

alakban, ahol $C_1, C_2, \dots, C_n$ tetszőleges számok.

Példa : Adjuk meg az $y'' - 4y' + 3y = 0$ egyenlet általános megoldását!

Megoldás: Felírjuk a karakterisztikus polinomot:

$$P(k) = k^2 - 4k + 3.$$

Megkeressük a gyökeket:

$$k^2 - 4k + 3 = 0$$

$$k_1 = 1 \text{ és } k_2 = 3$$

így az általános megoldás felírható: $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$

Felelet: az egyenlet általános megoldása $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$, ahol C_1, C_2 tetszőleges számok.

Állandó együtthatós, homogén, n-ed rendű lineáris differenciálegyenletek megoldása. A karakterisztikus polinom rendelkezik komplex gyökökkel.

Ebben az esetben a (13.1) valós megoldásainak megtalálásához célszerű megadni a komplex megoldásokat.

Definíció: Az x valós változó $y(x) = u(x) + iv(x)$, ahol $i = \sqrt{-1}$, komplex függvényét a (9.1) egyenlet komplex megoldásának nevezzük az (a,b) intervallumon, ha $L[y] \equiv 0$ minden $x \in (a,b)$ -re.

Legyen $a+bi$ a (9.1) egyenlet karakterisztikus száma. Tudjuk, hogy ha egy valós együtthatókkal rendelkező algebrai egyenletnek van komplex gyöke, akkor a gyök konjugáltja szintén megoldása lesz $P(k) = 0$ egyenletnek. Így a vizsgált esetben $a-bi$ is komplex gyök.

Vizsgáljuk az $y_1 = e^{(a+bi)x}$ és $y_2 = e^{(a-bi)x}$ függvényeket! Tudjuk, hogy ezek a függvények felírhatók

$$y_1 = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx), \quad y_2 = e^{ax}(\cos bx - i \sin bx)$$

alakban.

Tétel: Ha az $y(x) = u(x) + iv(x)$ függvény a (9.1) egyenlet megoldása, akkor az $u(x)$ és $v(x)$ függvények mindegyike szintén megoldása ennek az egyenletnek.

Bizonyítás. Mivel a tétel feltétele szerint $L[y] \equiv 0$, az L lineáris differenciáloperátor tulajdonságait felhasználva megkapjuk: $L[y] = L[u + iv] = L[u] + iL[v] = 0$, tehát $L[u] \equiv 0, L[v] \equiv 0$, amit bizonyítani kellett.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Tehát az $a+bi$ karakterisztikus szám a (9.1) egyenlet két valós megoldását adja: az y_1 függvény valós és képzetes részei, azaz az $e^{ax}\cos bx, e^{ax}\sin bx$ függvények a (9.1) egyenlet megoldásai, és lineárisan függetlenek a $(-\infty, +\infty)$ -en (a függetlenség bizonyítását Wronski determináns vizsgálatával végezhető el).

Nyilvánvaló, hogy az $a-bi$ karakterisztikus szám nem ad új, lineárisan független részmegoldásokat a (9.1) egyenlethez. Ha tehát az összes karakterisztikus szám különböző, de köztük vannak komplexek is, akkor minden egyes valós k gyök az e^{kx} megoldást adja és minden egyes konjugált komplex $a\pm bi$ gyökpár két valós lineárisan független részmegoldást $\cos bx, e^{ax}\sin bx$ alakban. Összeségében n valós részmegoldásunk van a következő alakban

$$e^{kx}, e^{ax}\cos bx, e^{ax}\sin bx,$$

melyek alrendszer alkotnak.

Példa: Adjuk meg az $y^{IV} - 6y''' + 12y'' + 6y' - 13y = 0$ egyenlet általános megoldást!

Megoldás: Felírjuk a karakterisztikus polinomot:

$$P(k) = k^4 - 6k^3 + 12k^2 + 6k - 13$$

Megkeressük a gyökeket:

$$k^4 - 6k^3 + 12k^2 + 6k - 13 = 0$$

$$k_1 = -1, k_2 = 1, k_3 = 3 + 2i, k_4 = 3 - 2i$$

így az általános megoldás felírható:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{3x} \cos 2x + C_4 e^{3x} \sin 2x$$

Felelet: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{3x} \cos 2x + C_4 e^{3x} \sin 2x$, ahol C_1, C_2, C_3, C_4 tetszőleges számok.

Állandó együtthatós, homogén, n-ed rendű lineáris differenciálegyenletek megoldása. A karakterisztikus polinom rendelkezik ismétlődő gyökökkel.

Ebben az esetben a különböző karakterisztikus számok száma kisebb lesz n -nél, és ezért a (9.1) egyenlet $e^{k_j x}$ alakú parciális megoldásainak száma is kisebb lesz n -nél. Megmutatjuk, hogyan találhatjuk meg a fennmaradó részmegoldásokat.

Legyen k_1 – komplex vagy valós multiplicitása s . Ahogy azt algebrából tudjuk,

$$P(k_1) = P'(k_1) = \dots = P^{(s-1)}(k_1) = 0, P^{(s)}(k_1) \neq 0,$$

ahol $P(k)$ a (9.2) képlettel megadott karakterisztikus polinom. Az

$$L[e^{kx}] = P(k) \cdot e^{kx},$$

kifejezést a k változó szerint deriváljuk m -szerint

$$L(x^m e^{kx}) = \sum_{j=0}^m C_m^j P^{(j)}(k) x^{m-j} e^{kx}.$$

így

$$L(x^m e^{k_1 x}) \equiv 0, m = 0, 1, \dots, s-1.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$e^{k_1 x}, x e^{k_1 x}, x^2 e^{k_1 x}, \dots, x^{s-1} e^{k_1 x}.$$

a (9.1) egyenlet megoldásai. Amint az könnyen megmutatható, ezek lineárisan függetlenek a $(-\infty, +\infty)$ intervallumon. Ha a k_1 szám valós, akkor a (9.3) függvények is valósak lesznek. Így minden s multiplicitású k_1 valós karakterisztikus számhoz s valós lineárisan független megoldás tartozik.

Ha van egy s multiplicitású $a+bi$ komplex karakterisztikus számunk, akkor az $a-bi$ konjugált szám is ugyanilyen multiplicitású karakterisztikus szám lesz. Az $a+bi$ szám s komplex megoldást von maga után:

$$e^{(a+ib)x}, x e^{(a+ib)x}, x^2 e^{(a+ib)x}, \dots, x^{s-1} e^{(a+ib)x}.$$

A valós és képzetes részek elkülönítésével $2s$ valós megoldást kapunk:

$$\begin{cases} e^{ax} \cos bx, & x e^{ax} \cos bx, \dots, & x^{s-1} e^{ax} \cos bx \\ e^{ax} \sin bx, & x e^{ax} \sin bx, \dots, & x^{s-1} e^{ax} \sin bx \end{cases} \quad (9.4)$$

Könnyen bizonyítható, hogy ezek a megoldások lineárisan függetlenek a $(-\infty, +\infty)$ tartományban. Csakúgy, mint egyszerű komplex karakterisztikus szám esetén, az $a-bi$ többszörös karakterisztikus szám esetén sem keletkeznek új valós lineárisan független részmegoldások. Így minden s multiplicitású komplex-konjugált $a \pm bi$ karakterisztikus számpár $2s$ valós lineárisan független (9.4) alakú megoldásnak felel meg.

Példa: Adjuk meg az $y^V - y^{IV} + 8y''' - 8y'' + 16y' - 16y = 0$ egyenlet általános megoldást!

Megoldás: Felírjuk a karakterisztikus polinomot:

$$P(k) = k^5 - k^4 + 8k^3 - 8k^2 + 16k - 16$$

Megkeressük a gyökeket:

$$k^5 - k^4 + 8k^3 - 8k^2 + 16k - 16 = 0$$

$$k_1 = 1, k_2 = k_3 = 2i, k_4 = k_5 = -2i$$

így az általános megoldás felírható:

$$y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 x \cos 2x + C_4 \sin 2x + C_5 x \sin 2x$$

Felelet: $y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 x \cos 2x + C_4 \sin 2x + C_5 x \sin 2x$ ahol C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 tetszőleges számok.

10. Állandó együtthatós magasabb rendű homogén lineáris differenciálegyenletekre visszavezethető differenciálegyenletek

Euler-féle differenciálegyenlet

Tekintsünk néhány lineáris differenciálegyenletet változó együtthatókkal, amelyek a független változó vagy a kívánt függvény helyettesítésével állandó együtthatós egyenletekre vezethetők vissza.

Definíció: Euler-féle differenciálegyenletnek nevezzük az

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x),$$

ahol $a_1, a_2, \dots, a_n$ állandó.

A továbbiakban Euler-féle homogén differenciálegyenlettel fogunk foglalkozni:

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0. \quad (10.1)$$

Állítsuk fel a homogén Euler-féle differenciálegyenlet általános megoldását $x > 0$ esetén (ha $x < 0$ minden további számításban helyettesítsük x -et $-x$ -szel). Helyettesítsük a független változót a következő képlettel

$$x = e^t.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} y'_x &= y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = y'_t \cdot e^{-t}, \\ y''_{x^2} &= (y''_{t^2} \cdot e^{-t} - y'_t \cdot e^{-t}) e^{-t} = (y''_{t^2} - y'_t) e^{-2t}, \\ y'''_{x^3} &= (y'''_{t^3} - 3y''_{t^2} + 2y'_t) e^{-3t}, \dots, \\ y^{(n)}_{x^n} &= (y^{(n)}_{t^n} + \dots + (-1)^{n-1} (n-1)! y'_t) e^{-nt}. \end{aligned}$$

Az így meghatározott $y'_x, y''_{x^2}, \dots, y^{(n)}_{x^n}$ kifejezéseket és $x = e^t$ a (10.1)-be behelyettesítve egy n -ed rendű állandó együtthatós lineáris homogén egyenletet kapunk. Ha megtaláljuk ennek az egyenletnek az általános megoldását és behelyettesítjük $t = \ln x$, megkapjuk az Euler-féle differenciálegyenlet t általános megoldását.

Példa : Adjuk meg az $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0$ egyenlet általános megoldását!

Megoldás: Jelöljük a független változót $x = e^t$ kifejezéssel, ekkor $t = \ln x$. Ahogy az elméleti részben már megadtuk:

$$y'_x = y'_t e^{-t},$$

$$y''_{x^2} = (y''_{t^2} - y'_t) e^{-2t}$$

Ha ezeket a kifejezéseket behelyettesítjük az eredeti egyenletbe, a következő egyenletet kapjuk az $y = y(t)$ függvény meghatározására:

$$e^{2t}(y'' - y')e^{-2t} - 3e^t y' e^{-t} + 3y = 0 \Rightarrow y'' - 4y' + 3y = 0.$$

Felírjuk a karakterisztikus polinomot:

$$P(k) = k^2 - 4k + 3.$$

Megkeressük a gyökeket:

$$k^2 - 4k + 3 = 0$$

$$k_1 = 1 \text{ és } k_2 = 3$$

így az általános megoldás felírható:

$$\begin{aligned} y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{3t} &\Rightarrow y(x) = C_1 e^{\ln x} + C_2 e^{3 \ln x} \Rightarrow \\ y(x) &= C_1 x + C_2 x^3. \end{aligned}$$

Lagrange-féle differenciálegyenlet

Definíció: -Lagrange-féle differenciálegyenletnek nevezzük az

$$\begin{aligned} (ax + b)^n y^{(n)} + (ax + b)^{n-1} p_1 y^{(n-1)} + \dots \\ \dots + (ax + b) p_{n-1} y' + p_n y = f(x), \end{aligned} \quad (10.2)$$

ahol $a, b, p_1, p_2, \dots, p_n$ állandók.

Lagrange-féle differenciálegyenlet nem más, mint az Euler-féle egyenlet általánosítása. Ha az $ax + b = q$ helyettesítést használjuk, és $q = e^t$ -t jelölünk, vagy a független változót rögtön az $ax + b = e^t$ képlettel helyettesítjük, akkor a (10.2) egyenlet állandó együtthatós lineáris egyenletre redukálódik.

Egyelőre a Lagrange-féle differenciálegyenletet akkor tudjuk megoldani, ha az homogén.

11. Állandó együtthatós magasabb rendű homogén lineáris differenciálegyenletek.

Lineáris inhomogén egyenlet általános megoldásának szerkezete

Vizsgáljuk az

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x), \quad (11.1)$$

mely röviden így írható fel $L[y] = f(x)$

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y$$

és a (11.1) egyenlethez tartozó inhomogén egyenletet:

$$L[y] = 0. \quad (11.2)$$

A következőkben megmutatjuk, hogy lineáris inhomogén egyenlet általános megoldása mindig megadható, ha a (11.2) egyenlet általános megoldása és a (11.1) egyenlet bármely parciális megoldása ismert.

Tétel: Az (11.1) lineáris inhomogén egyenlet általános megoldása megadható a (11.2) homogén egyenlet általános megoldása és a (11.1) inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összegeként.

Bizonyítás. Legyen az $Y = Y(x)$ (11.1) egyenlet ismert partikuláris megoldása, azaz

$$L[Y] \equiv f(x).$$

Helyettesítsük az ismertelen függvényt $y = z + Y$ -val, ahol $z = z(x)$ az új keresett függvény. Behelyettesítve ezt a (11.1)-be és figyelembe véve az L operátor linearitását, megkapjuk, hogy

$$L[y] = L[z + Y] = L[z] + L[Y] = f(x)$$

Mivel $L[Y] = f(x)$, akkor

$$L[z] = 0$$

vagyis z a (11.2) lineáris homogén egyenlet megoldása.

A homogén a (11.2) egyenlet általános megoldása

$$z = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

egyenlet általános megoldása, ahol $y_1, y_2, \dots$ az egyenlet valamilyen alrendszer az egyenletnek, és $C_1, C_2, \dots, C_n$ tetszőleges állandók.

Vagyis

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n + Y. \quad (11.3)$$

Megmutatjuk, hogy a (11.3) általános megoldás, ehhez azt kell belátni, hogy $C_1, C_2, \dots, C_n$ állandók megválaszthatók úgy, hogy tetszőleges előre megadott peremfeltételeket kielégítsen.

Vizsgáljuk a következő feltételeket:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (11.4)$$

A (11.3)-as kifejezést a (11.4)-be behelyettesítve kapjuk

$$\begin{cases} y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n + Y, \\ y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + \dots + C_n y'_n + Y', \\ \dots \\ y^{(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C_n y_n^{(n-1)} + Y^{(n-1)}. \end{cases}$$

Ha ebbe a rendszerbe behelyettesítjük $x = x_0$ -t, akkor egy n lineáris egyenletből álló inhomogén rendszert kapunk $C_1, C_2, \dots, C_n$ n db ismeretlennel, amelynek fő determinánsa $W(x_0)$. Mivel $y_1, y_2, \dots, y_n$ alaprendszert alkotnak, ezért $W(x_0) \neq 0$. Vagyis a $C_1, C_2, \dots, C_n$ értékek egyértelműen meghatározhatók a fenti egyenletrendszerből.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Tétel: Legyen a (11.1) egyenlet jobb oldala két függvény összege vagyis

$$L[y] = f_1(x) + f_2(x).$$

Ha y_1 – partikuláris megoldása a (11.1) egyenletnek $L[y] = f_1(x)$, és y_2 – szintén partikuláris megoldás $L[y] = f_2(x)$, akkor $y_1 + y_2$ is partikuláris megoldása a (11.1) egyenletnek.

Bizonyítás

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] \equiv f_1(x) + f_2(x).$$

Az állandó variálásának módszere.

Legyen a (11.2) homogén egyenlet megoldása

$$z = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n, \quad (11.5)$$

ahol $y_1, y_2, \dots, y_n$ alaprendszer, $C_1, C_2, \dots, C_n$ tetszőleges állandók.

Ekkor a (11.1) egyenlet partikuláris megoldását (11.5) alakban keressük, ahol a $C_1, C_2, \dots, C_n$ állandókat függvényekre cseréljük

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \dots + C_n(x) y_n. \quad (11.5)$$

Válasszuk ki úgy a $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ függvényeket, hogy a (11.5) kifejezése megoldása legyen az (11.1) homogén egyenletnek. Deriválás után kapjuk:

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + \dots + C_n y_n' + C_1' y_1 + C_2' y_2 + \dots + C_n' y_n.$$

Legyen

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 + \dots + C_n' y_n = 0$$

így

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + \dots + C_n y_n'.$$

Újra deriváljuk az utolsó kifejezést:

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + \dots + C_n y_n'' + C_1' y_1' + C_2' y_2' + \dots + C_n' y_n'.$$

Ha $C_1' y_1' + C_2' y_2' + \dots + C_n' y_n' = 0$, akkor

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + \dots + C_n y_n''.$$

Folytassuk a fent bemutatott eljárást, válasszuk meg a $C_1, C_2, \dots, C_n$ számokat úgy, hogy

$$C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \dots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0, \text{ kapjuk}$$

$$y^{(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C_n y_n^{(n-1)}.$$

Végül is

$$y^{(n)} = C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \dots + C_n y_n^{(n)} + \\ + C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \dots + C_n' y_n^{(n-1)}.$$

Az így kapott deriváltakat helyettesítsük az (11.1)-es egyenletbe rendezés után ezt kapjuk:

$$C_1 \left(y_1^{(n)} + p_1(x) y_1^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x) y_1' + p_n(x) y_1 \right) + \\ + C_2 \left(y_2^{(n)} + p_1(x) y_2^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x) y_2' + p_n(x) y_2 \right) + \dots \\ + C_n \left(y_n^{(n)} + p_1(x) y_n^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x) y_n' + p_n(x) y_n \right) + \\ + C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \dots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x).$$

Mivel $y_1, y_2, \dots, y_n$ megoldás, ezért a fenti egyenletben minden zárójelben lévő kifejezése egyenlő nullával. Így

$$C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \dots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x).$$

Tehát a $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ függvényeket úgy kell megválasztanunk, hogy megoldása legyen az alábbi egyenletrendszernek:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \dots + C_n' y_n = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \dots + C_n' y_n' = 0, \\ \dots \dots \\ C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \dots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \dots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x). \end{array} \right.$$

Egy n lineáris algebrai egyenletből álló inhomogén egyenletrendszert kaptunk $C_1'(x), C_2'(x), \dots, C_n'(x)$ ismeretlennel. Mivel ennek a rendszernek a fő determinánsa az $y_1, y_2, \dots, y_n$ függvényekből alkotott Wronski-determináns, ezért a rendszernek egyetlen megoldása van. Integrálással megkapjuk a $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ függvényeket, majd ezeket be kell helyettesítenünk a (11.5) képletbe.

12. Magasabb rendű inhomogén lineáris differenciálegyenletek. Lineáris inhomogén állandó együtthatós egyenletek megoldása próbafüggvény módszere

Vizsgáljuk

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

állandó együtthatós lineáris inhomogén n -ed rendű differenciálegyenletet, ahol $a_1, a_2, \dots, a_n$ - valós számok, az $f(x)$ függvény folytonos valamely (a, b) intervallumon.

Röviden így jelöljük:

$$L[y] = f(x) \quad (12.1)$$

ahol

$$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y$$

Ha a (12.1) egyenlet jobb oldala speciális alakú, akkor a próbafüggvény módszere használható az egyenlet parciális megoldásának meghatározására.

1. Eset Legyen az $f(x)$ függvény egy polinom és egy exponenciális függvény szorzata, vagyis

$$L[y] = R_m(x) e^{\alpha x},$$

ahol $R_m(x) = r_0 x^m + r_1 x^{m-1} + \dots + r_{m-1} x + r_m$ - m -ed rendű valós együtthatós polinom (ha $m=0$, akkor egy számról beszélünk) és α valós vagy komplex szám.

A) Legyen α egy nem karakterisztikus szám, azaz $P(\alpha) \neq 0$ ($P(\alpha)$ karakterisztikus polinom). Ekkor a (12.1) egyenlet $Y = Y(x)$ parciális megoldása a következőképpen írható fel:

$$Y = Q_m(x) e^{\alpha x} \quad (12.2)$$

ahol $Q_m(x) = q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \dots + q_{m-1} x + q_m$ - egy m -ed rendű ismeretlen együtthatós polinom.

Megmutatjuk, hogy ebben az esetben meg tudjuk keresni a polinom együtthatóit.

A $Q_m(x)$ polinom együtthatói úgy találhatók meg, hogy a (12.2) kifejezést behelyettesítjük a (12.1) egyenletbe, és a kapott egyenlőség mindkét részében az x azonos hatványaihoz előtt álló együtthatókat egyenlővé tesszük. Győződjünk meg arról, hogy a $q_0, q_1, \dots, q_m$ együtthatók ebben az esetben egyértelműen megtalálhatók.

Valóban, figyelembe véve az L operátor tulajdonságait, megkapjuk:

$$\begin{aligned}
L[Y] &= L[(q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \dots + q_{m-1} x + q_m) \cdot e^{\alpha x}] = \\
&= q_0 L[x^m e^{\alpha x}] + q_1 L[x^{m-1} e^{\alpha x}] + \dots + q_{m-1} L[x e^{\alpha x}] + \\
&+ q_m L[e^{\alpha x}] = (r_0 x^m + r_1 x^{m-1} + \dots + r_{m-1} x + r_m) e^{\alpha x}.
\end{aligned} \tag{12.3}$$

Korábban megmutattuk, hogy

$$L[e^{\alpha x}] = P(\alpha) e^{\alpha x};$$

$$L[x^s e^{\alpha x}] = \sum_{j=0}^s C_s^j P^{(j)}(\alpha) x^{s-j} e^{\alpha x}.$$

Felhasználva az előző összefüggéseket a (12.3) -as kifejezés $e^{\alpha x}$ – való egyszerűsítés után kapjuk:

$$\begin{aligned}
&q_0 \sum_{j=0}^m C_m^j P^{(j)}(\alpha) x^{m-j} + q_1 \sum_{j=0}^{m-1} C_{m-1}^j P^{(j)}(\alpha) x^{m-1-j} + \dots \\
&\dots + q_{m-1} \sum_{j=0}^1 C_1^j P^{(j)}(\alpha) x^{1-j} + q_m P(\alpha) = \\
&= r_0 x^m + r_1 x^{m-1} + \dots + r_{m-1} x + r_m.
\end{aligned}$$

Egyenlítjük az x azonos hatványai előtt álló szorzó tényezőket:

$$\left. \begin{aligned}
x^m & \quad q_0 P(\alpha) = r_0, \\
x^{m-1} & \quad q_0 m P'(\alpha) + q_1 P(\alpha) = r_1, \\
\dots & \quad \dots \dots \\
x^0 & \quad q_0 P^{(m)}(\alpha) + q_1 P^{(m-1)}(\alpha) + \dots + q_{m-1} P'(\alpha) + q_m P(\alpha) = r_m.
\end{aligned} \right\}$$

Mivel $P(\alpha) \neq 0$, a fenti egyenletrendszerből egyértelműen meghatározhatók $Q_m(x)$ polinom együtthatói, például $q_0 = r_0/P(\alpha)$, $q_1 = (r_1 - q_0 m P'(\alpha))/P(\alpha) \dots$

Ezzel megmutattuk, hogy az

$$L[y] = R_m(x) e^{\alpha x},$$

egyenlet parciális megoldása valóban felírható a

$$Y = Q_m(x) e^{\alpha x}$$

próbafüggvény segítségével, amennyiben α nem gyöke a karakterisztikus polinomnak.

B) Legyen α k multiplicitású karakterisztikus szám, azaz $P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$, ahol $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$. Ebben az esetben (12.2) alakú próbafüggvény segítségével parciális megoldása nem konstruálható, mert $P(\alpha) = 0$. Most a próbafüggvényt a következő alakban fogjuk keresni:

$$Y = x^k Q_m(x) e^{\alpha x}, \tag{12.4}$$

ahol $Q_m(x)$ - m -ed rendű ismeretlen együtthatós polinom.

A (12.4) próbafüggvényt a (12.1), egyenletbe helyettesítve kapjuk:

$$\begin{aligned}
L[Y] &= L[x^k Q_m(x) e^{\alpha x}] = \sum_{j=0}^m q_j L[x^{k+m-j} e^{\alpha x}] = \\
&= \sum_{j=0}^m q_j \sum_{s=k}^{k+m-j} C_{k+m-j}^s P^{(s)}(\alpha) x^{k+m-j-s} e^{\alpha x} = \sum_{j=0}^m r_j x^{m-j} e^{\alpha x}
\end{aligned}$$

majd $e^{\alpha x}$ kifejezéssel egyszerűsítve:

$$\sum_{j=0}^m q_j \sum_{s=0}^{m-j} C_{k+m-j}^{k+s} P^{(k+s)}(\alpha) x^{m-j-s} = \sum_{j=0}^m r_j x^{m-j}.$$

Az x azonos hatványai előtt álló együtthatók egyenlítése után felírhatjuk:

$$\begin{aligned}
&x^m \mid q_0 C_{k+m}^k P^{(k)}(\alpha) = r_0, \quad \dots \\
&x^1 \mid q_0(k+m)P^{(k+m-1)}(\alpha) + q_1(k+m-1)P^{(k+m-2)}(\alpha) + \dots
\end{aligned}$$

mivel $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$ ezért a $q_0, q_1, \dots, q_m$ együtthatókat egyértelműen meghatározza a fenti rendszer.

2. Eset Legyen az $f(x)$ függvény a következő alakú

$$f(x) = e^{\alpha x} (R_m^{(1)}(x) \cos bx + R_m^{(2)}(x) \sin bx), \quad (12.4)$$

ahol $R_m^{(1)}(x)$ és $R_m^{(2)}(x)$ polinomok fokszáma m -nél nem magasabb, és legalább egyikük m fokú (lehetnek konstans számok is, egyikük lehet pontosan nulla).

Vagyis az egyenletünk így néz ki:

$$L[y] = e^{\alpha x} (R_m^{(1)}(x) \cos bx + R_m^{(2)}(x) \sin bx),$$

Mivel $\cos bx = \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2}$, $\sin bx = \frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i}$, ezért (12.4) átírható a következő módon

$$\begin{aligned}
f(x) &= R_m^{(1)}(x) e^{\alpha x} \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2} + R_m^{(2)}(x) e^{\alpha x} \frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i} = \\
&= \tilde{R}_m^{(1)}(x) e^{(a+ib)x} + \tilde{R}_m^{(2)}(x) e^{(a-ib)x}
\end{aligned}$$

ahol $\tilde{R}_m^{(1)}(x), \tilde{R}_m^{(2)}(x)$ – polinomok fokszáma m , vagyis $f(x)$ két, az 1. esetben taglatat, kifejezés összege.

Ezt felhasználva, ha $a + bi$ nem karakterisztikus szám, akkor a parciális megoldás

$$Y(x) = \tilde{Q}_m^{(1)}(x) e^{(a+ib)x} + \tilde{Q}_m^{(2)}(x) e^{(a-ib)x}$$

a próbafüggvény segítségével keresendő, ahol

$\tilde{Q}_m^{(1)}(x)$ i $\tilde{Q}_m^{(2)}(x)$ – ismeretlen együtthatós polinomok, melyek fokszáma m. Használva az Euler-képlet felírható, a vizsgált esetben, a próba függvény végső alakja:

$$Y(x) = e^{ax} \left(Q_m^{(1)}(x) \cos bx + Q_m^{(2)}(x) \sin bx \right),$$

ahol $Q_m^{(1)}(x)$ i $Q_m^{(2)}(x)$ - ismeretlen együtthatós polinomok m fokszámmal.

Legyen az $a + bi$ szám k multiplicitású karakterisztikus szám, ekkor felhasználva az 1. eset B) részében kapott eredményeket és az előző gondolat menetét követve kapjuk a próbafüggvényt:

$$Y(x) = x^k e^{ax} \left(Q_m^{(1)}(x) \cos bx + Q_m^{(2)}(x) \sin bx \right).$$

ahol $Q_m^{(1)}(x)$ i $Q_m^{(2)}(x)$ - ismeretlen együtthatós polinomok m fokszámmal, k az $a + bi$ multiplicitása.

Felhasznált irodalom

1. Lajkó Károly Differenciálegyenletek/Debrecen. : Egyetemi Kiadó, 2003 – 83 old.
2. Lajkó Károly Kalkulus II. példatár - II.kötet a kalkulus II. és a differenciálegyenletek tárgyakhoz Debrecen. : Egyetemi Kiadó, 2003
3. Lajkó Károly Analízis III Debrecen. : Egyetemi Kiadó, 2003
4. Самойленко А. М., Парасюк І.О., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння. Підручник Либідь, 2003, - 600 стор
5. Перестюк М Збірник задач з диференціальних рівнянь: Навч.посібник К.ТВиМС, 2004б 224 стор

Диференціальні рівняння методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Диференціальних рівнянь» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання, освітня програма: «Середня освіта (Інформатика)» галузь знань: «01 Освіта/Педагогіка», спеціальність (спеціалізація): «014 Середня освіта (014.09 Інформатика)», «Середня освіта (Математика)» галузь знань: «01 Освіта/Педагогіка», спеціальність (спеціалізація): «014 Середня освіта (014.04 Математика)»/ Розробник: Кучінка К. – Берегове: ЗУІ ім. Ф.Ракоці II, 2024. 52 с. (угорською мовою).

Навчально-методичне видання розроблене на основі Освітньої програми підготовки бакалаврів з галузі знань «01 Освіта/Педагогіка» за напрямом «014 Середня освіта (Інформатика)», «014 Середня освіта (Математика)» та діючого законодавства з метою забезпечення здобувачів освіти денної та заочної форм навчання Закарпатського угорського інституту ім. Ф.Ракоці II методичними вказівками до вивчення дисципліни «Диференціальних рівнянь». У методичних вказівках розкрито зміст, структуру, програму навчальної дисципліни та наведено завдання для практичних занять.

Диференціальні рівняння/ Közönséges differenciálegyenletek

Методичні вказівки до практичних занять

2024 р.

Затверджено до використання у навчальному процесі на засіданні кафедри математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II (протокол № 1 від «13» серпня 2024 року)

Розглянуто та рекомендовано Навчально-методичною радою Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II (протокол № 22 від «26» серпня 2024 року)

Рекомендовано до видання в електронній формі (PDF) рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II (протокол № 7 від « 27» серпня 2024 року)

Підготовлено до видання в електронній формі (PDF) кафедрою математики та інформатики спільно з Видавничим відділом Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Розробники методичних вказівок:

Рецензенти:

Ганна Сливка-Тилищак – завідувач кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу УжНУ, доктор фізико-математичних наук, професор (м. Ужгород)

Мирослав СТОЙКА – доцент кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Відповідальні за випуск:

Каталін КУЧИНКА – завідувач кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II, доцент, кандидат фізико-математичних наук
Олександр ДОБОШ – начальник Видавничого відділу ЗУІ ім. Ф.Ракоці II

За зміст методичних вказівок відповідальність несуть розробники.

Видавництво: Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II (адреса: пл. Кошута 6, м. Берегове, 90202. Електронна пошта: foiskola@kmf.uz.ua) *Статут «Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II» (Затверджено протоколом загальних зборів Благодійного фонду За ЗУІ, протокол №1 від 09.12.2019р., прийнято Загальними зборами ЗУІ ім. Ф.Ракоці II, протокол №2 від 11.11.2019р., зареєстровано Центром надання адміністративних послуг Берегівської міської ради, 12.12.2019р.)*

Шрифт «Times New Roman». Розмір сторінок методичних вказівок: А4 (210х297мм).