

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
UKRAJNA OKTATÁSI ÉS TUDOMÁNYOS MINISZTERIUMA**

**Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці ІІ
II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola**

**Кафедра математики та інформатики
Matematika és Informatika Tanszék**

dr. Kucsinka Katalin

**Теорія ймовірностей та математична статистика
Valószínűségyszámítás és matematika statisztika**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
До практичних занять**



Beregszász, 2024

Навчально-методичне видання розроблене на основі Освітньої програми підготовки бакалаврів з галузі знань «01 Освіта/Педагогіка» за напрямом «014 Середня освіта (Інформатика)», та діючого законодавства з метою забезпечення здобувачів освіти денної та заочної форм навчання Закарпатського угорського інституту ім. Ф.Ракоці II методичними вказівками до вивчення дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика». У методичних вказівках розкрито зміст, структуру, програму навчальної дисципліни та наведені необхідні теоретичні відомості.

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II
(протокол № 1 від «13» серпня 2024 року)

Розглянуто та рекомендовано Навчально-методичною радою
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол №22 від «26» серпня 2024 року)

Рекомендовано до видання в електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту імені
Ференца Ракоці II (протокол №7 від « 27» серпня 2024 року)

Підготовлено до видання в електронній формі (PDF) кафедрою математики та
інформатики спільно з Видавничим відділом Закарпатського угорського інституту імені
Ференца Ракоці II

Розробник методичних вказівок:

Каталін КУЧІНКА – завідувач кафедри математики та інформатики
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II, доцент, кандидат
фізико-математичних наук

Рецензенти:

Ганна Сливка-Тилищак – завідувач кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу
УжНУ, доктор фізико-математичних наук, професор (м. Ужгород)
Мирослав СТОЙКА – доцент кафедри математики та інформатики Закарпатського
угорського інституту імені Ференца Ракоці II, кандидат фізико-математичних наук,
доцент

Відповідальні за випуск:

Каталін КУЧІНКА – завідувач кафедри математики та інформатики
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II, доцент, кандидат
фізико-математичних наук *Олександр ДОБОШ* – начальник Видавничого відділу
ЗУІ ім. Ф.Ракоці II

За зміст методичних вказівок відповідальність несе розробник.

Видавництво: Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II (адреса: пл.
Кошута 6, м. Берегове, 90202. Електронна пошта: foiskola@kmf.uz.ua)

© Каталін Кучінка, 2024

© Кафедра математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II, 2024

A módszertani kiadvány a hatályos jogszabályok alapján készült, melynek célja, hogy a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola a nappali és levelező tagozatos hallgatóinak módszertani útmutatást adjon a „Valószínűségszámítás és matematika statisztika” című tantárgy elsajátításához. A kiadványban a szerző leírja a tantárgy tartalmát, felépítését és programját, valamint kurzus teljesítéséhez szükséges elméleti tananyagot.

Az oktatási folyamatban történő felhasználását jóváhagyta a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszéke
(2024. augusztus 13, 1. számú jegyzőkönyv).

Megjelentetésre javasolta a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Oktatási és Módszertani Tanácsa
(2024. augusztus 26., 22. számú jegyzőkönyv).

Elektronikus formában (PDF fájlformátumban) történő kiadásra javasolta a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Tudományos Tanácsa
(2024. augusztus 27., 7. számú jegyzőkönyv).

Kiadásra előkészítette a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszéke, valamint Kiadói Részlege.

A módszertani útmutató kidolgozója:
KUCSINKA KATALIN –fiz.-mat. tud. kandidátusa(PhD), docens, a Matematika és Informatika Tanszék vezetője.

Szakmai lektorok:

Slyvka-Tylyshchak Ganna – Az UNE Információs vezérlési Rendszerek és Technológiák Tanszékének vezetője, a fizikai és matematikai tudományok doktora, professzor

SZTOJKA Miroszláv – a fizikai és matematikai tudományok kandidátusa, docens, a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének docense

A kiadásért felelnek:

KUCSINKA Katalin – PhD, a fizikai és matematikai tudományok kandidátusa, a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének tanszékvezetője és docense

DOBOS Sándor – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Kiadói Részlegének vezetője

A segédlet tartalmáért kizárólag a módszertani útmutató kidolgozója felel.

Kiadó: II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola (cím: 90 202, Beregszász, Kossuth tér 6. E-mail: foiskola@kmf.uz.ua)

© Kucsinka Katalin, 2024

© A II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszéke,
2024

A tantárgy leírása

Найменування показників / A jellemzők megnevezése	Характеристика навчальної дисципліни / A tantárgy jellemzői	
	денна форма навчання / nappali tagozat	заочна форма навчання/ levelező tagozat
Кількість кредитів / Kreditszám – 5	Обов'язкова / Kötelező	
	Курс / Évfolyam:	
	2	
	Семестр / Félév	
	4	
	Лекції / Előadások	
	44 год/44 óra	8 год/8 óra
	Практичні, семінарські/ Gyakorlati, szeminárium	
	40 год/40 óra	0 год/0 óra
	Лабораторні/Laboratóriumi	
	0 год	0 óra
	Самостійна робота/Önálló munka	
	126 год/126 óra	202 год/202 óra
	Вид контролю:/Az ellenőrzés formája: Іспит/Vizsga	

A tantárgy általános ismertetése

A Valószínűség számítás és matematikai statisztika tárgy BSc szintű képzéshez készült képzési terület: «01 Oktatás/Peadgógia» képzési szakirány 014 Középsikolai oktatás (Informatika) programhoz.

A tantárgy célja, hogy megismertesse a hallgatót a valószínűségszámítás és statisztika alapvető fogalmaival és eredményeivel. Tegye képessé arra, hogy önállóan gondolkodva tudjon feladatokat megoldani, olyanokat, melyek illeszkednek az előadás anyagához. A félév során a hallgató alkalmazhatja azokat az ismereteket, megoldási módszereket, amelyeket a tantárgy tanulása közben elsajátított.

A kurzus során a hallgató által elsajátítandó általános és szakmai kompetenciákkal ill. a program eredményeivel a tantárgy syllabuszában lehet megismerkedni.

Szakmai kompetenciák

3K17. Képes a tudományos ismeretszerzési módszerek alkalmazására az oktatási folyamatban.

3K 21. Matematikai módszerek és modellek alkalmazásának képessége az oktatásban/pedagógiában.

3K 26. Képes különböző összetettségű problémák megoldására az iskolai informatikában.

A program eredményei

ППН1. A tanulók nyelvi, beszédbeli és kulturális tapasztalatainak felhasználása, akik az ukrainai őshonos népekhez vagy nemzeti kisebbségekhez tartozó tanulók, az ukrainai az oktatás megszerzésének folyamatában.

ППН 3. Folyékonyan kommunikáljon az állam- és idegen nyelveken, amikor a következő témákról beszélget. szakmai kérdések megvitatása a pedagógia, a matematika és az informatika területén.

ППН 8. A tanulók matematikai és informatikai ismereteinek kialakítása a korszerű tudományos eredményekre alapozva.

ППН 20. Tudományos ismeretszerzési módszerek alkalmazása a pedagógiai tevékenységben, megfigyelni elemezni, hipotéziseket megfogalmazni, adatokat gyűjteni, kísérleteket végezni, elemezni és értelmezzék az eredményeket, készítsenek modelleket és határozzák meg azok hatékonyságát.

ППН 22. A matematika és az informatika főbb részterületeinek ismeretének bemutatása.

Tartalomjegyzék

Előszó	7
1. Kombinatorika	8
Ellenőrző kérdések	17
2. Eseményalgebra	18
Feladatok	19
Ellenőrző kérdések	25
3. Valószínűségszámítás	27
3.1. Klasszikus valószínűség	27
3.2. Geometriai valószínűség	33
Ellenőrző kérdések	36
4. Feltételes valószínűség	37
4.1. Feltételes valószínűség, teljes valószínűség tétele, Bayes tétel . .	37
4.2. Események függetlensége	45
Ellenőrző kérdések	47
5. Valószínűségi változók és jellemzőik	50
5.1. Diszkrét valószínűségi változók	50
5.2. Folytonos valószínűségi változó	56

Ellenőrző kérdések	61
6. Nevezetes eloszlások	64
6.1. Nevezetes diszkrét eloszlások	64
6.2. Nevezetes folytonos eloszlások	72
Ellenőrző kérdések	78
7. Eloszlásokra vonatkozó nevezetes tételek	80
Ellenőrző kérdések	83
8. Többdimenziós valószínűségi változók	85
8.1. Kétdimenziós diszkrét valószínűségi változók	85
8.2. Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók	95
Ellenőrző kérdések	100
9. Statisztika	102
9.1. Leíró statisztikák	102
9.2. Hipotézis vizsgálat paraméteres próbák	106
10. Példák zárthelyi dolgozathoz és elméleti kérdések	114
10.1. 1.modul	114
10.2. 2. modul	115
Irodalomjegyzék	122

Előszó

Ez a könyv a elsősorban II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola informatika szakos hallgatói számára oktatott valószínűségyszámítási tananyaghoz készült. Hasznos lehet azonban azoknak a nem matematika szakos olvasóknak is, akik valószínűségyszámítást tanulnak vagy csak egyszerűen érdeklődnek e tudományág iránt. A feladatgyűjtemény összeállításakor fontos szempont volt a valószínűségyszámításban klasszikusnak számító feladatok bemutatásán kívül a mindennapi életünkben előforduló véletlen események szemléltetése a matematika szemszögéből. A feladatok összeállítása során felhasználásra kerültek a következő példatárak: [2, 3, 4, 5, 7, 8].

Minden fejezet az adott részben megtalálható feladatok megoldásához szükséges elméleti résszel kezdődik, ezek alkalmazását példa mutatja be. Ez után következnek az hallgatók számára kitűzött feladatok.

A feladatok nehézségi sorrendben követik egymást. Előfordulhat az is, hogy az olvasó egészen más feladatot talál könnyűnek vagy nehéznek, mint a szerző.

Végül köszönetet mondok és minden kollégámnak és tanítványaimnak, akik már a könyv megírása során is segítségemre voltak hasznos észrevételeikkel.

1. fejezet

Kombinatorika

A valószínűségszámítás klasszikus felfogása alapvetően két gyökérre támaszkodik, a kombinatorikára és az eseményalgebrára. Ezek közül történetileg is az első a kombinatorika. A következőkben a kombinatorikai fogalmakkal foglalkozunk, melyek a klasszikus valószínűségszámítási feladatok megoldásához hasznos segítséget nyújtanak.

- **Permutáció.**

A permutáció röviden adott számú elem sorba rendezését jelenti. Aszerint, hogy az elemek mindegyike különböző, vagy vannak köztük egyformák is, ismétlés nélküli vagy ismétléses permutációról beszélünk.

Ismétlés nélküli permutáció. Legyen adott n különböző elem. Az elemek egy meghatározott sorrendjét az adott n elem ismétlés nélküli permutációjának nevezzük, és számukat a P_n szimbólummal jelöljük. Az n különböző elem összes lehetséges sorrendjének (permutációinak) száma:

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1 = n!$$

Példa: Anna, Bea és Csilla együtt mennek moziba. Hány féle képen ülhetnek le három egymás melletti székre?

Megoldás: Minden lehetséges sorrend három elem egy-egy permutációja.

Három elem összes permutációinak száma

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Ismétléses permutáció. Az ismétléses permutáció abban különbözik az ismétlés nélkülitől, hogy a sorba rendezendő elemek között vannak egyformák (azonosak) is.

Legyen adott n elem, melyek között r ($r \leq n$) különböző található, ezek $a_1, a_2, \dots, a_r$.

Ha az a_1 elem k_1 -szer, az a_2 elem k_2 -ször, ... az a_r elem k_r -szer fordul elő és

$$k_1 + k_2 + \dots + k_r = n,$$

akkor az n elem egy lehetséges sorrendjét ezen elemek ismétléses permutációjának nevezzük.

A permutációk számát $P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_r)}$ szimbólummal jelöljük. Rögzített n , r és $k_1, k_2, \dots, k_r$ esetén az ismétléses permutációk száma:

$$P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_r)} = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdot \dots \cdot k_r!}.$$

Példa: Szabályos dobókockát 14-szer feldobva 3 darab ötöst, 2 darab négyest, 4 darab hármast és 5 darab egyest kaptunk. Hány ilyen dobássorozat lehetséges?

Megoldás: 14 szám lehetséges sorrendjéről beszélünk, melyek között rendre 5, 4, 3, és 2 azonos van. Tehát a lehetséges esetek száma

$$P_{14}^{(5,4,3,2)} = \frac{14!}{5! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2!} = 2522520.$$

• Variáció.

A variáció hétköznapi, egyszerű megfogalmazásban különböző elemek közül adott számú elem kiválasztását jelenti, azzal a feltétellel, hogy a kiválasztás sorrendje sem közömbös. Ahogy a permutációknál, itt is beszélhetünk ismétléses és ismétlés nélküli variációkról, attól függően, hogy megengedjük-e egy elem többszöri kiválasztását.

Ismétlés nélküli variáció. Legyen adott n különböző elem. Ha adott n elem közül k elemet ($0 < k \leq n$) úgy választjuk ki, hogy mindegyik csak egyszer kerül sorra és a kiválasztás sorrendje is számít, akkor az n elem egy k -ad osztályú ismétlés nélküli variációját kapjuk. Az n elem egy k -ad osztályú ismétlés nélküli variációinak számát a V_n^k szimbólum jelöli.

Adott n elem összes k -ad osztályú ismétlés nélküli variációinak száma

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

Más alakban is felírható:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Példa: Egy feladatmegoldó versenyen 10 résztvevő indult, összesen hat különböző értékű díjat osztanak ki. Hányféleképpen alakulhat a díjazottak névsora? (Minden résztvevő

csak egy díjat kaphat.)

Megoldás: Az első díj nyertesét 10 induló közül választhatjuk ki, a másodikat 9 induló közül, ..., a hatodikat 5 induló közül. Így az összes lehetőség száma

$$V_{10}^6 = \frac{10!}{(10-6)!} = 151200.$$

Ismétléses variáció. Ha az adott n elem közül k elemet úgy választunk ki, hogy egy elem többször is sorra kerülhet és a kiválasztás sorrendje is számít, akkor az n elem egy k -ad osztályú ismétléses variációját kapjuk.

Az n elem k -ad osztályú ismétléses variációinak számát a $V_n^{k(i)}$ szimbólummal jelöljük.

Adott n elem összes k -ad osztályú ismétléses variációinak száma:

$$V_n^{k(i)} = n^k.$$

Példa: Egy feledékeny diák elfelejtette számzáras szekrénye 4 jegyű kódját. Hány lehetőséget kell kipróbálnia ahhoz, hogy biztosan ki tudja nyitni a szekrényét, ha kód minden jegye tízféléképpen választható meg?

Megoldás: Minden számjegy tízféléképpen választható ki és a sorrend is számít. Így a lehetséges kódok száma

$$V_{10}^{4(i)} = 10^4 = 10000.$$

- **Kombináció.**

A kombináció különböző elemek közül adott számú elem kiválasztását jelenti, azzal a feltétellel, hogy a kiválasztás sorrendje közömbös. Ebben az esetben is beszélhetünk ismétléses és ismétlés nélküli kombinációkról, attól függően, hogy megengedjük-e egy elem többszöri kiválasztását.

Ismétlés nélküli kombináció. Legyen adott n elem. Ha az adott n elem közül k elemet ($0 < k \leq n$) úgy választunk ki, hogy mindegyik csak egyszer kerül sorra, és a kiválasztás sorrendje nem számít, akkor az n elem egy k -ad osztályú ismétlés nélküli kombinációját kapjuk.

Az n elem k -ad osztályú kombinációinak számát C_n^k szimbólummal jelöljük.

Adott n elem összes k -ad osztályú ismétlés nélküli kombinációinak száma:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

A fenti kifejezést szokás az $\binom{n}{k}$ szimbólummal is jelölni (olvasd: n alatt a k).

Példa: Adott számú könyvből négyet 210-féleképpen lehet kiválasztani. Mennyi a könyvek száma?

Megoldás: Legyen a könyvek száma n . Az n könyvből C_n^4 féleképpen lehet kiválasztani négyet, tehát

$$C_n^4 = 210.$$

Alakítsuk át ezt a kifejezést:

$$\frac{n!}{4!(n-4)!} = 210,$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = 210 \cdot 24.$$

A fenti egyenletnek egy pozitív egész megoldása van a 10. Tehát a könyvek száma 10.

Ismétléses kombináció. Ha adott n elem közül k elemet úgy választunk ki, hogy egy elem többször is sorra kerülhet és a kiválasztás sorrendje nem számít, akkor az n elem egy k -ad osztályú ismétléses kombinációját kapjuk.

Az n elem k -ad osztályú ismétléses kombinációinak számát a $C_n^{k(i)}$ szimbólummal jelöljük.

Adott n elem összes k -ad osztályú ismétléses kombinációinak száma:

$$C_n^{k(i)} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Példa: Egy gyerek 5 különböző fagylaltból választhat egy háromgombócos adagot. Hányféle lehetősége van a választásra, ha az adagolás sorrendjére nem vagyunk tekintettel? (Több gombóc is állhat ugyanabból a fagylaltból)

Megoldás: Az összes elem száma 5, ezekből hármast csoportokat képzünk, melyekben a sorrend nem számít és az elemek ismétlődhetnek. Tehát ismétléses kombinációról beszélünk, vagyis a lehetőségek száma:

$$C_5^{3(i)} = \frac{(5+3-1)!}{3!(5-1)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Feladatok:

1. Egy futóversenyen hét futó került a döntőbe. A döntőben hány különböző befutási sorrend lehetséges?
2. Nyolc ember hányféleképpen tud elhelyezkedni egy padon?
3. Ha az adott elemek számát 2-vel csökkentjük, a lehetséges permutációk száma $1/12$ részére csökken. Mennyi volt az elemek száma?
4. Nyolc ember - jelöljük őket rendre A-, B-, C-, D-, E-, F-, G-, H-val - leül egy padra. Hányféleképpen helyezkedhetnek el úgy, hogy A és B egymás mellett üljön?
5. Egy nyolc főből álló társaság egy kör alakú asztal körül elhelyezett nyolc széken akar helyet foglalni. Hányféleképpen történhet ez, ha két elhelyezkedést, akkor és csak akkor tekintünk különbözőnek, ha a társaságnak van legalább egy olyan tagja, akinek legalább az egyik szomszédja a két elhelyezkedésben különböző.
6. Nyolc ember - jelöljük őket rendre A-, B-, C-, D-, E-, F-, G-, H-val -leül egy kerek asztalhoz. Hányféleképpen helyezkedhetnek el úgy, hogy A és B egymás mellett üljön? (Két elhelyezkedést akkor és csak akkor tekintünk különbözőnek, ha a társaságnak van legalább egy olyan tagja, akinek legalább az egyik szomszédja a két elhelyezkedésben különböző.)
7. Tíz különböző színű gyöngyből hány különböző lánc készíthető?
8. Hány olyan 1-gyel kezdődő ötjegyű számot lehet felírni az 1, 2, 4, 7, 9 számjegyek felhasználásával, amelyeknek az utolsó számjegye 7, ha a felírás során egy-egy számjegyet csak egyszer használhatunk?
9. Hány 15-el kezdődő ötjegyű szám képezhető az 1, 3, 5, 7, 9 számjegyekből, ha a számok képzésénél egy-egy számjegy csak egyszer szerepelhet?
10. Hány 5-el osztható ötjegyű szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyekből, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?
11. Hány 5-el osztható hatjegyű szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?

12. Hány ötjegyű páros szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyekből, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?
13. Hány ötjegyű páratlan szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyekből, ha minden számjegy csak egyszer szerepelhet?
14. Hányféle sorrendben húzhatunk ki egy dobozból 5 piros, 7 fehér és 3 kék golyót, ha csak az olyan húzások tekintjük különbözőnek, amelyekben a színek más sorrendben következnek?
15. Egy dobozban két sárga golyó van. Hány darab piros golyót kell a dobozba tennünk, ha azt kívánjuk elérni, hogy a dobozban lévő összes golyókat kihúzva, 21 különböző sorrend legyen lehetséges? (Az azonos színű golyókat nem különböztetjük meg.)
16. Hány féle sorrendben írhatók fel a következő szavak betűi:
 - a) MATEMATIKA;
 - b) KÁRPÁTÁLJA;
 - c) KOMBINATORIKA;
 - d) PARALELOGRAMMA?
17. Öt házaspár foglal helyet egy padon. Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a házastársak egymás mellett akarnak ülni, de sem két nő, sem két férfi nem ülhet egymás mellé?
18. 5 piros, 2 fehér és 2 kék golyót hányféleképpen lehet úgy elrendezni, hogy a 2 kék golyó egymás mellett legyen?
19. Egy osztályban 15 leány és 15 fiú tanuló van. Kettesével ülnek le a padokra. Hányféle ülésrend készíthető, ha két lány, illetve két fiú nem ülhet egymás mellé? (a kétszemélyes padokat tekintsük egyetlen oszlopban elhelyezve.)
20. Egy osztályban 10 fiú és 10 lány van. Tornaórán kettesével sorakoznak 15 különböző eszközért úgy, hogy 2 lány ill. 2 fiú nem állhat egymás mellé. Az eszközöket meghatározó sorrendben osztják ki. És minden pár egyet kap. Hányféleképpen történhet a szétosztás?
21. Hány olyan hatjegyű szám van, amelynek egyik számjegye sem 0?
22. Hány "szót" képezhetünk az A, E, I, O, Ű magán- és B, C, D, F mássalhangzókból úgy, hogy minden "szóban" 4 magán- és 4 mássalhangzó legyen. Két magán- illetve két mássalhangzó egymás mellé ne kerüljön, és minden mássalhangzó csak egyszer szerepeljen.

23. Hány ötre végződő ötjegyű szám van?
24. Egy 25-ös létszámú közösség 3 tagú vezetőséget választ: titkárt és 2 vezetőségi tagot.
- a) Hányféleképpen történhet ez?
 - b) Hány olyan kimenetele lehet a választásnak, hogy a tagok közül Gipsz Jakab legyen a titkár?
 - c) Hány olyan kimenetele lehet a választásnak, hogy a tagok között Gipsz Jakab vezetőségi tag legyen?
25. Egy 25 fős társaságból egy könyvet, egy társasjátékot, egy labdát, egy töltőtollat és egy ceruzát sorsoltak ki. Hányféleképpen végződhet a sorsolás?
26. Hány olyan négyjegyűjegyű szám van, amely csupa páros számjegyből áll és minden számjegy csak egyszer szerelhet?
27. Hány rendszámtábla készíthető 26 betű és 10 számjegy felhasználásával, ha a rendszám két betűből és az utána következő négy számjegyből áll.(Nullával is kezdődhet.)
28. 15 tanuló nyaralni indul. 3 db négyszemélyes és 1 db háromszemélyes szobát kapnak.
- a) Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a szobákon belüli elhelyezkedést nem vesszük figyelembe?
 - b) Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a szobákon belüli elhelyezkedést figyelembe vesszük?
29. Egy cégnél három osztályvezető, hat csoportvezető és harminc beosztott dolgozik. Hányféleképpen választhatunk ki közülük egy küldöttséget, melyben egy osztályvezető, két csoportvezető és tíz beosztott szerepel? Hányféleképpen tehetjük ezt, ha a kereskedelmi osztály vezetője és az áruforgalmi csoport vezetője mindenképpen a küldöttek között kell, hogy legyenek?
30. Egy képviselő egy napon 10 interpellációt hallgatott meg, ebből hatot elfogadott. Tetszőlegesen kiválasztottunk három interpellációt.
- a) Hányféleképpen tehetjük ezt meg?
 - b) Hány különböző olyan kiválasztás van, amelyek közül pontosan kettőt fogadott el a képviselő?
 - c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy közülük legalább két interpellációt fogadott el az adott képviselő?

31. Hányféleképpen osztható ki 10 személy között 2 db 500- hr-ás, 3 db 200- hr-ás és 4 db 50- hr-ás jutalom?
32. Egy önkiszolgáló étterem pultján 6 különböző leves és 9 különböző főzelék áll. Hányféle lehet egy 4 fős társaság együttes fogyasztása, ha mindenki eszik levest is, főzeléket is?
33. Szilveszter éjfélkor egy héttagú baráti társaságban mindenki mindenkivel koccint. Hány koccintás ez összesen?
34. Ötös lottón (ötöt húznak kilencven számból) hány különböző szelvényt kell kitölteni, hogy biztosan legyen ötös találat?
35. Egy konvex sokszögbe összesen 77 átló húzható. Hány oldalú a sokszög?
36. Egy csomag 32 lapos magyar kártyából kihúzzunk 2 lapot úgy, hogy az elsőnek kihúzott lapot a húzás után visszatesszük. Hány esetben lesz a kihúzott lapok között legalább egy ász?
37. Egy csomag 32 lapos magyar kártyából kihúzzunk két lapot úgy, hogy az elsőnek kihúzott lapot a húzás után nem tesz-szük vissza. Hány esetben lesz a lapok között legalább egy király?
38. Hányféleképpen helyezkedhet el 15 személy 3 darab ötszemélyes csónakban, ha 1-1 csónakon belül az elhelyezkedést figyelmen kívül hagyjuk?
39. Piros, fehér és fekete színű játékkockánk van, amelyeket egy dobozba helyezünk el. Kettőt kiveszünk és dobunk velük. Hányféle kimenetele lehet a kísérletnek?
40. Adott a síkban 25 különböző pont, amely közül bármely három nem illeszkedik egy egyenesre. Hány egyenest határoznak meg ezek a pontok?
41. Hány háromszöget határoz meg 12 olyan, egy síkban fekvő egyenes, amelyek között nincs párhuzamos, és közülük bármely három nem illeszkedik egy pontra?
42. Hányféleképpen lehet leolvasni a MATEMATIKA szót az ábráról, ha az olvasás során csak jobbra és lefelé haladhatunk?

M	A	T	E	M
A	T	E	M	A
T	E	M	A	T
E	M	A	T	I
M	A	T	I	K
A	T	I	K	A

43. Hányféleképpen lehet leolvasni a GÉNIUSZ szót az ábráról, ha az olvasás során csak olyan mezőbe léphetünk tovább, amely csúcsával vagy lapjával érintkezik az előző mezővel?

						G						
					É	É	É					
				N	N	N	N	N				
			I	I	I	I	I	I	I			
		U	U	U	U	U	U	U	U	U		
	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	
Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z

Ellenőrző kérdések:

1. Hány különböző sorrendje lehet n elemnek?
2. Mit nevezünk n elem k -adosztályú ismétlés nélküli kombinációjának?
3. Mennyi n elem k -adosztályú ismétléses variációinak száma?
4. Hogyan számoljuk ki az $n!$ (n faktoriális) számot?
5. Hogyan számoljuk ki a C_n^k binomiális együtthatót?
6. Mit értünk n elem k -adosztályú ismétléses variációján?
7. Döntse el, az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis!
 - a Amikor n elem k -adosztályú ismétléses kombinációjáról beszélünk, $k > n$ is lehet.
 - b A lottóhúzások számát ismétlés nélküli kombinációval lehet meghatározni.
 - c Ha egy kombinációban két elemet felcserélünk, egy másik kombinációt kapunk.
 - d Ha egy ismétléses variációban két különböző elemet felcserélünk, egy másik ismétléses variációt kapunk.
 - e Az n elem k -adosztályú ismétlés nélküli kombinációinak a száma megegyezik az $(n - k)$ -adosztályú ismétlés nélküli kombinációinak a számával. ($k \neq n - k$).
 - f Az n elem k -adosztályú ismétlés nélküli variációinak a száma megegyezik az $(n-k)$ -adosztályú ismétlés nélküli variációinak a számával. ($k \neq n - k$).
 - g Az n elem k -adosztályú ismétléses kombinációinak a száma megegyezik $n - k + 1$ elem k -adosztályú ismétlés nélküli kombinációinak a számával.
 - h Az n elem k -adosztályú ismétlés nélküli kombinációinak a száma megegyezik, az olyan n elemű ismétléses permutációk számával, ahol k illetve $n-k$ elem azonos.
 - i A kenőszelvény kitöltésekor egy ismétlés nélküli kombinációt adunk meg.
 - j A totószelvény kitöltésekor egy ismétlés nélküli variációt adunk meg.

2. fejezet

Eseményalgebra

Fontosabb alapfogalmak:

- **Eseménylagebrai alapfogalmak:**

- elemi esemény,
- összetett esemény,
- lehetetlen esemény,
- biztos esemény,
- eseménytér,
- egymást kizáró események.

- **Műveletek eseményekkel:**

- események metszete $A \cap B = A \cdot B$,
- események uniója $A \cup B = A + B$,
- események különbsége $A \setminus B = A - B$,
- események komplementere $\overline{A}$.

Példa: Egy medencét két csapon keresztül lehet megtölteni. Az A esemény jelentse azt, hogy az első csapon át folyik a víz, B azt, hogy a második csapon át folyik. Fogalmazzuk meg a következő eseményeket:

a) $A \cap \overline{B}$;

b) $\overline{A \cup B}$.

Fejezzük ki A és B eseményekkel és az eseményalgebrai műveletekkel a következő eseményeket:

c) legalább az egyiken nem folyik;

d) csak az egyiken folyik!

Megoldás:

a) Csak az elsőn folyik.

b) Egyiken sem folyik.

c) $\overline{A} \cup \overline{B}$.

d) $(A - B) \cup (B - A)$.

Feladatok:

1. Igazoljuk a De-Morgan azonosságokat, azaz, hogy

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \text{ és } \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}!$$

2. Háromszor dobunk egy kockával. A_i jelentse azt az eseményt, hogy az i -edik dobás hatos, $i = 1, 2, 3$. Mit jelentenek az alábbi események:

b) $A_1 \cup A_2$;

c) $A_1 \cap A_2$;

d) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$;

e) $A_1 \cap A_2 \cap A_3$;

f) $A_1 \cap \overline{A_2}$;

g) $A_1 - A_2$?

3. Tíz pénzérmét kell megvizsgálnunk, hogy szabályosak-e vagy sem. Legyen A_i az az esemény, hogy a i -edik pénzérme szabályos ($i = 1, \dots, 10$). Mit jelentenek az alábbi események?

a) $A_1 \cup \dots \cup A_{10}$;

b) $A_1 \cap \dots \cap A_{10}$;

c) $\overline{A_1} \cup \dots \cup \overline{A_{10}}$;

d) $\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{10}}$;

e) $\overline{A_1 \cup \dots \cup A_{10}}$;

f) $\overline{A_1 \cap \dots \cap A_{10}}$;

g) $A_1 \cup \overline{A_2} \cup A_3$;

h) $A_8 \cup \overline{A_9} \cap A_{10}$;

i) $A_1 \cup (A_9 \cap A_{10})$;

j) $A_1 \cap \overline{(A_9 \cap A_{10})}$.

4. Egy repülőgépnél 4 hajtóműve van, 2 jobb oldali és 2 bal oldali. A gép akkor tud felszállni, ha mindkét oldalon van legalább egy működőképes hajtómű. J_1 esemény: a jobb 1. hajtómű működőképes, J_2 esemény: a jobb 2. hajtómű működőképes, B_1 esemény: a bal 1. hajtómű működőképes, B_2 esemény: a bal 2. hajtómű működőképes. Válassza ki az alábbi események közül azokat, amikor a repülő biztosan fel tud szállni!

a) $J_1 \cup J_2 \cup B_1 \cup B_2$;

b) $J_1 \cap J_2 \cap B_1 \cap B_2$;

c) $(J_1 \cup J_2) \cap (B_1 \cup B_2)$;

d) $J_1 \cap J_2 \cup B_1 \cap B_2$;

e) $J_1 \cap (J_2 \cup B_1) \cap \overline{B_2}$;

f) $J_1 \cup (J_2 \cap B_1) \cup B_2$.

5. Egy brókercégnél egy alkalmazott háromféle részvénnel kereskedik egy adott napon. Jelentse az A eseményt azt, hogy az adott napon kötött üzletet az első fajta, B eseményt azt, hogy kötött üzletet a második fajta, C eseményt azt, hogy kötött üzletet a harmadik fajta részvényre. Fogalmazzuk meg, hogy mit jelentenek az alábbi események:

a) $\overline{A \cup B}$;

b) $\overline{A \cup B \cap C}$

c) $\overline{A \cap B \cap C}$;

d) $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$;

e) $\overline{A}$;

f) $\overline{\overline{A} \cup \overline{B} \cap \overline{C}}$;

g) $\overline{A \cap B \cap C}$;

h) $A \cup B \cup C$;

i) $A \cap B \cap \overline{C}$;

j) $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C);$

k) $(\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap \overline{C});$

l) $(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}).$ Formalizáljuk a következő eseményeket:

a) az adott napon nem mindegyik fajta részvényre kötött üzletet;

b) pontosan kétféle részvénnnyel kereskedett az adott napon;

c) volt üzletkötés az adott napon ennél az alkalmazottnál!

6. Milyen kapcsolatban vannak A és B események, ha

a) $A \cap B = A;$

b) $A \cup B = A;$

c) $A \cup B = A \cap B;$

d) $A \cup (\overline{A} \cap B) = B ?$

7. Egy műhelyben három gép dolgozik. Jelentse A_i azt az eseményt, hogy az i -edik gép egy éven belül elromlik, $i = 1, 2, 3$. Fejezzük ki az A_i eseményekkel és az eseményalgebrai műveletekkel:

a) csak az első romlik el;

b) mindhárom elromlik;

c) egyik sem romlik el;

d) az első és a második nem romlik el;

e) az első és második elromlik, a harmadik nem;

f) csak egy gép romlik el;

g) legfeljebb egy gép romlik el;

h) legfeljebb két gép romlik el;

i) legalább egy gép elromlik!

8. Egy kockát ötször egymás után feldobunk. Jelöljük B_j -vel azt az eseményt, hogy a j -edik dobás 6-os. Fejezzük ki a B_j -kel a következő és az eseményalgebrai műveletekkel:
- a) az ötödik dobáskor kapunk először 6-ost;
 - b) legalább egyszer 6-ost dobunk;
 - c) pontosan négyszer dobunk 6-ost;
 - d) az első és a negyedik dobás 6-os, a többi közül az egyik biztosan nem 6-os!
9. Két dobókockával dobunk. Milyen kapcsolatban vannak A és B események? Adjuk meg az $A \cap B$ eseményt!
- a) A : páratlan az összeg, B : dupla 6-ost dobunk;
 - b) A : páros az összeg, B : dupla 6-ost dobunk;
 - c) A : páratlan az összeg, B : legalább egy hatost dobunk.
10. Egy kockával háromszor dobunk, a dobott számokat lejegyezzük a dobás sorrendjében. Legyen
 A : minden dobott szám különböző,
 B : egy darab hatos van a dobások között.
 Fejezzük ki A és B eseményekkel és az eseményalgebrai műveletekkel a következő eseményeket!
 Számoljuk ki az eseményekhez tartozó elemi események számát is:
- a) minden dobott szám különböző és egy darab hatos van köztük;
 - b) a dobott számok között vannak egyformák is;
 - c) pontosan egy ötöst dobtunk, és van a számok között egyforma is;
 - d) a dobott számok között vannak egyformák, és nem egy ötös van közöttük!
11. Egy matematika szakra járó főiskolásnak 3 tantárgyból kell vizsgát tennie: matematikai analízisből, geometriából, algebrából. Legyen M esemény: matematikai analízisből sikeres vizsgát tett, G esemény: geometriából sikeres vizsgát tett, A esemény: algebrából sikeres vizsgát tett. Fejezzük ki M , G , A eseményekkel és az eseményalgebrai műveletekkel:
- a) csak egy tárgyból tett sikeres vizsgát;

b) legalább egy tárgyból sikeres vizsgát tett!

12. Egy érmével dobunk. Ha az esemény fej, még egyszer, ha írás, még kétszer. Írjuk fel az eseményteret!

Ellenőrző kérdések:

1. Mit értünk események összegén?
2. Mit értünk események szorzatán?
3. Mikor mondjuk azt, hogy az A esemény maga után vonja a B eseményt?
4. Döntse el, az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis!
 - Bármely két esemény közül az egyik maga után vonja a másik bekövetkezését.
 - Két esemény szorzata olyan esemény, amely a két komponens esemény mindegyikét maga után vonja.
 - Az események szorzata felcserélhető (kommutatív).
 - Az események összeadása átvihető (asszociatív)
 - Egy esemény az ellentettjével teljes eseményrendszert alkot.
 - Egy esemény és az ellentettje nem egymást kizáró események.
 - Az események összege akkor következik be, ha a komponens események valamelyike bekövetkezik.
 - Az események szorzata akkor következik be, ha a komponens események valamelyike bekövetkezik.
 - Az események valószínűsége lehet akár 1000
 - Az események valószínűsége a véletlen kísérlet minden egyes végrehajtásakor más és más.
 - Az ellentett esemény valószínűsége mindig nagyobb mint az esemény valószínűsége.
 - Az ellentett esemény valószínűségének és az esemény valószínűségének összege mindig 1.
 - Az események szorzatának a valószínűsége nem lehet nagyobb bármely komponens esemény valószínűségénél.
 - Az események összegének a valószínűsége nem lehet nagyobb bármely komponens esemény valószínűségénél.
 - A független események kizárják egymást.
 - A független események nem zárják ki egymást.

- Két olyan független esemény, melyek közül egyik sem lehetetlen vagy biztos esemény, nem zárhatják egymást ki.
- Független események szorzatának valószínűsége egyenlő az események valószínűségeinek szorzatával.
- Független események szorzatának valószínűsége egyenlő az események valószínűségeinek összegével.
- Egemást kizáró események szorzata a lehetetlen esemény.
- Ha két esemény szorzatának valószínűsége nulla, akkor a két esemény kizárja egymást.
- Egemást kizáró események összegének valószínűsége a komponens események valószínűségeinek összege.
- A lehetetlen és a biztos események minden eseménytől függetlenek.
- Egy esemény nem lehet független a komplementerétől.

3. fejezet

Valószínűségszámítás

3.1. Klasszikus valószínűség

- **A valószínűségszámítás axiómái.**

I. axióma: Bármely A eseményre igaz $0 \leq P(A) \leq 1$.

II. axióma: A biztos esemény valószínűsége 1.

III. axióma: Legyen A és B események egymást kizáróak, akkor $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Több véges vagy megszámlálható számú egymást páronként kizáró esemény akkor

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots$$

- **Valószínűségszámítási tételek.**

- Komplementer események valószínűsége:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

- Ha $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ események teljes eseményrendszert alkotnak akkor

$$\sum_i P(A_i) = 1.$$

- Események különbségének valószínűsége

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

- Események összegének valószínűsége

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

- **A valószínűségszámítás klasszikus képlete.** Ha egy kísérletnek csak véges sok kimenetele lehet, és az egyes kimeneteknek azonos a valószínűsége, akkor a kísérlettel kapcsolatos események és ezek valószínűsége klasszikus valószínűségi mezőt alkotnak.

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{kedvező elemi események száma}}{\text{összes elemi esemény száma}}.$$

Példa: A 32 lapos magyar kártyából visszatevés nélkül kihúzzunk 5 lapot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

- a) minden kihúzott lap azonos színű;
- b) a kihúzott lapok között van piros;
- c) zöld vagy piros lapok közül legalább az egyik szín van a kihúzott lapok között?

Megoldás: Magyar kártyából 5 lapot $C_{32}^5 = 201376$ módon választhatunk ki. Ezért az összes elemi esemény száma $n = 201376$.

- a) Legyen A esemény: minden kihúzott lap azonos színű. Vizsgáljunk egy adott színt, például a zöldet. A csomagban 8 zöld színű lap van ezek közül öt $C_8^5 = 56$ módon választható ki. A csomagban 4 különböző szín van, tehát a lapok színét négyféleképpen választhatjuk ki. Ezért az A eseményre kedvező esetek száma $k_A = 4 \cdot C_8^5$.

A kért valószínűség: $P(A) = \frac{k_A}{n} \approx 0,001$.

- b) Legyen B esemény: a lapok között van piros. Ez azt jelenti, hogy lehet 1, 2, 3 vagy 4 piros a kihúzott lapok között. Ezért ebben az esetben érdemes a $\overline{B}$ eseményt vizsgálni: a kihúzott lapok között nincs piros. Vagyis 24 lap közül (ezek a lapok nem pirosak) ötöt kell kiválasztani visszatevés nélkül, tehát a $\overline{B}$ eseményre kedvező esetek száma: $k_{\overline{B}} = C_{24}^5$.

A kért valószínűség: $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{k_{\overline{B}}}{n} \approx 0,789$.

- c) Legyen C esemény zöld vagy piros lapok közül legalább az egyik szín van a kihúzott lapok között. Itt is egyszerűbb a komplementer eseménnyel számolni. $\overline{C}$ sem zöld, sem piros nincs a kihúzott lapok között. Vagyis 16 lapból választhatunk ötöt $k_{\overline{C}} = C_{16}^5 = 4368$.

A kért valószínűség:

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{k_{\overline{C}}}{n} \approx 0,979.$$

Feladatok:

1. Próbagyártás után kiderül, hogy annak a valószínűsége, hogy a vizsgált gyártmány anyaghibás, 0,15, annak pedig, hogy mérethibás, 0,3. A két esemény egyszerre 0,08 valószínűséggel következik be. Mennyi a valószínűsége, hogy egy termék hibátlan?
2. Bizonyítsuk be, hogy ha $P(A) \geq 0,8$ és $P(B) \geq 0,8$, akkor $P(A \cap B) \geq 0,6$!
3. Ha a következő szavak betűit összekeverjük, és véletlenszerűen sorba rakjuk, mennyi a valószínűsége, hogy újra az eredeti szót kapjuk:
a) BEREKSZÁSZ;
b) KÁRPÁTALJA?
4. Egy dobozban 5 piros golyó van. Legkevesebb hány fehér golyót kell hozzátenni, hogy fehér golyó húzásának valószínűsége nagyobb legyen 0,9-nél?
5. Egy urnában 6 piros, több fehér és fekete golyó van. Annak a valószínűsége, hogy egy golyót kihúzva, az fehér vagy fekete golyó lesz: $\frac{3}{5}$; hogy piros vagy fekete lesz: $\frac{2}{3}$. Hány fehér és fekete golyó van az urnában?
6. Egy cukrászdába egy 9 fős társaság érkezik. Három dobostortát, 2 túrós rétest és 4 somlói galuskát rendelnek. A pincér kihozza a süteményeket, de sajnos elfelejtette, hogy ki melyiket rendelte, így véletlenszerűen teszi le őket a vendégek elé. Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindenki a megfelelő süteményt kapja?
7. Egy vendéglő egyik asztalánál 9 vendég ül, mindenki rendel egy italt, összesen 3 üdítőt 4 vörös és 2 fehér bort. A pincér találomra osztja ki az italokat. Mennyi a valószínűsége, hogy mindenki azt kapja, amit kért?
8. A 32 lapos magyar kártyából egyszerre 3 lapot húzunk. Mi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott lapok között legalább egy zöld van?
9. Két kockával dobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább az egyik kockán 6-ost dobunk?
10. Legalább hányszor kell egy érmét feldobni ahhoz, hogy 0,95-nél nagyobb valószínűséggel legyen a dobások között fej?
11. Legalább hányszor kell feldobni két szabályos dobókockát ahhoz, hogy legfeljebb 0,74 valószínűséggel egyszer se kapjunk dupla hatost?

12. Egy szabályos dobókockával kétszer egymás után dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy az első dobás eredménye nagyobb, mint a másodiké?
13. A bűvös hatos játék a következő: 2 szabályos dobókockával dobva akkor nyerünk, ha van hatos a dobott számok között vagy ha a dobott számok összege 6. Mennyi a nyereség valószínűsége?
14. Dobjunk fel 3 szabályos dobókockát egymástól függetlenül. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok összege prímszám lesz?
15. Egy kockával 6-szor dobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy van olyan szám, amit legalább kétszer dobunk?
16. Toscana hercege szerette a szerencsejátékot. Észrevette, hogy ha két kockával dobott, akkor a 9 gyakrabban jött ki, mint a 10, ezért írt Galileinek, hogy fejtse meg a rejtélyt. Mit válaszolhatott Galilei?
17. Mennyi a valószínűsége, hogy egy szelvénnel fogadva az ötös lottón (ötöt húznak kilencven számból) legalább
 - a) 4 találatunk lesz;
 - b) ötösünk lesz;
 - c) legalább kettes találatunk lesz?
18. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 2 ember születésnapja azonos napra esik? (Februárt 28 nappal vegyük számításba, a születésnapok $\frac{1}{365}$ valószínűséggel esnek az egyes napokra.)
19. Legalább hány ember esetén nagyobb $\frac{1}{2}$ -nél annak a valószínűsége, hogy legalább 2-nek azonos hónapra essék a születésnapja (minden hónapot azonos valószínűséggel véve)?
20. Dobjunk fel 10 darab egyforma érmét. Mennyi a valószínűsége, hogy mindegyiken fej vagy mindegyiken írás van?
21. Tíz egyforma pár cipőből kiválasztunk véletlenszerűen 4 cipőt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy lesz legalább egy pár?

22. Egy dobozban n golyó van az $1, 2, \dots, n$ számokkal jelölve. Egyenként kihúzzuk az összes golyót. Mi a valószínűsége, hogy minden alkalommal nagyobb számú golyót húzunk ki, mint az előző volt?
23. Egy parkolóban 8 hely van. Odaérkezve egy autó véletlenszerűen beáll az üres helyek valamelyikére. 4 autó áll már bent, amikor egy busz érkezik. Akkor tud beállni, ha van 4 egymás melletti szabad hely. Mennyi a valószínűsége, hogy ezt meg tudja tenni?
24. 10 lapra felírjuk a 10 számjegyet. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy 2 lapot kihúzva, egymás mellé téve a kapott szám osztható 18-cal.
25. Egy kerek asztalhoz n különböző magasságú ember ül le. Mi a valószínűsége, hogy a legnagyobb és a legkisebb egymás mellé kerül?
26. Egy kalapban 3 lap van, egyikre 1, a másodikra 2 és a harmadikra 3 van írva. Négyyszer húzunk visszatevéssel. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott számok összege páros?
27. Mennyi a valószínűsége, hogy a bridzskártyát szétosztva
- a) legfeljebb egy játékos kezében van 2 ász;
 - b) a négy ász közül mind a négy játékosnak egyet-egyet osztanak?
28. 100 alma közül 10 férges, kiveszünk közülük válogatás nélkül 5-öt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy lesz közöttük férges?
29. Mennyi a valószínűsége, hogy az öt lottószámot növekvő sorrendben húzzák ki?
30. Tekintsük az $1, 2, \dots, n$ számoknak egy véletlen permutációját (minden permutáció egyformán valószínű)! Mennyi a valószínűsége, hogy
- a) az 1 és 2 számok egymás mellé kerülnek;
 - b) az 1, 2 és 3 számok egymás mellé kerülnek?
31. Egy urnában ugyanannyi piros golyó van, mint fehér. Ha visszatevés nélkül húzunk kettőt, akkor annak valószínűsége, hogy mindkettő piros, $\frac{8}{33}$. Hány golyó van az urnában?

32. Egy 10-lakásos ház elkészültekor kiderül, hogy 7 lakás hibamentes, bár a többi is beköltözhető. Öt lakásba már beköltöztek a lakók. Mi a valószínűsége annak, hogy pontosan 3 hibátlan lakásba és két hibásba költöztek be?
33. Egyszerre dobunk 6 szabályos kockával. Mi a valószínűsége annak, hogy legalább két azonos dobókockán azonos pontszám lesz felül?
34. A mostani influenzajárvány mutatói szerint a lakosság 15%-a betegedett meg. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 18 fős csoportban legfeljebb 3 influenzás beteg van?
35. Egy villanykörtét gyártó cég termékei között 8% selejtes. Mekkora annak valószínűsége, hogy 10 véletlenszerűen kiválasztott körte között
- a) legalább 2 selejtes;
 - b) pontosan 4 selejtes lesz?

3.2. Geometriai valószínűség

Geometriai valószínűségről beszélünk, ha

- a H eseménytér egy geometriai alakzat,
- az A esemény a H egy részhalmaza,
- egy véletlen pont A tartományba esésének valószínűsége arányos az A halmaz mértékével.

Ekkor az esemény bekövetkezésének valószínűsége:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(H)},$$

ahol a $\mu(\cdot)$ mérték lehet: hossz, terület, térfogat vagy felszín.

Példa: Egy kikötőhöz 24 órás időtartamon belül véletlen időpontban 2 hajó érkezik. Az előbb érkező rögtön megkezdi a pakolást, mely egy órát vesz igénybe. Mi a valószínűsége, hogy valamelyik hajónak várakoznia kell?

Megoldás: Legyen x az első hajó érkezésének időpontja, y a második hajó érkezésének időpontja. Mivel két változóval van dolgunk ezért, a keresett valószínűséget két terület arányával adjuk meg.

A H eseményteret egy 24×24 -es négyzet alkotja, mivel

$0 \leq x \leq 24$ és $0 \leq y \leq 24$. Tehát $S(H) = 24^2$.

Vizsgáljuk a kedvező elemi események A halmazát. Ha a második hajó érkezik később, akkor a kedvező eseteket az $y - x \geq 1$ egyenlőtlenség írja le, ellenkező esetben $x - y \geq 1$. A koordinátarendszerben ábrázolva a kedvező eseteknek megfelelő pontok az besatírozott alakzatot adják.

Vagyis $S(A) = 2 \cdot \frac{23^2}{2}$. Ezért az A esemény bekövetkezésének valószínűsége:

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(H)} = \frac{23^2}{24^2} \approx 0,92$$

Feladatok:

1. Egy focilabdát taláломra nekirúgnak egy háznak, amely fala 10 m hosszú és 5 m magas (egyenletes eloszlást feltételezünk). A házon két 2 m x 1,5 m-es ablak van. Mennyi a valószínűsége, hogy ablakot talál el a labda?
2. A gázvezetékek meghibásodása bárhol bekövetkezhet és a hiba egy szakaszba való esésének valószínűsége a szakasz hosszával arányos. Egy 50 méter hosszú gázvezetékben 2 helyen szivárog a gáz. A 2 hiba egymástól függetlenül keletkezett. Ha a hibák közelebb vannak egymáshoz 2 méternél, akkor az aszfaltot csak 1 helyen kell bontani. Mi a valószínűsége annak, hogy nem szükséges 2 bontás?
3. Véletlen szerűen választottak egy pontot a

$$K = \{(p, q) | p \in [-1, 1], q \in [-1, 1]\}$$

halmazból. Mi a valószínűsége, hogy az $x^2 + 2px + q = 0$ egyenlet gyökei valós számok?

4. Két számot választunk a 0 és 1 között. Mi a valószínűsége annak, hogy szorzatuk kisebb $\frac{4}{25}$ -nél?
5. Véletlenszerűen felírunk két, egynél kisebb számot. Mekkora annak a valószínűsége, hogy összegük kisebb egynél és szorzatuk kisebb $\frac{2}{9}$ -nél?
6. Egy egységnyi hosszúságú szakaszon taláломra kiválasztunk két pontot. E pontok az adott szakaszt három részre osztják. Mekkora annak a valószínűsége, hogy e szakaszokból háromszög rajzolható?
7. Egy még létező, vásártereken játszott régi angol játék a pennygurítás: adott egy 2 egység oldalhosszúságú négyzetháló és egy 1 egység átmérőjű penny. A cél az, hogy az elgurított penny ne essen vonalra. Hogyan számítjuk ki a nyerési esélyeket?
8. Egy kis kikötőben egyszerre csak egy hajó rakodhat. Az egyik nap 5 és 12 óra között biztosan érkezik két hajó. A rakodás mindkettő esetében 53 percet vesz igénybe. Mennyi a valószínűsége, hogy nem kell várniuk egymásra?
9. Anna munkaideje háromnegyed öt és öt között véletlenszerűen, egyenletes eloszlás szerint ér véget. Béla fél öt és negyed hat között szokott odaérni, hogy hazavigye, szintén véletlenszerűen, egyenletes eloszlás szerint.

- a) Mennyi a valószínűsége, hogy Béla hamarabb odaér, mint ahogy Anna végez?
- b) Mennyi a valószínűsége, hogy egyiküknek sem kell 15 percnél tovább várakoznia?
10. András és Betti megbeszélik, hogy munka után találkoznak. Mindkettejüknek egymástól függetlenül véletlenszerűen, egyenletes eloszlás szerint ér véget a munkaideje 4 óra és fél 6 között.
- a) Mennyi a valószínűsége, hogy az előbb jövőnek nem kell 10 percnél többet várnia a másikra?
- b) Ha András fél órát hajlandó várni, Betti, aki türelmetlenebb, csak negyed órát, mennyi a valószínűsége, hogy találkoznak?
11. Választunk a $(0,1)$ intervallumon találmra egy pontot (egyenletes eloszlás szerint). Jelöljük e pontnak a 0-tól való távolságát ξ -vel. Mennyi a annak a valószínűsége, hogy a ξ , az $1 - \xi$ és az $1/2$ hosszúságú szakaszokból háromszöget lehet alkotni?
12. Egy egységnyi hosszúságú szakaszon találmra kijelölünk két pontot. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a köztük lévő távolság kisebb mint egy előre megadott h hossz, ahol $0 < h < 1$?
13. Egy r sugarú kör területén megjelölünk egy pontot. Ezután a körlapon találmra választunk egy másik pontot (egyenletes eloszlás szerint). Mennyi a valószínűsége, hogy a két pont távolsága kisebb, mint $r\sqrt{2}$?
14. A $(0; 1)$ intervallumon találmra választunk két számot (egymástól függetlenül és egyenletes eloszlás szerint).
- Mennyi a valószínűsége, hogy különbségük
- a) $1/4$ és $1/2$ közé esik;
- b) kisebb lesz, mint a kisebbik szám?
15. Egy beregszászi áruházhoz két áruszállító érkezik egyenletes eloszlás szerinti véletlen időpontokban: a Munkácsról érkező 8 és 10 óra között, az Ungvárról érkező pedig 9 és 10 óra között. Mennyi a valószínűsége, hogy az ungvári teherautó érkezik meg előbb?
16. Egy $15\text{ cm} \times 15\text{ cm}$ -es négyzet alakú táblára nyilakat lövünk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a találat a négyzet minden oldalától
- a) legalább 3 cm -re van;

b) legfeljebb 9 cm-re van?

17. Egy 20 cm sugarú vízlevezető akna fedőlapján 4 darab egymással párhuzamos téglalap alakú rés van. A rések 20 cm hosszúak és 4 cm szélesek. Egy kislány véletlenül elejtett az akna felett egy 0,5 cm sugarú gyöngyöt. Mennyi annak a valószínűsége, annak, hogy a gyöngy beleesik az aknába, nem érintve közben a rések széleit?
18. Vízszintes táblára d távolságú párhuzamos egyeneseket rajzoljunk. Egy $l < d$ hosszúságú tűt dobálunk a táblára megpörgetve azt. Mennyi a valószínűsége, hogy a tű metszi valamelyik egyenest? (*Buffon-féle tűprobléma*)

Ellenőrző kérdések:

1. Mik a valószínűség axiómái?
2. Mit állít a Poincare tétel?
3. Mi a teljes eseményrendszer fogalma?

4. fejezet

Feltételes valószínűség

4.1. Feltételes valószínűség, teljes valószínűség tétele, Bayes tétel

- **Feltételes valószínűség.**

Legyen A és B egy kísérlettel kapcsolatos két esemény, ahol $P(B) \neq 0$.

Az A esemény B feltétel melletti bekövetkezésének valószínűsége:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Ha a H eseménytér elemi eseményeinek a száma véges, akkor

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_n$ a H eseménytér tetszőleges eseményei, ezek együttes bekövetkezésének valószínűsége:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) &= \\ &= P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \cdot \\ &\quad \cdot P(A_{n-1} | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-2}) \cdot \dots \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_1). \end{aligned}$$

Példa: Két kockával dobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7, feltéve, hogy a dobott számok összege páratlan.

Megoldás: Legyen A esemény: a dobott számok összege 7;

B esemény: a dobott számok összege páratlan.

$A \cap B$ eseményre kedvező esetek: (1,2), (1,4), (1,6), (2,1), (2,3), (2,5), (3,2), (3,4), (3,6), (4,1), (4,3), (4,5), (5,2), (5,4), (5,6), (6,1), (6,2), (6,4), (6,6).

$A \subset B$ ezért $A \cap B = A$, vagyis az $A \cap B$ eseményre kedvező esetek: (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)

A kért valószínűség:

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$$

- **A teljes valószínűség tétele.**

A $B_1, B_2, \dots, B_n$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ha páronként kizárják egymást és összegük a biztos esemény.

Ha $B_1, B_2, \dots, B_n$ teljes eseményrendszert alkotnak a H eseménytérben és $P(B_i) \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), akkor a H eseménytér tetszőleges A eseményére érvényes a teljes valószínűség tétele:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i).$$

- **Bayes tétel.**

Ha $B_1, B_2, \dots, B_n$ teljes eseményrendszert alkotnak a H eseménytérben és $P(B_i) \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), továbbá a H eseménytér tetszőleges A eseményére, melyre $P(A) \neq 0$, akkor

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)}.$$

Példa: Egy főiskolára könyvvitel és matematika szakos hallgatók járnak. A harmadik évfolyamon négyszer annyi könyvvitel szakos hallgató van mint matematikus. Statisztikából a könyvviteles hallgatók 68%-a, a matematikusok 82%-a tett sikeres vizsgát. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

- a) egy véletlenszerűen kiválasztott hallgató sikeres vizsgát tett;
- b) egy sikeres vizsgát tett hallgató matematikus?

Megoldás: Legyen B_1 esemény: a kiválasztott hallgató matematikus;

B_2 esemény: a kiválasztott hallgató könyvvitel szakos;

A esemény: a kiválasztott hallgató sikeres vizsgát tett;

$A|B_1$ esemény: a kiválasztott hallgató sikeres vizsgát tett, feltéve, hogy matematikust választottunk;

$A|B_2$ esemény: a kiválasztott hallgató sikeres vizsgát tett, feltéve, hogy könyvvitel szakost választottunk;

Ekkor: $P(B_1) = \frac{1}{5} = 0,2$, $P(B_2) = \frac{4}{5} = 0,8$,

$P(A|B_1) = 0,82$, $P(A|B_2) = 0,64$.

a) A teljes valószínűség tételét használjuk:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) = \\ &= 0,2 \cdot 0,82 + 0,8 \cdot 0,64 = 0,708. \end{aligned}$$

b) Itt a Bayes tételt használjuk:

$$\begin{aligned} P(B_1|A) &= \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)} = \\ &= \frac{0,2 \cdot 0,82}{0,2 \cdot 0,82 + 0,8 \cdot 0,64} \approx 0,232. \end{aligned}$$

Feladatok:

1. Egy műhelyben 3 gép dolgozik. Az elkészült munkadarabokat a minőségellenőrzésen I., II., illetve III. osztályba sorolják.

	B1 : I.o.	B2 : II.o.	B3 : III.o.
A1 : 1.gép	500	510	415
A2 : 2.gép	440	390	275
A3 : 3.gép	320	300	190

A napi össztermékből véletlenszerűen kiválasztunk egyet.

- I) Írjuk fel szimbólumokkal és számoljuk ki:

- mennyi a valószínűsége, hogy a 2.gép készítette a munkadarabot, feltéve, hogy első osztályú;
- mennyi a valószínűsége, hogy másodosztályú a munkadarab, feltéve, hogy nem a 3.gép készítette?

- II) Számítsuk ki és fogalmazzuk meg szavakkal az alábbiak jelentését:

- a) $P(A_1)$;
- b) $P(A_1|B_2)$;
- c) $P(A_1|B_1 \cup B_2)$;
- d) $P(\overline{B_2}|\overline{A_1} \cup A_2)$;
- e) $P(\overline{A_1 \cup A_2}|\overline{B_1 \cup B_3})$;
- f) $P(A_1 \cup A_3|B_1)$.

2. Egy villamos 10 percenként jár. Feltéve, hogy az előző már legalább 3 perce elment, mennyi a valószínűsége, hogy a következő 5 percen belül jönni fog?
3. Egy asztalnál négyen kártyáznak. A 32 lapos magyar kártyát egyenlően osztják egymás között. Ha az egyik kiválasztott játékosnak nem jut ász, mennyi a valószínűsége, hogy a következőnek sem jut?
4. Egy 32 lapos kártyacsomagból 4 lapot húzunk ki egymásután visszatevés nélkül Mennyi a valószínűsége annak, hogy az első 2 lap király, a harmadik felső a negyedik pedig, ász?

5. Egy dobozban 5 fehér és két piros golyó van. Előbb két golyót húzunk a dobozból visszatevés nélkül, majd egy harmadikat. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a harmadik kivett golyó piros?
6. Van három testvér. A legnagyobb szeret rosszalkodni, ezért ha egyedül hagyják, 0,7 valószínűséggel rossz fát tesz a tűzre. A középső ha látja, hogy bátyja rosszalkodik, 0,5 valószínűséggel csatlakozik hozzá. A legkisebb szereti utánozni testvéreit, tehát ha mindketten rosszalkodnak, 0,8 valószínűséggel utánozza őket. Egy délután magukban játszanak az udvaron. Mennyi a valószínűsége, hogy mindhárman rosszalkodni fognak, amikor szüleik kimennek utánuk?
7. Azonos fajta árukból két tételünk van. Az első tétel 15, a második tétel 20 darabból áll. Mindkét tételben 1-1 hibás darab van. Az első tételből egy véletlenszerűen választott darabot átteszünk a másodikba. Ezután a második tételből választunk egyet és ezt megvizsgáljuk. Mi a valószínűsége annak, hogy ez a darab selejtes?
8. Két doboz mindegyikében 100 db csavar van. Az első dobozban 10 db selejtes, a másodikban 6. Találomra kiveszünk egy csavart valamelyik dobozból. (A dobozok közül egyenlő valószínűséggel választunk) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kivett csavar jó?
9. 100 db kész műszer között előfordulhat 0,1,2,3,4 hibás. Ezek előfordulásának valószínűsége rendre: $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{12}$, és $\frac{1}{12}$. Feltételezve, hogy bármelyik műszert egyenlő valószínűséggel vehetjük meg, mennyi annak a valószínűsége, hogy hibátlan műszert vásárolunk?
10. Valakit keresünk az egyetemen. A keresett személy egyforma valószínűséggel lehet adott 5 terem valamelyikében, és annak a valószínűsége, hogy az öt terem valamelyikében jelen van: p . Már 4 termet megnéztünk, és a keresett személyt nem találtuk. Mennyi a valószínűsége, hogy az 5-ik teremben megtaláljuk?
11. Egy egyetemi vizsgán az A szakos hallgatók 60%-a, a B szakos hallgatók 80%-a szerepel sikeresen. Az A-szakos hallgatók az évfolyam 15%-át teszik ki. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy találomra kiválasztott hallgató sikeresen vizsgázott?
12. Egy céllövöldében három rekeszben vannak puskák. Az első rekeszben 3 puska, a másodikban 1, a harmadikban 2. Ezekkel rendre 0,5; 0,7; 0,8 valószínűséggel találunk célba. Mennyi a találat valószínűsége, ha találomra választunk ki puskát?

13. Két város közötti távíró összeköttetés olyan, hogy a leadott távírójelek közül a pontok $\frac{2}{5}$ -e vonallá torzul, a vonalak $\frac{1}{3}$ -a pedig ponttá. A leadott jelek közül a pontok és vonalak aránya 5:3. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha a vevő oldalon pontot kaptak, akkor az adó pontot továbbított?
14. Amennyiben barátnőnk közvetlenül a randevúnk előtt megy fodrászhoz, akkor 90%, hogy elkésik a randevúról. Tízszer olyan gyakran fordul elő, hogy elkésik a randevúról, mint az, hogy randevú előtt fodrásznál volt. Ha elkésik, mennyi a valószínűsége, hogy fodrásznál volt?
15. Egy gyárban három gép gyárt csavarokat. A termékek 25%-át az A gép, 35%-át a B, a többit a C-gép gyártja. Az A gép 5%-ban, a B gép 4%-ban a C-gép pedig 25%-ban termel selejtet. Ha egy találomra kiválasztott csavar selejtes, mennyi a valószínűsége, hogy az A gép gyártotta.
16. 4 golyót helyezünk el egy kalapban: 1 fehéret, 1 kéket és 2 pirosat. A kalapot megrázzuk, majd valaki kihúz belőle két golyót. Megnézi őket, és fennhangon kijelenti, hogy legalább az egyik piros. Mennyi a valószínűsége, hogy a másik kihúzott golyó is piros?
17. Tegyük fel, hogy a férfiak 5%-a és a nők 0,25%-a színvak. Egy 20 nőből és 5 férfiből álló csoportból 1 személyt találomra kiválasztottunk. Megállapítjuk, hogy színvak. Mennyi a valószínűsége, hogy nőt választottunk ki?
18. Egy diák a vizsgán 0,6 valószínűséggel tudja a választ a kérdésre. Ha nem tudja, akkor tippel, és 0,2 valószínűséggel találja el a helyes választ. Feltéve, hogy a diák helyesen válaszolt, mekkora az esélye, hogy tudta a választ?
19. Egy gépesített ügyintézővel rendelkező irodában 3 gép dolgozik párhuzamosan, azonos típusú ügyiratok intézésében. Az első gép naponta 10 aktával végez, a második napi 15, a harmadik napi 25 aktával. Hibásan kezelt ügyirat naponta átlagosan 0,3, 0,9 ill. 0,5 db található egyes gépek munkájában. Az összesített napi mennyiségből találomra kivesszünk egy példányt, s azt rossznak találjuk. Mekkora a valószínűsége, hogy az első gép készítette?
20. Egy adott betegségben szenvedő betegek 63 %-át egy olyan új kezelésnek vetik alá, amely a korábbi 38 %-ról 81%-ra javítja a gyógyulási arányt. Egy gyógyult beteget kiválasztva mi a valószínűsége, hogy ő az új kezelésben részesült?

21. Sportolóknál azt vizsgálják, használnak-e doppingszert. Az erre használt teszt 99%-ban vezet pozitív eredményre, ha valaki használja a szert. Tudjuk, hogy a sportolók 1%-a használja a szert és azt is tudjuk, hogy 1%-ban akkor is pozitív lesz a teszt, ha nem doppingol a sportoló. Mennyi a valószínűsége, hogy tényleg doppingol a sportoló, ha pozitív lett a tesztje?
22. Egy kávézóban a felszolgáló megfigyelése szerint a kolumbiai kávé választók 50%-a ad borraivalót, a bécsi kávékeveréket választók 20%-a, míg a guatemalai kávé választók 30%-a. Mennyi a valószínűsége, hogy egy borraivalót adó vendég kolumbiai kávé ivott, ha az eladott kávék 20%-a kolumbiai, 70%-a bécsi és a maradék guatemalai?
23. Szinbád, a szultánnak tett szolgálataiért, választhat egyet az $N = 100$ háremhölgy közül úgy, hogy az egyenként előtte elvonuló hölgyek valamelyikére rámutat. Tegyük fel, hogy a háremhölgyek szépségük szerint egyértelműen sorrendbe állíthatók, és Szinbád taktikája a következő: a véletlen sorrendben elvonuló hölgyek közül, az első $n = 10$ szemrevétele után azt választja, aki szebb minden korábban látottnál. Mennyi annak valószínűsége, hogy Szinbád a legszebb háremhölgyet választja?
24. Egy üzemben 3 gép van, az első adja a termelés 40%-át, a másik kettő 30-30%-át. Az első és a második gép 0,05 valószínűséggel termel selejteset a harmadik 0,1 valószínűséggel. Mennyi a valószínűsége, hogy
- a) az üzem termékei közül egyet kiválasztva az selejtes lesz;
 - b) ha találunk egy selejtes terméket, azt az első gép gyártotta?
25. A matematika államvizsgán 4 témakörben szerepelnek kérdések: matematikai analízis, algebra, analitikus geometria és valószínűség számítás, egy diák a felsorolt tantárgyakból feltette kérdéseket megfelelően 70%, 60%, 80% és 50% valószínűséggel tudja. Tegyük fel, hogy az összes kérdés 40% analízis, 30%-a algebra, 15%- geometria. Mennyi annak a valószínűsége, hogy
- a) egy feltett kérdésre a diák tudta a választ;
 - b) egy diák helyes válaszai közül egyet kiválasztva azt tapasztaljuk, hogy az valószínűség számítás?
26. Egy használtautó-kereskedő azt vizsgálja befolyásolja-e a kocsí fényezése az eladási árat. Megfigyelései a következők: az eladott autók 45 %-át megvették katalógusár felett, 25

%-át katalógusár alatt, a többiért katalógusárat adtak. A katalógusár felett megvásárolt gépkocsik 65%-a volt metálfényezésű, a katalógusár alatt eladott 30 %-a volt metálfényezésű, míg a katalógusáron eladott autóknál ez az arány 45 %. Kiválasztunk tetszőlegesen egy eladott autót. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

- a) metálfényezésű;
- b) ha metálfényezésű, akkor katalógusár felett kelt el?

4.2. Események függetlensége

- **Két esemény függetlensége.**

Legyen A és B a H eseménytér két eseménye. Az A és B függetlenek, ha

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Ha az A és B események függetlenek, akkor:

- $P(A|B) = P(A)$;
- A és $\overline{B}$, $\overline{A}$ és B illetve $\overline{A}$ és $\overline{B}$ események is függetlenek.

- **Több esemény teljes függetlensége.**

A H eseménytér $A_1, A_2, \dots, A_n$ eseményei teljesen függetlenek, ha közülük bármely k számú esemény együttes bekövetkezésének valószínűsége egyenlő az egyes események valószínűségének szorzatával.

Az $A_1, A_2, \dots, A_n$ események együttes bekövetkezésének valószínűsége:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

Példa: Ketten lőnek céltáblára. A találat valószínűsége az első személy esetében 0,8 a második esetében 0,65. A találatok egymástól függetlenek. Ha mindketten egy-egy lövést adnak le, mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább egy találat van a céltáblán?

Megoldás: Legyen:

A_1 az az esemény, hogy az első lövész talál,

A_2 az az esemény, hogy a második lövész talál, ekkor az

$\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$ az az esemény, hogy legalább egy találat van. A keresett valószínűség:

$$P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = 1 - P(A_1 \cap A_2).$$

Az A_1 és A_2 események függetlenek, ezért az $\overline{A_1}$ és $\overline{A_2}$ események is függetlenek, azaz $P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2})$. Ezért:

$$P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = 1 - P(A_1) \cdot P(A_2) = 1 - 0,8 \cdot 0,65 = 0,48.$$

Feladatok:

1. Háromszor dobunk fel egy szabályos pénzdarabot. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobások között fej és írás is előfordul, B pedig azt az eseményt, hogy legfeljebb egy írás fordul elő. Állapítsuk meg, független-e A és B !
2. Feldobunk egy kockát. A következő események közül melyek függetlenek:
 A : párosat;
 B : páratlant;
 C : prímszámot;
 D : legalább 2-t dobtunk?
3. Két kockával dobunk, legyenek
 - a) E : a dobások összege 6; F : a dobások összege 7;
 G : az első kocka 3-at mutat;
 - b) E : a dobások összege 7; F : az első kocka 3-at mutat;
 G : a második kocka 4-et mutat. Függetlenek-e ezek az események?
4. Egy kockát és két pénzdarabot dobtunk fel egyszerre. Mennyi a valószínűsége, hogy a kockán hatost, és az egyik pénzen írást, a másikon fejet dobunk?
5. Egy gyár három szerelőcsarnokában végzett statisztikai vizsgálat szerint az első szerelőcsarnokban a munkaidő 85 %-ában, a második szerelőcsarnokban a munkaidő 90%-ában, a harmadik csarnokban pedig a munkaidő 80%-ában zavartalan a termelés. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a munkaidő egy adott időpontjában:
 - a) mind a három csarnokban zavartalan a termelés,
 - b) legalább az egyik csarnokban zavartalan a termelés?
 - c) csak az egyik csarnokban zavartalan a termelés.
6. Egy szabályos játékkockát egymás után ötször feldobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy
 - a) minden dobással páros számot dobunk;
 - b) legalább egyszer hatost dobunk?

7. Annak a valószínűsége, hogy egy műszak alatt az automata nem készít selejtes terméket: 0,9. Mi a valószínűsége annak, hogy 3 műszak alatt nem lesz egyetlen selejtes termék sem?
8. A munkás 3 automatára figyel. Annak a valószínűsége, hogy egy órában az 1.-nél szükség lesz rá: 0,9, a 2.-nél: 0,8 és a 3.-nál: 0,85. Mi a valószínűsége annak, hogy
 - a) 1 órán belül egyiknél sem lesz rá szükség;
 - b) legalább 1-nél nem lesz rá szükség 1 órán belül?
9. A kész termékek meghibásodását forma és méret szerint különböztetik meg. A formai meghibásodás valószínűsége 0,05, a méret szerinti meghibásodás valószínűsége 0,01. Mi a valószínűsége annak, hogy a találmányra kiválasztott termék forma- és mérethibás lesz?
10. Legalább hányszor kell feldobni két szabályos dobókockát ahhoz, hogy legfeljebb 0,74 valószínűséggel egyszer se kapjunk dupla hatost?
11. Egy könyvtárban csak műszaki és matematikai könyvek vannak. Annak a valószínűsége, hogy valamelyik olvasó műszaki, ill. matematikai könyvet választ, 0,7, ill. 0,3. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy 5 olvasó egymás után vagy csupa műszaki vagy csupa matematikai könyvet kölcsönöz, ha mindegyikük csak 1 könyvet visz el.
12. Egy automatizált gépsor egy gyártási ciklusban 10 gépet gyárt, amelyek mindegyike 0,01 valószínűséggel hibás. Hány ciklus alatt készül 0,8-nél nagyobb valószínűséggel legalább egy hibás gép?
13. Egy dobozban 1-től 8-ig számozott, 8 darab papírlap van. Véletlenszerűen kivesszünk egy lapot. Legyenek az A , B és C a következő események:

A - a kivett lapon páros szám van,

B - a kihúzott szám 4-nél nem nagyobb,

C - a kihúzott szám 2, vagy 5-nél nagyobb.

Igazoljuk, hogy $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ és az adott események mégsem függetlenek!

Ellenőrző kérdések:

1. Mit értünk az A esemény relatív gyakoriságán?
2. Mennyi a lehetetlen és a biztos esemény relatív gyakorisága egy n-szeres kísérletsorozatban?
3. Mi a feltételes valószínűség definíciója?
4. Mondja ki a Bayes tételt!
5. Döntse el, az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis!
 - Az esemény relatív gyakorisága mindig nagyobb, mint az esemény elméleti valószínűsége.
 - A relatív gyakoriság lehet kisebb is és nagyobb is, mint az elméleti valószínűség.
 - Ha egy esemény relatív gyakorisága 1, akkor az esemény a biztos esemény.
 - A kísérletek számának növekedtével a relatív gyakoriság értéke egyre csökken.
 - Egymást kizáró események relatív gyakoriságainak összege az összegeselemény relatív gyakoriságát adja.
 - A teljes eseményrendszer relatív gyakoriságainak összege 1.
 - Egy eseménynek a biztos eseményre vonatkoztatott feltételes valószínűsége nagyobb mint a feltétel nélküli valószínűsége.
 - A feltételes valószínűség lehet 1-nél nagyobb is.
 - Egy esemény rögzítése után a feltételes valószínűség kielégíti a valószínűség axiómáit.
6. Mikor nevezünk három eseményt teljesen függetlennek?
7. Mit állít a szorzási szabály?
8. Döntse el, az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis!
 - A független események kizárják egymást.
 - Ha két esemény ellentettei függetlenek, akkor az események is azok.
 - A teljes eseményrendszer eseményei teljesen függetlenek egymástól.
 - Bármely két esemény vagy független egymástól, vagy pedig kizárják egymást.
 - Bármely pozitív valószínűségű esemény önmagára vonatkoztatott feltételes valószínűsége 1.

- Bármely pozitív valószínűségű, de nem egy valószínűségű eseménynek az ellentettjére vonatkoztatott feltételes valószínűsége 0.
- Egymást kizáró eseményeknél az egymásra vonatkoztatott feltételes valószínűség mindig 0.
- A teljes függetlenségből következik a páronkénti függetlenség.
- A lehetetlen esemény önmagától is független

5. fejezet

Valószínűségi változók és jellemzőik

5.1. Diszkrét valószínűségi változók

Ha ξ valószínűségi változó lehetséges értékeinek száma véges vagy megszámlálhatóan sok, akkor a ξ -t diszkrét valószínűségi változónak nevezzük.

- **Valószínűségeloszlás**

a ξ lehetséges értékei és a valószínűségük megadása. Ha a ξ lehetséges értékei $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$, akkor a

$$p_k = P(\xi = x_k)$$

valószínűségeket a ξ változó eloszlásának nevezzük.

- A ξ értékeihez tartozó valószínűségek összege 1. Tehát

$$\sum_i p_i = 1.$$

- Az $F(x)$ függvény a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, ha $F(x) = P(\xi \leq x)$.

Diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye megadható:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq x_1, \\ p_1 & \text{ha } x_1 < x \leq x_2, \\ p_1 + p_2 & \text{ha } x_2 < x \leq x_3, \\ \dots & \\ p_1 + p_2 + \dots + p_k & \text{ha } x_k < x \leq x_{k+1}, \\ \dots & \\ 1 & \text{ha } x_n < x \end{cases}$$

• **Várható érték:** $M(\xi) = \sum_i x_i \cdot p_i$.

• **Szórás:** $D(\xi) = \sqrt{\sum_i (x_i - M(\xi))^2 \cdot p_i}$.

A szórásnégyzetre fennáll a következő összefüggés

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi).$$

Példa: A magyar kártyacsomagból kihúzzunk 3 lapot visszatevés nélkül. Jelölje ξ valószínűségi változó a kihúzott piros lapok számát!

a) Határozzuk meg a valószínűségi változó eloszlását!

b) Írjuk fel az eloszlásfüggvényét!

c) Határozzuk meg az eloszlás várható értékét és szórását!

Megoldás: A ξ valószínűségi változó lehetséges értékei 0, 1, 2, 3.

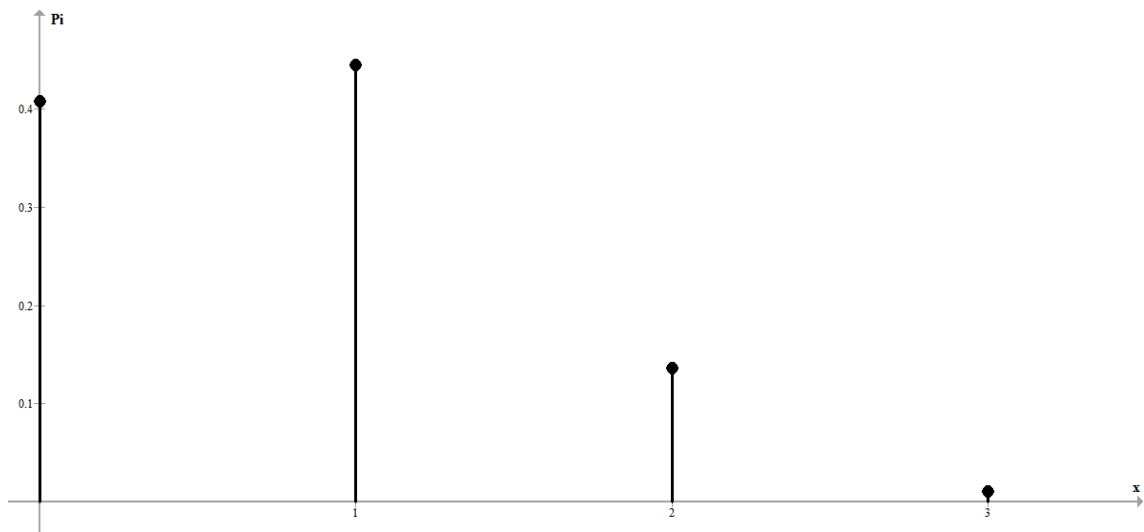
a) Az eloszlást a következő képletből számoljuk ki:

$$P(\xi = k) = \frac{C_8^k \cdot C_{24}^{3-k}}{C_{32}^3}, \quad \text{ahol } k = 0, 1, 2, 3.$$

Tehát a ξ valószínűségi változó eloszlása:

k_i	0	1	2	3
p_i	0,408	0,445	0,136	0,011

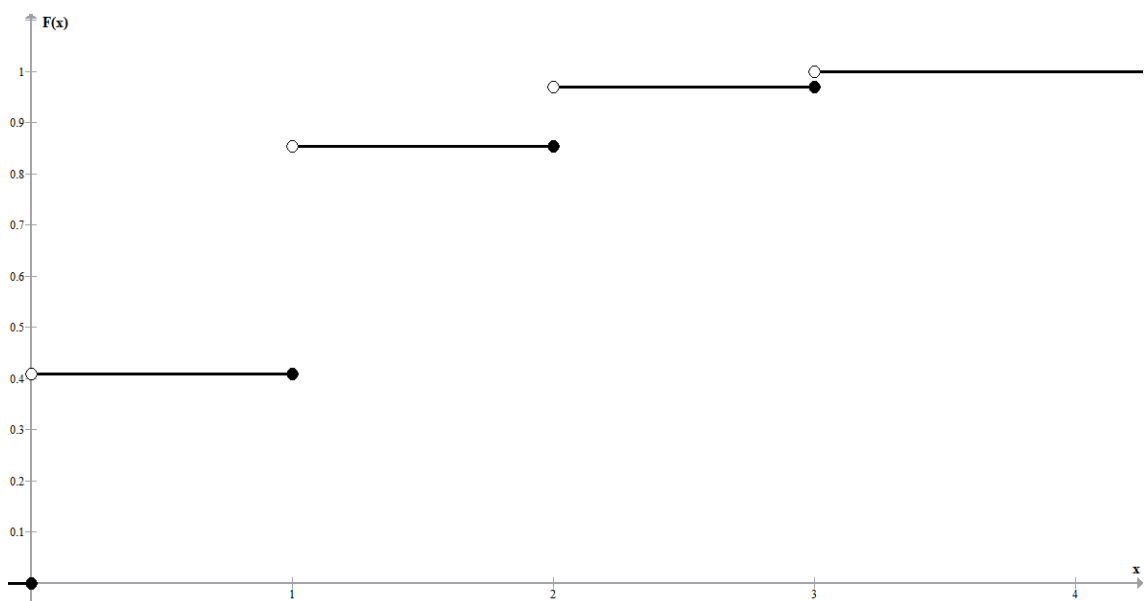
a valószínűségeloszlás ábrázolása botábrán



b)

$$F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0, \\ 0,408 & \text{ha } 0 < x \leq 1, \\ 0,853 & \text{ha } 1 < x \leq 2, \\ 0,989 & \text{ha } 2 < x \leq 3, \\ 1 & \text{ha } 3 < x \end{cases}$$

az eloszlásfüggvény ábrázolása



c) Várható érték:

$$M(\xi) = \sum_i x_i \cdot p_i = 0 \cdot 0,408 + 1 \cdot 0,445 + 2 \cdot 0,136 + \\ + 3 \cdot 0,011 = 0,75$$

Szórás: Először határozzuk meg az $M(\xi^2)$ értékét

$$M(\xi^2) = \sum_i x_i^2 \cdot p_i = 0^2 \cdot 0,408 + 1^2 \cdot 0,445 + 2^2 \cdot 0,136 + \\ + 3^2 \cdot 0,011 = 1,088.$$

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = 1,088 - 0,5625 = 0,5255$$

Ezért az eloszlás szórása: $D(\xi) = \sqrt{0,5255} \approx 0,725$.

Feladatok:

1. Három kockával dobunk. Számítsuk ki a dobott számok összege eloszlásfüggvényének az $x = 5, 2$ helyen felvett értékét!
2. Egy érmével dobunk. Ha az eredmény fej, akkor még kétszer dobunk, ha írás, akkor még egyszer. Mennyi az összes fej eredmények számának várható értéke?
3. Két kockával dobva, mennyi a dobott számok maximumának ill. minimumának várható értéke?
4. Két személy, A és B, két kockával játszanak. Az A játékos akkor fizet B-nek, ha a feldobott kockákon páratlan számok szerepelnek. A B játékos, akkor fizet A-nak, ha az egyik kockán – de csakis az egyiken – páros számot dobunk. Ha más eset fordul elő, egyik sem fizet. Milyen pénzösszegben állapodjanak meg, hogy a játék igazságos legyen?
5. Két személy A és B, a 32 lapos magyar kártyával játszik. A játékszabály a következő: az asztal közepére tett kártyacsomagból felváltva felütnek 1-1 lapot. Ha az első négy felütött lap között van piros, akkor A fizet B-nek 10 hrvnyát. Mennyit fizessen B az A-nak, hogy a játék igazságos legyen?
6. Két kockával addig dobunk, míg valamelyiken 6-ost nem dobunk. Mennyi lesz az addigi dobásszám várható értéke, ha az utolsó dobást is beleszámoljuk?
7. Érmével dobunk addig amíg először fordul elő, hogy két egymás utáni dobás azonos. Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke?
8. Egy kockával háromszor dobunk egymás után. Jelentse a ξ a hatos dobások számát. Határozzuk meg $M(\xi)$ -t és $D(\xi)$ -t!
9. A ξ valószínűségi változó lehetséges értékei: -1, 0, 2, 3. Az ezekhez tartozó valószínűségek rendre: 1/12, 5/12, 1/4, 1/4. Számítsuk ki ξ várható értékét és szórását!
10. Két kockával dobva mennyi a dobott számok
 - a) maximumának;
 - b) minimumának;
 - c) összegének eloszlása, várható értéke és szórása?Rajzoljuk fel az eloszlásfüggvényeket!
11. Két dobókockával dobunk. Legyen ξ a dobott számok különbsége (a nagyobbikból vonjuk ki a kisebbet). Határozzuk meg ξ eloszlásfüggvényét és várható értékét!

12. Egy újságárusnál egy adott lapot átlagosan 100 vásárló keres egy napon. Ha naponta 120 lapot rendel, mennyi a várható haszna, ha az 5 hr-ért beszerezett lapot 6 hr-ért adja a vásárlónak, és a megmaradt példányokat 3 hr-ért veszi vissza a terjesztő?
13. A következő szerencsejátékot játszuk: T-összeg befizetése ellenében dobunk egy kockát, és ha az eredmény 1, 2 vagy 3, akkor nem nyerünk semmit, ha 4, 5 vagy 6 a dobás eredménye, akkor 18, 24 illetve 30 a nyereményünk.
- a) Milyen T-összegig érdemes játszani?
- b) Mennyi a játékban elért eredmény szórása, amikor a várható nyeremény értéke 0?

5.2. Folytonos valószínűségi változó

Az $F(x)$ függvény a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, ha $F(x) = P(\xi < x)$.

- **Az eloszlásfüggvény tulajdonságai:**

- Monoton nem csökkenő.
- Balról folytonos, azaz

$$\lim_{x \rightarrow a^-} F(x) = F(a).$$

- A függvény határértéke:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

Az $F(x)$ függvény csak akkor lehet eloszlásfüggvény, ha az előző három feltétel mindegyike teljesül rá.

- **Az eloszlásfüggvény és sűrűségfüggvény közötti kapcsolat.**

- Legyen ξ folytonos valószínűségi változó, az $F(x)$ függvény deriváltját a ξ sűrűségfüggvényének nevezzük $f(x) = F'(x)$.
- Az eloszlásfüggvény előállítása a sűrűségfüggvényből:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

- **A sűrűségfüggvény tulajdonságai:**

- $f(x) \geq 0$,
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

Az $f(x)$ függvény csak akkor lehet sűrűségfüggvény, ha az előző két állítás mindegyike teljesül rá.

- **Valószínűségek kiszámítása a sűrűség- és eloszlásfüggvényből.**

$$P(a \leq \xi < b) = \int_a^b f(x) dx,$$

$$P(\xi < b) = \int_{-\infty}^b f(x) dx,$$

$$P(\xi \geq a) = \int_a^{\infty} f(x) dx,$$

$$\begin{aligned} P(a \leq \xi \leq b) &= P(a < \xi \leq b) = \\ &= P(a < \xi < b) = P(a \leq \xi < b.) \end{aligned}$$

- **Várható érték:** $M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx.$

- **Szórás:** $D(\xi) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - M(\xi))^2 f(x) dx}.$

A szórásnégyzetre fennáll a következő összefüggés

$$D(\xi)^2 = M(\xi^2) - M^2(\xi),$$

ahol $M(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx.$

- A $\varphi(x)$ függvény a ξ valószínűségi változó **karakterisztikus függvénye**, ha

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{itx} dx.$$

Példa: A $(0, a)$ szakaszon véletlenszerűen (egyenletes eloszlást feltételezve) kiválasztottak egy pontot. Jelölje ξ ennek a pontnak a szakasz középpontjától való távolságát.

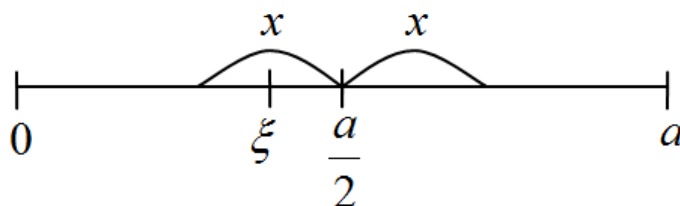
- Írjuk fel a ξ eloszlás és sűrűségfüggvényét!
- Számoljuk ki a ξ valószínűségi változó várható értéké és szórását!

Megoldás:

- A feladat feltételeiből: $0 \leq \xi \leq \frac{a}{2}$. Legyen

$0 < x \leq \frac{a}{2}$, ekkor

$$P(\xi < x) = P\left(\frac{a}{2} - x < \xi < \frac{a}{2} + x\right) = \frac{2x}{a}.$$



A keresett eloszlásfüggvény:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0, \\ \frac{2x}{a} & \text{ha } 0 < x \leq \frac{2}{a}, \\ 1 & \text{ha } \frac{2}{a} < x. \end{cases}$$

A sűrűségfüggvény:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{2}{a} & \text{ha } 0 < x \leq \frac{2}{a}, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

b)

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_0^{\frac{2}{a}} x \cdot \frac{2}{a} dx = \frac{a}{4}.$$

Szórás:

$$M(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx = \int_0^{\frac{2}{a}} x^2 \cdot \frac{2}{a} dx = \frac{a^2}{12},$$

$$D(\xi) = \sqrt{M(\xi^2) - M^2(\xi)} = \sqrt{\frac{a^2}{12} - \frac{a^2}{16}} = \frac{\sqrt{3}a}{12}.$$

Feladatok:

1. Tegyük fel, hogy egy étteremben a vendégek ebédidőben eltöltött idejét, percekben mérve, a következő eloszlás függvény jellemzi:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{x}{60} & \text{ha } 0 < x \leq 30 \\ \frac{1}{2} & \text{ha } 30 < x \leq 60 \\ \frac{x}{120} & \text{ha } 60 < x \leq 120 \\ 1 & \text{ha } 120 < x \end{cases}$$

Ábrázoljuk e függvényt! Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy vendég az étteremben 30 percnél több időt tölt el?

2. Lehetnek-e valamely folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvényei az alábbi függvények? Határozzuk meg a sűrűségfüggvényét azoknak, amelyek lehetnek eloszlásfüggvények!

a) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 1 \\ \frac{3x+1}{x+1} & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}$

b) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 2 \\ \frac{x-2}{x+2} & \text{ha } x \geq 2 \end{cases}$

c) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ e^{\frac{1}{x}} & \text{ha } x > 0 \end{cases}$

d) $F(x) = \begin{cases} 2^x & \text{ha } x \leq 0,5 \\ 1 - \frac{1}{4x} & \text{ha } x > 0,5 \end{cases}$

e) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{x}{4}(4-x) & \text{ha } 0 < x \leq 2 \\ 1 & \text{ha } 2 < x \end{cases}$

f) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{x}{1+x}, & \text{ha } 0 < x \end{cases}$

3. A $(0, a)$ szakaszon véletlenszerűen megjelölünk egy pontot, majd az $(a, 2a)$ szakaszon, szintén véletlenszerűen, egy másik pontot. Jelentse ξ e két pont távolságát. Írjuk fel

a ξ eloszlás- és sűrűségfüggvényét.

4. Legyen a ξ várható értéke $M(\xi)$ és szórása $D(\xi) > 0$. Bizonyítsuk be, hogy az $\eta = \frac{\xi - M(\xi)}{D(\xi)}$ valószínűségi változó várható értéke 0 és szórása 1.

5. Sűrűségfüggvények-e a következő függvény?

a)

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < \pi \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & 1 < x < 2 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

6. Legyen ξ sűrűségfüggvénye a következő alakú:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2+x), & -A < x < 0 \\ \frac{1}{4}(2-x), & 0 < x < A \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

a) Határozzuk meg az A értékét;

b) Írjuk fel a ξ eloszlásfüggvényét;

c) Ábrázoljuk a ξ eloszlás- és sűrűségfüggvényét!

7. A ξ - valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a következő:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 1 \\ \frac{1}{4}x & \text{ha } 1 < x \leq 3 \\ 0 & \text{ha } x > 3 \end{cases}$$

Számoljuk ki a az $\eta = 2\xi - 4$ valószínűségi változó karakterisztikus függvényét!

8. A ξ - valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a következő:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{ha } 0 < x \leq 2 \\ 0 & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

Számoljuk ki a az $\eta = 2\xi + 3$ valószínűségi változó karakterisztikus függvényét!

9. Számítsuk ki a következő sűrűségfüggvényekkel jellemzett eloszlások várható értékét:

a)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \notin (0, 1) \\ 1 & \text{ha } x \in (0, 1) \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{ha } x \notin (-1, 1) \\ 1 & \text{ha } x \in (-1, 1) \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2}$$

10. Valaki két telefonhívást vár. Mindkét hívást 10 és 11 óra között esedékes. Jelölje a ξ változó a két hívás között eltelt időt.

a) Határozzuk meg a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét!

b) Határozzuk meg a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a két hívás között 20 percnél kevesebb idő telik el?

d) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a két hívás között 25 percnél több idő telik el?

Ellenőrző kérdések:

1. Mi a valószínűségi változó definíciója?
2. Milyen tulajdonságok jellemzik egyértelműen az eloszlásfüggvényt?
3. Mi a várható érték definíciója?
4. Milyen tulajdonságai vannak a várható értéknek és a szórásnégyzetnek?
5. Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, és melyik hamis!
 - A valószínűségi változó olyan valós értékű függvény, amelynek értelmezési tartománya a K véletlen kísérlet ? eseménytere.
 - Egy véletlen kísérlethez több valószínűségi változót is értelmezni lehet.
 - Az eloszlásfüggvény szigorúan monoton növekedő.
 - Az eloszlásfüggvény értékei nem negatívak.
 - Az eloszlásfüggvény folytonos.
 - Az eloszlásfüggvény balról folytonos függvény, aminek jobbról lehet elsőfajú szakadása.
 - Az eloszlásfüggvény nem veheti fel a 0 és az 1 értékeket csak határértékben.
 - Annak valószínűségét, hogy egy valószínűségi változó az értékeit egy intervallumban veszi fel, az eloszlásfüggvény segítségével meg lehet határozni.
 - Ha egy pontban az eloszlásfüggvény folytonos, akkor az azt is jelenti, hogy azt a pontot a valószínűségi változó nulla valószínűséggel veszi fel.
 - Ha a $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvény értékkészlete az irracionális számok halmaza, ξ nem lehet diszkrét valószínűségi változó.
 - Ha a $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvény értékkészlete véges, akkor ξ csak diszkrét valószínűségi változó lehet.
 - A folytonos valószínűségi változók eloszlásfüggvénye lépcsős.
 - Egy n -szeres Bernoulli kísérletsorozatban a p valószínűségű A esemény gyakorisága binomiális eloszlású valószínűségi változó.
 - Minden valószínűségi változónak van várható értéke.
 - Minden valószínűségi változónak van szórása.
 - A szórásnégyzet lineáris.
 - A várható érték lineáris.

- Két valószínűségi változó szorzatának várható értéke egyenlő a várható értékek szorzatával.
- Két független valószínűségi változó szorzatának várható értéke egyenlő a várható értékek szorzatával.
- Két független valószínűségi változó szorzatának szórásnégyzete egyenlő a szórásnégyzetek szorzatával.
- Két független valószínűségi változó összegének szórásnégyzete egyenlő a szórásnégyzetek összegével.
- Két független valószínűségi változó összegének várható értéke egyenlő a várható értékek összegével.
- Egy valószínűségi változó négyzetének várható értéke nem kisebb mint a várható értékének négyzete.
- Egy valószínűségi változó négyzetének várható értéke egyenlő a várható értékének négyzetével.

6. fejezet

Nevezetes eloszlások

6.1. Nevezetes diszkrét eloszlások

- **Hipergeometrikus eloszlás**

- *Valószínűségeloszlás:* A ξ lehetséges értékei: $0, 1, 2, \dots, n$:

$$P(\xi = k) = \frac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \quad \text{ahol } k = 0, 1, 2, \dots, n$$

továbbá N, M, n nemnegatív egészek; $M < N$;

$n \leq \min(M; N - M)$.

- *Várható érték:* $M(\xi) = n \cdot p$, ahol $p = \frac{M}{N}$.

- *Szórás:* $\sqrt{n \cdot p \cdot q \cdot \frac{N-n}{N-1}}$, ($q = 1 - p$).

- *Alkalmazás:* Visszatevés nélküli mintavétel: van N számú elem, amelyből M kitüntetett. Az N elemből n -szer húzunk visszatevés nélkül. A ξ a mintában lévő kitüntetett elemek száma.

- **Binomiális eloszlás**

- *Valószínűségeloszlás:* A ξ lehetséges értékei: $0, 1, 2, \dots, n$:

$$P(\xi = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} \quad \text{ahol } k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

továbbá $0 < p < 1, q = 1 - p$.

- *Várható érték:* $M(\xi) = n \cdot p$.

- Szórás: $\sqrt{n \cdot p \cdot q}$.

- Alkalmazás:

a) Visszatevésees mintavétel;

b) Bernoulli probléma: Végezzük el az A kísérletet n -szer egymástól függetlenül, legyen $P(A) = p$, ekkor $P(\bar{A}) = 1 - p = q$. A ξ valószínűségi változó a vizsgált A esemény bekövetkezéseinek számát jelöli n kísérlet folyamán.

• Negatív binomiális eloszlás

- Valószínűségeloszlás: A ξ lehetséges értékei:

$$x_k = k + r, \text{ ahol } k = 0, 1, 2, \dots:$$

$$P(\xi = k + r) = C_{k+r-1}^{r-1} \cdot p^r \cdot q^k,$$

továbbá r adott pozitív egész szám.

- Várható érték: $M(\xi) = \frac{r}{p}$.

- Szórás: $\frac{\sqrt{r \cdot q}}{p}$, ahol $q = 1 - p$.

- Alkalmazás: A binomiális eloszlásnál megismert kísérletek esetén. Ennél az eloszlásnál a ξ valószínűségi változó azon kísérlet sorszámát jelöli, mely elvégzése során az A esemény pontosan r -edszer következik be.

• Geometriai eloszlás

- Valószínűségeloszlás: A ξ lehetséges értékei:

$$x_k = k + 1, \text{ ahol } k = 0, 1, 2, \dots:$$

$$P(\xi = k + 1) = p \cdot q^k,$$

- Várható érték: $M(\xi) = \frac{1}{p}$.

- Szórás: $\frac{\sqrt{q}}{p}$, ahol $q = 1 - p$.

- Alkalmazás: A negatív binomiális eloszlásnál megismert kísérletek esetén, ha $r = 1$. Ennél az eloszlásnál a ξ valószínűségi változó azon kísérlet sorszámát jelöli, mely elvégzése során az A esemény először következik be.

Példa: Egy teszt 20 kérdésből áll. Minden kérdésre A, B, C és D választ adnak, melyek közül csak egy helyes. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

a) a D legfeljebb egyszer szerepel;

- b) helyes válaszként a B a negyedik kérdés után fordul elő először;
- c) helyes válaszként a B a nyolcadik kérdésnél fordul elő másodszor;
- d) Várhatóan hány kérdésnél lesz B a helyes válasz?

Megoldás: Minden kérdésnél egyenlő valószínűséggel választhatjuk bármelyik válasz lehetőséget, ezért $p = 0,25$.

- a) Binomiális eloszlást alkalmazunk : $n = 15$,
 $p = 0,25$. Ebben az esetben a ξ a 0 vagy az 1 értéket veheti fel.

$$\begin{aligned} P(\xi \leq 1) &= P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = \\ &= C_{20}^0 \cdot 0,25^0 \cdot 0,75^{20} + C_{20}^1 \cdot 0,25^1 \cdot 0,75^{19} \approx \\ &\approx 0,024. \end{aligned}$$

- b) Az η valószínűségi változó geometriai eloszlású. Ebben az esetben az η valószínűségi változó 4-nél nagyobb értéket vesz fel, tehát:

$$\begin{aligned} P(\eta > 4) &= 1 - \left(P(\eta = 1) + P(\eta = 2) + P(\eta = 3) + \right. \\ &\quad \left. + P(\eta = 4) \right) = 1 - \left(0,25 + 0,75 \cdot 0,25 + \right. \\ &\quad \left. + 0,75^2 \cdot 0,25 + 0,75^3 \cdot 0,25 \right) \approx 0,316. \end{aligned}$$

- c) A ξ valószínűségi változó negatív binomiális eloszlás. Ekkor $k + r = 8$, $r = 2$ ezért $k = 6$

$$P(\xi = 6) = C_7^1 \cdot (0,25)^2 \cdot (0,75)^6 = 0,078.$$

- d) Az η valószínűségi változó binomiális eloszlású és várható értéke a következő módon határozható meg:

$$M(\eta) = n \cdot p = 8 \cdot 0,25 = 4.$$

- **Poisson eloszlás**

- *Valószínűségeloszlás:* A ξ lehetséges értékei 0, 1, 2, ...:

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad \text{ahol } \lambda > 0.$$

- *Várható érték:* $M(\xi) = \lambda$.

- *Szórás:* $D(\xi) = \sqrt{\lambda}$.

- *Alkalmazás:*

- Pont-elhelyezkedési problémák: adott időintervallumon, távolságon, területen, térfogatban véletlenszerűen bekövetkező pontszerű események, amelyeknél az egyes tartományokba eső pontok számának várható értéke arányos a tartomány nagyságával.
- Binomiális eloszlás jól közelíthető a Poisson eloszlással, ha n nagy, p kicsi és $n \cdot p \rightarrow \lambda$. A binomiális eloszlásnál megismert kísérletek esetén.

Példa: A tanulmányi osztályra 10 órától 12 óráig 0,9 valószínűséggel érkezik legalább egy hallgató. Egy adott idő alatt a tanulmányi osztályt felkereső hallgatók száma Poisson eloszlású.

- Hány hallgató érkezik átlagosan 10 órától 12 óráig?
- Mennyi annak a valószínűsége, hogy 11:00 és 11:30 között legfeljebb egy hallgató érkezik?

Megoldás: Legyen ξ a tanulmányi osztályt egy adott idő alatt meglátogató hallgatók száma.

- $P(\xi = 0)$ annak a valószínűsége, hogy egy hallgató sem keresi fel a tanulmányi osztályt 10 órától 12 óráig.
 $P(\xi = 0) = 1 - 0,9 = 0,1, \Rightarrow e^{-\lambda} = 0,1 \Rightarrow \lambda = 2,3$. Vagyis 10 órától 12 óráig átlagosan 2,3 diák érkezik.
- Ha két óra alatt átlag 2,3 diák érkezik, akkor 11:00 és 11:30 között (fél óra alatt) érkező hallgatók átlagos száma: $\lambda_1 = 2,3 \cdot \frac{1}{2} = 1,15$.

$$\begin{aligned} P(\xi \leq 1) &= P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = \\ &= e^{-1,15} \left(\frac{1,15^0}{0!} + \frac{1,15^1}{1!} \right) \approx 0,886. \end{aligned}$$

Feladatok:

1. Suta Sára gépeléskor meglehetősen gyakran csinál hibás leütést. Megfigyelte, hogy a leütések 18%-a rossz. A leütések jó vagy rossz voltát tekintsük egymástól függetlennek. Mennyi a valószínűsége annak, hogy
 - a) egy 10 betűből álló szóban van legalább egy hibás leütés?
 - b) Egy 8 betűs szóban a 4. és az 5. betűt ütötte le hibásan?
 - c) Egy 5 betűs szóban több betű hibás, mint jó?
2. Egy doboz desszertben 12 bonbon található, amely közül 4 mogyorós és 8 csokoládé ízesítésű. A bonbonok külsőre teljesen egyformák. Egy alkalommal megettünk a bonbonokból hármat. Jelölje a ξ valószínűségi változó az elfogyasztott mogyorós bonbonok számát!
 - a) Határozzuk meg a valószínűségi változó eloszlását!
 - b) Számoljuk ki az eloszlás várható értékét és szórását!
 - c) Hány mogyorós bonbon van a kiválasztottak között legnagyobb valószínűséggel?
3. Statisztikai vizsgálatok alapján tudjuk, annak a valószínűsége, hogy egy újszülött fiú, 0,516. Tegyük fel, hogy egy családban 6 gyermek van. Mekkora annak a valószínűsége, hogy legfeljebb két lány van köztük?
4. Egy automata gépnél megfigyelték, hogy naponta átlagosan 12 db termék lesz selejtes és ezek számának szórása 3,41. Hány terméket készít naponta a gép?
5. Annak a valószínűsége, hogy egy üzemben a nyersanyag ellátás valamely napon zavartalan 0,75.
 - a) Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy héten (6 napon) keresztül a nyersanyag ellátás zavartalan?
 - b) Mennyi lesz az egyheti zavartalan ellátású napok számának várható értéke?
6. Egy halastóban 1000 db hal van. Egyik nap kihalásznak közülük 100-at. Ezeket valamilyen módon megjelölik, majd visszadobják őket. Másnap megint kihalásznak 100 halat, de most visszatevéssel. Határozzuk meg a második nap kifogott megjelölt halak számának várható értékét és szórását!
7. Az 52 lapos bridzskártyát négy játékos között egyenlően osztják szét.
 - a) Mennyi az első játékoshoz kerülő ászok számának várható értéke?
 - b) Mennyi a valószínűsége, hogy emberünkhöz legalább 2 ász kerül?

8. Egy 40 elemű alkatrészhalmazban pontosan 5% a selejt arány. Mennyi a valószínűsége, hogy a halmazból egy 20 elemű mintát véve visszatevés nélkül, a mintában levő selejtek száma éppen 2 lesz?
9. Egy alkatrész halmazban 4 selejtes van. Mintát veszünk visszatevés nélkül. A mintában szereplő selejtes alkatrészek számának várható értéke 2, szórásnégyzete $2/3$. Mennyi a valószínűsége, hogy a minta legfeljebb 2 selejtest tartalmaz?
10. Egy kockával addig dobunk ismételten, míg 3 darab 6-ost nem dobunk.
 - a) Mennyi a valószínűsége, hogy legalább ötször kellett dobni?
 - b) Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke?
11. Egy urnában 10 piros, 10 fehér és 2 zöld golyó van. Ebből egy játékos addig húzhat, amíg az első zöldet kihúzza. Ekkor a másik játékos annyi pénzt fizet neki, amennyi golyót kihúzott, majd ő húz zöldig. Ekkor az első játékos fizet a másodiknak annyit, amennyi golyót húzott. Igazságos-e ez a játék?
12. Egy dobozban 6 fehér és 4 kék golyó van. Egyenként húzunk visszatevéssel találmra választott golyókat. A dobozból addig veszünk ki golyókat, amíg a fehér húzások száma el nem éri a hármat.
 - a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a szükséges golyók száma legfeljebb 6 lesz?
 - b) Mennyivel egyenlő a kihúzott golyók számának várható értéke és szórása?
13. Egy dobozban 4 db fekete és 6 db fehér golyó van, találmra választunk egy golyót amíg fehéret nem húzunk. A kihúzott golyót azonnal visszatesszük. Határozzuk meg a kihúzott golyók számának eloszlását, várható értékét és szórását!
14. Egy villamoson $p = 0,04$ valószínűséggel jelennek meg ellenőrök, és a bliccelőket 3000 forintra megbírságozzák. Mennyi a valószínűsége, hogy a bírság fedezi egy bliccelő által a lebukásig okozott kárt, ha a jegy ára 150 forint?
15. Egy kockával addig dobunk ismételten, míg 6-ost nem dobunk.
 - a) Mennyi a valószínűsége, hogy legalább 5-ször kell dobni, hogy az első 6-os kijöjjön?
 - b) Melyik az a k szám, amelyre teljesül, hogy annak a valószínűsége, hogy legalább k dobás kellett az első 6-osig éppen 0,5?
16. Egy adott üzemből gyártott harisnyák között minden ezredik hibás. A harisnyákat kétszázasával csomagolják dobozokba. 1000 doboz közül átlag hány olyan lesz,

amely csak hibátlan harisnyákat tartalmaz?

17. Egy augusztusi éjszakán átlag 10 percenként észlelhető csillaghullás. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy negyedóra alatt két csillaghullást látunk?
18. Egy ruhaszövet anyagában 100 m-enként átlag 5 hiba van. Egy 300 méteres szövetet 3 méteres darabokra vágnak. Előre láthatóan hány hibátlan darab lesz ezek közt?
19. Egy konzervgyár valamelyik üveggyártól 1 literes üvegeket rendel. 200 darab üveg közül átlag 3 üveg selejtes. Mekkora a valószínűsége annak, hogy 1000 üveget átnézve, abban
 - a) pontosan 10 selejtes üveget találunk;
 - b) legalább 4 selejtes üveget találunk?
20. Egy évben bekövetkező repülőgép szerencsétlenségek száma Poisson-eloszlást követ. Annak a valószínűsége, hogy egy évben egyetlen repülő sem zuhan le 0,1. Várhatóan hány repülő fog lezuhanni a következő évben?
21. Egy egyetemi oktató 300 oldalas jegyzetet írt, amelyben oldalanként átlagosan 2 nyomdahiba van. Minden lektor 0,75 valószínűséggel vesz észre egy-egy hibát. A lektor által észrevett hibákat az oktató kijavítja, majd továbbküldi egy másik lektornak. Legalább hány lektorra van szükség, hogy legalább 0,5 valószínűséggel hibátlan legyen a jegyzet?
22. Almafánk egyes gyümölcseit megtámadó férgek száma 1,5 paraméterű Poisson eloszlást követ. 10 almát leszedünk.
 - a) Mi a bennük lévő férgek számának várható értéke?
 - b) Mennyi a valószínűsége, hogy egy almában legalább két féreg lesz?
23. Móricka, ha túrázni megy, minden lépésnél – az előzményektől függetlenül – valamekkora (kicsi) valószínűséggel hasra esik és megüti a térdét, illetve valamekkora (kicsi) valószínűséggel hanyatt esik és megüti a könyökét. Egy 10 kilométeres túrán átlagosan 3-szor szokta megütni a térdét és 2-szer a könyökét. Legfeljebb milyen hosszú túrára engedheti el az anyukája, ha azt akarja, hogy $\frac{2}{3}$ valószínűséggel térd- és könyöksérülés nélkül járja meg?
24. Egy tábla mogyorós-mazsolás csokiban átlagosan 30 mazsola van. Egy tábla csoki 15 kockából áll. Egy kocka csokiban $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nincsen mogyoródarab.

- a) Milyen eloszlású lesz az egy tábla csokiban levő mogyoródarabok száma?
 - b) Letörünk 2 kockát és megesszük. Mennyi a valószínűsége, hogy az elfogyasztott csokiban levő mogyoró- és mazsoladarabok együttes száma legalább 2?
25. Egy kockával n -szer dobunk.
- a) Adjuk meg a dobott hatosok számának eloszlását, várható értékét és szórását!
 - b) Mennyi a valószínűsége, hogy legalább kettő, de legfeljebb négy hatost dobtunk?
26. Egy izzó a minden egyes bekapcsoláskor 0,005 valószínűséggel kiég. Legyen az ξ véletlen változó értéke a kiégésig végbemenő bekapcsolások száma.
- a) Számoljuk ki a ξ várható értékét és szórását!
 - b) Mennyi a valószínűsége, hogy a várható értékénél tovább tudjuk használni?
27. Kalácssütéskor 1kg tésztába 30 szem mazsolát tesznek. Mennyi a valószínűsége, hogy egy 5 dekagrammos szeletben kettőnél több mazsolaszem lesz?

6.2. Nevezetes folytonos eloszlások

- **Egyenletes eloszlás**

- *Sűrűségfüggvény:* A ξ valószínűségi változó az $[a; b]$ intervallumon egyenletes eloszlásúnak nevezzük, ha a sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

- *Eloszlásfüggvény:*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{ha } a < x \leq b, \\ 1 & \text{ha } b < x. \end{cases}$$

- *Várható érték:* $M(\xi) = \frac{a+b}{2}$.
- *Szórás:* $D(\xi) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.
- *Alkalmazás:* a ξ valószínűségi változó az értékeit egy $[a; b]$ véges hosszúságú intervallumon veszi fel és az $[a; b]$ bármely részintervallumba esés valószínűsége arányos a részintervallum hosszával.

• Exponenciális eloszlás

- *Sűrűségfüggvény:* A ξ valószínűségi változót $\lambda > 0$ paraméterű exponenciális eloszlásúnak nevezzük, ha a sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0, \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

- *Eloszlásfüggvény:*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

- *Várható érték:* $M(\xi) = \frac{1}{\lambda}$.

- *Szórás:* $D(\xi) = \frac{1}{\lambda}$.

- *Alkalmazás:*

- Ez az eloszlás olyan gépek és berendezések élettartamára jellemző, amelyek valamely hirtelen behatás következtében mennek tönkre.
- Várakozási, sorbanállási idő vizsgálatok.
- Ha egy jelenség adott idő alatti bekövetkezéseinek száma Poisson eloszlású, akkor a jelenség bármely két egymás utáni bekövetkezése között eltelt idő exponenciális eloszlású.

• Normális eloszlás

- *Sűrűségfüggvény:* A ξ valószínűségi változót (m, σ) paraméterű normális eloszlásúnak nevezzük, ha a sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{ahol } x, m \in R, \sigma > 0$$

- *Eloszlásfüggvény:*

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$$

- *Várható érték:* $M(\xi) = m$.

- *Szórás:* $D(\xi) = \sigma$.

- *Alkalmazás:*

- a) Gyártási folyamatokban fellépő méretingadozások, műszerek mérési hibája.
- b) Gépek berendezések élettartama, amelyek természetes elhasználódással mennek tönkre.
- c) Ha elég nagy számú független kísérletet végzünk el, akkor szinte bármelyik eloszlás közelíthető normális eloszlással.

- **Standard normális eloszlás.** Az $m = 0$; $\sigma = 1$ paraméterű normális eloszlást standard normálisnak nevezzük.

- *Sűrűségfüggvény:*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

- *Eloszlásfüggvény:*

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

- Kapcsolat a normális - és standard normális eloszlás között:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - m}{\sigma}\right).$$

- $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Példa: Munkapadról kikerült termék hossza normális eloszlású valószínűségi változó 20 cm várható értékkel és 0,2 cm szórással.

- a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy termék hossza 19,7cm és 20,3 cm közé esik?
- b) Milyen pontosságot biztosíthatunk 0,95 valószínűséggel a munkadarabok hosszára?

Megoldás: Ekkor $m = 20$, $\sigma = 0,2$. Jelentse ξ valószínűségi változó a munkadarabok hosszát.

- a) A keresett valószínűség:

$$\begin{aligned} P(19,7 < \xi < 20,3) &= F(20,3) - F(19,7) = \\ &= \Phi\left(\frac{20,3 - 20}{0,2}\right) - \Phi\left(\frac{19,7 - 20}{0,2}\right) = \\ &= \Phi(1,5) - \Phi(-1,5) = \Phi(1,5) - (1 - \Phi(1,5)) = \\ &= 2\Phi(1,5) - 1 = 2 \cdot 0,9332 - 1 = 0,8664. \end{aligned}$$

- b) Legyen a munkadarab hosszának várható értékétől való maximális eltérése A cm. Akkor a keresett valószínűség:

$$\begin{aligned} P(|\xi - m| < A) &= P(|\xi - 20| < A) = \\ &= P(20 - A < \xi < 20 + A) = F(20 + A) - F(20 - A) = \\ &= \Phi\left(\frac{20 + A - 20}{0,2}\right) - \Phi\left(\frac{20 - A - 20}{0,2}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{A}{0,2}\right) - \Phi\left(\frac{-A}{0,2}\right) = 2\Phi\left(\frac{A}{0,2}\right) - 1 = 0,95. \end{aligned}$$

Ebből: $\Phi\left(\frac{A}{0,2}\right) = 0,975$, a táblázatból visszakeresve:

$$\frac{A}{0,2} = 1,96$$

ebből: $A = 0,392 \approx 0,4$. Tehát 95% valószínűséggel állíthatjuk, hogy a hosszeltérés 4mm-nél nem hosszabb.

Feladatok:

1. Mekkora a valószínűséggel vesz fel egy, a $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ intervallumon egyenletes eloszlású változó olyan értéket, amely a várható értéktől szórásánál nagyobb értéket vesz fel?
2. Valaki egy sürgős telefonhívást vár. A hívás időpontja egy reggel 8 órakor kezdődő, ismeretlen hosszúságú intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. A hívást váró fél tudja, a hívás 80% valószínűséggel 8 és 10 óra között befut. Állapítsuk meg, mekkora annak a valószínűsége, hogy 9:30 és 10 óra között érkezik?
3. Egy egyenletes eloszlású valószínűségi változó várható értéke 3, szórása 2.
 - a) Adjuk meg az eloszlás- és sűrűségfüggvényt!
 - b) Mennyi a valószínűsége, hogy a változó értéke nagyobb, mint 5?
4. A $[0; 1]$ intervallumon egymástól függetlenül két számot választunk taláломra (egyenletes eloszlás szerint).
 - a) Írjuk fel a két szám összegének eloszlásfüggvényét!
 - b) Írjuk fel az összeg várható értékét és szórását!
 - c) Mennyi a 2 szám szorzatának várható értéke?
5. Egy egység hosszúságú pálca kettétörik, a töréspont egyenletes eloszlást követ. Határozzuk meg a rövidebb darab hosszának várható értékét!
6. Megfigyelték, hogy a postás legkorábban reggel 8-kor érkezik és az esetek 80 %-ban 9 óra 36 perc előtt. A postás érkezésének ideje egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Mennyi lesz a postás érkezési idejének várható értéke és szórása?
7. Egy intézet külföldről könyveket rendel. Az ehhez szükséges devizára várni kell, a tapasztalatok alapján általában $1/2$ évet. A várakozási idő exponenciális eloszlású. Mennyi a valószínűsége, hogy az intézet egy negyedéven belül megkapja a könyveket?
8. Egy stopposnak ξ órát kell várnia, amíg egy autó felveszi. Tegyük fel, hogy ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda = \frac{1}{3}$ paraméterrel. Mekkora a valószínűsége, hogy a stopposnak legalább 3, de legfeljebb 6 órát kell várnia, amíg felveszik?
9. Annak a valószínűsége, hogy egy benzinkútnál a tankolásra hat percnél többet kell várakozni, a tapasztalat szerint 0,1. Feltételezve, hogy a várakozási idő exponenciális

- eloszlású, mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen a benzinkúthoz érkező gépkocsi három percen belül sorra kerül?
10. Egy műszer élettartama exponenciális eloszlású. Annak a valószínűsége, hogy legalább 2 évig működik: 0,9. Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb 3 évig lesz működőképes?
 11. Egy villanykörte élettartama exponenciális eloszlású. Átlagosan 2 évig működik.
 - a) Mennyi a valószínűsége, hogy legalább egy évig fog működni egy új villanykörte?
 - b) Mennyi a valószínűsége, hogy legalább egy évig fog működni egy fél éve működő villanykörte?
 - c) Mekkora életkort nem ér meg a villanykörték 10%-a?
 12. Tegyük fel, hogy bizonyos fajta izzólámpák "élettartama" normális eloszlású, $m = 1000$ óra várható értékkel és $\sigma = 100$ óra szórással. Számítsuk ki, hogy az első 900 órában a lámpák hány százaléka megy tönkre?
 13. Legyen ξ normális eloszlású valószínűségi változó $m = 3$, $\sigma = 2$ paraméterértékekkel. Mekkora legyen az A szám, ha azt kívánjuk, hogy ξ a $(2, A)$ intervallumban legalább 0,5 valószínűséggel essen?
 14. Egy löveg tüzel egy 1200 méter távoli célpontra. A lőtávolság ingadozása 1200 méter körül normális eloszlású 40 méter szórással. Hatásosnak tekintünk egy lövést, ha a találat a célhoz 50 méternél közelebb esik. A lövések hány százaléka lesz hatástalan?
 15. A skót bakák mellkasának körmérete $N(88; 10)$. A skót bakák mekkora hányada fér bele egy 84-es zubbonyba?
 16. A házimacskák testsúlya jó közelítéssel normális eloszlást követ: a macskák 10%-a könnyebb, mint 1,5 kg és 20%-a nehezebb, mint 7 kg. Mekkora a 6 kg-nál nehezebb házimacskák aránya?
 17. A programozó hallgatók valószínűségszámítás gyakorlaton szerzett pontszáma közelítőleg normális eloszlású. 8%-uk szerzett kevesebb, mint 50 pontot és 12%-uk szerzett több, mint 86 pontot. Mekkora hányaduk szerzett 51 és 61, illetve 62 és 73 közötti pontszámot?
 18. Egy rekeszben 20 doboz kávé van. A dobozokba kerülő kávé mennyisége (egymástól függetlenül) normális eloszlású valószínűségi változó 25 dkg várható értékkel és 0,1

dkg szórással. Jelentse A azt az eseményt, hogy egy rekeszben legalább 15 olyan doboz van, amelyben a kávé mennyisége 24,8 és 25,2 dkg között van. Mennyi az A esemény bekövetkezésének valószínűsége?

19. Egy fatelepen gerendákat vágnak méretre. A gerendák hossza normális eloszlású valószínűségi változó, 5 méter várható értékkel és 2 cm szórással. Jelentse ξ valószínűségi változó egy gerenda hossza. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a ξ értéke 4,96 és 5,01 méter közé esik?

Ellenőrző kérdések:

1. Definiálja a binomiális eloszlást!
2. Mi a sűrűségfüggvénye a μ, σ paraméterű normális eloszlásnak?
3. Mit jelent az, hogy az exponenciális eloszlás örökifjú?
4. Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, és melyik hamis!
 - Egy n -szeres Bernoulli kísérletsorozatban a p valószínűségű A esemény gyakorisága binomiális eloszlású valószínűségi változó.
 - Az egyenletes eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye lépcsős.
 - Az exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye páros.
 - A μ, σ paraméterű normális eloszlás sűrűségfüggvénye szimmetrikus az $x = \mu$ függőleges tengelyre.
 - A μ, σ paraméterű normális eloszlás eloszlásfüggvénye szimmetrikus a $(\mu, 0, 5)$ pontra.
 - A hipergeometriai eloszlással modellezhető a visszatevés nélküli mintavételezés.
 - A binomiális eloszlással modellezhető a visszatevés nélküli mintavételezés.
 - A normális eloszlás örökifjú tulajdonságú.
 - Az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonságú.
 - A geometriai eloszlású valószínűségű változó értékkészlete véges.
 - A karakterisztikus eloszlás speciális binomiális eloszlás.

7. fejezet

Eloszlásokra vonatkozó nevezetes tételek

- **Markov egyenlőtlenség.** Ha ξ olyan nem negatív valószínűségi változó, amelynek van várható értéke, és az $a > 0$, akkor

$$P(\xi \geq a) \leq \frac{M(\xi)}{a}.$$

- **Csebisev egyenlőtlenség.** Ha ξ valószínűségi változónak van várható értéke és szórása, és az $k > 0$, akkor

$$P(|\xi - M(\xi)| \geq kD(\xi)) \leq k \cdot D(\xi).$$

Az előző tétel az alábbi alakokban is felírható:

$$P(|\xi - M(\xi)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D^2(\xi)}{\varepsilon^2};$$

$$P(|\xi - M(\xi)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D^2(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

- **Nagy számok törvényének Bernoulli-féle alakja.** Ha n független kísérletet végzünk egy A esemény megfigyelésére, és s kísérletek során az A esemény ξ_n -szer következett be, akkor a $\frac{\xi_n}{n}$ relatív gyakoriság és az A esemény $P(A) = p$ valószínűségének eltérése az alábbi módon becsülhető:

$$P\left(\left|\frac{\xi_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{pq}{\varepsilon^2 n},$$

ahol $q = p - 1$, $\varepsilon > 0$ – tetszőleges kicsi pozitív valós szám.

Az előző tételnél egy "gyengébb" becslést is megfogalmazhatunk:

$$P\left(\left|\frac{\xi_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4\varepsilon^2 n}.$$

Példa: Egy automatából naponta átlagosan 200 adag kávé fogy. Ennek az értéknek a szórása 30 adag. Jelölje a ξ valószínűségi változó a naponta elfogyasztott kávé mennyiségét! Az automatába egyszerre 80 darab poharat lehet elhelyezni.

- Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy egy napon 3-nál többször kell az automatát pohárral feltölteni, ha a ξ valószínűségi változó eloszlása nem ismert?
- Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy egy adott napon elfogyasztott kávé adagok száma az átlagtól legfeljebb 40%-kal tér el, ha a ξ valószínűségi változó eloszlása nem ismert?

Megoldás: Legyen a ξ valószínűségi változó a naponta elfogyasztott kávé mennyisége: $M(\xi)$, $D(\xi)$.

- a) A becsléshez használjuk a Markov egyenlőtlenséget. Ekkor $a = 240$,

$$P(\xi \geq 240) \leq \frac{200}{240} = 0,833.$$

- b) A napi átlag 40%-a $200 \cdot 0,4 = 80$, a kért valószínűség: $|\xi - M(\xi)| \leq 80$. A becsléshez használjuk a Csebisev egyenlőtlenséget

$$P(|\xi - M(\xi)| \leq \varepsilon) = 1 - P(|\xi - M(\xi)| \geq \varepsilon) \geq 1 - \frac{D^2(\xi)}{\varepsilon^2}$$

a mi esetünkben

$$P(|\xi - M(\xi)| \leq 80) \geq 1 - \frac{30^2}{80^2} = 0,859.$$

Vagyis 85,9% annak a valószínűsége, hogy egy nap alatt elfogyasztott kávé mennyisége a várható értéktől legfeljebb 40%-kal tér el.

Feladatok:

1. Egy gyár egyik részlegében apró szögeket készítenek. A szögeket automata gép csomagolja. A becsomagolt szögek mennyisége valószínűségi változó, amelynek várható értéke 5000, szórása 10. A szögek számának eloszlása nem ismeretes. Legfeljebb mekkora a valószínűsége, hogy egy csomagban a szögek száma a várható értéktől 50-nél többel tér el?
2. Egy forgalmas pályaudvaron, meghatározott időben, egy újságárus 1 óra alatt eladott újságainak száma Poisson - eloszlású valószínűségi változó $\lambda = 64$ várható értékkel. Adjunk alsó becslést a

$$P(48 < \xi < 80)$$

a valószínűségre a Csebisev – egyenlőtlenség segítségével, ha ξ az eladott olvasni valók számát jelenti.

3. Egy gyufa gyárban a dobozokat automata gép tölti. Az egyes dobozokban levő gyufaszálak száma valószínűségi változó, melynek eloszlása a tapasztalatok alapján a következő:

db	47	48	49	50	51	52	53
p_i	0,05	0,10	0,15	0,40	0,15	0,10	0,05

Adjunk becslést a Csebisev - egyenlőtlenség segítségével a $P(48 < \xi < 52)$ valószínűségre, majd számítsuk ki e valószínűséget pontosan is a fenti táblázatban adott valószínűség-eloszlás alapján!

4. Egy bankautomata élettartamának átlagértéke 5 év, az élettartam szórása 0,5 év. Legfeljebb mennyi annak a valószínűsége, hogy az automata tényleges élettartama legalább 1 évvel eltér az átlagos élettartamtól?
5. Egy színházban az egy estére eladott jegyek száma a tapasztalatok szerint átlagosan 500 db, az eladott jegyek számának átlagtól való átlagos eltérése 50 db. Legalább mennyi annak a valószínűsége, hogy az eladott jegyek száma legfeljebb 120-szal tér el az átlagos jegyforgalomtól?
6. Egy célpontra 200 lövést adnak le. A találat valószínűsége minden lövésnél 0,4. Milyen határok közé fog esni legalább 90% valószínűséggel a találatok száma?

7. Egy szövőgép 500 szállal dolgozik. Annak valószínűsége, hogy egy szál meghatározott időtartam alatt elszakad: 0,008 minden szállra. Határozzuk meg, hogy 0,95 valószínűséggel milyen határok között várható a szálszakadások száma az adott időtartam alatt?
8. Valamely társadalmi rétegben meg akarjuk határozni a színházba járók arányát. Hány megfigyelést kell végezni ahhoz, hogy a megfigyelésekből adódó arány a valódi aránytól legfeljebb 0,01-dal térjen el 95%-os valószínűséggel?
9. Egy szövőgép által készített szövet hosszának várható értéke 35 m, szórás 0,3 m. Legfeljebb mennyi annak a valószínűsége, hogy a szövet hossza legalább 1 m-rel eltér a várható értéktől?
10. Egy gyógyszer mellékhatásaként 24%-os valószínűséggel jelentkeznek fejfájásos tünetek.
 - a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 2000 beteg között a fejfájásos tünetek 15-30%-ban fordulnak elő?
 - b) Hány beteg megvizsgálásra lenne szükség ahhoz, hogy a becslés hibáját 0,04 - ra csökkentsük azonos megbízhatóság mellett?
11. Egy pizériában készített pizzák súlya normális eloszlású $m = 400g$ várható értékkel és $\sigma = 3g$ szórással.
 - a) A pizzák hány százaléka lesz 398 g-nál nehezebb és 401 g-nál könnyebb?
 - b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a pizzák súlya a 400 g-tól legfeljebb 2,5 g-mal tér el?
12. Annak valószínűsége, hogy egy sorsjeggyel nyerünk 0,01. Milyen határok között mozog 90% valószínűséggel a nyerő sorsjegyek száma, ha 2000 db sorsjegyet vásárolunk?

Ellenőrző kérdések:

1. Mit állít a Csebisev egyenlőtlenség?
2. Mondja ki a nagy számok törvényének Csebisev féle alakját!
3. Mit állít a nagy számok törvényének Bernoulli féle alakja?
4. Mit állít a centrális határeloszlás tétel?
5. Mondja ki a Moivre-Laplace tételt!
6. Melyik állítás igaz, melyik hamis?
 - A Markov egyenlőtlenség csak a várható értéknél nagyobb ε valós számok esetén érvényes.
 - A Csebisev egyenlőtlenség csak diszkrét valószínűségi változókra igaz.
 - A Moivre-Laplace tétel egy speciális esete a nagy számok törvényének.
 - A Csebisev egyenlőtlenség a Markov egyenlőtlenség speciális esete.
 - A centrális határeloszlás tétel azt állítja, hogy a binomiális eloszlás nagy n paraméter esetén közelíthető normális eloszlással.

8. fejezet

Többdimenziós valószínűségi változók

8.1. Kétdimenziós diszkrét valószínűségi változók

- $A (\xi, \eta)$ *diszkrét véletlen vektor (vagy kétdimenziós valószínűségi változó)* ha olyan véletlen vektor, amely legfeljebb megszámlálhatóan végtelen lehetséges értékekkel rendelkezik, vagyis diszkrét valószínűségi változók alkotják.

A ξ és η valószínűségi változók külön-külön vett eloszlása nem határozza meg a két változó együttes viselkedését.

- $A \xi$ és η *együttes eloszlása* a $P(\xi = x_i, \eta = y_j)$ valószínűségek sorozata $(i, j = 1, 2, \dots)$, ahol ξ illetve η valószínűségi változó lehetséges értékeinek sorozata $x_1, x_2, \dots$, illetve $y_1, y_2, \dots$

Jelöljük: $P(\xi = x_i, \eta = y_j) = p_{ij}$, ahol $(i, j = 1, 2, \dots)$, ekkor

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1.$$

- *Diszkrét peremeloszlások (marginális eloszlások):*

$$q_i = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, \quad (i = 1, 2, \dots)$$

$$r_j = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}, \quad (j = 1, 2, \dots)$$

- *Együttes eloszlásfüggvény*: a (ξ, η) véletlen vektor együttes eloszlás az $F(x, y) = P(\xi < x, \eta < y)$ formulával meghatározott valós értékű függvény. Az $F(x, y)$ függvény akkor és csak akkor együttes eloszlásfüggvény, ha rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0, \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0.$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} F(x, y) = 1$
- $F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c) \geq 0, \forall a \leq b, c \leq d.$ Teljesül a "téglalap tulajdonság" azaz mindkét változójában monoton növekvő. Ez azt fejezi ki, hogy nemnegatív annak valószínűsége, hogy a (ξ, η) pár beleessen egy téglalapba.

- *Peremeloszlásfüggvények(marginális eloszlásfüggvény)*:

$$F_{\xi}(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y)$$

$$F_{\eta}(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y)$$

- *Várható érték*: $M(\xi\eta) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i y_j p_{ij}, M(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i q_i, M(\eta) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j p_j,$
- *Feltételes várhatóérték*: $M(\xi|\eta = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \frac{p_{ij}}{r_j}.$
- *Függetlenség*: ξ és η függetlenek, ha együttes eloszlásfüggvények felbomlik a két marginális eloszlásfüggvény szorzatára: $F(x, y) = F_{\xi} \cdot F_{\eta}.$ Gyakorlatban elég ellenőrizni, hogy $p_{ij} = q_i \cdot r_j$ minden $(i, j = 1, 2, \dots),$ esetére.
- *Szórásnégyzet*: $D^2(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 q_i - (M(\xi))^2, D^2(\eta) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j^2 r_j - (M(\eta))^2$
- *Kovariancia*: $cov(\xi, \eta) = M(\xi\eta) - M(\xi) \cdot M(\eta).$
Ha a ξ és η független valószínűségi változóknak léteznek a várható értékeik, akkor létezik a kovarianciájuk is és $cov(\xi; \eta) = 0,$ azaz $M(\xi \cdot \eta) = M\xi \cdot M\eta.$
- *Korrelációs együttható*: $R(\xi, \eta) = \frac{cov(\xi, \eta)}{D(\xi)D(\eta)}.$

Példa:

A kétdimenziós diszkrét (ξ, η) vektorváltozó együttes- és peremeloszlásairól az alábbi információkat tudjuk:

η ξ	1	2	3	ξ peremeloszlása
0		0,13	0,02	0,45
1	0,2			
η peremeloszlása		0,3		

- Határozzuk meg az együttes eloszlást és a peremeloszlásokat!
- Döntsük el, független-e ξ és η !
- Írjuk fel az együttes eloszlásfüggvényt!
- Határozzuk meg a következő jellemzőket: $M(\xi)$, $M(\eta)$, $M(\xi \cdot \eta)$!
- Számítsuk ξ és η kovarianciáját!
- Számítsuk ki ξ és η szórását!
- Határozzuk meg a korrelációs együtthatót!
- Határozzuk meg a $P(\xi = 1 | \eta = 3)$ feltételes valószínűséget!
- Számoljuk ki a $P(0 < x; 2 \leq \eta \leq 3)$ valószínűséget!

Megoldás:

- Határozzuk meg az együttes eloszlást és a peremeloszlásokat!

Vezessük be a következő jelöléseket:

η ξ	1	2	3	ξ peremeloszlása
0	p_{11}	0,13	0,02	0,45
1	0,2	p_{22}	p_{23}	q_2
η peremeloszlása	r_1	0,3	r_3	1

Így a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{cases} p_{11} + 0,13 + 0,02 = 0,45 \\ 0,2 + p_{22} + p_{23} = q_2 \\ p_{11} + 0,2 = r_1 \\ 0,13 + p_{22} = 0,3 \\ 0,45 + p_{23} = r_3 \end{cases}$$

Az egyenletrendszer megoldása után felírhatjuk az együttes és peremeloszlásokat:

η ξ	1	2	3	ξ peremeloszlása
0	0,3	0,13	0,02	0,45
1	0,2	0,17	0,18	0,55
η peremeloszlása	0,5	0,3	0,2	1

b) Döntsük el, független-e ξ és η !

Ehhez ellenőrizzük, hogy $p_{ij} = q_i r_j$ bármely i, j esetére.

Első lépésben ellenőrizzük, hogy $p_{11} = q_1 r_1$.

$$p_{11} = P(\xi = 0, \eta = 1) = 0,7,$$

$q_1 r_1 = 0,45 \cdot 0,5$ vagyis $p_{11} \neq q_1 r_1$. Tehát elmondhatjuk, hogy ξ és η nem függetlenek.

c) Írjuk fel az együttes eloszlásfüggvényt!

Az eloszlásfüggvényt az egydimenziós esethez hasonlóan határozhatjuk meg.

c) Írjuk fel az együttes eloszlásfüggvényt!

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \text{ és } y \leq 1, \\ 0,3 & \text{ha } 0 < x \leq 1 \text{ és } 1 < y \leq 2, \\ 0,43 & \text{ha } 0 < x \leq 1 \text{ és } 2 < y \leq 3, \\ 0,45 & \text{ha } 0 < x \leq 1 \text{ és } 3 < y, \\ 0,5 & \text{ha } 1 < x \text{ és } 1 < y \leq 2, \\ 1 & \text{ha } 1 < x \text{ és } 3 < y. \end{cases}$$

d) Határozzuk meg a következő jellemzőket: $M(\xi)$, $M(\eta)$, $M(\xi \cdot \eta)$!

$$M(\xi) = 0 \cdot 0,45 + 1 \cdot 0,55 = 0,55;$$

$$M(\eta) = 1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,2 = 1,7;$$

$$M(\xi \cdot \eta) = 0 \cdot 1 \cdot 0,3 + 0 \cdot 2 \cdot 1,3 + 0 \cdot 3 \cdot 0,02 + 1 \cdot 1 \cdot 0,2 + 1 \cdot 2 \cdot 0,17 + 1 \cdot 3 \cdot 0,18 = 1,08.$$

e) Számítsuk ξ és η kovarianciáját!

$$\text{cov}(\xi, \eta) = M(\xi\eta) - M(\xi) \cdot M(\eta) = 1,08 - 0,55 \cdot 1,7 = 0,145.$$

f) Számítsuk ki ξ és η szórását!

A szórás kiszámításához kiszámoljuk: $\sum_{i=1}^2 x_i^2 q_i = 0^2 \cdot 0,45 + 1 + 2 \cdot 0,55 = 0,55$; ekkor a várható érték ismeretében meghatározhatjuk a szórást $D(\xi) = \sqrt{0,55 - 0,55^2} \approx 0,497$.

Hasonlóan az η változó esetében:

$$M(\eta) = 1^2 \cdot 0,5 + 2^2 \cdot 0,3 + 3^2 \cdot 0,2 = 3,5,$$

$$D(\eta) = \sqrt{3,5 - 1,7^2} \approx 0,781.$$

g) Határozzuk meg a korrelációs együtthatót!

$$R(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{D(\xi)D(\eta)} = \frac{0,145}{0,497 \cdot 0,781} = 0,374.$$

h) Határozzuk meg a $P(\xi = 1 | \eta = 3)$ feltételes valószínűséget!

$$P(\xi = 1 | \eta = 3) = \frac{0,18}{0,2} = 0,9$$

i) Számoljuk ki a $P(0 < x; 2 \leq \eta \leq 3)$ valószínűséget!

Használhatjuk az együttes eloszlásfüggvényt. Fontos figyelembe venni a szigorú és nem szigorú relációs jeleket:

$$\begin{aligned} P(0 < \xi; 2 \leq \eta \leq 3) &= P(1 \leq \xi < 2; 2 \leq \eta < 4) = \\ &= F(2, 4) - F(2, 2) - F(1, 4) + F(1, 2) = \\ &= 1 - 0,5 - 0,45 + 0,3 = 0,35. \end{aligned}$$

Feladatok:

1. Az alábbi táblázat X, Y együttes eloszlását adja:

Y X	0	1	2
1	$2p$	$2p$	p
2	$4p$	$3p$	0
3	$2p$	$4p$	$2p$

- Mennyi a p értéke?
 - Adjuk meg az X és Y együttes eloszlását.
 - Mi az X , illetve az Y peremeloszlása?
 - Független-e egymástól az X és Y valószínűségi változó?
2. A (ξ, η) lehetséges értékeit a következő táblázatba foglaltuk össze

η ξ	0	1
0	p	p
1	p	$3p$
2	$2p$	$4p$

- Keressük meg a p értékét, határozzuk meg a perem eloszlását!
- Írjuk fel a (ξ, η) eloszlás függvényét!

3. A (ξ, η) lehetséges értékeit a következő táblázatba foglaltuk össze

η ξ	1	3	4
- 1	0,04	$2p$	0,1
0	0,05	0,2	0,1
2	p	0,05	0,01

- Keressük meg a p értékét, határozzuk meg a peremeloszlását!

- b) Írjuk fel a (ξ, η) eloszlás függvényét!
- c) Határozzuk meg a peremeloszlás függvényeket!
- d) Számoljuk ki: $P(1, 3 \leq \xi \leq 5; -0, 1 \leq \eta \leq 1)$,
- e) Számoljuk ki: $M(\xi), M(\eta), D(\xi), D(\eta)$;
- f) Számoljuk ki az alábbi feltételes valószínűséget: $M(\xi|\eta = 0)$!
4. Egy 10 fős csoport nemek és vizsga eredmények szerinti megoszlása a következő:

	leány	fiú
eredménytelen	2	1
eredményes	4	3

Közöttük 2 színházjegyet sorsoltak ki. Legyen ξ a nyertes lányok, η az eredményesen vizsgázott fiúk száma. Írjuk fel a (ξ, η) kétdimenziós eloszlását!

5. Statisztikai adatok szerint annak a valószínűsége, hogy ikerszüléskor mindkét gyermek fiú: 0,32, s azé, hogy mindkettő lány: 0,28. Annak a valószínűsége, hogy az első fiú és a második lány, egyenlő annak a valószínűségével, hogy az első lány és a második fiú. A ξ legyen 0, ha az első iker fiú, és $\eta = 1$, ha lány. Az valószínűségi változó vonatkozzék a második ikerre hasonlóképpen. Számítsuk ki a ξ és η korrelációs együtthatóját!
6. Adott A és B esemény. Ismeretes, hogy $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B | A) = \frac{1}{2}$ és $P(A|B) = \frac{1}{4}$. A ξ legyen 1, ha A bekövetkezik, és 0, ha A nem következik be. Hasonlóképpen η : legyen 1, ha B bekövetkezik, 0, ha B nem következik be. Számítsuk ki a ξ és η korrelációs együtthatóját!
7. A valószínűségi vektor változó (ξ, η) lehetséges értékeit a következő táblázatba foglaltuk össze

η	0	1
ξ		
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

- a) Számítsuk ki a $\zeta = \xi + \eta$ valószínűségi változó eloszlását!
- b) Számítsuk ki a $\zeta = |\xi + \eta|$ valószínűségi változó eloszlását!
- c) Számítsuk ki a $\zeta = \xi \cdot \eta$ valószínűségi változó eloszlását!

8. Adva van:

η ξ	-2,3	-1,4	0,2	1,2
-0,5	0,12	3p	0,01	0,03
0	0,03	0,1	0,2	0,01
0,3	2p	0,12	0,06	0,07

Határozzuk meg:

- a) a p paraméter értékét!
- b) $M(\eta|\xi = 0,5)$!

9. Adva van:

η ξ	1	2	3	4
0	0,04	0,04	0,03	0,1
1	0,02	0,16	0,22	0,01
2	0,06	0,01	0,02	0,02
3	0,11	0,07	0,06	0,03

Határozzuk meg:

- a) $M(\xi)$
- b) $M(\xi|\eta = 0)$

10. Egy kockát kétszer feldobunk egymás után. X értéke legyen a dobott 6-osok száma, Y értéke legyenek a dobott számok összegének 3-mal való osztási maradéka. Független-e az X és az Y ?

11. Egy piros és egy kék kockával dobunk. Legyen X a piros kockán dobott szám, Y pedig a két szám összege. Számítsuk ki Y -nak az $X = 3$ eseményre vonatkoztatott feltételes várható értékét!
12. Két valószínűségi változó együttes valószínűség-eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat:

Y		0	1	2
X				
0		$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1		0	$\frac{1}{2}$	0

- a) Adjuk meg az együttes eloszlásfüggvényt, a perem eloszlásokat.
- b) Független-e a két változó? Hanem, akkor adja meg a korrelációs együttható értékét.
13. Gazda Dani gyümölcsösében alma- és körtefák vannak. Betakarításkor a leszedett gyümölcsöket I., II. és III. osztályú minősítéssel látják el. A szüret végén Dani táblázatba foglalta a betakarított gyümölcsök mennyiségét:

	I.oszt (kg)	II.oszt (kg)	III.oszt (kg)
alma	700	400	50
körte	500	250	100

Véletlenszerűen választunk egy gyümölcsöt az évi termésből. A $\xi = 0$ jelentse, hogy almát, $\xi = 1$, hogy körtét választottunk. Az $\eta = 1$, $\eta = 2$ és $\eta = 3$ jelentse, hogy a kivett gyümölcs I., II., illetve III. osztályú.

- a) Készítsük el az eloszlás táblázatát!
- b) Számítsuk ki a ξ és η korrelációs együtthatóját!
- c) Számítsuk ki a $\xi + \eta$ szórását!
14. Egy autószalonban kétféle modellt árusítanak (sportkocsit és családi autót) háromféle színben (fehér, ezüst és piros színekben). A tapasztalatok szerint a vásárlók 40%-a vásárol sportkocsit, a többiek családi autót. A sportkocsit vásárlók fele ezüst színt választ, fehér és piros sportkocsit egyenlő arányban vásárolnak. A családi autót vásárlók 50%-a fehér

modellt vesz, a többi családi autó 1:2 arányban fogy ezüst és piros színekben. Definiáljunk két valószínűségi változót! Legyen $\xi = 1$ ha a vásárló sportkocsit vesz és $\xi = 0$ ha családi autót, továbbá vegye fel η az 1, 2, 3 értékeket, ha a választott szín rendre fehér, ezüst illetve piros. Határozzuk meg az alábbiakat:

- a) a (ξ, η) vektorváltozó együttes eloszlását;
 - b) a peremeloszlásokat;
 - c) a peremeloszlás-függvényeket;
 - d) az együttes eloszlásfüggvényt;
 - e) a következő jellemzőket: $M(\xi), D(\xi), M(\eta), D(\eta)$;
 - f) $M(\xi \cdot \eta), M(\xi + \eta)$;
 - g) vizsgáljuk ξ és η a függetlenségét, korrelátlanságát;
 - h) határozzuk meg a ξ és η korrelációs együtthatóját!
15. Egy 52 lapos francia kártyacsomagból húzunk 2 lapot visszatevés nélkül. Legyen ξ a pirosak, η pedig a királyok száma. Adjuk meg ξ és η korrelációs együtthatóját. Függetlenek-e ezek a változók?
16. Egy gyárban minőség ellenőrzés során három alkatrészt vizsgálnak, annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott alkatrész hibamentes 0,8. Jelölje a ξ valószínűségi változó a hibás alkatrészek számát egy ellenőrzés során, η - a hibátlanok számát. Határozzuk meg:
- a) a (ξ, η) vektorváltozó együttes eloszlását;
 - b) a peremeloszlásokat;
 - c) a következő jellemzőket: $M(\xi), D(\xi), M(\eta), D(\eta)$;
 - d) határozzuk meg a ξ és η korrelációs együtthatóját!

8.2. Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók

A (ξ, η) vektorváltozó eloszlásfüggvénye az $F(x, y) = P(\xi < x, \eta < y)$ valószínűségfüggvény.

- *Folytonos véletlen vektor*: olyan véletlen vektor, amelynek létezik együttes sűrűségfüggvénye $f(s, t)$, $s, t \in \mathbb{R}$, ahol

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(t, s) dt ds.$$

Egy $f(s, t)$ függvény pontosan akkor sűrűségfüggvénye valamilyen vektorváltozónak, ha

a) $f(s, t) \geq 0$;

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s, t) dt ds = 1.$

- *Perem- vagy marginális sűrűségfüggvény*: $f_{\xi}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s, t) dt$, $f_{\eta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s, t) ds$.

- *Feltételes sűrűségfüggvény*: $f_1(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_{\eta}(y)}$, $f_1(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_{\xi}(x)}$

- *Függetlenség* a (ξ, η) vektorváltozó komponensei (ξ és η) pontosan akkor függetlenek, ha $f(s, t) = f_{\xi}(s)f_{\eta}(t)$ teljesül.

- *Várható érték*: $M(g(\xi, \eta)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$

- *Feltételes várható érték*:

$$M(\xi|\eta = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f(x, y)}{f_{\xi}(x)} dx,$$

$$M(\eta|\xi = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{f(x, y)}{f_{\eta}(y)} dy.$$

- *Kovariancia*: $cov(\xi, \eta) = M(\xi\eta) - M(\xi) \cdot M(\eta).$

Ha a ξ és η független valószínűségi változóknak léteznek a várható értékeik, akkor létezik a kovarianciájuk is és $cov(\xi; \eta) = 0$, azaz $M(\xi \cdot \eta) = M\xi \cdot M\eta$.

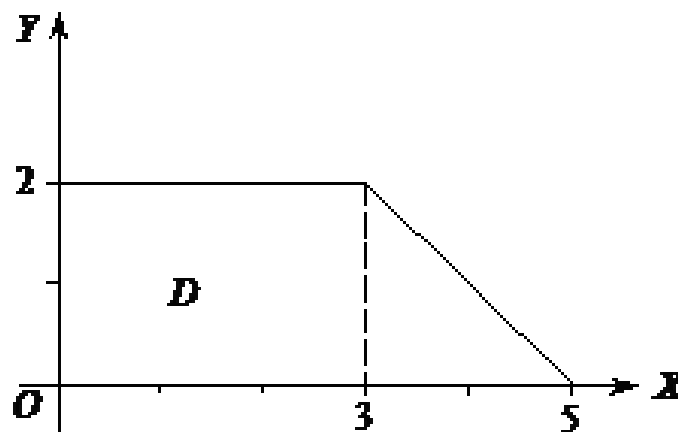
- *Korrelációs együttható*: $R(\xi, \eta) = \frac{cov(\xi, \eta)}{D(\xi)D(\eta)}.$

- *Konvolúció*: Ha ξ és η független abszolút folytonos valószínűségi változók f illetve g sűrűségfüggvényekkel, akkor $\xi + \eta$ is abszolút folytonos, továbbá a sűrűségfüggvénye $x \in \mathbb{R}$

helyen

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t) dt$$

Példa: Kétdimenziós véletlen vektor a D tartományban egyenletes eloszlású.



Határozzuk meg:

- az együttes sűrűségfüggvényt;
- az $f_{\xi}(s)$ marginális sűrűségfüggvényt;
- az $M(\eta|\xi = x)$ feltételes várható értéket;
- a $P(0, 2 \leq \eta < 1, 6|\xi = 3, 5)$ feltételes valószínűség értékét!

Megoldás:

- Az együttes sűrűségfüggvény meghatározása céljából, felhasználjuk az együttes sűrűségfüggvény tulajdonságát:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1.$$

Mivel egyenletes eloszlású véletlen vektorral van dolgunk, ezért tudjuk, hogy

$$f(x, y) = C \quad \forall (x, y) \in D.$$

Ebből következik: $C \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy = 1$. Ez a határozott kettős integrál a D tartomány területét adja, ami meghatározható a következő képlet segítségével is $S_D = \frac{3+5}{2} \cdot 2 = 8$.

Innen a sűrűségfüggvény:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{ha } (x, y) \in D \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

b) A marginális sűrűségfüggvény $f_{\xi}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s, t) dt$ képlettel adható meg. Belátjuk,

hogy $f_{\xi}(s) = 0$, ha $s \in (-\infty; 0] \cup (5; \infty)$. Tehát elég vizsgálni: $f_{\xi}(s) = \int_0^5 f(s, t) dt$.

Ha $s \in (0; 3]$ akkor a D tartományt lentől a $t = 0$, fentről a $t = 2$ vonal határolja és $f(s, t) = \frac{1}{8}$, ezért $f_{\xi}(s) = \int_0^2 \frac{1}{8} dt = \frac{1}{4}$, ha $s \in (0; 3]$.

Ha $s \in (3; 5]$ akkor a D tartományt lentől a $t = 0$, fentről a $t = 5 - s$ vonal határolja és $f(s, t) = \frac{1}{8}$, $f_{\xi}(s) = \int_0^{5-s} \frac{1}{8} dt = \frac{1}{4} = \frac{5-s}{8}$, ha $s \in (3; 5]$.

Összefoglalva:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } s \leq 0; \\ \frac{1}{4} & \text{ha } 0 < s \leq 3 \\ \frac{5-s}{8} & \text{ha } 3 < s \leq 5 \\ 0 & \text{ha } s > 5. \end{cases}$$

c) A feltételes várható érték kiszámításához adjuk a feltételes sűrűségfüggvényt: $f_1(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_{\eta}(y)}$,

$$f_2(y|x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } s \leq 0; \\ \frac{1}{2} & \text{ha } 0 < y < 2, 0 < x \leq 3 \\ \frac{1}{5-x} & \text{ha } 0 < y < 5-x, 3 < x < 5 \\ 0 & \text{ha } s > 5. \end{cases}$$

A feltételes várható értéket így számíthatjuk ki:

ha $x \in (0; 3]$, akkor $M(\eta|\xi = x) = \int_0^2 \frac{1}{2} y dy = 1$,

ha $x \in (3; 5)$, akkor $M(\eta|\xi = x) = \int_0^{5-x} \frac{y}{5-x} dy = \frac{5-x}{2}$. Összefoglalva:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in (0; 3] \\ \frac{5-x}{2} & \text{ha } x \in (3; 5). \end{cases}$$

d) A keresendő valószínűséget a feltételes sűrűségfüggvény segítségével számoljuk ki: $P(0, 2 \leq$

$\eta < 1, 6|\xi = 3, 5) = \int_{0,2}^{1,6} f_2(y|x) dy$. Ha $x \in (3; 5)$, akkor a felső határ $y = 5 - x$. Tehát, ha

$x = 3, 5$ akkor a felső határ $y = 1, 5$. Az $x = 3, 5$ értéket a feltételes eloszlás függvénybe

helyettesítve kapjuk: $P(0, 2 \leq \eta < 1, 6|\xi = 3, 5) = \int_{0,2}^{1,5} \frac{2}{3} dy = \frac{13}{15}$.

Feladatok:

1. Legyen a ξ és η valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{ha } -2 \leq x \leq 6 \text{ és } 2 \leq y \leq 5, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

- a) Igazoljuk, hogy ξ és η függetlenek!
b) Számítsuk ki a $P(0 \leq \xi \leq 3, 0 \leq \eta \leq 2)$ valószínűséget!
c) Írjuk fel a (ξ, η) eloszlásfüggvényét!

2. Legyen a ξ és η valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{6}{7} \left(x^2 + \frac{xy}{2} \right) & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \text{ és } 0 \leq y \leq 2, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Adjuk meg a változók kovarianciáját és a korrelációs együttható értékét.

3. Legyen (ξ, η) együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4} (1 + xy(x^2 - y^2)) & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \text{ és } 0 \leq y \leq 2, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

- a) Írjuk fel a ξ és η perem- és sűrűségfüggvényét!
b) Ellenőrizzük, hogy ξ és η függetlenek-e!
c) Számítsuk ki a ξ és η korrelációs együtthatóját!

4. Legyen (ξ, η) együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4}{5} (x + xy + y) & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \text{ és } 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Adjuk meg a peremeloszlásokat!

5. Legyen (ξ, η) együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \text{ és } 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Számítsuk ki a $\xi + \eta$ és $\xi \cdot \eta$ várható értékét!

6. A (ξ, η) vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = \begin{cases} A \cdot e^{-x-2y} & \text{ha } x > 0 \text{ és } y > 0, \\ 0 & \text{különbén.} \end{cases}$$

a) Számítsuk ki az A együttható értékét!

b) Milyen valószínűséggel esik az η a $(2, 4)$ intervallumba, ha $\xi = 2$?

7. A (ξ, η) vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = \begin{cases} A \cdot x^2(y + 1) & \text{ha } x \in D, \\ 0 & \text{különbén,} \end{cases}$$

ahol $D = \{y \geq x^2 - 1; y \leq 0\}$.

a) Számoljuk ki az a paraméter értékét!

b) Milyen valószínűséggel esik a (ξ, η) a $D_1 = \{y = x - 1; y = 0; x = 0\}$ tartományba?

8. A (ξ, η) véletlen vektor eloszlásfüggvénye: A (ξ, η) vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye:

$$F(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \leq 0 \text{ és } y \leq 0; \\ 1 - e^{-2x} - e^{-3y} + e^{-2x-3y} & \text{különbén.} \end{cases}$$

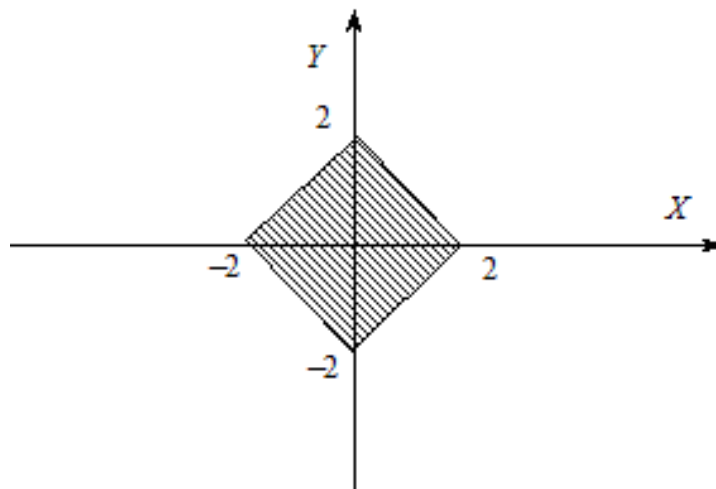
Számoljuk ki a $P(0 < x < 4, 0 < y < 2)$ valószínűséget!

9. Legyen a (ξ, η) véletlen vektor sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{48} & \text{ha } (x, y) \in D, \\ 0 & \text{különbén,} \end{cases}$$

ahol $D = \{-4 \leq x \leq 2, -3 \leq y \leq 5\}$. Számoljuk ki a korrelációs együttható értékét!

10. A (ξ, η) véletlen vektor egyenletes eloszlású a D tartományban.



- a) Írjuk fel a kétdimenziós véletlen vektor sűrűségfüggvényét!
- b) Írjuk fel a peremeloszlásokat!
- c) Vizsgáljuk a ξ és η függetlenségét. Számoljuk ki a korrelációs együtthatót!

Ellenőrző kérdések:

1. Mi az együttes eloszlásfüggvény és a peremeloszlásfüggvény fogalma, és mi a kapcsolat közöttük?
2. Mikor teljesen függetlenek a ξ_1, ξ_2, ξ_3 valószínűségi változók?
3. Hogyan nevezzük a binomiális eloszlás többdimenziós megfelelőjét?
4. Mik az együttes sűrűségfüggvény tulajdonságai?
5. Az alábbiak közül melyik állítás helyes és melyik hamis?

- Az együttes eloszlásfüggvény többváltozós valós függvény.
- Az együttes eloszlásfüggvény értékei az 1-hez tartanak, ha valamelyik változójával $+\infty$ -hez tartunk.
- Az együttes eloszlásfüggvény értékei az 0-hoz tartanak, ha valamelyik változójával $-\infty$ -hez tartunk.
- Diszkrét valószínűségi változók együttes eloszlása a peremeloszlások összegeként áll elő.
- Diszkrét valószínűségi változók peremeloszlásait az együttes eloszlásból összegzéssel számolhatjuk ki.
- Független folytonos valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye a peremsűrűségfüggvények szorzata.
- Független folytonos valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye a peremeloszlásfüggvények szorzata.
- Az együttes eloszlás elemeinek összege 1.
- A vektor valószínűségi változó minden komponense valószínűségi változó.
- Az együttes sűrűségfüggvény minden változójában folytonos.

9. fejezet

Statisztika

9.1. Leíró statisztikák

Ha egy populációból kiválasztott egyedekhez valamilyen számszerű mutatót rendelünk, az így kapott adatok $x_1, x_2, \dots, x_n$ jellemzésére alkalmazhatunk centrális mutatókat, a szóródást jellemző mutatókat és ha elegendően nagy számú adatunk van, akkor elkészíthetjük az adatok gyakorisági eloszlását, illetve a relatív gyakorisági eloszlást is, azaz a hisztogramot. **Centrális mutatók**
Középértékek

1. Számítási közép: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$

2. Mértani közép $\bar{x}_g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$

3. Harmonikus közép: $\bar{x}_h = \frac{1}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$

4. Medián. Ha mintából határozzuk meg, akkor a nagyság szerint rendezett adatoknál a középső adat, ha páratlan elemszámú a minta; illetve a két középső adat átlaga, ha páros elemszámú a minta.

5. Módusz. Ha mintából határozzuk meg, akkor a leggyakoribb adat illetve a leggyakoribb kategória. Az adatok nagyság szerinti rendezésénél több helyen is kicsúcsosodhat a gyakoriság (multimodális).

A szóródás jellemzői

1. Terjedelem $R = x_{\max} - x_{\min}$

2. Kvartilisek. A nagyságrendbe állított értékek sorát elemezzük oly módon, hogy az n számú adatot negyedeljük és megállapítjuk, hogy milyen nagyságú (értékű) adat tartozik.
 - az alsó negyed felső határához – ez az alsó kvartilis
 - a felező értéket (medián) – ez a középső kvartilis
 - a felső negyed alsó határához – ez a felső kvartilis
3. Kvantilisek. A rangsorba rendezett mintaadatokat k egyenlő részre osztjuk és az osztópontoknak megfelelő ismérvértékeket megállapítjuk. Ezeket kvantilis értékeknek nevezzük.
4. Tapasztalati szórás négyzet. A mintaelemek értékeinek átlagtól vett eltérését négyzetre emeljük, majd átlagoljuk ezen négyzeteket. $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$
5. Variancia (Korrigált tapasztalati szórás négyzet). A mintaelemek értékeinek átlagtól vett eltérését négyzetre emeljük, majd átlagoljuk ezen négyzeteket. Az átlagolásnál azonban n helyett $(n-1)$ -gyel osztunk. $s^{*2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$
6. Ferdeség $\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{n \cdot S^3}$
7. Lapultság $\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{n \cdot S^4} - 3$

Példa: Egy mintavételes felmérés szerint egy adott termék x árai ismertek a különböző piaci szereplőknél. Határozza meg a táblázatból a leíró statisztikákat!

Hely	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ár	100	110	115	125	140	145	145	150	450

Megoldás:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{100 + 110 + 115 + 125 + 140 + 145 + 145 + 150 + 450}{9} \approx 164,4$$

A minta elemeinek száma páros, így a medián egyenlő az $\frac{n}{2}$ és $\frac{n}{2} + 1$ indexű tagok átlagával:
 $x_{n/2} = x_4 = 125$; $x_{n/2+1} = x_5 = 140$

$$m = \frac{x_4 + x_5}{2} = \frac{125 + 140}{2} = 132,5.$$

Terjedelem: $R = x_{\max} - x_{\min} = 150 - 100 = 50$. A tapasztalati szórásnégyzet kiszámításához használjuk a következő táblázatot:

x_i	100	110	115	125	140	145	145	150
$x_i - \bar{x}$	-28,75	-18,75	-13,75	-3,75	11,25	16,25	16,25	21,25
$(x_i - \bar{x})^2$	826,563	351,56	189,06	14,063	126,56	264,06	264,06	451,56

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{826,563 + 351,56 + 189,06 + 14,063 + 126,56 + 264,06 + 264,06 + 451,56}{8} = 310,938.$$

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{310,938} \approx 17,63.$$

Példa: A mintavételes felmérés szerint ismert az év során a kórházat felkeresők száma. Az adatokat a látogatók életkora szerint csoportosítottuk. ábrázolja meg a táblázatból a leíró statisztikákat!

Kor	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69
Hány fő	45	36	175	361	825

Megoldás: Az összes látogató száma $n = 1442$, a látogatók pontos korát nem ismerjük, de tudjuk, hogy adott korcsoportba hány látogató tartozik. Vezessük be a következő jelölést:

$[a_i, a_{i+1}]$	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69
n_i	45	36	175	361	825

Ekkor az előző feladatban felírt az x_i szerepében az inetrvallumok középpontjai lesznek:

$[a_i, a_{i+1}]$	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	Összeg
x_i	24,5	34,5	44,5	54,5	64,5	
n_i	45	36	175	361	825	1442
$x_i \cdot n_i$	1102,5	1242	7787,5	19675	53213	83019

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i \cdot n_i = \frac{83019}{1449} \approx 57,57.$$

A legnagyobb gyakorisággal rendelkező inetrvallum kezdőpontja $x_{M_0} = 60$, itt a gyakoriság $n_{M_0} = 825$, hossza $\Delta = 69 - 59 = 9$ az előző és következő inetrvallumok gyakoriságai: $n_{M_0-1} = 361$, $n_{M_0+1} = 0$ így

$$M_0 = x_{M_0} + \frac{\Delta(n_{M_0} - n_{M_0-1})}{2n_{M_0} - n_{M_0-1} - n_{M_0+1}} =$$

$$= 60 + \frac{10(825 - 361)}{2 \cdot 825 - 365 - 0} = 65$$

Medián: 60

Feladatok:

1. Egy halastóban 5 helyen mértek víz hőmérsékletet. A következő értékeket kapták Celsius-fokban: 17,5; 16,9; 17,2; 15,8; 16,5. Adja meg az átlagot, a mediánt, a terjedelmet, a varianciát és a szórást!
2. 10 petúnia hajtás hosszát mérték meg a kelés utáni 10-dik napon. Az adatok cm-ben a következők: 10,2; 13,5; 14,2; 11,5; 12,1; 13,1; 11,8; 12,4; 13,9; 14,1. Adja meg az átlagot, a mediánt, a terjedelmet, a varianciát és a szórást!
3. 40 szem sárgabarackot szedtek le egy fáról és megmérték a tömegüket. Az adatok dkg-ban a következők. 12,2; 12,9; 11,8; 11,9; 11,6; 11,1; 12,3; 12,2; 11,8; 11,8; 10,7; 11,5; 11,3; 11,2; 11,6; 11,9; 13,3; 11,2; 10,5; 11,1; 12,1; 11,9; 10,4; 10,7; 10,8; 11,0; 11,9; 10,2; 10,9; 11,6; 10,8; 11,6; 10,4; 10,7; 12,0; 12,4; 11,7; 11,8; 11,3; 11,1.
Adja meg az átlagot, a mediánt, a terjedelmet, a varianciát és a szórást! Készítsen az adatokból hisztogramot és ennek alapján is számítsa ki az átlagot valamint a szórást és adja meg a móduszt is! Hasonlítsa össze az így kapott értékeket, az eredeti adatokból kapott értékekkel! Mit tapasztal?
4. Egy tehenészetben az egyes tehenek által adott tej zsírtartalmát határozták meg %-ban. 120 tehént vontak be a vizsgálatba. Az alábbi adatokat kapták: a) Adja meg az átlagot, a mediánt, a terjedelmet, a varianciát és a szórást! b) Készítsen az adatokból hisztogramot és ennek alapján is számítsa ki az átlagot valamint a szórást és adja meg a móduszt is! c) Hasonlítsa össze az így kapott értékeket, az eredeti adatokból kapott értékekkel. Mit tapasztal!

9.2. Hipotézis vizsgálat paraméteres próbák

Egy mintás u próba $\xi \in \text{Norm}(m; \sigma)$, m ismeretlen, σ ismert, a ξ -re vonatkozó minta n elemű, $m_0 \in \mathbb{R}$.

$H_0 : m = m_0$	kritikus tartomány
$H_1 : m \neq m_0$	$2 - 2\Phi(u) < \alpha$
$H_1 : m < m_0$	$1 - \Phi(u) < \alpha$ és $u < 0$
$H_1 : m > m_0$	$1 - \Phi(u) < \alpha$ és $u > 0$

ahol

$$\hat{u} = \frac{\bar{\xi} - m_0}{\sigma} \sqrt{n}$$

Az egymintás u -próba a gazdasági statisztikában egymintás z -próba néven ismert.

Egy mintás t próba

Példa: A férfiak magassága (cm-ben) $\mathcal{N}(174, 7^2)$ -eloszlást követ. Egy kosárlabdacsapat játékosainak magassága a következő:

201, 197, 202, 198, 203, 201, 191, 196, 199, 205, 181, 212.

a) Állíthatjuk-e 95%-os megbízhatósági szinten, hogy a kosárlabdajátékosok általában magasabbak a felnőtt korú férfi népességnél?

b) És hogy döntenénk akkor, ha nem tudnánk, hogy mennyi a szórás?

Megoldás:

a) $n = 12$, adott az $(x_1, \dots, x_n)$ minta $\mathcal{N}(\mu, 7^2)$ -eloszlásból, $H_0 : \mu = 174$, $H_1 : \mu > 174$. u -próbát kell csinálni. $x = 198.833$,

$$H_1 : \mu = 174$$

$$H_0 : \mu > 0$$

Ebben az esetben egyoldali az ellenhipotézis (egyszélű próbáról beszélünk) ilyenkor arról tudunk dönteni, hogy a H_1 ellenhipotézist elfogadjuk-e vagy, igazából a H_0 teljesülését nem vizsgáljuk.

$$\hat{u} = \frac{\bar{\xi} - m_0}{\sigma} \sqrt{n} = \frac{198.833 - 174}{7} \sqrt{12} = 12.289$$

az 5%-os (jobb oldali) kritikus tartomány: $C_1 = (\Phi^{-1}(0.95), \infty) = (1.645, \infty)$, így mivel $u(\hat{u}) \in C_1$, a H_1 -et fogadjuk el.

b) Ha nem ismerjük a szórást, akkor az u -próba helyett t -próbát kell csinálni.

$$H_1 : \mu = 174$$

$$H_0 : \mu > 0$$

A hagyományos, eloszlástáblázatból való visszakereséses módszerrel csinálva a próbát, $S_n^* = 7.626$, így a t -statisztika értéke:

$$\hat{t} = \frac{\bar{\xi} - m_0}{s_n^*} \sqrt{n} = \frac{198.8333 - 174}{7.6257} \sqrt{12} = 11.281$$

az 5%-os (jobb oldali) kritikus tartomány: $C_1 = (F_{t_{11}}^{-1}(0.95), \infty) = (1.796, \infty)$, így mivel $u\hat{t}) \in C_1$, a H_1 -et fogadjuk el.

Felelet: a kosárlabda játékosok általában magasabbak, mint a felnőtt férfi lakosság.

Két mintás u próba $\xi \in \text{Norm}(m_1; \sigma_1)$, $\eta \in \text{Norm}(m_2; \sigma_2)$ függetlenek, m_1, m_2 ismeretlenek, σ_1, σ_2 ismertek, a ξ -re vonatkozó minta n_1 elemű, az η -ra vonatkozó minta n_2 elemű.

$H_0 : m_1 = m_2$	kritikus tartomány
$H_1 : m_1 \neq m_2$	$2 - 2\Phi(u) < \alpha$
$H_1 : m_1 < m_2$	$1 - \Phi(u) < \alpha$ és $u < 0$
$H_1 : m_1 > m_2$	$1 - \Phi(u) < \alpha$ és $u > 0$

ahol

$$\hat{u} = \frac{\bar{\xi} - \bar{\eta}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

A kétmintás u-próba a gazdasági statisztikában kétmintás z-próba néven ismert.

Páros mintás t- próba $\xi \in \text{Norm}(m_1; \sigma_1)$, $\eta \in \text{Norm}(m_2; \sigma_2)$ és különbségük is normális eloszlású, akkor két minta különbségéből új mintát hozunk létre, amelyre egymintás t- próbát használhatunk.

Példa: Két fájdalomcsillapító (X és Y) hatását vizsgálták 8 betegen, mérve a fájdalom megszűnéséig eltelt időt (alkalmas időegységben):

beteg	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
X	3.2	1.6	5.7	2.8	5.5	1.2	2.1	2.9
Y	3.6	1.1	6.0	4.3	5.0	3.5	3.7	3.6

Az időkülönbségről feltételezhető, hogy normális eloszlású.

a) Van-e lényeges különbség a két fájdalomcsillapító hatása között?

b) Azt sejtjük, hogy az X fájdalomcsillapító gyorsabban hat (pl. mert tudjuk, hogy az Y javított változata). Igaz-e ez a sejtés?

Hipotéziseit pontosan megfogalmazva, döntsön 95% szinten!

Megoldás: a)

$$H_0 : m_x = m_y,$$

$$H_1 : m_x \neq m_y$$

Párosított mintás t- próbát használunk, két oldali ellenhipotézissel.

Legyen $\zeta \doteq X - Y$. Ekkor a próbastatisztika:

$$\hat{t} = \frac{\bar{\zeta}}{s_{n,\zeta}^*} \sqrt{n} = \frac{-0.725}{1.0096} \sqrt{8} = -2.031$$

a kritikus érték:

$$F_{t_{n-1}}^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) = F_{t_7}^{-1} \left(1 - \frac{0.05}{2} \right) = F_{t_7}^{-1}(0.975) = 2.365$$

Így az elfogadási tartomány: $(-2.365, 2.365)$ Mivel $\hat{t} \in (-2.365, 2.365)$, a döntés: H_0 , tehát nincs különbség a két fájdalomcsillapító hatása között.

Felelet: nincs szignifikáns különbség a két fájdalomcsillapító hatása között

b)

$$H_0 : m_x = m_y,$$

$$H_1 : m_x < m_y$$

(egyoldali) párosított mintás t-próba. A kritikus érték:

$$F_{t_{n-1}}^{-1}(\alpha) = -F_{t_{n-1}}^{-1}(1 - \alpha) = -F_{t_7}^{-1}(1 - 0.05) = -F_{t_7}^{-1}(0.95) = -1.895$$

Mivel $\hat{t} = -2.031 < -1.895$, a döntés: H_1 , tehát az X fájdalomcsillapító gyorsabban hat, mint az Y .

Felelet: z X fájdalomcsillapító gyorsabban hat, mint az Y

Két mintás F próba $\xi \in \text{Norm}(m_1; \sigma_1)$, $\eta \in \text{Norm}(m_2; \sigma_2)$ függetlenek, a paraméterek ismeretlenek, a ξ -re vonatkozó minta n_1 elemu, az η -ra vonatkozó minta n_2 elemu.

$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$	kritikus tartomány
$H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$	$2 \min\{F(F), 1 - F(F)\} < \alpha$
$H_1 : \sigma_1 < \sigma_2$	$\min\{F(F), 1 - F(F)\} < \alpha$ és $F < 1$
$H_1 : \sigma_1 > \sigma_2$	$\min\{F(F), 1 - F(F)\} < \alpha$ és $F > 1$

ahol

$$\hat{F} = \frac{S_{\xi, n_1}^2}{S_{\eta, n_2}^2} \quad \& \quad F := F[F(n_1 - 1; n_2 - 1)]$$

Két mintás t próba $\xi \in \text{Norm}(m_1; \sigma_1), \eta \in \text{Norm}(m_2; \sigma_2)$ függetlenek, $\sigma_1 = \sigma_2$, a paraméterek ismeretlenek, a ξ -re vonatkozó minta n_1 elemű, az η -ra vonatkozó minta n_2 elemű.

$H_0 : m_1 = m_2$	kritikus tartomány
$H_1 : m_1 \neq m_2$	$2 - 2F(t) < \alpha$
$H_1 : m_1 < m_2$	$1 - F(t) < \alpha$ és $t < 0$
$H_1 : m_1 > m_2$	$1 - F(t) < \alpha$ és $t > 0$

ahol

$$t = \frac{\bar{\xi} - \bar{\eta}}{\sqrt{n_1 S_{\xi, n_1}^2 + n_2 S_{\eta, n_2}^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \text{ és } F = F[T(n_1 + n_2 - 2)].$$

A feltételben szerepel, hogy a szórásoknak meg kell egyeznie, melyről F-próbával dönthetünk. $\xi \in \text{Norm}(m_1; \sigma_1), \eta \in \text{Norm}(m_2; \sigma_2)$ függetlenek, a paraméterek ismeretlenek, a ξ -re vonatkozó minta n_1 elemű, az η -ra vonatkozó minta n_2 elemű, $n_1 \leq n_2$.

$H_0 : m_1 = m_2$	kritikus tartomány
$H_1 : m_1 \neq m_2$	$2 - 2F(t) < \alpha$
$H_1 : m_1 < m_2$	$1 - F(t) < \alpha$ és $t < 0$
$H_1 : m_1 > m_2$	$1 - F(t) < \alpha$ és $t > 0$

ahol

$$\zeta_i := \xi_i - \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} \eta_i + \frac{1}{\sqrt{n_1 n_2}} \sum_{k=1}^{n_1} \eta_k - \bar{\eta} \quad (i = 1, \dots, n_1)$$

jelöléssel

$$\hat{t} = \frac{\bar{\zeta}}{S_{\zeta, n_1}^*} \sqrt{n_1} \quad \text{és} \quad F = F[T(n_1 - 1)]$$

Vagyis a $\zeta_1, \dots, \zeta_{n_1}$ mintára alkalmazzuk az egymintás t-próbát $m_0 = 0$ választással.

Példa: Egy vasútvonal egy 5 ezrelékes emelkedőjén egy napig mérték a vonatok sebességét.

Az adatok: (km/h-ban):

lefelé: 86.9, 88.7, 106.1, 114.0, 100.3, 94.2, 126.5, 110.1, 96.1, 116.8, 104.8, 122.0

felfelé: 102.3, 84.4, 74.5, 82.0, 86.9, 108.6, 100.5, 90.3, 78.2, 106.4.

Korábbi mérések azt mutatják, hogy a sebesség jó közelítéssel normális eloszlásúnak vehető.

Döntsük el, hogy igaz-e az a sejtésünk, hogy a lefelé menő vonatok gyorsabban mennek! Hipotéziseit pontosan megfogalmazva, döntsön 95% szinten!

Megoldás: Jelöljük a lefelé mért sebességeket x -szel, a felfelé mértéket y -nal. A független mintákra vonatkozó t -próba alkalmazhatóságának eldöntéséhez először tesztelnünk kellene a

$$H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2,$$

$$H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$$

hipotéziseket. Gyakorlatban azonban egyoldali ellenhipotézis használunk:

$$H_0 : \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} = 1,$$

$$H_1 : \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} > 1$$

Ebben az esetben a számlálóba kerül az a minta, amelyiknek nagyobb a korrigált tapasztalati szórása, jelen esetben az x .

Az F-statisztika:

$$\hat{F} = \frac{s_x^{*2}}{s_y^{*2}} = \frac{164.224}{149.014} = 1.1$$

a kritikus érték: $F_{F_{n_x-1}, n_y-1}^{-1}(1-0.1/2) = F_{F_{11}, 9}^{-1}(0.95) = 3.1$. Mivel $1.1 < 3.1$, a döntés H_0 , tehát használhatjuk az (egyoldali) független kétmintás t -próbát azonos szórásnégyzetek esetére

$$H_0 : m_x = m_y,$$

$$H_1 : m_x > m_y$$

hipotézisek eldöntésére. A próbastatisztika:

$$\hat{t} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{n_x S_x^2 + n_y S_y^2}} \sqrt{\frac{n_x n_y (n_x + n_y - 2)}{n_x + n_y}} = 2.631$$

a kritikus érték:

$$F_{t_{n_x+n_y-2}}^{-1}(1-\alpha) = F_{t_{20}}^{-1}(0.95) = 1.725$$

így a döntés: H_1 , azaz a lefelé menő vonatok tényleg gyorsabban mennek.

Felelet: a lefelé menő vonatok tényleg gyorsabban mennek.

Feladatok:

1. Egy automata csővágó gép 1200 mm -es darabok levágására van beállítva. A levágott cső hossza véletlentől függő változó, amiről tudjuk, hogy normális eloszlású. Kiválasztunk 16 legyártott csövet. Ezek méretei:

1199, 1198, 1203, 1195, 1195, 1196, 1205, 1198, 1203, 1196, 1195, 1198, 1200, 1198, 1199, 1200.

a) Régebbi adatfelvételekből tudjuk, hogy a csőhossz szórása 3 mm . Elfogadható-e, hogy a szabvány csőhossztól való eltérés nem szignifikáns?

b) Ha nem tudnánk, hogy a csőhossz szórása 3 mm , akkor elfogadnánk-e, hogy a szabvány csőhossztól való eltérés nem szignifikáns?

Hipotéziseit pontosan megfogalmazva, döntsön 95% szinten!

2. Egy bolt pénztárosát azzal vádolták a vásárlók, hogy általában többet számol. A pénztáros azzal védekezett, hogy csak véletlen tévedésekről lehet szó, mindkét irányban tévedhet, de ezek kiegyenlítik egymást. Egy ellenőrzés során 12 számláját vizsgálták meg véletlenszerűen, és az alábbi tévedéseket regisztrálták (a pozitív értékek a vásárlók kárára történő tévedéseket jelölik):

30, 20, -30, 15, 20, -25, 0, 0, 14, 0, 100, 0

Feltételezve, hogy a tévedések normális eloszlást követnek, dönötn 95%-os megbízhatósági szinten igaza van-e a pénztárosnak! Hipotéziseit pontosan fogalmazza meg(tehát legyen felírva a H_0 és H_1 is)!

3. Egy teherautó rakománnyi félliteres üdítőitalból 10 palackot véltelneszerűen kiválasztottak és lemérték azok ürtartalmát az alábbi értékeket kaptuk:

499, 525, 498, 503, 501, 497, 493, 496, 500, 495

Ismert, hogy a palackokba töltött üdítőital mennyisége normális eloszlású 3 ml szórással. 95%-os döntési szintet használva vizsgálja meg a gyártó azon állítását, hogy a palackokba átlagosan fél liter üdítőitalt töltöttek!

4. Ha naponta 200 alkalommal valaki hallja a Maradj otthon jelszót az úgy is tesz. Kiválasztottak véletlenszerűen 5 személyt és kérték számolja meg hányszor hallja ezt, a következő eredmények születtek:

196, 202, 198, 197, 190

Hipotéziseit pontosan megfogalmazva és feltételezve, hogy a fenti adatok normális eloszlásból származtathatóak döntsön 98%-os szinten arról, hogy egy átlag ember valóban 200 alkalommal hallja a Maradj otthon kifejezést!

5. Két fájdalomcsillapító (X és Y) hatását vizsgálták 8 betegen, mérve a fájdalom megszűnéséig eltelt időt (alkalmas időegységben):

beteg	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
X	3.2	1.6	5.7	2.8	5.5	1.2	2.1	2.9
Y	3.6	1.1	6.0	4.3	5.0	3.5	3.7	3.6

Az időkülönbségről feltételezhető, hogy normális eloszlású.

a) Van-e lényeges különbség a két fájdalomcsillapító hatása között? Hipotéziseit pontosan megfogalmazva, döntsön 95% szinten!

b) Azt sejtjük, hogy az X fájdalomcsillapító gyorsabban hat (pl. mert tudjuk, hogy az Y javított változata). Igaz-e ez a sejtés?

Hipotéziseit pontosan megfogalmazva, döntsön 95% szinten!

6. Az angol titkosszolgálat a II. világháború alatt hírelemzéssel is próbálkozott annak eldöntésére, hogy egy adott objektum megsemmisítésére indított akció sikeres volt-e. A hírelemzés arra irányult, hogy kisebb gyakorisággal emítik-e a hírközlő szervek az adott objektumot a bombázás után. Egy-egy akció előtt és után 5-5 napon át véletlenszerűen kiválasztott egyórás időintervallumokban figyelték, hogy az adott órában összesen hányszor említik az adott objektumot a német rádióadók. Az egyik ilyen esetben az adatok az alábbiak voltak:

a bombázás előtt:

27, 62, 25, 60, 79, 24, 31, 17, 47, 7, 34, 1, 30, 46, 1, 28, 74, 66, 12, 70, 3, 56, 76, 23, 16;

a bombázás után:

20, 11, 4, 0, 19, 36, 15, 2, 35, 0, 59, 21, 6, 38, 37, 51, 13, 73, 75, 32, 9, 33, 10, 8, 39, 71. Hipotéziseit pontosan megfogalmazva, döntsön 95% szinten!

10. fejezet

Példák zárthelyi dolgozathoz és elméleti kérdések

10.1. 1.modul

1. számú dolgozat

1. Egy gazdálkodás szakra járó főiskolásnak 3 nehéz tantárgyból kell vizsgát tennie: matematikából, statisztikából, közgazdaságtanból. M esemény: matematikából sikeres vizsgát tett, S esemény: statisztikából sikeres vizsgát tett, K esemény: közgazdaságtanból sikeres vizsgát tett. Fejezze ki M, S, K eseményekkel és az esemény algebrai műveletekkel: a)Csak egy tárgyból tett sikeres vizsgát b) Legalább egy tárgyból sikeres vizsgát tett.
2. Öt házaspár foglal helyet egy padon. Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a házastársak egymás mellett akarnak ülni, de sem két nő, sem két férfi nem ülhet egymás mellé?
3. A 32 lapos magyar kártyából hányféleképpen lehet kiválasztani nyolc lapot úgy, hogy legalább egy zöld legyen a kiválasztott lapok között? 5. Egyszerre dobunk 6 szabályos kockával. Mi a valószínűsége annak, hogy legalább két dobókockán azonos pontszám lesz felül?
4. Egy villanykörtét gyártó cég termékei között 8% selejtes. Mekkora annak valószínűsége, hogy 10 véletlenszerűen kiválasztott körte között pontosan 4 selejtes lesz?
5. Egy cukrászda egy 9 fős társaság érkezik. 3dobos tortát, 2 túrós rétest és 4 somlói galuskát rendelnek. A pincér kihozza a süteményeket, de sajnos elfelejtette, hogy ki melyiket

rendelte, így véletlenszerűen teszi le őket a vendégek elé. Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindenki a megfelelő süteményt kapja? 8. András és Betti megbeszélnek, hogy munka után találkoznak. Mindkettejüknek egymástól függetlenül véletlenszerűen, egyenletes eloszlás szerint ér véget a munkaideje 4 óra és fél 6 között. Mennyi a valószínűsége, hogy az előbb jövőnek nem kell 10 percnél többet várnia a másikra?

6. Egy könyvkiadó két nyomdával dolgozik. Az első nyomda a kiadványok $\frac{1}{2}$ részét, a maradék részt a második nyomda készíti. Az első nyomdában elkészültek 5 a/ Adja meg a következő valószínűséget: egy találmányra kiválasztott kiadvány szépséghibás. b/ Adja meg, mekkora a valószínűség, hogy egy kiadványt az első nyomdában nyomtattak, ha az szépséghibás.

Elméleti kérdések szóbeli számonkéréshez:

1. Véletlen kísérletek. Műveletek eseményekkel.
2. Kolmogorov-féle valószínűségi mező. Eseményalgebrák.
3. Valószínűség-számítási tételek (a valószínűség folytonossága és a többi)
4. Klasszikus valószínűség.
5. Geometriai valószínűség.
6. Feltételes valószínűség. Szorzási szabály.
7. Teljes valószínűség tétele. Bayes-tétele
8. Események függetlensége. Borel-Cantelli lemma
9. Bernoulli-féle kísérlet sorozat. Hányszor következik be az A esemény a legnagyobb valószínűséggel?
10. Moivre-Laplace lokális határeloszlás tétele.

10.2. 2. modul

2. számú dolgozat

1. Érmével dobunk addig, amíg először fordul elő, hogy két egymás utáni dobás azonos. Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke és szórása?
2. András és Béla a következő játékot játsszák. András egy érmével legfeljebb 3-szor dobhat. A játék befejeződik, ha valamelyik dobásnál fejet dob. Ha első, második vagy harmadik dobásnál sikerül fejet dobni, akkor a nyereményei rendre 32 Fitying, 16 Fitying, 8 Fitying. Ha harmadikra sem sikerül fejet dobni, akkor fizet Bélának 120Fitying-et. Kinek kedveznek a játék feltételei? Válaszod indokold!
3. Eloszlásfüggvény-e a következő függvény? $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{x}{1+x}, & \text{ha } 0 < x \end{cases}$
4. Sűrűségfüggvények-e a következő függvény?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{2}, & 0 < x < \pi \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

5. Valaki egy sürgős telefonhívást vár. A hívás időpontja egy reggel 8 órakor kezdődő, ismeretlen hosszúságú intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. A hívást váró fél tudja, a hívás 80% valószínűséggel 8 és 10 óra között befut. Állapítsuk meg, mekkora annak a valószínűsége hogy 930 és 10 óra között érkezik?
6. Tegyük fel, hogy egy étteremben a vendégek ebédidőben eltöltött idejét, percekben mérve, a következő eloszlás függvény jellemzi:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{x}{60} & \text{ha } 0 < x \leq 30 \\ \frac{1}{2} & \text{ha } 30 < x \leq 60 \\ \frac{x}{120} & \text{ha } 60 < x \leq 120 \\ 1 & \text{ha } 120 < x \end{cases}$$

Ábrázoljuk e függvényt! Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy vendég az étteremben 20 percnél több időt tölt el?

7. Egy villanykörte élettartama exponenciális eloszlású. Átlagosan 2 évig működik. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább egy évig fog működni egy új villanykörte?

8. Egy halastóban 1000 db hal van. Egyik nap kihalásznak közülük 100-at. Ezeket valamilyen módon megjelölik, majd visszadobják őket. Másnap megint kihalásznak halat, de most visszatevéssel. Határozzuk meg a második nap kifogott megjelölt halak számának várható értékét és szórását!
9. Almafánk egyes gyümölcseit megtámadó férgek száma 1,5 paraméterű Poisson eloszlást követ. 10 almát leszedünk. Mi a bennük lévő férgek számának várható értéke? Mennyi a valószínűsége, hogy egy almában legalább két féreg lesz?
10. Egy 40 elemű alkatrészhalmozban pontosan 5% a selejt arány. Mennyi a valószínűsége, hogy a halmazból egy 20 elemű mintát véve visszatevés nélkül, a mintában levő selejtek száma éppen 2 lesz?

Elméleti kérdések szóbeli számonkéréshez:

1. Diszkrét valószínűségi változók és eloszlásuk. Várható érték és tulajdonságai
2. Diszkrét valószínűségi változók és eloszlásuk. Szórás és tulajdonságai
3. Folytonos valószínűségi változók. Eloszlás függvény és tulajdonságai
4. Folytonos valószínűségi változók. Sűrűségfüggvény, várható érték és szórás.
5. Nevezetes diszkrét eloszlások. Hipergeometrikus eloszlás.
6. Nevezetes diszkrét eloszlások. Binomiális eloszlás.
7. Nevezetes diszkrét eloszlások. Geometriai és negatív binomiális eloszlás.
8. Nevezetes diszkrét eloszlások. Poisson eloszlás. A Poisson eloszlás és binomiális eloszlás közötti kapcsolat.
9. Karakterisztikus függvény és tulajdonságai.
10. Nevezetes folytonos eloszlások. Egyenletes eloszlás.
11. Nevezetes folytonos eloszlások. Exponenciális eloszlás.
12. Nevezetes folytonos eloszlások. Normális eloszlás és várható érték. Nevezetes folytonos eloszlások. Standard normális eloszlású valószínűségi változók és kapcsolatok a normális eloszlással.

3. modul

1. A (ξ, η) lehetséges értékeit a következő táblázatba foglaltuk össze

a) a p paraméter értékét

e) $M(\eta \mid \xi = 0)$

b) az együttes eloszlást;

f) független-e a

c) a permeloszlásokat

2. $A(\xi; \eta)$ vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye:

ξ	η	0	1
0		p	P
1		P	$3p$
2		$2p$	$4p$

$$f(x, y) = \begin{cases} Ax^3(y + 3), & \text{ha } x \in D \\ 0; & \text{különben} \end{cases}$$

ahol $D = \{y \geq x^4 - 1; y \leq 0\}$

a) Számoljuk ki az A paraméter értékét, b) Adjuk meg a permeloszlásokat!

3. Egy célpontra 200 lövést adnak le. A találat valószínűsége minden lövésnél 0,4. Milyen határok közé fog esni 90% valószínűséggel a találatok száma?

4. Az atlétikai világbajnokságon résztvevő kokszföldi csapat néhány versenyzője arra panaszkodott, hogy a leadott doppingtesztjeiket nem megfelelően analizálták és az egyik szernek túlságosan magas koncentrációját mutatták ki, minek következtében a versenybírók törölte az eredményeiket. A Kokszföldi Atlétikai Szövetség a laboratóriumot tesztelendő nyolc mintát küldött, melyek mindegyikében a kérdéses anyag koncentrációja pontosan 0,5 g/l volt. A laboratórium az alábbi eredményeket szolgáltatta:

0,485; 0,518; 0,460; 0,530; 0,560; 0,550; 0,490; 0,575

A laboratórium mérési hibáját normálisnak tételezve fel döntson 95%-os szinten, igazuk van-e az atlétáknak!

5. Egy teherautórakománnyi félliteres üdítőitalból 10 palackot véletlenszerűen kiválasztva és lemérve azok úrtartalmát az alábbi, milliliterben kifejezett értékeket kaptuk:

499; 525; 498; 503; 501; 497; 493; 496; 500; 495 :

Ismert, hogy a palackokba töltött üdítőital mennyisége normális eloszlású 3 ml szórással. 95%-os döntési szintet használva vizsgálj meg a gyártó azon állítását, hogy a palackokba átlagosan fél liter üdítőitalt töltöttek!

6. Az Ezt idd teát 200gr - os dobozokban árulják, a csomagológép szórása 4gr. A Fogyasztóvédelmi Felügyelőség lemérte 11 véletlenszerűen kiválasztott teásdoboz tömegét, melyekre az alábbi értékeke adódtak:

196, 202, 201, 203, 198, 204, 197, 203, 190,191,197

Hipotéziseidet pontosan megfogalmazva és feltételezve, hogy a teásdobozok tömege normális eloszlást követ, dönts 95%-os szinten, hogy az átlagos töltőtömeg tényleg 200gr, avagy kevesebb annál

7. A Mindent Tudás Egyeteme másodéves közgazdász hallgatói két zárthelyi dolgozatot írtak statisztikából. Az alábbi táblázat tíz véletlenszerűen kiválasztott hallgatóeredményeit tartalmazza :

Hallgató	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
I. dolgozat	57	63	67	82	45	65	53	32	51	27
II. dolgozat	53	62	63	80	46	64	44	28	50	29

A dolgozateredmények eltérést normális eloszlásúnak tételezve fel dönts 90% üos szinten, vane különbség a két dolgozat nehézségi foka között!

Elméleti kérdések szóbeli számonkéréshez:

1. A nagyszámok törvényei.
2. Csebisev tétel és Bernoulli tétel
3. Központi határeloszlás tétel
4. A statisztika alapfogalmai. Tapasztalati eloszlásfüggvény és tulajdonságai.
5. A statisztika alapfogalmai.Sűrűséghisztogram.
6. A statisztika alapfogalmai.Statisztikák.

7. Pontbecslések és tulajdonságaik
8. Intervallum becslések.
9. A hipotézisvizsgálat feladata és jellemzői. A hipotézisvizsgálat menete.
10. Hipotézisvizsgálat. Egymintás u-próba.
11. Hipotézisvizsgálat. Két mintás u-próba.
12. Hipotézisvizsgálat. Egymintás t-próba.
13. Páros mintás T-próba
14. Hipotézisvizsgálat. F-próba
15. Hipotézisvizsgálat. Két mintás T-próba

A standard normális eloszlás eloszlás

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.5000	0.35	0.6368	0.70	0.7580	1.05	0.8531
0.01	0.5040	0.36	0.6406	0.71	0.7611	1.06	0.8554
0.02	0.5080	0.37	0.6443	0.72	0.7642	1.07	0.8577
0.03	0.5120	0.38	0.6480	0.73	0.7673	1.08	0.8599
0.04	0.5160	0.39	0.6517	0.74	0.7704	1.09	0.8621
0.05	0.5199	0.40	0.6554	0.75	0.7734	1.10	0.8643
0.06	0.5239	0.41	0.6591	0.76	0.7764	1.11	0.8665
0.07	0.5279	0.42	0.6628	0.77	0.7794	1.12	0.8686
0.08	0.5319	0.43	0.6664	0.78	0.7823	1.13	0.8708
0.09	0.5359	0.44	0.6700	0.79	0.7852	1.14	0.8729
0.10	0.5398	0.45	0.6736	0.80	0.7881	1.15	0.8749
0.11	0.5438	0.46	0.6772	0.81	0.7910	1.16	0.8770
0.12	0.5478	0.47	0.6808	0.82	0.7939	1.17	0.8790
0.13	0.5517	0.48	0.6844	0.83	0.7967	1.18	0.8810
0.14	0.5557	0.49	0.6879	0.84	0.7995	1.19	0.8830
0.15	0.5596	0.50	0.6915	0.85	0.8023	1.20	0.8849
0.16	0.5636	0.51	0.6950	0.86	0.8051	1.21	0.8869
0.17	0.5675	0.52	0.6985	0.87	0.8078	1.22	0.8888
0.18	0.5714	0.53	0.7019	0.88	0.8106	1.23	0.8907
0.19	0.5753	0.54	0.7054	0.89	0.8133	1.24	0.8925
0.20	0.5793	0.55	0.7088	0.90	0.8159	1.25	0.8944
0.21	0.5832	0.56	0.7123	0.91	0.8186	1.26	0.8962
0.22	0.5871	0.57	0.7157	0.92	0.8212	1.27	0.8980
0.23	0.5910	0.58	0.7190	0.93	0.8238	1.28	0.8997
0.24	0.5948	0.59	0.7224	0.94	0.8264	1.29	0.9015
0.25	0.5987	0.60	0.7257	0.95	0.8289	1.30	0.9032
0.26	0.6026	0.61	0.7291	0.96	0.8315	1.31	0.9049
0.27	0.6064	0.62	0.7324	0.97	0.8340	1.32	0.9066
0.28	0.6103	0.63	0.7357	0.98	0.8365	1.33	0.9082
0.29	0.6141	0.64	0.7389	0.99	0.8389	1.34	0.9099
0.30	0.6179	0.65	0.7422	1.00	0.8413	1.35	0.9115
0.31	0.6217	0.66	0.7454	1.01	0.8438	1.36	0.9131
0.32	0.6255	0.67	0.7486	1.02	0.8461	1.37	0.9147
0.33	0.6293	0.68	0.7517	1.03	0.8485	1.38	0.9162
0.34	0.6331	0.69	0.7549	1.04	0.8508	1.39	0.9177

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1.40	0.9192	1.70	0.9554	2.00	0.9772	2.60	0.9953
1.41	0.9207	1.71	0.9564	2.02	0.9783	2.62	0.9956
1.42	0.9222	1.72	0.9573	2.04	0.9793	2.64	0.9959
1.43	0.9236	1.73	0.9582	2.06	0.9803	2.66	0.9961
1.44	0.9251	1.74	0.9591	2.08	0.9812	2.68	0.9963
1.45	0.9265	1.75	0.9599	2.10	0.9821	2.70	0.9965
1.46	0.9279	1.76	0.9608	2.12	0.9830	2.72	0.9967
1.47	0.9292	1.77	0.9616	2.14	0.9838	2.74	0.9969
1.48	0.9306	1.78	0.9625	2.16	0.9846	2.76	0.9971
1.49	0.9319	1.79	0.9633	2.18	0.9854	2.78	0.9973
1.50	0.9332	1.80	0.9641	2.20	0.9861	2.80	0.9974
1.51	0.9345	1.81	0.9649	2.22	0.9868	2.82	0.9976
1.52	0.9357	1.82	0.9656	2.24	0.9875	2.84	0.9977
1.53	0.9370	1.83	0.9664	2.26	0.9881	2.86	0.9979
1.54	0.9382	1.84	0.9671	2.28	0.9887	2.88	0.9980
1.55	0.9394	1.85	0.9678	2.30	0.9893	2.90	0.9981
1.56	0.9406	1.86	0.9686	2.32	0.9898	2.92	0.9982
1.57	0.9418	1.87	0.9693	2.34	0.9904	2.94	0.9984
1.58	0.9429	1.88	0.9699	2.36	0.9909	2.96	0.9985
1.59	0.9441	1.89	0.9706	2.38	0.9913	2.98	0.9986
1.60	0.9452	1.90	0.9713	2.40	0.9918	3.00	0.9987
1.61	0.9463	1.91	0.9719	2.42	0.9922	3.20	0.9993
1.62	0.9474	1.92	0.9726	2.44	0.9927	3.40	0.9997
1.63	0.9484	1.93	0.9732	2.46	0.9931	3.60	0.9998
1.64	0.9495	1.94	0.9738	2.48	0.9934	3.80	0.9999
1.65	0.9505	1.95	0.9744	2.50	0.9938	4.00	1.0000
1.66	0.9515	1.96	0.9750	2.52	0.9941	4.20	1.0000
1.67	0.9525	1.97	0.9756	2.54	0.9945	4.40	1.0000
1.68	0.9535	1.98	0.9761	2.56	0.9948	4.60	1.0000
1.69	0.9545	1.99	0.9767	2.58	0.9951	4.80	1.0000

Irodalomjegyzék

- [1] *Denkinger Géza* Valószínűségszámítás / G. Denkinger // Nemzeti tankönyvkiadó, Budapest, 1997.
- [2] *Denkinger Géza* Valószínűségszámítási gyakorlatok / G. Denkinger // Nemzeti tankönyvkiadó, Budapest, 1997.
- [3] *Nagy Márta* Valószínűségszámítás / M. Nagy, J. Sztrik, L. Tar // Debreceni Egyetem Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen, 2003.
- [4] *Nagy-György Judit* Valószínűségszámítás / J. Nagy-György, É. Osztényiné Kraucz, L. Székely // Polygon, Szeged, 2007.
- [5] *Solt György* Valószínűségszámítás / Gy. Solt // Műszaki könyvkiadó, Budapest, 2004.
- [6] *Szabó Ilona* Valószínűségszámítás példatár / I. Szabó // Bonex Press Bt., Székesfehérvár, 2006.
- [7] *Vetier András* Valószínűségszámítás 1. rész / A. Veiter // Typotex., 2021.
- [8] Валєєв К. Г. Збїрник задач з теорїї ймовїрностей та математичної статистики: Навч. посїб. / К. Г. Валєєв, // КНЕУ, Київ, 2006.
- [9] Карташов М. В. Теорїя ймовїрностей та математична статистика / М. В. Карташов, // ТВиМС, Київ, 2004.
- [10] Слюсарчук П. В. Теорїя ймовїрностей та математична статистика / П. В. Слюсарчук, // Карапати, Ужгород, 2005.

Диференціальні рівняння методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Теорії ймовірностей та математичної статистика» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання, освітня програма: «Середня освіта (Інформатика)» галузь знань: «01 Освіта/Педагогіка», спеціальність (спеціалізація): «014 Середня освіта (014.09 Інформатика)»/ Розробник: Кучінка К. – Берегове: ЗУІ ім. Ф.Ракоці II, 2024. 122 с. (угорською мовою).

Навчально-методичне видання розроблене на основі Освітньої програми підготовки бакалаврів з галузі знань «01 Освіта/Педагогіка» за напрямом «014 Середня освіта (Інформатика)», та діючого законодавства з метою забезпечення здобувачів освіти денної та заочної форм навчання Закарпатського угорського інституту ім. Ф.Ракоці II методичними вказівками до вивчення дисципліни «Теорії ймовірностей та математичної статистика». У методичних вказівках розкрито зміст, структуру, програму навчальної дисципліни та наведено завдання для практичних занять.

Теорія ймовірностей та математична статистика

Методичні вказівки до практичних занять

2024 р.

Затверджено до використання у навчальному процесі на засіданні кафедри математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II (протокол № 1 від «13» серпня 2024 року)

Розглянуто та рекомендовано Навчально-методичною радою Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II (протокол №22 від «26» серпня 2024 року)

Рекомендовано до видання в електронній формі (PDF) рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II (протокол 7 від « 27» серпня 2024 року)

Підготовлено до видання в електронній формі (PDF) кафедрою математики та інформатики спільно з Видавничим відділом Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Розробники методичних вказівок:

Рецензенти:

Ганна Сливка-Тилищак – завідувач кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу УжНУ, доктор фізико-математичних наук, професор (м. Ужгород)

Мирослав СТОЙКА – доцент кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Відповідальні за випуск:

Каталін КУЧИНКА – завідувач кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II, доцент, кандидат фізико-математичних наук

Олександр ДОБОШ – начальник Видавничого відділу ЗУІ ім. Ф.Ракоці II

За зміст методичних вказівок відповідальність несуть розробники.

Видавництво: Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II (адреса: пл. Кошута 6, м. Берегове, 90202. Електронна пошта: foiskola@kmf.uz.ua) *Статут «Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II» (Затверджено протоколом загальних зборів Благодійного фонду За ЗУІ, протокол №1 від 09.12.2019р., прийнято Загальними зборами ЗУІ ім. Ф.Ракоці II, протокол №2 від 11.11.2019р., зареєстровано Центром надання адміністративних послуг Берегівської міської ради, 12.12.2019р.)*

Шрифт «Times New Roman». Розмір сторінок методичних вказівок: А4 (210x297мм).