

**Кафедра математики та інформатики**  
**Matematika és Informatika Tanszék**

**«АЛГЕБРА ТА ГЕМЕТРІЯ»**  
**(МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ)**

(для студентів 1-го курсу спеціальності А 4.09 Середня освіта (Інформатика))

**ALGEBRA ÉS MÉRTAN**

**(Módszertani utmutató dolgozati munkákhoz)**

*Перший (бакалаврський) / Alapképzés (BA)*  
(ступінь вищої освіти / a felsőoktatás szintje)

*A Osztás / A Oktatás*  
(галузь знань / képzési ág)

*"Інформатика"*  
*"Informatika"*  
(освітня програма / képzési program)



Берегове / Beregszász  
2025 р. / 2025

Посібник з алгебри та геометрії для інформатиків призначений для студентів I курсу Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці спеціальності А 4.09 Середня освіта (Інформатика) заочної форми навчання з метою організації контрольної роботи з курсу "Алгебра та геометрія".

Посібник умовно поділений на дві частини: перший та другий семестр навчання, кожен з яких, містить приклад розв'язаного варіанту 10 варіантів контрольних робіт з курсу "Алгебра та геометрія".

Матеріал призначений для використання як навчально-методичний посібник з дисципліни "Алгебра та геометрія".

Затверджено до використання у навчальному процесі  
на засіданні кафедри математики та інформатики  
(протокол № 10 від «23» червня 2025 року)

Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості вищої освіти  
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II  
(протокол №7 від 26 серпня 2025 року)

Рекомендовано до видання у електронній формі (PDF)  
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II  
(протокол №8 від 28 серпня 2025 року)

Підготовлено до видання у електронній формі (PDF) кафедрою математики та інформатики з  
Видавничим відділом Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

**Укладач:**

СТОЙКА МИРОСЛАВ ВІКТОРОВИЧ – доцент кафедри математики та інформатики  
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

**Рецензенти:**

БОРТОШ МАРІЯ ЮЛІЇВНА – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри  
та диференціальних рівнянь ДВНЗ «УжНУ»;

МЕСАРОШ ЛІВІА ВАСИЛІВНА – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри  
математики та інформатики ЗУІ.

Відповідальний за випуск:

Олександр ДОБОШ – начальник Видавничого відділу ЗУІ ім. Ф.Ракоці II

За зміст посібника відповідальність несуть розробники.

**Видавництво:** Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II (адреса: пл.  
Кошута 6, м. Берегове, 90202. Електронна пошта: [foiskola@kmf.uz.ua](mailto:foiskola@kmf.uz.ua))

© Мирослав Стойка, 2025

© Кафедра математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II, 2025

Az Algebra és mértan a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola, I. éves, informatika szakos, levelezős hallgatóinak készült, az Algebra és mértan c. tantárgy dolgozati munkákhoz.

Ez a jegyzet elsősorban informatika szakos hallgatók számára készült, de hasznos lehet mindazok számára, akik bármely más szakon tanulnak matematikát.

A jegyzet két részre van osztva: első és második félévekre. A jegyzet dolgozatok 10 változatát tartalmazza minden félévből és egy megoldott példadolgozatot. .

Az oktatási folyamatban történő felhasználását jóváhagyta

a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Matematika és Informatika Tanszéke

(2025. június 23, 10. számú jegyzőkönyv).

Megjelentetésre javasolta a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Minőségbiztosítási Tanácsa

(2025. augusztus 26, 7. számú jegyzőkönyv).

Elektronikus formában (PDF fájlformátumban) történő kiadásra javasolta

a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Tudományos Tanácsa

(2025. augusztus 28, 8. számú jegyzőkönyv).

#### **Szerkesztő:**

SZTOJKA MIROSLÁV – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének docense

#### **Szakmai lektorok:**

BARTOS MÁRIA – fizika és matematika tudományok kandidátusa, docens, az Ungvári Nemzeti Egyetem Algebra és Diferenciál Egyenletek Tanszékének docense;

MÉSZÁROS LÍVIA – fizika és matematika tudományok kandidátusa, II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének docense.

#### **A kiadásért felel:**

DOBOS Sándor – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Kiadói Részlegének vezetője

A tartalomért kizárólag a jegyzet szerkesztője felel.

**Kiadó:** a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola (cím: 90 202, Beregszász, Kossuth tér 6. E-mail: [foiskola@kmf.uz.ua](mailto:foiskola@kmf.uz.ua))

© Sztojka Mirosláv, 2025

© A II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola  
Matematika és Informatika Tanszéke, 2025

# Tartalomjegyzék

## I. Első félév. Lineáris algebra.

|                                        |          |
|----------------------------------------|----------|
| <b>Példadolgozat megoldással .....</b> | <b>5</b> |
| 1. Változat.....                       | 34       |
| 2. Változat.....                       | 38       |
| 3. Változat.....                       | 42       |
| 4. Változat.....                       | 46       |
| 5. Változat.....                       | 50       |
| 6. Változat.....                       | 55       |
| 7. Változat.....                       | 59       |
| 8. Változat.....                       | 63       |
| 9. Változat.....                       | 67       |
| 10. Változat.....                      | 71       |

## II. Második félév. Geometria

|                                        |           |
|----------------------------------------|-----------|
| <b>Példadolgozat megoldással .....</b> | <b>75</b> |
| 1. Változat.....                       | 80        |
| 2. Változat.....                       | 81        |
| 3. Változat.....                       | 82        |
| 4. Változat.....                       | 83        |
| 5. Változat.....                       | 84        |
| 6. Változat.....                       | 86        |
| 7. Változat.....                       | 88        |
| 8. Változat.....                       | 89        |
| 9. Változat.....                       | 90        |
| 10. Változat.....                      | 91        |
| <b>Irodalomjegyzék .....</b>           | <b>92</b> |

## I. Első félév. Lineáris algebra

### Példadolgozat megoldással

1. Oldja meg a  $z^2 - (2 + i)z - 1 + 7i = 0$  egyenletet!

**Megoldás.** A megadott egyenlet feltételének bal oldala egy  $z$  ismeretlentől vett komplex együtthatójú négyzetes polinom. Ezért az adott egyenlet megoldását hasonlóképpen fogjuk keresni, mint a valós együtthatójú másodfokú egyenlet esetében.

Először kiszámoljuk a négyzetes polinom diszkriminánsát

$$D = (2 + i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1 + 7i) = 7 - 24i.$$

Továbbá, megkeressük a  $D$  diszkrimináns négyzetgyökeit. Legyen  $x + iy$  – bármelyik ezen gyökök közül, algebrai alakban felírva. Akkor  $(x + iy)^2 = D$ . Ahonnan  $(x^2 - y^2) + 2xyi = 7 - 24i$ . Tehát

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 7, \\ 2xy = -24. \end{cases} \quad (1)$$

Az (1) rendszer második egyenletéből következik, hogy  $y \neq 0$ , ezért  $x = -\frac{12}{y}$ . Behelyettesítve a kapott értéket az  $x$  ismeretlen helyébe a következőt kapjuk:  $\frac{144}{y^2} - y^2 = 7$ . Innen  $y^4 + 7y^2 - 144 = 0$ . Viéta-tétel alapján  $y^2 = 9$  vagy  $y^2 = -16$ . Mivel  $y$  – valós szám, ezért  $y^2 = 9$ , vagyis  $y = 3$  vagy  $y = -3$ . Az  $y = 3$  esetben azt kapjuk, hogy  $x = -4$ . Ha  $y = -3$ , akkor  $x = 4$ . Ezek szerint  $\sqrt{D} = \{4 - 3i, -4 + 3i\}$ .

Tehát a feladatban megadott másodfokú egyenlet megoldásai a következők:

$$z_1 = \frac{(2 + i) + (4 - 3i)}{2} = 3 - i, \quad z_2 = \frac{(2 + i) + (-4 + 3i)}{2} = -1 + 2i.$$

2. Határozza meg a  $-1 + i$  komplex szám trigonometrikus alakját!

**Megoldás.** Előbb kiszámoljuk a  $-1 + i$  szám abszolút értékét:

$$|-1 + i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Továbbá, ha  $\varphi = \arg(-1 + i)$ , akkor  $\cos \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Innen  $\varphi = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ , ahol  $k \in \mathbb{Z}$ .

Tehát,  $\sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$  lesz a  $-1 + i$  szám trigonometrikus alakja.

3. Oldja meg Gauss-módszerével az alábbi racionális együtthatójú lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4! \end{cases} \quad (2)$$

**Megoldás.** Felírjuk a (2)-es rendszer kibővített mátrixát, amelyben az egyszerűség kedvéért a szabad tagok oszlopát elválasztjuk egy függőleges vonallal:

$$A = \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array} \right).$$

Az előző példafeladattól eltérően most az első oszlop egyetlen eleme sem osztja ezen oszlop többi elemét. Ezért, hogy elkerüljük a tört (nem egész) együtthatókat először is elvégezzük a következő elemi átalakítást: az  $A$  mátrix első sorához hozzáadjuk a második  $-1$ -szeresét. Így azt kapjuk, hogy:

$$A \sim B = \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array} \right).$$

Ez után folyamatosan hozzáadjuk a  $B$  mátrix második, harmadik és negyedik sorához megfelelően annak első sorának három-, öt- és kétszeresét. Innen azt kapjuk, hogy

$$B \sim C = \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & -7 & 9 & -1 \\ 0 & 16 & -16 & 22 & -6 \\ 0 & 5 & -5 & 5 & 2 \end{array} \right).$$

Ezek után hozzáadjuk a  $C$  mátrix harmadik sorához annak negyedik sorának  $-3$ -szorosát. Ezen kívül még felcseréljük a második és harmadik sorokat. Ebből kapjuk, hogy:

$$C \sim D = \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -12 \\ 0 & 7 & -7 & 9 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 5 & 2 \end{array} \right).$$

Ezek után folyamatosan hozzáadjuk a  $D$  mátrix harmadik és negyedik sorához megfelelően annak második sorának  $-7$ -szeresét és  $-5$ -szörösét. Innen azt kapjuk, hogy

$$D \sim F = \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -40 & 83 \\ 0 & 0 & 0 & -30 & 62 \end{array} \right).$$

Végül az  $F$  mátrix negyedik sorához hozzáadjuk annak harmadik sorának  $-\frac{30}{40}$ -szeresét. Innen kapjuk, hogy:

$$F \sim G = \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -40 & 83 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{array} \right).$$

A kapott  $G$  mátrix lesz a következő egyenletrendszer kibővített mátrixa

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -1, \\ x_2 - x_3 + 7x_4 = -12, \\ -40x_4 = 83, \\ 0 = -\frac{1}{4}, \end{cases}$$

ahol az utolsó egyenlet baloldala egyenlő nullával viszont a jobboldala nem egyenlő nullával. Az ilyen rendszernek nincs megoldása, vagyis ellentmondó.

4. Keresse meg az  $x$  permutációt, amely kielégíti az alábbi egyenletet:

$$\alpha x \beta = \gamma, \quad (3)$$

ahol

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Megoldás.** Legyen  $x$  – olyan permutáció, amely kielégíti a (3)-es egyenletet. Tudjuk, hogy az  $\alpha$  és  $\beta$  permutációknak léteznek inverz permutációi, megfelelően  $\alpha^{-1}$  és  $\beta^{-1}$ . Akkor, megszorozva baloldallal a (3)-es egyenletet  $\alpha^{-1}$ -re, aztán pedig jobboldallal  $\beta^{-1}$ -re, azt kapjuk, hogy  $x = \alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}$ . Fordítva, nyilvánvaló, hogy az  $x = \alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}$  egyenlet kielégíti a (3)-es egyenletet. Ezért

$$x = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Válasszuk ki az  $i$  és  $k$  értékeit úgy, hogy az  $a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{54}$  szorzat pozitív előjellel kerüljön bele egy ötödrendű determinánsba!

**Megoldás.** Ahhoz, hogy az adott szorzat bekerüljön a determinánsba szükséges, hogy  $(i, k) = (1, 4)$  vagy  $(i, k) = (4, 1)$ . Felírjuk a szorzandók indexeiből felépített permutációt az első és második esetben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Mivel az inverziók száma az első esetben páros, megfelelően  $2 + 2 = 4$ , a második esetben pedig páratlan, megfelelően  $2 + 5 = 7$ . Ebből kifolyólag  $(i, k) = (1, 4)$  és a determináns meghatározása alapján, az  $a_{11}a_{32}a_{44}a_{25}a_{54}$  szorzat pozitív előjellel kerül be az ötöd rendű determinánsba.

6. Laplace tételének felhasználásával számítsa ki az alábbi determinánst:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}!$$

**Megoldás.** Rögzítjük a  $\Delta$  determináns második és ötödik sorait. Megvizsgáljuk az

$$M_1 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$$

aldeterminánsokat, amelyek ezekben a sorokban helyezkednek el. Az összes többi másodrendű alldetermináns ezekben a sorokban egyenlő nullával, mivel nullás oszlopot tartalmaznak.

Kiszámítjuk az  $M_1, M_2, M_3$  alldeterminánsok algebrai komplementereit:

$$(-1)^{s_{M_1} M'_1} = (-1)^{2+5+1+2} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 49,$$

$$(-1)^{s_{M_2} M'_2} = (-1)^{2+5+1+4} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -100,$$

$$(-1)^{s_{M_3} M'_3} = (-1)^{2+5+2+4} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

Végül

$$\Delta = \sum_{k=1}^3 M_k \cdot (-1)^{s_{M_k} M'_k} = 2 \cdot 49 + 1 \cdot (-100) + (-2) \cdot 1 = -4.$$

7. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert a Cramer-szabály szerint:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 7, \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -2! \end{cases}$$

**Megoldás.** Kiszámoljuk az adott egyenletrendszer determinánsát:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & -1 \\ 6 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -47.$$

Amennyiben az egyenletrendszer determinánsa nem egyenlő nullával, akkor a Cramer-szabály szerint annak egyetlen megoldása van. Megoldjuk ezen szabály segítségével. Ehhez kiszámítjuk az alábbi determinánsokat:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 4 & 1 \\ 7 & 2 & 5 & -1 \\ 11 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -94, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 5 & -1 \\ 6 & 11 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -47,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & -1 \\ 6 & 2 & 11 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 5 & 7 \\ 6 & 2 & -1 & 11 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 141.$$

Így az

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 0, \quad x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = -3$$

lesz az adott egyenletrendszer megoldása.

**8.** Keresse meg az alábbi mátrix inverzét

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}!$$

**Megoldás.** Először kiszámoljuk az  $A$  mátrix determinánsát:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Így az  $A$  mátrix nem elfajuló, tehát létezik inverz mátrixa. Megkeressük azt. Ehhez kiszámítjuk az  $A$  mátrix  $a_{ij}$  elemeinek  $A_{ij}$  algebrai komplementereit, melyek az  $i$ -edik sor és  $j$ -edik oszlop metszetén találhatók ( $i, j = 1, 2, 3$ ):

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, & A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \\ A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1, & A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4, \\ A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5, & A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6, \\ A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3, & A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3, \\ A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4. \end{aligned}$$

Akkor

$$A^{-1} = |A|^{-1} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

**9.** Határozza meg, hogy lineárisan összefüggő-e az alábbi vektorrendszer:

$$a_1 = (2, -3, 1), \quad a_2 = (3, -1, 5), \quad a_3 = (1, -4, 3)!$$

**Megoldás.** Legyenek  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  – tetszőleges valós számok. Megvizsgáljuk a következő lineáris kombinációt:

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \gamma_3 a_3 = (2\gamma_1 + 3\gamma_2 + \gamma_3, -3\gamma_1 - \gamma_2 - 4\gamma_3, \gamma_1 + 5\gamma_2 + 3\gamma_3).$$

Ez a lineáris kombináció akkor és csak akkor lesz egyenlő nullás vektorral, ha igazak az alábbi egyenlőségek:

$$2\gamma_1 + 3\gamma_2 + \gamma_3 = 0,$$

$$-3\gamma_1 - \gamma_2 - 4\gamma_3 = 0,$$

$$\gamma_1 + 5\gamma_2 + 3\gamma_3 = 0,$$

vagyis az  $a_1, a_2, a_3$  vektorrendszer akkor és csak akkor lesz lineárisan összefüggő, ha megfelelően az  $a_1, a_2, a_3$  vektorokkal egyenlő oszlopokat tartalmazó mátrixszal rendelkező homogén lineáris egyenletrendszernek nem csak nullás megoldása van. Megoldjuk ezt az egyenletrendszert:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -4 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 0 \\ 0 & 14 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right).$$

Tehát a rendszernek csak nullás megoldása van, ezért a feltételben megadott  $a_1, a_2, a_3$  vektorrendszer lineárisan független.

**10.** Határozza meg az alábbi mátrix rangját

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}!$$

**Megoldás.** A mátrix bal felső sarkában lévő másodrendű aldetermináns nullával egyenlő. Azonban az  $A$  mátrix tartalmaz nullától eltérő másodrendű aldeterminánsokat, például

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

A harmadrendű

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

aldetermináns, amely a  $\delta_2$  beszegési aldeterminánása, szintén nem egyenlő nullával (győződjene meg arról, hogy  $\delta_3 = 1$ ). Azonban mind a két negyedrendű aldetermináns, amelyek a  $\delta_3$  beszegési aldeterminánsai, egyenlő nullával:

$$\delta'_4 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad \delta''_4 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Tehát az  $A$  mátrix rangja egyenlő hárommal.

**11.** Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0! \end{cases}$$

**Megoldás.** Megmutatható, hogy a lineáris egyenletrendszer megoldható, amennyiben a mátrixának és bővített mátrixának rangja egyenlő nullával. Mátrixának bal felső sarkában található másodrendű

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

aldetermináns nullától eltérő. Ezért azt a rendszert fogjuk megoldani, amely a feltételben adott rendszer első két  $x_1$  és  $x_2$  ismeretlenektől vett egyenletéből tevődik össze. A többi  $x_3, x_4, x_5$  ismeretleneket szabad ismeretlenként kezeljük és átvisszük ezen egyenletek jobb oldalára:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + 2x_3 + x_4 - x_5, \\ 3x_1 - x_2 = 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5. \end{cases}$$

A Cramer-szabály szerint megkeressük ennek a rendszernek a megoldását

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 & 1 \\ 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - x_3 + 3x_4 + 4x_5,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 \\ 3 & 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 \end{vmatrix} = 1 - 7x_3 - 7x_4;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{M} = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 - x_5,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{M} = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4.$$

Így a feltételben megadott lineáris egyenletrendszer általános megoldása:

$$\left(\frac{5}{4} + \frac{1}{4}\alpha - \frac{3}{4}\beta - \delta, -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}\alpha + \frac{7}{4}\beta, \alpha, \beta, \delta\right),$$

ahol  $\alpha, \beta, \delta$  tetszőleges valós számok.

**12.** Keresse meg az egyenletrendszer megoldásainak fundamentális rendszerét és általános megoldását

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0! \end{cases} \quad (4)$$

**Megoldás.** Először kiszámoljuk az (4) rendszer

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

mátrixának rangját. Az  $A$  mátrix bal felső sarkában található

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

aldetermináns nullától különböző. Kiszámítjuk az  $A$  mátrix  $M$  aldeterminánsnak megfelelő összes harmadrendű beszegési aldeterminánsait. Emellett figyelembe vesszük azt is, hogy az  $A$  mátrix harmadik és negyedik oszlopa megfelelően arányosak az első és második oszlopokkal. Ezért azok az aldeterminánsok, amelyek a harmadik és negyedik oszlopok által képződnek, nullával egyenlőek. Az alábbi két aldetermináns kiszámítása marad fent:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ezek szerint  $\text{rank } A = 2$ . Számításba véve, hogy a rangot meghatározó  $M$  aldetermináns (bázis aldetermináns) az  $A$  mátrix bal felső sarkában található, az (4) rendszerben az első két egyenletet hagyjuk meg, a bal oldalukon pedig – csak az első két ismeretlen fog szerepelni (*kötött* ismeretlenek).

A másik három  $x_3, x_4, x_5$  ismeretlen *szabadoknak* nyilvánítjuk és az egyenlet jobb oldalára visszük át

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 + x_4 + 2x_5, \\ x_2 = x_4 + x_5. \end{cases} \quad (5)$$

Táblázatot szerkesztünk az  $x_1, \dots, x_5$  ismeretlenek számára, melyben elkülönítjük a szabad és a kötött ismeretleneket, és a szabad ismeretleneknek a táblázatban feltüntetett értékeket adjuk:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|
|       |       | 1     | 0     | 0     |
|       |       | 0     | 1     | 0     |
|       |       | 0     | 0     | 1     |

1. táblázat

A szabad ismeretlenek értékeinek e három készletének mindegyikére vonatkozóan megoldjuk az (5) rendszert és megtaláljuk az  $x_1, x_2$  kötött ismeretlenek megfelelő értékeit:

1) az első  $x_3 = 1, x_4 = x_5 = 0$  készletre az (5) egyenletrendszerből azt kapjuk, hogy  $x_2 = 0$ ,  $x_1 = 1 - x_2 = 1$ ;

2) a második  $x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$  készletre az (5) egyenletrendszerből azt kapjuk, hogy  $x_2 = 1$ ,  $x_1 = 1 - x_2 = 0$ ;

3) a harmadik  $x_3 = x_4 = 0, x_5 = 1$  készletre az (5) egyenletrendszerből azt kapjuk, hogy  $x_2 = 1$ ,  $x_1 = 2 - x_2 = 1$ .

Így kitölthetjük a szabad helyeket az 1. táblázatban és egy új táblázatot kapunk:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1     | 0     | 1     | 0     | 0     |
| 0     | 1     | 0     | 1     | 0     |
| 1     | 1     | 0     | 0     | 1     |

2. táblázat

A 2. táblázat az (5) egyenletrendszer három  $a_1 = (1,0,1,0,0)$ ,  $a_2 = (0,1,0,1,0)$ ,  $a_3 = (1,1,0,0,1)$  megoldását adja meg és egyben az (1) homogén lineáris egyenletrendszer megoldásait is.

Ezek a megoldások az (1) egyenletrendszer fundamentális rendszerét alkotják. Ez abból következik, hogy az  $(1,0,0)$ ,  $(0,1,0)$ ,  $(0,0,1)$  vektorok lineárisan független vektorrendszert alkotnak.

Az (4) egyenletrendszer általános megoldása a fundamentális rendszerének tetszőleges lineáris kombinációja

$$\delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \delta_3 a_3 = (\delta_1 + \delta_3, \delta_2 + \delta_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3),$$

ahol  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  – tetszőleges valós számok.

**13.** Bizonyítsuk be, hogy az egész számok  $\mathbb{Z}$  halmaza az egész számok összeadására nézve csoportot alkot, a szorzásra nézve viszont nem lesz csoport. Az adott  $\mathbb{Z}$  halmazon hozzunk fel olyan példát binér műveletre, amelyre nem teljesül az asszociativitás tulajdonsága!

**Megoldás.** Nyilvánvaló, hogy az egész számok összeadása binér művelet lesz a  $\mathbb{Z}$  halmazon, amennyiben a meghatározás szerint az egész számok összege szintén egész szám. Továbbá ismeretes, hogy ez a művelet eleget tesz az asszociativitás tulajdonságának, vagyis  $(a + b) + c = a + (b + c)$  tetszőleges  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  elemekre. Az egész számok között található egy olyan 0 szám, amelyre  $a + 0 = 0 + a = a$  tetszőleges  $a \in \mathbb{Z}$  elemre. Végül tetszőleges  $a$  egész számra létezik ellentétes  $-a$  egész szám a következő tulajdonsággal:  $a + (-a) = (-a) + a = 0$ . Megjegyezhetjük, hogy az egész számok összeadására teljesül a kommutativitás tulajdonsága is, így a  $\mathbb{Z}$  halmaz Abel-csoportot alkot az összeadásra nézve.

Másik esetben, amikor a  $\mathbb{Z}$  halmazon a szorzás művelete van megadva, láthatjuk, hogy:

- 1) ez a művelet binér művelet, amennyiben  $ab \in \mathbb{Z}$  tetszőleges  $a, b \in \mathbb{Z}$  elemekre;
- 2)  $(ab)c = a(bc)$  tetszőleges  $a, b, c$  egész számokra;
- 3) az egész számok között található egy olyan 1 szám, hogy  $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$  tetszőleges  $a$  egész számra.

Azonban nem mindegyik  $a \in \mathbb{Z}$  elemre létezik inverz  $a^{-1} \in \mathbb{Z}$  elem. Például a 2 egész számra nem létezik olyan  $x$  egész szám, amelyre  $2x = 1$ . Így a  $\mathbb{Z}$  halmaz nem alkot csoportot az egész számok szorzására nézve.

Végül, megvizsgáljuk a következő binér műveletet a  $\mathbb{Z}$  halmazon:

$$m \circ n = -m + (-n) \quad (m, n \in \mathbb{Z}),$$

Ahol a  $+$  az egész számok összeadása,  $-a$  pedig az  $a$  egész szám ellentétes eleme (nyilvánvaló, hogy  $m \circ n \in \mathbb{Z}$  tetszőleges  $m, n \in \mathbb{Z}$  elemekre). Akkor

$$(1 \circ 2) \circ 3 = (-1 + (-2)) \circ 3 = -(-1 + (-2)) + (-3) = 0 \neq 4 = 1 \circ (2 \circ 3).$$

Az utolsó egyenlőségből következik, hogy a „ $\circ$ ” binér műveletre nem teljesül az asszociativitás tulajdonsága.

**14.** Keressük meg az  $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 + 7x^2 - 12x + 10$  és a  $g(x) = 3x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 2x - 2$  polinomok legnagyobb közös osztóját!

**Megoldás.** Az  $f(x)$  és  $g(x)$  polinomok legnagyobb közös osztóját Euklideszi algoritmusa alapján fogjuk keresni. Mivel a polinomok legnagyobb közös osztója egy nem nullás szorzó(tényező) pontosságával fejeződik ki, ezért, hogy elkerüljük a tört együtthatókat, megengedett, hogy szorozzuk az osztót és az osztandót egy bármilyen nem nulla számra. Ez a művelet nem csupán az osztási folyamat elején, de a folyamat menete során is elvégezhető.

1. lépés. Osztjuk a  $3f(x)$  polinomot a  $g(x)$ -re:

$$3x^5 - 6x^4 + 3x^3 + 21x^2 - 36x + 30 =$$

$$= x(3x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 2x - 2) + (-2x^3 + 19x^2 - 34x + 30).$$

Megkapjuk az  $r_1(x) = -2x^3 + 19x^2 - 34x + 30$  maradékot.

2. lépés. Osztjuk a  $2g(x)$  polinomot a  $-r_1(x)$ -re. Ezt a következő ábrát felhasználva végezzük el:

$$\begin{array}{r|l}
 6x^4 - 12x^3 + 10x^2 + 4x - 4 & 2x^3 - 19x^2 + 34x - 30 \\
 6x^4 - 57x^3 + 102x^2 - 90x & \hline
 (szorozzuk 2-re) \quad 45x^3 - 92x^2 + 94x - 4 & 3x + 45 \\
 90x^3 - 184x^2 + 188x - 8 & \\
 90x^3 - 855x^2 + 1530x - 1350 & \\
 (szorozzuk \frac{1}{671}-re) \quad 671x^2 - 1342x + 1342 & \\
 \hline
 x^2 - 2x + 2 & 
 \end{array}$$

**Megjegyzés.** Az  $r_2(x) = x^2 - 2x + 2$  polinom nem lesz a  $2g(x)$  polinom osztásának maradéka a  $-r_1(x)$ -re való osztásakor, viszont a  $(f(x), g(x)) = (-r_1(x), r_2(x))$ .

3. lépés. Osztjuk a  $-r_1(x)$  polinomot az  $r_2(x)$ -re:

$$2x^3 - 19x^2 + 34x - 30 = (2x - 15)(x^2 - 2x + 2).$$

Mivel a maradék az utolsó osztás során 0-val egyenlő, a feltételekben megadott  $f(x)$  és  $g(x)$  polinomok legnagyobb közös osztója az  $r_2(x) = x^2 - 2x + 2$  polinom lesz.

**15.** Osszuk el az  $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$  polinomot a  $g(x) = x - 1$  polinomra!

**Megoldás.** Mivel a  $g(x)$  — lineáris polinom 1-es főegyütthatóval, ezért az  $f(x)$  polinomot a  $g(x)$  polinomra Horner-elrendezéssel osztjuk. Szerkesztünk egy táblázatot, melynek első sorában az  $f(x)$  polinom együtthatói állnak kezdve a főegyütthatótól. A másodikban pedig a hányados és a maradék megfelelő együtthatói, amelyeket folyamatosan fogjuk kiszámítani, valamint a baloldalon elhelyezzük a  $g(x)$  gyökét, esetünkben az 1-et.

|   | 1 | -2                   | 4                      | -6                   | 8                      |
|---|---|----------------------|------------------------|----------------------|------------------------|
| 1 | 1 | $1 \cdot 1 - 2 = -1$ | $1 \cdot (-1) + 4 = 3$ | $1 \cdot 3 - 6 = -3$ | $1 \cdot (-3) + 8 = 5$ |

Így az  $x^3 - x^2 + 3x - 3$  — hányados, az 5 — pedig maradék az  $f(x)$  polinom  $g(x)$ -re való osztásakor.

**16.** Bizonyítsa be, hogy az  $a_1 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $a_2 = (1, 0, 1, 1)$ ,  $a_3 = (1, 1, 0, 1)$ ,  $a_4 = (1, 1, 1, 0)$  vektorrendszer az  $\mathbb{R}^4$  vektoriális tér bázisa lesz a valós számok  $\mathbb{R}$  teste fölött! Keresse meg az

$x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) \in \mathbb{R}^4$  vektor koordinátáinak képleteit ebben a bázisban! Milyenek lesznek a  $c = (-1, 0, -1, 0)$  vektor koordinátái az  $a_1, a_2, a_3, a_4$  bázisban?

**Megoldás.** Az  $a_1, a_2, a_3, a_4$  vektorrendszer a valós számok  $\mathbb{R}$  teste fölött az  $\mathbb{R}^4$  vektoriális tér bázisa lesz akkor és csak akkor, ha az ezen vektorok elemeiből álló  $\Delta$  determináns nem egyenlő 0-val. Kiszámoljuk ezt a determinánst.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Tehát az  $a_1, a_2, a_3, a_4$  vektorrendszer az  $\mathbb{R}^4$  tér bázisa.

Legyenek  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$  – az  $x$  vektor koordinátái az  $a_1, a_2, a_3, a_4$  bázisban. Vagyis  $x = \kappa_1 a_1 + \kappa_2 a_2 + \kappa_3 a_3 + \kappa_4 a_4$ . Akkor fennállnak az alábbi egyenlőségek:

$$\begin{cases} \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4 = \chi_1, \\ \kappa_1 + \kappa_3 + \kappa_4 = \chi_2, \\ \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_4 = \chi_3, \\ \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = \chi_4. \end{cases} \quad (6)$$

Ezáltal az  $x$  vektor koordinátáinak meghatározásához az  $a_1, a_2, a_3, a_4$  bázisban az (6)-es lineáris egyenletrendszert szükséges megoldani a  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$  ismeretlenekre vonatkozóan. Ezért elvégezzük az alábbi átalakításokat a kapott rendszer kibővített mátrixa fölött.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & \chi_1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \chi_2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \chi_3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \chi_4 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & \chi_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \chi_2 - \chi_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \chi_3 - \chi_1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \chi_4 - \chi_1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \chi_2 + \chi_3 + \chi_4 - 2\chi_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \chi_2 - \chi_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \chi_3 - \chi_1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \chi_4 - \chi_1 \end{array} \right).$$

Ebből következik, hogy  $\kappa_1 = -2\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4$ ,  $\kappa_2 = \chi_1 - \chi_2$ ,  $\kappa_3 = \chi_1 - \chi_3$ ,  $\kappa_4 = \chi_1 - \chi_4$ . A  $c = (-1, 0, -1, 0)$  vektor számára a következő koordináta értékeket kapjuk ebben a bázisban:  $\kappa_1 = 1$ ,  $\kappa_2 = -1$ ,  $\kappa_3 = 0$ ,  $\kappa_4 = -1$ , vagyis  $c = 1 \cdot a_1 - 1 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 - 1 \cdot a_4$ .

17. Bizonyítsa be, hogy az  $a_1 = (1, 1, 1)$ ,  $a_2 = (2, 1, 1)$ ,  $a_3 = (3, 2, 3)$  és a  $b_1 = (0, 1, 0)$ ,  $b_2 = (1, 1, 2)$ ,  $b_3 = (1, 2, 1)$  vektorrendszerek az  $\mathbb{R}^3$  vektoriális tér bázisai! Keresse meg az átmeneti mátrixot és a koordináták átalakításának képleteit az egyik bázisból való átmenet során a másikba! Ezután határozza meg a  $c = (1, 2, 3)$  vektor koordinátáit mindkét bázisban, és ellenőrizze le a kapott eredményt a koordináták átalakítási képleteinek segítségével!

**Megoldás.** Hasonlóan, mint az előző fejezetben tettük, kiszámoljuk a determinánst, amelyet megfelelően az  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  és a  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  vektorok komponensei alkotnak.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Amennyiben egyik determináns sem egyenlő 0-val, akkor az  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  és a  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  vektorrendszerek az  $\mathbb{R}^3$  tér bázisai lesznek.

Megkeressük az átmeneti mátrixot az első bázisból a másodikba. Ehhez az szükséges, hogy a második bázis vektorait felírjuk az első bázis vektorai által. Legyen  $\tau_{1j}$ ,  $\tau_{2j}$ ,  $\tau_{3j}$  – a  $b_j$  vektor koordinátái az  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  bázisban, ahol  $(j = 1, 2, 3)$ , akkor

$$\begin{aligned} b_1 &= \tau_{11}a_1 + \tau_{21}a_2 + \tau_{31}a_3, \\ b_2 &= \tau_{12}a_1 + \tau_{22}a_2 + \tau_{32}a_3, \\ b_3 &= \tau_{13}a_1 + \tau_{23}a_2 + \tau_{33}a_3. \end{aligned} \tag{7}$$

A (7)-es vektorok egyenlőségeitől áttérve a megfelelő komponensek egyenlőségeihez három lineáris egyenletrendszert kapunk

$$\begin{cases} \tau_{11} + 2\tau_{21} + 3\tau_{31} = 0, \\ \tau_{11} + \tau_{21} + 2\tau_{31} = 1, \\ \tau_{11} + \tau_{21} + 3\tau_{31} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \tau_{12} + 2\tau_{22} + 3\tau_{32} = 1, \\ \tau_{12} + \tau_{22} + 2\tau_{32} = 1, \\ \tau_{12} + \tau_{22} + 3\tau_{32} = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} \tau_{13} + 2\tau_{23} + 3\tau_{33} = 1, \\ \tau_{13} + \tau_{23} + 2\tau_{33} = 2, \\ \tau_{13} + \tau_{23} + 3\tau_{33} = 1. \end{cases}$$

Mint ahogy ezen egyenletrendszerek mátrixai páronként egyenlők, így ezeket a rendszereket egyidejűleg oldjuk meg elvégezve az alábbi átalakításokat a mátrix felett, amely  $a_1, a_2, a_3$  és  $b_1, b_2, b_3$  vektorok elemeiből áll.

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Tehát,

$$F = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

– az átmeneti mátrix az  $a_1, a_2, a_3$  bázisból a  $b_1, b_2, b_3$  bázisba. Legyen  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$  és  $\kappa'_1, \kappa'_2, \kappa'_3$  – az  $x \in \mathbb{R}^3$  vektor koordinátái megfelelően az  $a_1, a_2, a_3$  és a  $b_1, b_2, b_3$  bázisokban, vagyis

$$x = \kappa_1 a_1 + \kappa_2 a_2 + \kappa_3 a_3 = \kappa'_1 b_1 + \kappa'_2 b_2 + \kappa'_3 b_3.$$

Akkor

$$\begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa'_1 \\ \kappa'_2 \\ \kappa'_3 \end{pmatrix}.$$

Leellenőrizzük ezt az egyenlőséget a  $c = (1, 2, 3)$  vektor esetében. Előbb megkeressük a  $c$  vektor koordinátáit az  $a_1, a_2, a_3$  bázisban, azután pedig a  $b_1, b_2, b_3$  bázisban.

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Tehát  $\kappa_1 = 2$ ,  $\kappa_2 = -2$ ,  $\kappa_3 = 1$ .

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & | & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & | & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & | & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & -1 \end{pmatrix}.$$

Tehát  $\kappa'_1 = 2$ ,  $\kappa'_2 = 2$ ,  $\kappa'_3 = -1$ . Megkapjuk a következő egyenlőség bizonyosságát

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**18.** Keresse meg az  $L_1 + L_2$  összeg dimenzióját és bázisát, valamint az  $L_1 \cap L_2$  metszetet, ahol  $L_1$  és  $L_2$  az  $\mathbb{R}^5$  tér lineáris alterei és  $L_1$  az alábbi egyenletrendszer megoldásainak a tere:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0; \end{cases} \quad (8)$$

$L_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$  – az  $a_1 = (7, 2, -4, 1, 1)$ ,  $a_2 = (10, -1, 0, -2, -6)$  vektorrendszerből előállított lineáris burok!

**Megoldás.** Meghatározzuk az adott feltételnek megfelelő lineáris homogén egyenletrendszer megoldásainak fundamentális rendszerét

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & -7 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tehát  $b_1 = (-17, 4, 9, 1, 0)$  és  $b_2 = (0, -1, -1, 0, 1)$  – a megoldások fundamentális rendszere, és egyben az  $L_1$  altér bázisa.

Ha most meg akarjuk keresni az  $L_1 + L_2$  altér dimenzióját és bázisát, meghatározzuk a következő mátrix rangját

$$A = \begin{pmatrix} -17 & 4 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix},$$

amelynek sorai megfelelően egybeesnek a  $b_1$ ,  $b_2$  és  $a_1$ ,  $a_2$  vektorokkal. Amennyiben

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} = -27 \neq 0,$$

akkor  $2 \leq r(A) \leq 4$ . Kiszámítjuk az alábbi aldeterminánst:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 7 & 2 & -4 \\ 10 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 7 & 6 & -4 \\ 10 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}(-1) \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} = 67 \neq 0. \quad (9)$$

Tehát  $3 \leq r(A) \leq 4$ . Továbbá kiszámítjuk a negyedrendű aldeterminánsokat (beszegési aldeterminánsok), amelyek tartalmazzák a (9)-es aldeterminánst.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} -17 & 4 & 9 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 7 & 2 & -4 & 1 \\ 10 & -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -17 & 4 & 9 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 24 & -2 & -13 & 0 \\ -24 & 7 & 18 & 0 \end{vmatrix} = \\ & = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 24 & -2 & -13 \\ -24 & 7 & 18 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 24 & 11 & -13 \\ -24 & -11 & 18 \end{vmatrix} = 0; \\ & \begin{vmatrix} -17 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & -4 & 1 \\ 10 & -1 & 0 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -17 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -3 & 0 \\ 10 & -7 & -6 & 0 \end{vmatrix} = \\ & = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} -17 & 4 & 9 \\ 7 & 3 & -3 \\ 10 & -7 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -17 & 4 & 9 \\ -10 & 7 & 6 \\ 10 & -7 & -6 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Tehát  $r(A) = 3$ . Ezért az  $L_1 + L_2$  altér dimenziója 3, és a  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $a_1$  vektorok rendszere ezen altér bázisa.

Legyen  $c \in L_1 \cap L_2$ , akkor egyik oldalról léteznek olyan  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  valós számok, hogy

$$c = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = (7\alpha_1 + 10\alpha_2, 2\alpha_1 - \alpha_2, -4\alpha_1, \alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_1 - 6\alpha_2),$$

a másik oldalról pedig a  $c$  vektor komponensei kielégítik az (1)-es rendszert. Behelyettesítve a  $c$  vektor komponenseit ezen rendszer minden egyenletébe, megkapjuk az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0, \\ 10\alpha_1 - 10\alpha_2 = 0, \\ 10\alpha_1 - 10\alpha_2 = 0, \\ 11\alpha_1 - 11\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Innen az következik, hogy  $\alpha_1 = \alpha_2$ , vagyis  $c = \alpha_1(a_1 + a_2)$ . Ezért a  $c_0 = a_1 + a_2 = (17, 1, -4, -1, -5)$  vektor az  $L_1 \cap L_2$  metszet bázisa, ahol  $L_1$  és  $L_2$  az  $\mathbb{R}^5$  tér lineáris alterei.

**19.** A  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  leképezés minden  $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$  vektort  $\varphi(x) = (\chi_1 + \chi_2 + \chi_3, 2\chi_1 - \chi_3, 3\chi_2 - \chi_1)$  vektorba alakít át (képez). Bizonyítsa be, hogy a  $\varphi$  lineáris transzformáció lesz! Keresse meg a vektor képének koordinátáinak képletét az  $\mathbb{R}^3$  tér  $e_1, e_2, e_3$  kanonikus bázisában; az  $a = (1, 1, 1)$  és  $e_1, e_2, e_3$  vektorok képét és a  $\varphi$  transzformáció mátrixát ugyan ebben a bázisban!

**Megoldás.** Legyen  $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$ ,  $y = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  – az  $\mathbb{R}^3$  tér tetszőleges vektorai. Akkor

$$\begin{aligned} \varphi(x+y) &= \varphi[(\chi_1 + \gamma_1, \chi_2 + \gamma_2, \chi_3 + \gamma_3)] = \\ &= (\chi_1 + \gamma_1 + \chi_2 + \gamma_2 + \chi_3 + \gamma_3, 2(\chi_1 + \gamma_1) - (\chi_3 + \gamma_3), 3(\chi_2 + \gamma_2) - (\chi_1 + \gamma_1)) = \\ &= (\chi_1 + \chi_2 + \chi_3, 2\chi_1 - \chi_3, 3\chi_2 - \chi_1) + (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3, 2\gamma_1 - \gamma_3, 3\gamma_2 - \gamma_1) = \varphi(x) + \varphi(y), \\ \varphi(\lambda x) &= \varphi[(\lambda\chi_1, \lambda\chi_2, \lambda\chi_3)] = (\lambda\chi_1 + \lambda\chi_2 + \lambda\chi_3, 2(\lambda\chi_1) - \lambda\chi_3, 3(\lambda\chi_2) - \lambda\chi_1) = \\ &= \lambda(\chi_1 + \chi_2 + \chi_3, 2\chi_1 - \chi_3, 3\chi_2 - \chi_1) = \lambda\varphi(x), \end{aligned}$$

ahol  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Tehát  $\varphi$  – lineáris transzformáció.

Legyen  $\varphi(x) = \chi'_1 e_1 + \chi'_2 e_2 + \chi'_3 e_3$ , ahol  $\chi'_1, \chi'_2, \chi'_3 \in \mathbb{R}$ . Amennyiben  $\varphi(x) = (\chi_1 + \chi_2 + \chi_3, 2\chi_1 - \chi_3, 3\chi_2 - \chi_1)$  és a tetszőleges vektor koordinátái az  $e_1, e_2, e_3$  kanonikus bázisban megegyeznek a  $\varphi(x)$  elemeivel, akkor megkapjuk a vektor képének koordinátáinak képleteit az  $e_1, e_2, e_3$  bázisban

$$\begin{cases} \chi'_1 = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3, \\ \chi'_2 = 2\chi_1 - \chi_3, \\ \chi'_3 = -\chi_1 + 3\chi_2, \end{cases}$$

vagy mátrix alakban

$$\begin{pmatrix} \chi'_1 \\ \chi'_2 \\ \chi'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{pmatrix}.$$

Egyértelmű lesz, hogy

$$\varphi(a) = (3, 1, 2), \varphi(e_1) = (1, 2, -1), \varphi(e_2) = (1, 0, 3), \varphi(e_3) = (1, -1, 0).$$

Amennyiben

$$\varphi(e_1) = 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 - 1 \cdot e_3, \varphi(e_2) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3, \varphi(e_3) = 1 \cdot e_1 - 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3,$$

akkor az alábbi mátrix

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

a  $\varphi$  lineáris transzformáció mátrixa lesz az  $e_1, e_2, e_3$  bázisban.

**20.** Határozza meg az  $\mathbb{R}^3$  vektortér azon  $\varphi$  lineáris transzformációját, amely az  $a_1 = (1, 1, 1)$ ,  $a_2 = (1, 0, 0)$ ,  $a_3 = (2, 2, 1)$  bázis vektorokat megfelelően ezen tér  $b_1 = (0, 0, 0)$ ,  $b_2 = (1, 0, 0)$ ,  $b_3 = (1, 1, 0)$  vektoraiba alakítja át! Keresse meg a  $\varphi$  transzformáció mátrixát az  $a_1, a_2, a_3$  bázisban!

**Megoldás.** Legyen  $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$  – az  $\mathbb{R}^3$  vektortér tetszőleges vektora. Megvizsgáljuk a  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  leképezést, amely minden  $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$  vektornak megfeleltet egy  $\varphi(a) = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3$  vektort. Bebizonyítjuk a leképezés lineáriságát. Legyen  $b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3$  – úgyszintén az  $\mathbb{R}^3$  vektortér tetszőleges vektora. Akkor

$$\varphi(a+b) = \varphi[(\alpha_1 + \beta_1)a_1 + (\alpha_2 + \beta_2)a_2 + (\alpha_3 + \beta_3)a_3] =$$

$$= (\alpha_1 + \beta_1)b_1 + (\alpha_2 + \beta_2)b_2 + (\alpha_3 + \beta_3)b_3 =$$

$$= (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3) + (\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3) = \varphi(a) + \varphi(b),$$

$$\varphi(\lambda a) = \varphi[(\lambda \alpha_1)a_1 + (\lambda \alpha_2)a_2 + (\lambda \alpha_3)a_3] = (\lambda \alpha_1)b_1 + (\lambda \alpha_2)b_2 + (\lambda \alpha_3)b_3 =$$

$$= \lambda(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3) = \lambda \varphi(a) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Tehát  $\varphi$  – lineáris transzformáció. Nyilvánvaló, hogy  $\varphi(a_1) = b_1$ ,  $\varphi(a_2) = b_2$ ,  $\varphi(a_3) = b_3$ .

Megkeressük a  $\varphi$  transzformáció mátrixát az  $a_1, a_2, a_3$  bázisban. Ehhez kiszámítjuk a bázisvektorok képeinek koordinátáit ebben a bázisban. Legyen

$$\varphi(a_1) = b_1 = \tau_{11}a_1 + \tau_{21}a_2 + \tau_{31}a_3,$$

$$\varphi(a_2) = b_2 = \tau_{12}a_1 + \tau_{22}a_2 + \tau_{32}a_3, \quad (10)$$

$$\varphi(a_3) = b_3 = \tau_{13}a_1 + \tau_{23}a_2 + \tau_{33}a_3.$$

Az  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  vektorok komponenseiből felépítve egy mátrixot, és ezen mátrix sorai fölött elvégezve az elemi átalakításokat megkapjuk a  $\tau_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) koordináták értékeit, amelyek kielégítik a (10)-es egyenlőségeket.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tehát

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– a  $\varphi$  transzformáció mátrixa az  $a_1, a_2, a_3$  bázisban.

**21.** Legyen  $\varphi$  lineáris transzformációja az  $\mathbb{R}^3$  vektortérnek, amely az  $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$  vektort a  $\varphi(x) = (\chi_1 - \chi_2, \chi_2 - \chi_3, \chi_3 - \chi_1)$  vektorba alakítja át,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

– a  $\psi$  lineáris transzformáció mátrixa ugyan ezen tér  $a_1 = (1, -1, 1), a_2 = (2, -1, 1), a_3 = (3, -2, 3)$  bázisában. Keresse meg az  $\mathbb{R}^3$  tér kanonikus bázisában a  $\varphi, \psi, \varphi + \psi, \varphi - \psi, \varphi\psi, \psi\varphi$  lineáris transzformációk mátrixait!

**Megoldás.** Amennyiben

$$\varphi(e_1) = (1, 0, -1) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 - 1 \cdot e_3,$$

$$\varphi(e_2) = (-1, 1, 0) = -1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3,$$

$$\varphi(e_3) = (0, -1, 1) = 0 \cdot e_1 - 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3,$$

akkor

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– a  $\varphi$  transzformáció mátrixa a kanonikus bázisban.

Megkeressük az átmeneti mátrixot az  $a_1, a_2, a_3$  bázisból az  $e_1, e_2, e_3$  kanonikus bázisba.

Világos, hogy

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

– az átmeneti mátrix az  $e_1, e_2, e_3$  bázisból az  $a_1, a_2, a_3$  bázisba. Kiszámítjuk a  $T$  mátrixot, amely a  $T^{-1}$  mátrix inverze.

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Innen

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A  $\psi$  transzformáció  $A_\psi$  mátrixa a kanonikus bázisban egyenlő lesz

$$A_\psi = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -3 & -31 & -14 \\ 2 & 19 & 8 \\ -4 & -26 & -10 \end{pmatrix}.$$

Ezután megkeressük a  $\varphi + \psi$ ,  $\varphi - \psi$ ,  $\varphi\psi$ ,  $\psi\varphi$  transzformációknak megfelelő  $A_{\varphi+\psi}$ ,  $A_{\varphi-\psi}$ ,  $A_{\varphi\psi}$ ,  $A_{\psi\varphi}$  mátrixokat az  $e_1, e_2, e_3$  bázisban

$$A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi = \begin{pmatrix} -2 & -32 & -14 \\ 2 & 20 & 7 \\ -5 & -26 & -9 \end{pmatrix}, \quad A_{\varphi-\psi} = A_\varphi - A_\psi = \begin{pmatrix} 4 & 30 & 14 \\ -2 & -18 & -9 \\ 3 & 26 & 11 \end{pmatrix},$$

$$A_{\varphi\psi} = A_\varphi A_\psi = \begin{pmatrix} -5 & -50 & -22 \\ 6 & 45 & 18 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_{\psi\varphi} = A_\psi A_\varphi = \begin{pmatrix} 11 & -28 & 17 \\ -6 & 17 & -11 \\ 6 & -22 & 16 \end{pmatrix}.$$

22. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

– az  $\mathbb{R}^4$  vektortér  $\varphi$  lineáris transzformációjának mátrixa a  $c_1, c_2, c_3, c_4$  bázisban. Határozza meg az  $\text{Im}\varphi$  és a  $\text{Ker}\varphi$  alterek bázisát és dimenzióját! Győződjön meg arról, hogy  $\dim \text{Im}\varphi + \dim \text{Ker}\varphi = \dim \mathbb{R}^4$ !

**Megoldás.** Előbb a  $\varphi$  lineáris transzformáció  $\text{Im}\varphi$  képterének dimenzióját és bázisát keressük meg. Ehhez kiszámítjuk az  $A$  mátrix rangját.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \leq r(A) \leq 4;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 5 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 5 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Tehát  $r(A) = 2$ . Ezért  $\dim \text{Im}\varphi = 2$  és a  $\varphi(c_1), \varphi(c_2)$  vektorrendszer az  $\text{Im}\varphi$  képtér bázisa.

Most a  $\text{Ker}\varphi$  nulltér bázisát keressük meg. Legyen  $x = \chi_1 c_1 + \chi_2 c_2 + \chi_3 c_3 + \chi_4 c_4$  – a  $\varphi$  lineáris transzformáció  $\text{Ker}\varphi$  magjának tetszőleges eleme. Akkor ezen vektor  $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$  koordinátáira igaz az alábbi egyenlőség

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Megoldjuk a (11)-es lineáris homogén egyenletrendszert a  $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$  változókra. Amennyiben

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

– az  $A$  maximális rendű mátrixának aldeterminánsa nem egyenlő nullával (rangot meghatározó aldetermináns), akkor az (1)-es egyenletrendszer ekvivalens a következő egyenletrendszerrel:

$$\begin{cases} \chi_1 + 2\chi_2 = -3\chi_3 - 4\chi_4, \\ -2\chi_1 + \chi_2 = \chi_3 + 3\chi_4. \end{cases}$$

Innen

$$\begin{cases} \chi_1 = -\chi_3 - 2\chi_4, \\ \chi_2 = -\chi_3 - \chi_4. \end{cases}$$

Tehát a  $\text{Ker}\varphi$  bázisát az  $u_1 = -c_1 - c_2 + c_3$ ,  $u_2 = -2c_1 - c_2 + c_4$  elemek alkotják. Ezért  $\dim \text{Ker}\varphi = 2$  és az  $u_1, u_2$  vektorrendszer a  $\text{Ker}\varphi$  nulltér bázisa.

23. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

– az  $\mathbb{R}^4$  vektortér  $\varphi$  lineáris transzformáció mátrixa a kanonikus bázisban. Keresse meg a  $\varphi^2$ ,  $\varphi^3$ ,  $\varphi^4$  lineáris transzformációk mátrixait ebben a bázisban és győződjön meg arról, hogy  $f(\varphi) = 0$ , ahol  $f$  – a  $\varphi$  transzformáció karakterisztikus polinomja! Határozza meg a  $\varphi$  transzformáció összes sajátértékét és összes sajátvektorát!

**Megoldás.** Legyenek  $A_{\varphi^2}$ ,  $A_{\varphi^3}$ ,  $A_{\varphi^4}$  – megfelelően a  $\varphi^2$ ,  $\varphi^3$ ,  $\varphi^4$  transzformációk mátrixai a kanonikus bázisban. Akkor

$$A_{\varphi^2} = A^2 = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{\varphi^3} = A_{\varphi^2} A = 4 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{\varphi^4} = A_{\varphi^3} A = 16 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Megkeressük a  $\varphi$  transzformáció  $f(\lambda)$  karakterisztikus polinomját

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2-\lambda & 2-\lambda & 1-(1-\lambda)^2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & -2+\lambda \\ 0 & 0 & 2-\lambda & -2+\lambda \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(2-\lambda)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^3(\lambda+2).$$

Kiszámoljuk  $f(A)$ -t

$$(A-2E)^3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^3 = 16 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$(A+2E) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$f(A) = (A-2E)^3(A+2E) = 0.$$

Innen, valamint a transzformációk fölötti és azok mátrixai fölötti műveletek közötti kapcsolatából következik, hogy  $f(\varphi) = 0$ .

Nyilvánvaló hogy,  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = -2$  – a  $\varphi$  transzformáció sajátértékei. Megkeressük a sajátvektorokat, amelyek ezekhez a sajátértékekhez tartoznak. Előbb a  $\lambda_1 = 2$  esetet vizsgáljuk. Megoldjuk az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases} (1-2)x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + (1-2)x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + (1-2)x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + (1-2)x_4 = 0, \end{cases} \quad (12)$$

Könnyen észrevehető, hogy a (12)-es rendszer ekvivalens a következő egyenlettel:

$$-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Ezért az  $u_1 = (1, 1, 0, 0)$ ,  $u_2 = (1, 0, 1, 0)$ ,  $u_3 = (1, 0, 0, 1)$  vektorok a (12)-es rendszer megoldásainak fundamentális rendszerét alkotják. Tehát, ezen rendszer bármely nem nulla  $x$  megoldását fel lehet írni a következőképpen:

$$x = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3, \quad (13)$$

ahol  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  – valamilyen valós számok, amelyek egyszerre nem egyenlők nullával. Így a  $\varphi$  transzformáció sajátvektorai, amelyek a  $\lambda_1 = 2$  sajátértékhez tartoznak, a (13)-as alakban megadott vektorral fejeződnek ki.

Most megkeressük a  $\varphi$  transzformáció sajátvektorait, amelyek a  $\lambda_2 = -2$  sajátértéknek tartoznak meg. Ehhez megoldjuk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Elvégezzük a következő átalakításokat (14)-es rendszer mátrixának sorain

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & -8 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Innen az következik, hogy  $v = (-1, 1, 1, 1)$  – a (14)-es rendszer megoldásainak fundamentális rendszere. Így a (14)-as rendszer bármilyen nem nulla megoldása felírható a következőképpen:

$$x = \gamma(-1, 1, 1, 1) \quad (\gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0).$$

**24.** Az  $\mathbb{R}^4$  euklideszi tér  $L$  altere az

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0, \end{cases} \quad (15)$$

egyenletrendszer megoldásainak a tere. Keresse meg az  $L$  altér  $L^\perp$  ortogonális komplementerét az  $\mathbb{R}^4$  térben és a  $c = (-24, 20, 5, -1)$  vektor vetületét az  $L$  altérre és az  $L^\perp$  ortogonális komplementerére!

**Megoldás.** Az  $L$  homogén egyenletrendszer megoldásainak terének  $L^\perp$  ortogonális komplementere megegyezik azzal a burokkal, amely ezen rendszer mátrixának soraira van felépítve. Előbb megtaláljuk a (15)-ös rendszer mátrixának rangját

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Amennyiben

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

akkor  $r(A) = 2$  és az  $a_1 = (1, 2, -1, 1)$ ,  $a_2 = (2, 3, 4, -1)$  vektorrendszer az  $L^\perp$  tér bázisa.

Legyen  $b_1, b_2$  az  $L$  tér bázisa, vagyis a (15)-ös rendszer megoldásainak fundamentális rendszere. Akkor  $a_1, a_2, b_1, b_2$  – az  $\mathbb{R}^4$  tér bázisa és

$$c = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 \quad (16)$$

ahol  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ .

Legyen  $c', c''$  – a  $c$  vektor vetületei megfelelően az  $L, L^\perp$  alterekben. Akkor  $c = c' + c''$  és  $c' = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2$ ,  $c'' = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$ . Előbb kiszámítjuk az  $\alpha_1, \alpha_2$  együtthatókat. Ehhez skalárisan megszorozzuk a (16)-os egyenletet az  $a_1, a_2$  vektorokra. Megkapjuk a következő egyenletrendszert

$$\begin{cases} (a_1, c) = \alpha_1 (a_1, a_1) + \alpha_2 (a_1, a_2), \\ (a_2, c) = \alpha_1 (a_2, a_1) + \alpha_2 (a_2, a_2); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 = 7\alpha_1 + 3\alpha_2, \\ 33 = 3\alpha_1 + 30\alpha_2. \end{cases}$$

Innen  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ . Tehát  $c' = a_1 + a_2 = (3, 5, 3, 0)$  és  $c'' = c - c' = (-27, 15, 2, -1)$ .

**25.** Az  $\mathbb{R}^4$  euklideszi térben ortonormalizálja az alábbi vektorrendszert:

$$a_1 = (1, 2, 3, 4), \quad a_2 = (0, 5, 0, 5), \quad a_3 = (8, 10, -8, 14) !$$

**Megoldás.** Mint ismeretes, az ortogonalizáció eljárás csak a lineárisan független vektorrendszerekénél használható. Ezért előbb kiszámoljuk az alábbi mátrix rangját:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 8 & 10 & -8 & 14 \end{pmatrix}.$$

Könnyen kiszámítható, hogy az  $r(A) = 3$  és az  $a_1, a_2, a_3$  vektorok lineárisan független rendszert alkotnak.

A keresett ortogonális vektorrendszer első  $c_1$  vektorának értékéül az  $a_1$  vektort vesszük

$$c_1 = a_1 = (1, 2, 3, 4).$$

Ezután a  $c_2$  vektort keressük a  $c_1$  és  $a_2$  vektorok lineáris kombinációjaként

$$c_2 = \lambda_1^{(2)} c_1 + a_2.$$

Ahhoz, hogy a  $c_2$  vektor ortogonális legyen a  $c_1$  vektorhoz, teljesülnie kell az alábbi feltételnek:

$$(c_1, c_2) = (c_1, \lambda_1^{(2)} c_1 + a_2) = \lambda_1^{(2)} (c_1, c_1) + (c_1, a_2) = 0.$$

Innen

$$\lambda_1^{(2)} = -\frac{(c_1, a_2)}{(c_1, c_1)} = -\frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 5}{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} = -\frac{30}{30} = -1.$$

Tehát,  $c_2 = -c_1 + a_2 = (-1, 3, -3, 1)$ .

A  $c_3$  vektort keressük a  $c_1$ ,  $c_2$  és az  $a_3$  vektorok lineáris kombinációjaként

$$c_3 = \lambda_1^{(3)} c_1 + \lambda_2^{(3)} c_2 + a_3.$$

Ahhoz, hogy a  $c_3$  vektor ortogonális legyen a  $c_1$ ,  $c_2$  vektorokhoz, teljesülniük kell az alábbi feltételeknek:

$$(c_1, c_3) = (c_1, \lambda_1^{(3)} c_1 + \lambda_2^{(3)} c_2 + a_3) = \lambda_1^{(3)} (c_1, c_1) + \lambda_2^{(3)} (c_1, c_2) + (c_1, a_3) = 0,$$

$$(c_2, c_3) = (c_2, \lambda_1^{(3)} c_1 + \lambda_2^{(3)} c_2 + a_3) = \lambda_1^{(3)} (c_2, c_1) + \lambda_2^{(3)} (c_2, c_2) + (c_2, a_3) = 0.$$

Innen

$$\lambda_1^{(3)} = -\frac{(c_1, a_3)}{(c_1, c_1)} = -\frac{1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot (-8) + 4 \cdot 14}{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} = -\frac{60}{30} = -2,$$

$$\lambda_2^{(3)} = -\frac{(c_2, a_3)}{(c_2, c_2)} = -\frac{-1 \cdot 8 + 3 \cdot 10 + (-3) \cdot (-8) + 1 \cdot 14}{(-1)^2 + 3^2 + (-3)^2 + 1^2} = -\frac{60}{20} = -3.$$

Így

$$c_3 = -2c_1 - 3c_2 + a_3 = (9, -3, -5, 3).$$

Felépítettünk egy új párosával ortogonális nem nulla vektorokból álló rendszert

$$c_1 = (1, 2, 3, 4),$$

$$c_2 = (-1, 3, -3, 1),$$

$$c_3 = (9, -3, -5, 3).$$

Ahhoz, hogy a kapott rendszerből ortonormalizált rendszert kapjunk, a  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  vektorokat elosztjuk saját normájukra.

$$\|c_1\| = \sqrt{(c_1, c_1)} = \sqrt{30}, \quad \|c_2\| = 2\sqrt{5}, \quad \|c_3\| = 2\sqrt{31}.$$

Akkor

$$b_1 = \frac{c_1}{\|c_1\|} = \left( \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}, \frac{4}{\sqrt{30}} \right),$$

$$b_2 = \frac{c_2}{\|c_2\|} = \left( -\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{3}{2\sqrt{5}}, -\frac{3}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{5}} \right),$$

$$b_3 = \frac{c_3}{\|c_3\|} = \left( \frac{9}{2\sqrt{31}}, -\frac{3}{2\sqrt{31}}, -\frac{5}{2\sqrt{31}}, \frac{3}{2\sqrt{31}} \right)$$

– a keresett ortonormalizált vektorrendszer.

26. A  $C_{[0,1]}^2$  euklideszi térben, mely az összes olyan függvény tere, melyek négyzete integrálható, ortogonalizálja a  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = x$ ,  $p_3 = x^2$ ,  $p_4 = x^3$  polinomok rendszerét!

**Megoldás.** Ahogy az előző példában is, feltesszük, hogy

$$b_1 = p_1 = 1, \quad b_2 = \lambda_1^{(2)} b_1 + p_2.$$

$$\text{Megkeressük a } \lambda_1^{(2)} = -\frac{(p_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{\int_0^1 x dx}{\int_0^1 1 dx} = -\frac{\left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1}{1} = -\frac{1}{2}.$$

Ezért  $b_2 = -\frac{1}{2} + x$ . A  $b_3$  vektort a következő alakban fogjuk keresni:

$$b_3 = \lambda_1^{(3)} b_1 + \lambda_2^{(3)} b_2 + p_3.$$

Hasonlóan az előző példához a  $\lambda_1^{(3)}$ ,  $\lambda_2^{(3)}$  együtthatókat a következőképpen számítjuk ki:

$$\lambda_1^{(3)} = -\frac{(p_3, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{\int_0^1 x^2 dx}{1} = -\frac{\left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1}{1} = -\frac{1}{3}, \quad \lambda_2^{(3)} = -\frac{(p_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = -\frac{\int_0^1 x^2 \left(-\frac{1}{2} + x\right) dx}{\int_0^1 \left(-\frac{1}{2} + x\right)^2 dx} = -\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}} = -1.$$

Tehát

$$b_3 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - x + x^2 = \frac{1}{6} - x + x^2.$$

A  $b_4 = \lambda_1^{(4)} b_1 + \lambda_2^{(4)} b_2 + \lambda_3^{(4)} b_3 + p_4$  vektor  $\lambda_1^{(4)}$ ,  $\lambda_2^{(4)}$ ,  $\lambda_3^{(4)}$  együtthatóit az alábbi képletek segítségével számítjuk ki:

$$\lambda_1^{(4)} = -\frac{(p_4, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{\int_0^1 x^3 dx}{1} = -\frac{\left. \frac{x^4}{4} \right|_0^1}{1} = -\frac{1}{4}, \quad \lambda_2^{(4)} = -\frac{(p_4, b_2)}{(b_2, b_2)} = -\frac{\int_0^1 x^3 \left(-\frac{1}{2} + x\right) dx}{\int_0^1 \left(-\frac{1}{2} + x\right)^2 dx} = -\frac{\frac{3}{40}}{\frac{1}{12}} = -\frac{9}{10},$$

$$\lambda_3^{(4)} = -\frac{(p_4, b_3)}{(b_3, b_3)} = -\frac{\int_0^1 x^3 \left(\frac{1}{6} - x + x^2\right) dx}{\int_0^1 \left(\frac{1}{6} - x + x^2\right)^2 dx} = -\frac{\frac{1}{120}}{\frac{1}{180}} = -\frac{2}{3}.$$

Így

$$b_4 = -\frac{1}{20} + \frac{3}{5}x - \frac{3}{2}x^2 + x^3.$$

27. Keresse meg a valós számok teste felett az  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$  kvadratikus alak normálalakját valamint az ismeretlenek transzformációit, amelyek ehhez az alakhoz vezetnek az  $f$  alakot!

**Megoldás.** Előbb elvégezzük az ismeretlenek transzformációját, amely fordított az alábbi transzformációhoz:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3, \end{cases}$$

vagyis az alábbi transzformációt:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2, \\ x_2 = y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

az alábbi mátrixszal:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ami után azt kapjuk, hogy

$$f = y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2 + 2y_2^2 - y_3^2 + 2y_1y_2 - 2y_2^2 - 4y_2y_3 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - 4y_2y_3.$$

Feltéve, hogy

$$\begin{cases} z_1 = y_1, \\ z_2 = y_2 - 2y_3, \\ z_3 = y_3, \end{cases}$$

vagyis elvégezve az ismeretlenek lineáris transzformációit az alábbi mátrixszal:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

az  $f$  kvadratikus alakot a következő alakhoz hozzuk:

$$f = z_1^2 + z_2^2 + 4z_2z_3 + 4z_3^2 - z_3^2 - 4z_2z_3 - 8z_3^2 = z_1^2 + z_2^2 - 5z_3^2.$$

Végül, elvégezzük az alábbi transzformációt:

$$\begin{cases} z_1 = u_1, \\ z_2 = u_2, \\ z_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}u_3, \end{cases}$$

az alábbi mátrixszal:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Eredményül megkapjuk az  $f$  kvadratikus alak kanonikus alakját

$$f = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2.$$

A

$$\begin{aligned} Q = ABC &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 2\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mátrix az ismeretlenek lineáris transzformációjának mátrixa, ami az  $f$  kvadratikus alakot kanonikus alakba vezeti át.

**28.** A  $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  kvadratikus alak, amely az alábbi mátrixszal van megadva:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

pozitív definit, negatív definit vagy indefinit?

**Megoldás.** Kiszámítjuk a  $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  kvadratikus alak mátrixának sarokaldeterminánsait:

$$A_1 = |3| = 3 > 0, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 5 > 0,$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0,$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

$$A_5 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Amennyiben a  $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  kvadratikus alak összes sarok aldeterminánsa pozitív, úgy az egy pozitív definit kvadratikus alak.

## 1. Változat

1. Számítsa ki a kifejezés értékét  $\frac{(3+i)(4-3i)}{1+2i}$  !

2. Keresse meg a  $\sqrt{3} - i$  komplex szám trigonometrikus alakját!

3. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$$

4. Határozza meg a 7, 5, 6, 4, 1, 3, 2 rendezés paritását!

5. A determináns meghatározása alapján számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}!$$

6. Számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}!$$

7. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a Cramer-szabály szerint:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3! \end{cases}$$

8. Keresse meg az alábbi mátrixok inverzét:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}!$$

9. Keresse meg az alábbi vektorok  $3a_1 + 5a_2 - a_3$  lineáris kombinációját

$$a_1 = (4, 1, 3, -2), \quad a_2 = (1, 2, -3, 2), \quad a_3 = (16, 9, 1, -3)!$$

10. Számítsa ki az alábbi mátrix rangját a beszegési aldeterminánsok módszerével:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 11 \\ 3 & 3 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}!$$

11. Vizsgálja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert megoldhatóságára és keresse meg általános és egy konkrét megoldását:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2! \end{cases}$$

12. Keresse meg az egyenletrendszer fundamentális rendszerét és általános megoldását:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0! \end{cases}$$

13. Bizonyítsa be, hogy egy tetszőleges  $G$  csoportban egyetlen egységelem és egyetlen inverz elem létezik a  $G$  csoport tetszőleges elemére!

14. Ossza el az  $f(x)$  polinomot a  $g(x)$  polinomra, ha:

$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6, \quad g(x) = x^2 - 3x + 1!$$

15. A Horner-elrendezés algoritmusának segítségével számítsa ki az  $f(x)$  polinom  $f(c)$  értékét (amikor  $x = c$ ), ha:

$$f(x) = 5x^4 - 19x^3 - 7x^2 + 9x + 3, \quad c = 2!$$

16. Bizonyítsa be, hogy az  $a_1, a_2, a_3, a_4$  vektorrendszer az  $\mathbb{R}^4$  vektoriális tér bázisa lesz a valós számok  $\mathbb{R}$  teste fölött! Keresse meg az  $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) \in \mathbb{R}^4$  vektor koordinátáinak képleteit ebben a bázisban! Milyenek lesznek a  $c \in \mathbb{R}^4$  vektor koordinátái az  $a_1, a_2, a_3, a_4$  bázisban?

$$a_1 = (2, 1, 1, 3), a_2 = (3, 3, 1, 4), a_3 = (1, 4, 2, 4), a_4 = (4, 1, 2, 2), c = (14, 6, 9, 12).$$

17. Bizonyítsa be, hogy az  $a_1, a_2, a_3$  és a  $b_1, b_2, b_3$  vektorrendszerek az  $\mathbb{R}^3$  vektoriális tér bázisai! Keresse meg az átmeneti mátrixot és a koordináták átalakításának képleteit az egyik bázisból való átmenet során a másikba. Ezután határozza meg a  $c = (1, 2, 3)$  vektor koordinátáit mindkét bázisban, és ellenőrizze le a kapott eredményt a koordináták átalakítási képleteinek segítségével!

$$a_1 = (1, -1, 1), \quad a_2 = (2, -1, -1), \quad a_3 = (3, -2, 1).$$

$$b_1 = (-1, 1, 0), \quad b_2 = (2, -1, 1), \quad b_3 = (1, 0, 0)$$

18. Keresse meg az  $L_1 + L_2$  összeg dimenzióját és bázisát, valamint az  $\mathbb{R}^5$  tér  $L_1$  és  $L_2$  lineáris altereinek  $L_1 \cap L_2$  metszetét, ahol  $L_1$  – az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak tere,  $L_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$  – az  $a_1, a_2$  vektorrendszerből előállított lineáris burok!

$$\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ -5x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 6x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 12x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0; \end{cases} \quad \begin{aligned} a_1 &= (4, 3, 1, 2, -1), \\ a_2 &= (1, 7, -2, -1, -10). \end{aligned}$$

19. A  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  leképezés minden  $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$  vektort  $\varphi(x) \in \mathbb{R}^3$  vektorba alakít át (képez). Bizonyítsa be, hogy a  $\varphi$  lineáris transzformáció lesz! Keresse meg a vektor képének koordinátáinak képletét az  $\mathbb{R}^3$  tér  $e_1, e_2, e_3$  kanonikus bázisában; az  $a = (1, 1, 1)$  és  $e_1, e_2, e_3$  vektorok képét és a  $\varphi$  transzformáció mátrixát ugyan ebben a bázisban!

$$\varphi(x) = (3\chi_1 - \chi_2, \chi_1 + 2\chi_2 - \chi_3, \chi_3 - \chi_2).$$

20. Határozza meg az  $\mathbb{R}^3$  vektortér azon  $\varphi$  lineáris transzformációját, amely az  $a_1, a_2, a_3$  bázis vektorokat megfelelően ezen tér  $b_1, b_2, b_3$  vektoraiba alakítja át! Keresse meg a  $\varphi$  transzformáció mátrixát az  $a_1, a_2, a_3$  bázisban!

$$a_1 = (1, 3, -2), a_2 = (4, -2, 1), \quad a_3 = (-4, -1, 1).$$

$$b_1 = (-4, -1, 1), \quad b_2 = (7, -1, 0), \quad b_3 = (0, -1, 0).$$

21. Legyen  $\varphi$  lineáris transzformációja az  $\mathbb{R}^3$  vektortérnek, amely az  $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$  vektort a  $\varphi(x)$  vektorba alakítja át,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

– a  $\psi$  lineáris transzformáció mátrixa ugyan ezen tér  $a_1, a_2, a_3$  bázisában. Keresse meg az  $\mathbb{R}^3$  tér kanonikus bázisában a  $\varphi, \psi, \varphi + \psi, \varphi - \psi, \varphi\psi, \psi\varphi$  lineáris transzformációk mátrixait!

$$\varphi(x) = (2\chi_2 - 3\chi_3, \chi_1 + 2\chi_2 + 3\chi_3, \chi_3 - \chi_1);$$

$$a_1 = (1, 1, 2), a_2 = (1, 1, 1), a_3 = (1, -1, 2).$$

22. Legyen  $A$  – az  $\mathbb{R}^4$  vektortér  $\varphi$  lineáris transzformációjának mátrixa a  $c_1, c_2, c_3, c_4$  bázisban. Határozza meg az  $\text{Im}\varphi$  és a  $\text{Ker}\varphi$  alterek bázisát és dimenzióját! Győződjön meg arról, hogy  $\dim \text{Im}\varphi + \dim \text{Ker}\varphi = \dim \mathbb{R}^4$ !

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

23. Legyen  $A$  – az  $\mathbb{R}^4$  vektortér  $\varphi$  lineáris transzformáció mátrixa a kanonikus bázisban. Keresse meg a  $\varphi^2, \varphi^3, \varphi^4$  lineáris transzformációk mátrixait ebben a bázisban és győződjön meg arról, hogy  $f(\varphi) = 0$ , ahol  $f$  – a  $\varphi$  transzformáció karakterisztikus polinomja! Határozza meg a  $\varphi$  transzformáció összes sajátértékét és összes sajátvektorát!

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

24. Az  $\mathbb{R}^4$  euklideszi tér  $L$  altére az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak a tere. Keresse meg az  $L$  altér  $L^\perp$  ortogonális komplementerét az  $\mathbb{R}^4$  térben és a  $c$  vektor vetületét az  $L$  altérre és az ő  $L^\perp$  ortogonális komplementerére!

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, & c = (-5, 4, 6, -1). \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0; \end{cases}$$

25. Az  $\mathbb{R}^4$  euklideszi térben ortonormalizálja az  $a_1, a_2, a_3, a_4$  vektorrendszert!

$$a_1 = (1, 1, 1, 1), a_2 = (1, -1, 1, -1), a_3 = (0, 1, 1, 1), a_4 = (0, 0, 1, 1).$$

26. A  $C_{[\alpha, \beta]}^2$  euklideszi térben, mely az összes olyan függvény tere, melyek négyzete integrálható, ortogonalizálja a  $p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2, p_4 = x^3$  polinomok rendszerét (a  $C_{[\alpha, \beta]}^2$  tér két tetszőleges  $f$  és  $g$  függvényének skaláris szorzata a következő módon határozható meg:

$$(f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx \quad )!$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1.$$

27. Keresse meg megfelelően a valós és komplex számok teste felett az  $f(x_1, x_2, x_3)$  kvadratikus alak normálalakját valamint az ismeretlenek transzformációit, amelyek ehhez az alakhoz vezetnek az  $f$  alakot!

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3.$$

28. A  $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X^T A X$  kvadratikus alak, amely az  $A$  mátrixsal van megadva, pozitív definit, negatív definit vagy indefinit?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

## 2. Változat

1. Számítsa ki a kifejezés értékét  $\frac{(3-i)(1-4i)}{2-i}$ !

2. Keresse meg a  $\sqrt{5} - \sqrt{5}i$  komplex szám trigonometrikus alakját!

3. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval:

$$\begin{cases} -9x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7, \\ -4x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 7x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3! \end{cases}$$

4. Határozza meg a 1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8 rendezés paritását!

5. A determináns meghatározása alapján számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 2 & a \\ d & 0 & 0 & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \end{vmatrix}!$$

6. Számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}!$$

7. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a Cramer-szabály szerint:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37! \end{cases}$$

8. Keresse meg az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}!$$

9. Határozza meg az  $x$  és  $y$  vektorokat az alábbi egyenletből  $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4x = \vec{0}$ , ahol  $a_1 = (5, -8, -1, 2)$ ,  $a_2 = (2, -1, 4, -3)$ ,  $a_3 = (-3, 2, -5, 4)$ .

10. Számítsa ki az alábbi mátrix rangját a beszegési aldeterminánsok módszerével:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}!$$

11. Vizsgálja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert megoldhatóságára és keresse meg általános és egy konkrét megoldását:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1! \end{cases}$$

12. Keresse meg az egyenletrendszer fundamentális rendszerét és általános megoldását:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0; \end{cases}$$

13. Csoportot alkot-e a racionális számok halmaza az összeadás műveletét tekintve?

14. Ossza el az  $f(x)$  polinomot a  $g(x)$  polinomra, ha:

$$f(x) = 3x^5 + 2x^2 - 1, \quad g(x) = 3x^3 - 3x - 2!$$

15. A Horner-elrendezés algoritmusának segítségével számítsa ki az  $f(x)$  polinom  $f(c)$  értékét (amikor  $x = c$ ), ha:

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 5x^2 + x + 33, \quad c = -2!$$

16. Bizonyítsa be, hogy az  $a_1, a_2, a_3, a_4$  vektorrendszer az  $\mathbb{R}^4$  vektoriális tér bázisa lesz a valós számok  $\mathbb{R}$  teste fölött! Keresse meg az  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$  vektor koordinátáinak képleteit ebben a bázisban! Milyenek lesznek a  $c \in \mathbb{R}^4$  vektor koordinátái az  $a_1, a_2, a_3, a_4$  bázisban?

$$a_1 = (2, 1, 2, 2), a_2 = (2, 1, 1, 2), a_3 = (2, 2, 1, 1), a_4 = (1, 1, 1, 0), c = (1, -1, 1, -1).$$

17. Bizonyítsa be, hogy az  $a_1, a_2, a_3$  és a  $b_1, b_2, b_3$  vektorrendszerek az  $\mathbb{R}^3$  vektoriális tér bázisai! Keresse meg az átmeneti mátrixot és a koordináták átalakításának képleteit az egyik bázisból való átmenet során a másikba. Ezután határozza meg a  $c = (1, 2, 3)$  vektor koordinátáit mindkét bázisban, és ellenőrizze le a kapott eredményt a koordináták átalakítási képleteinek segítségével!

$$\begin{aligned} a_1 &= (3, 3, -2), & a_2 &= (1, -1, 3), & a_3 &= (11, 6, 2); \\ b_1 &= (-2, 1, 4), & b_2 &= (3, -2, 1), & b_3 &= (-11, 7, 2). \end{aligned}$$

18. Keresse meg az  $L_1 + L_2$  összeg dimenzióját és bázisát, valamint az  $\mathbb{R}^5$  tér  $L_1$  és  $L_2$  lineáris altereinek  $L_1 \cap L_2$  metszetét, ahol  $L_1$  – az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak tere,  $L_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$  – az  $a_1, a_2$  vektorrendszerből előállított lineáris burok!

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 & + 5x_5 = 0, & a_1 = (3, 4, -7, -3, -3), \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 & - x_5 = 0, & a_2 = (-4, 8, -8, -5, -4). \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 - x_5 = 0; \end{cases}$$

19. A  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  leképezés minden  $x = (x_1, x_2, x_3)$  vektort  $\varphi(x) \in \mathbb{R}^3$  vektorba alakít át (képez). Bizonyítsa be, hogy a  $\varphi$  lineáris transzformáció lesz! Keresse meg a vektor képének koor-

dinátáinak képletét az  $\mathbb{R}^3$  tér  $e_1, e_2, e_3$  kanonikus bázisában; az  $a = (1,1,1)$  és  $e_1, e_2, e_3$  vektorok képét és a  $\varphi$  transzformáció mátrixát ugyan ebben a bázisban!

$$\varphi(x) = (2x_1 - x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3).$$

20. Határozza meg az  $\mathbb{R}^3$  vektortér azon  $\varphi$  lineáris transzformációját, amely az  $a_1, a_2, a_3$  bázis vektorokat megfelelően ezen tér  $b_1, b_2, b_3$  vektoraiba alakítja át! Keresse meg a  $\varphi$  transzformáció mátrixát az  $a_1, a_2, a_3$  bázisban!

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, -1, 1), & a_2 &= (1, 0, 1), & a_3 &= (2, -1, 1); \\ b_1 &= (1, 1, 1), & b_2 &= (1, 1, 1), & b_3 &= (1, 1, 0). \end{aligned}$$

21. Legyen  $\varphi$  lineáris transzformációja az  $\mathbb{R}^3$  vektortérnek, amely az  $x = (x_1, x_2, x_3)$  vektort a  $\varphi(x)$  vektorba alakítja át,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

– a  $\psi$  lineáris transzformáció mátrixa ugyan ezen tér  $a_1, a_2, a_3$  bázisában. Keresse meg az  $\mathbb{R}^3$  tér kanonikus bázisában a  $\varphi, \psi, \varphi + \psi, \varphi - \psi, \varphi\psi, \psi\varphi$  lineáris transzformációk mátrixait!

$$\varphi(x) = (2x_1 - x_2, 2x_2 - x_3, x_1 + x_2 + x_3);$$

$$a_1 = (1, 1, 1), a_2 = (2, 1, 1), a_3 = (3, 2, 3).$$

22. Legyen  $A$  – az  $\mathbb{R}^4$  vektortér  $\varphi$  lineáris transzformációjának mátrixa a  $c_1, c_2, c_3, c_4$  bázisban. Határozza meg az  $\text{Im}\varphi$  és a  $\text{Ker}\varphi$  alterek bázisát és dimenzióját! Győződjön meg arról, hogy  $\dim \text{Im}\varphi + \dim \text{Ker}\varphi = \dim \mathbb{R}^4$ !

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

23. Legyen  $A$  – az  $\mathbb{R}^4$  vektortér  $\varphi$  lineáris transzformáció mátrixa a kanonikus bázisban. Keresse meg a  $\varphi^2, \varphi^3, \varphi^4$  lineáris transzformációk mátrixait ebben a bázisban és győződjön meg arról, hogy  $f(\varphi) = 0$ , ahol  $f$  – a  $\varphi$  transzformáció karakterisztikus polinomja! Határozza meg a  $\varphi$  transzformáció összes sajátértékét és összes sajátvektorát!

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

24. Az  $\mathbb{R}^4$  euklideszi tér  $L$  altére az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak a tere.

Keresse meg az  $L$  altér  $L^\perp$  ortogonális komplementerét az  $\mathbb{R}^4$  térben és a  $c$  vektor vetületét az  $L$  altérre és az ő  $L^\perp$  ortogonális komplementerére!

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_4 = 0, & c = (2, 0, 4, -1). \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0; \end{cases}$$

25. Az  $\mathbb{R}^4$  euklideszi térben ortonormalizálja az  $a_1, a_2, a_3, a_4$  vektorrendszert!

$$a_1 = (1, -1, 1, -1), a_2 = (1, 0, -1, 0), a_3 = (0, 1, 1, 1), a_4 = (0, 0, 1, -1).$$

26. A  $C_{[\alpha, \beta]}^2$  euklideszi térben, mely az összes olyan függvény tere, melyek négyzete integrálható, ortogonalizálja a  $p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2, p_4 = x^3$  polinomok rendszerét (a  $C_{[\alpha, \beta]}^2$  tér két tetszőleges  $f$  és  $g$  függvényének skaláris szorzata a következő módon határozható meg:

$$(f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx \quad )!$$

$$\alpha = -1, \quad \beta = 0.$$

27. Keresse meg megfelelően a valós és komplex számok teste felett az  $f(x_1, x_2, x_3)$  kvadratikus alak normálalakját valamint az ismeretlenek transzformációit, amelyek ehhez az alakhoz vezetnek az  $f$  alakot!

$$f = -x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3.$$

28. A  $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X^T A X$  kvadratikus alak, amely az  $A$  mátrixsal van megadva, pozitív definit, negatív definit vagy indefinit?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 3. Változat

1. Számítsa ki a kifejezés értékét  $\frac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}$  !

2. Keresse meg a  $1 + \sqrt{3}i$  komplex szám trigonometrikus alakját!

3. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6! \end{cases}$$

4. Az  $1, 2, 3, \dots, n$  számok melyik rendezésében lesz a legnagyobb az inverziók száma és mennyivel lesz egyenlő?

5. A determináns meghatározása alapján számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-2} & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} !$$

6. Számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} !$$

7. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a Cramer-szabály szerint:

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z + t - 5 = 0, \\ 3x - 7y + 6z - t + 1 = 0, \\ 5x - 9y + 3z + 4t - 7 = 0, \\ 4x - 6y + 3z + t - 8 = 0! \end{cases}$$

8. Keresse meg az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} !$$

9. Határozza meg az  $x$  és  $y$  vektorokat az alábbi egyenletből  $3(a_1 - y) + 2(a_2 + y) = 4(a_3 - y)$ , ahol  $a_1 = (5, -8, -1, 2)$ ,  $a_2 = (2, -1, 4, -3)$ ,  $a_3 = (-3, 2, -5, 4)$ .

10. Számítsa ki az alábbi mátrix rangját a beszegési aldeterminánsok módszerével:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} !$$

11. Vizsgálja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert megoldhatóságára és keresse meg általános és egy konkrét megoldását:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4! \end{cases}$$

12. Keresse meg az egyenletrendszer fundamentális rendszerét és általános megoldását:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0! \end{cases}$$

13. Csoportot alkot-e az egész számok halmaza a szorzás műveletét tekintve?

14. Ossza el az  $f(x)$  polinomot a  $g(x)$  polinomra, ha:

$$f(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 + x + 1, \quad g(x) = x^2 - 3x + 1!$$

15. A Horner-elrendezés algoritmusának segítségével számítsa ki az  $f(x)$  polinom  $f(c)$  értékét (amikor  $x = c$ ), ha:

$$f(x) = 6x^4 + 8x^3 + 10x^2 + 2x + 66, \quad c = -2!$$

16. Bizonyítsa be, hogy az  $a_1, a_2, a_3, a_4$  vektorrendszer az  $\mathbb{R}^4$  vektoriális tér bázisa lesz a valós számok  $\mathbb{R}$  teste fölött! Keresse meg az  $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) \in \mathbb{R}^4$  vektor koordinátáinak képleteit ebben a bázisban! Milyenek lesznek a  $c \in \mathbb{R}^4$  vektor koordinátái az  $a_1, a_2, a_3, a_4$  bázisban?

$$a_1 = (1, 1, 1, 1), a_2 = (1, -1, 1, -1), a_3 = (2, 1, 1, 1), a_4 = (3, 4, 1, 1), c = (3, -3, 0, 12).$$

17. Bizonyítsa be, hogy az  $a_1, a_2, a_3$  és a  $b_1, b_2, b_3$  vektorrendszerek az  $\mathbb{R}^3$  vektoriális tér bázisai! Keresse meg az átmeneti mátrixot és a koordináták átalakításának képleteit az egyik bázisból való átmenet során a másikba. Ezután határozza meg a  $c = (1, 2, 3)$  vektor koordinátáit mindkét bázisban, és ellenőrizze le a kapott eredményt a koordináták átalakítási képleteinek segítségével!

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, -1, 1), & a_2 &= (-1, 2, 0), & a_3 &= (0, 1, 2); \\ b_1 &= (1, -1, 1), & b_2 &= (2, -1, 0), & b_3 &= (3, -2, 0). \end{aligned}$$

18. Keresse meg az  $L_1 + L_2$  összeg dimenzióját és bázisát, valamint az  $\mathbb{R}^5$  tér  $L_1$  és  $L_2$  lineáris altereinek  $L_1 \cap L_2$  metszetét, ahol  $L_1$  – az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak tere,  $L_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$  – az  $a_1, a_2$  vektorrendszerből előállított lineáris burok!

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_4 + 2x_5 = 0; \end{cases} \quad \begin{aligned} a_1 &= (7, -4, 1, 2, 1), \\ a_2 &= (10, 0, -6, -1, -2). \end{aligned}$$

19. A  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  leképezés minden  $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$  vektort  $\varphi(x) \in \mathbb{R}^3$  vektorba alakít át (képez). Bizonyítsa be, hogy a  $\varphi$  lineáris transzformáció lesz! Keresse meg a vektor képének koordinátáinak képletét az  $\mathbb{R}^3$  tér  $e_1, e_2, e_3$  kanonikus bázisában; az  $a = (1, 1, 1)$  és  $e_1, e_2, e_3$  vektorok képét és a  $\varphi$  transzformáció mátrixát ugyan ebben a bázisban!

$$\varphi(x) = (\chi_1 - \chi_2 - \chi_3, -\chi_1 + \chi_2 - \chi_3, -\chi_1 - \chi_2 + \chi_3).$$

20. Határozza meg az  $\mathbb{R}^3$  vektortér azon  $\varphi$  lineáris transzformációját, amely az  $a_1, a_2, a_3$  bázis vektorokat megfelelően ezen tér  $b_1, b_2, b_3$  vektoraiba alakítja át! Keresse meg a  $\varphi$  transzformáció mátrixát az  $a_1, a_2, a_3$  bázisban!

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, -1, 1), & a_2 &= (2, 1, -1), & a_3 &= (3, 0, 1); \\ b_1 &= (-1, 1, 1), & b_2 &= (0, -1, 1), & b_3 &= (-1, 0, 2). \end{aligned}$$

21. Legyen  $\varphi$  lineáris transzformációja az  $\mathbb{R}^3$  vektortérnek, amely az  $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$  vektort a  $\varphi(x)$  vektorba alakítja át,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

– a  $\psi$  lineáris transzformáció mátrixa ugyan ezen tér  $a_1, a_2, a_3$  bázisában. Keresse meg az  $\mathbb{R}^3$  tér kanonikus bázisában a  $\varphi, \psi, \varphi + \psi, \varphi - \psi, \varphi\psi, \psi\varphi$  lineáris transzformációk mátrixait!

$$\varphi(x) = (\chi_1 + \chi_2 + \chi_3, 2\chi_1 - \chi_3, 3\chi_2 - \chi_1);$$

$$a_1 = (1, -1, 1), a_2 = (-1, 2, 0), a_3 = (0, 1, 2) ..$$

22. Legyen  $A$  – az  $\mathbb{R}^4$  vektortér  $\varphi$  lineáris transzformációjának mátrixa a  $c_1, c_2, c_3, c_4$  bázisban. Határozza meg az  $\text{Im}\varphi$  és a  $\text{Ker}\varphi$  alterek bázisát és dimenzióját! Győződjön meg arról, hogy  $\dim \text{Im}\varphi + \dim \text{Ker}\varphi = \dim \mathbb{R}^4$ !

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

23. Legyen  $A$  – az  $\mathbb{R}^4$  vektortér  $\varphi$  lineáris transzformáció mátrixa a kanonikus bázisban. Keresse meg a  $\varphi^2, \varphi^3, \varphi^4$  lineáris transzformációk mátrixait ebben a bázisban és győződjön meg arról, hogy  $f(\varphi) = 0$ , ahol  $f$  – a  $\varphi$  transzformáció karakterisztikus polinomja! Határozza meg a  $\varphi$  transzformáció összes sajátértékét és összes sajátvektorát!

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

24. Az  $\mathbb{R}^4$  euklideszi tér  $L$  altére az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak a tere. Keresse meg az  $L$  altér  $L^\perp$  ortogonális komplementerét az  $\mathbb{R}^4$  térben és a  $c$  vektor vetületét az  $L$  altérre és az ő  $L^\perp$  ortogonális komplementerére!

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 3x_4 = 0, & c = (5, 1, -4, 0). \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$$

25. Az  $\mathbb{R}^4$  euklideszi térben ortonormalizálja az  $a_1, a_2, a_3, a_4$  vektorrendszert!

$$a_1 = (-1, -1, 1, 1), a_2 = (1, 0, -1, 0), a_3 = (1, 1, 1, 0), a_4 = (1, 0, 0, -1).$$

26. A  $C_{[\alpha, \beta]}^2$  euklideszi térben, mely az összes olyan függvény tere, melyek négyzete integrálható, ortogonalizálja a  $p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2, p_4 = x^3$  polinomok rendszerét (a  $C_{[\alpha, \beta]}^2$  tér két tetszőleges  $f$  és  $g$  függvényének skaláris szorzata a következő módon határozható meg:

$$(f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx \quad )!$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2.$$

27. Keresse meg megfelelően a valós és komplex számok teste felett az  $f(x_1, x_2, x_3)$  kvadratikus alak normálalakját valamint az ismeretlenek transzformációit, amelyek ehhez az alakhoz vezetnek az  $f$  alakot!

$$f = x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

28. A  $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X^T A X$  kvadratikus alak, amely az  $A$  mátrixszal van megadva, pozitív definit, negatív definit vagy indefinit?

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

#### 4. Változat

1. Számítsa ki a kifejezés értékét  $(7 - 2i)(3 + 4i) + (3 + i)(1 + 2i)$  !

2. Keresse meg a  $\sqrt{3} + i$  komplex szám trigonometrikus alakját!

3. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3! \end{cases}$$

4. Írja ki az összes heted rendű permutációt, amelyek az alábbi páronként idegen ciklusok szorzataként vannak megadva:

$$(1\ 5)(2\ 3\ 4)$$

5. A determináns meghatározása alapján számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & -\lambda & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & -\lambda & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda + a_4 \end{vmatrix}!$$

6. Számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}!$$

7. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a Cramer-szabály szerint:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6 = 0, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 + 8 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8 = 0! \end{cases}$$

8. Keresse meg az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}!$$

9. Határozza meg, hogy lineárisan összefüggő-e az alábbi vektorrendszer:

$$a_1 = (5, 4, 3), a_2 = (3, 3, 2), a_3 = (8, 1, 3).$$

10. Számítsa ki az alábbi mátrix rangját a beszegési aldeterminánsok módszerével:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}!$$

11. Vizsgálja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert megoldhatóságára és keresse meg általános és egy konkrét megoldását:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3! \end{cases}$$

12. Keresse meg az egyenletrendszer fundamentális rendszerét és általános megoldását:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0! \end{cases}$$

13. Csoportot alkot-e az természetes számok halmaza a szorzás műveletét tekintve?

14. Ossza el az  $f(x)$  polinomot a  $g(x)$  polinomra, ha:

$$f(x) = 3x^5 + 2x^2 - 1, \quad g(x) = 2x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4!$$

15. A Horner-elrendezés algoritmusának segítségével számítsa ki az  $f(x)$  polinom  $f(c)$  értékét (amikor  $x = c$ ), ha:

$$f(x) = 12x^4 + 16x^3 + 20x^2 + 4x + 132, \quad c = -2!$$

16. Bizonyítsa be, hogy az  $a_1, a_2, a_3, a_4$  vektorrendszer az  $\mathbb{R}^4$  vektoriális tér bázisa lesz a valós számok  $\mathbb{R}$  teste fölött! Keresse meg az  $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) \in \mathbb{R}^4$  vektor koordinátáinak képleteit ebben a bázisban! Milyenek lesznek a  $c \in \mathbb{R}^4$  vektor koordinátái az  $a_1, a_2, a_3, a_4$  bázisban?

$$a_1 = (-1, 2, 2, 1), a_2 = (0, 3, 2, 1), a_3 = (1, 1, 4, 2), a_4 = (1, -2, 1, 3), c = (2, -4, 5, 6).$$

17. Bizonyítsa be, hogy az  $a_1, a_2, a_3$  és a  $b_1, b_2, b_3$  vektorrendszerek az  $\mathbb{R}^3$  vektoriális tér bázisai! Keresse meg az átmeneti mátrixot és a koordináták átalakításának képleteit az egyik bázisból való átmenet során a másikba. Ezután határozza meg a  $c = (1, 2, 3)$  vektor koordinátáit mindkét bázisban, és ellenőrizze le a kapott eredményt a koordináták átalakítási képleteinek segítségével!

$$a_1 = (1, -1, -1), \quad a_2 = (-1, 2, 0), \quad a_3 = (0, 1, 0);$$

$$b_1 = (1, 0, 1), \quad b_2 = (1, -1, 2), \quad b_3 = (2, -1, 4).$$

18. Keresse meg az  $L_1 + L_2$  összeg dimenzióját és bázisát, valamint az  $\mathbb{R}^5$  tér  $L_1$  és  $L_2$  lineáris altereinek  $L_1 \cap L_2$  metszetét, ahol  $L_1$  – az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak tere,  $L_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$  – az  $a_1, a_2$  vektorrendszerből előállított lineáris burok!

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0; \end{cases} \quad \begin{aligned} a_1 &= (-5, 4, 1, 2, 3), \\ a_2 &= (1, 1, 1, 1, 1). \end{aligned}$$

19. A  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  leképezés minden  $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$  vektort  $\varphi(x) \in \mathbb{R}^3$  vektorba alakít át (képez). Bizonyítsa be, hogy a  $\varphi$  lineáris transzformáció lesz! Keresse meg a vektor képének koordinátáinak képletét az  $\mathbb{R}^3$  tér  $e_1, e_2, e_3$  kanonikus bázisában; az  $a = (1, 1, 1)$  és  $e_1, e_2, e_3$  vektorok képét és a  $\varphi$  transzformáció mátrixát ugyan ebben a bázisban!

$$\varphi(x) = (\chi_1 - \chi_2, \chi_2 - \chi_3, \chi_1 - \chi_3).$$

20. Határozza meg az  $\mathbb{R}^3$  vektortér azon  $\varphi$  lineáris transzformációját, amely az  $a_1, a_2, a_3$  bázis vektorokat megfelelően ezen tér  $b_1, b_2, b_3$  vektoraiba alakítja át! Keresse meg a  $\varphi$  transzformáció mátrixát az  $a_1, a_2, a_3$  bázisban!

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, -1, 1), & a_2 &= (2, -1, 0), & a_3 &= (3, -2, 0); \\ b_1 &= (-1, 0, 1), & b_2 &= (0, 0, 0), & b_3 &= (0, 1, 1). \end{aligned}$$

21. Legyen  $\varphi$  lineáris transzformációja az  $\mathbb{R}^3$  vektortérnek, amely az  $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$  vektort a  $\varphi(x)$  vektorba alakítja át,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

– a  $\psi$  lineáris transzformáció mátrixa ugyan ezen tér  $a_1, a_2, a_3$  bázisában. Keresse meg az  $\mathbb{R}^3$  tér kanonikus bázisában a  $\varphi, \psi, \varphi + \psi, \varphi - \psi, \varphi\psi, \psi\varphi$  lineáris transzformációk mátrixait!

$$\varphi(x) = (2\chi_1 - \chi_2 - \chi_3, \chi_1 + \chi_3, \chi_1 + \chi_2 - 2\chi_3);$$

$$a_1 = (1, 1, -1), a_2 = (-1, 2, 0), a_3 = (0, 1, 0).$$

22. Legyen  $A$  – az  $\mathbb{R}^4$  vektortér  $\varphi$  lineáris transzformációjának mátrixa a  $c_1, c_2, c_3, c_4$  bázisban. Határozza meg az  $\text{Im}\varphi$  és a  $\text{Ker}\varphi$  alterek bázisát és dimenzióját! Győződjön meg arról, hogy  $\dim \text{Im}\varphi + \dim \text{Ker}\varphi = \dim \mathbb{R}^4$ !

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

23. Legyen  $A$  – az  $\mathbb{R}^4$  vektortér  $\varphi$  lineáris transzformáció mátrixa a kanonikus bázisban. Keresse meg a  $\varphi^2$ ,  $\varphi^3$ ,  $\varphi^4$  lineáris transzformációk mátrixait ebben a bázisban és győződjön meg arról, hogy  $f(\varphi) = 0$ , ahol  $f$  – a  $\varphi$  transzformáció karakterisztikus polinomja! Határozza meg a  $\varphi$  transzformáció összes sajátértékét és összes sajátvektorát!

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

24. Az  $\mathbb{R}^4$  euklideszi tér  $L$  altére az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak a tere. Keresse meg az  $L$  altér  $L^\perp$  ortogonális komplementerét az  $\mathbb{R}^4$  térben és a  $c$  vektor vetületét az  $L$  altérre és az  $\tilde{o}$   $L^\perp$  ortogonális komplementerére!

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0; \end{cases} \quad c = (1, -2, -4, 5).$$

25. Az  $\mathbb{R}^4$  euklideszi térben ortonormalizálja az  $a_1, a_2, a_3, a_4$  vektorrendszert!

$$a_1 = (1, 1, -1, -1), \quad a_2 = (1, 0, 1, 0), \quad a_3 = (1, 1, 0, 1), \quad a_4 = (1, 1, 0, 0).$$

26. A  $C_{[\alpha, \beta]}^2$  euklideszi térben, mely az összes olyan függvény tere, melyek négyzete integrálható, ortogonalizálja a  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = x$ ,  $p_3 = x^2$ ,  $p_4 = x^3$  polinomok rendszerét (a  $C_{[\alpha, \beta]}^2$  tér két tetszőleges  $f$  és  $g$  függvényének skaláris szorzata a következő módon határozható meg:

$$(f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx \quad !$$

$$\alpha = -2, \quad \beta = -1.$$

27. Keresse meg megfelelően a valós és komplex számok teste felett az  $f(x_1, x_2, x_3)$  kvadratikus alak normálalakját valamint az ismeretlenek transzformációit, amelyek ehhez az alakhoz vezetnek az  $f$  alakot!

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 - 6x_1x_2 - 4x_2x_3.$$

28. A  $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X^T A X$  kvadratikus alak, amely az  $A$  mátrixszal van megadva, pozitív definit, negatív definit vagy indefinit?

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

## 5. Változat

1. Számítsa ki a kifejezés értékét  $(8 - 2i)(13 + 4i) + (4 + i)(1 + 7i)$  !

2. Keresse meg a  $7 + 7i$  komplex szám trigonometrikus alakját!

3. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 13, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14! \end{cases}$$

4. Írja ki az összes heted rendű permutációt, amelyek az alábbi páronként idegen ciklusok szorzataként vannak megadva:

$$(1\ 3)(2\ 5)(4\ 7)!$$

5. A determináns meghatározása alapján számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} !$$

6. Számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} !$$

7. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a Cramer-szabály szerint:

$$\begin{cases} 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0! \end{cases}$$

8. Keresse meg az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} !$$

9. Határozza meg, hogy lineárisan összefüggő-e az alábbi vektorrendszer:

$$b_1 = (2, -4, 1), b_2 = (0, 5, -6), b_3 = (1, -2, 4).$$

10. Számítsa ki az alábbi mátrix rangját az elemi átalakítások segítségével:

$$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}!$$

11. Vizsgálja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert megoldhatóságára és keresse meg általános és egy konkrét megoldását:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12! \end{cases}$$

12. Keresse meg az egyenletrendszer fundamentális rendszerét és általános megoldását:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0, \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0, \\ -x_3 + x_5 = 0, \\ -x_4 + x_6 = 0! \end{cases}$$

13. Csoportot alkot-e az természetes számok halmaza az összeadás műveletét tekintve?

14. Ossza el az  $f(x)$  polinomot a  $g(x)$  polinomra, ha:

$$f(x) = x^5 + 2x^2 - 1, \quad g(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4!$$

15. A Horner-elrendezés algoritmusának segítségével számítsa ki az  $f(x)$  polinom  $f(c)$  értékét (amikor  $x = c$ ), ha:

$$f(x) = 3x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x + 1, \quad c = -2!$$

16. Bizonyítsa be, hogy az  $a_1, a_2, a_3, a_4$  vektorrendszer az  $\mathbb{R}^4$  vektoriális tér bázisa lesz a valós számok  $\mathbb{R}$  teste fölött! Keresse meg az  $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) \in \mathbb{R}^4$  vektor koordinátáinak képleteit ebben a bázisban! Milyenek lesznek a  $c \in \mathbb{R}^4$  vektor koordinátái az  $a_1, a_2, a_3, a_4$  bázisban?

$$a_1 = (3, -1, 1, 3), a_2 = (2, 0, 6, 1), a_3 = (1, -1, 1, 1), a_4 = (2, 4, 1, 1), c = (2, 4, 3, -1).$$

17. Bizonyítsa be, hogy az  $a_1, a_2, a_3$  és a  $b_1, b_2, b_3$  vektorrendszerek az  $\mathbb{R}^3$  vektoriális tér bázisai! Keresse meg az átmeneti mátrixot és a koordináták átalakításának képleteit az egyik bázisból való átmenet során a másikba. Ezután határozza meg a  $c = (1, 2, 3)$  vektor koordinátáit mindkét bázisban, és ellenőrizze le a kapott eredményt a koordináták átalakítási képleteinek segítségével!

$$\begin{aligned} a_1 &= (0, 1, 2), & a_2 &= (1, -2, -1), & a_3 &= (1, -1, 2); \\ b_1 &= (-1, 1, 0), & b_2 &= (2, -1, 1), & b_3 &= (1, 0, 2). \end{aligned}$$

18. Keresse meg az  $L_1 + L_2$  összeg dimenzióját és bázisát, valamint az  $\mathbb{R}^5$  tér  $L_1$  és  $L_2$  lineáris altereinek  $L_1 \cap L_2$  metszetét, ahol  $L_1$  – az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak tere,  $L_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$  – az  $a_1, a_2$  vektorrendszerből előállított lineáris burok!

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_4 - x_5 = 0, & a_1 = (1, 1, 1, 1, 0), \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0, & a_2 = (2, 1, -1, 1, 1). \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 0; \end{cases}$$

19. A  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  leképezés minden  $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$  vektort  $\varphi(x) \in \mathbb{R}^3$  vektorba alakít át (képez). Bizonyítsa be, hogy a  $\varphi$  lineáris transzformáció lesz! Keresse meg a vektor képének koordinátáinak képletét az  $\mathbb{R}^3$  tér  $e_1, e_2, e_3$  kanonikus bázisában; az  $a = (1, 1, 1)$  és  $e_1, e_2, e_3$  vektorok képét és a  $\varphi$  transzformáció mátrixát ugyan ebben a bázisban!

$$\varphi(x) = (\chi_2 + 3\chi_3, 2\chi_2 - \chi_3, \chi_2 + \chi_3).$$

20. Határozza meg az  $\mathbb{R}^3$  vektortér azon  $\varphi$  lineáris transzformációját, amely az  $a_1, a_2, a_3$  bázis vektorokat megfelelően ezen tér  $b_1, b_2, b_3$  vektoraiba alakítja át! Keresse meg a  $\varphi$  transzformáció mátrixát az  $a_1, a_2, a_3$  bázisban!

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, -1, -1), & a_2 &= (-1, 2, 0), & a_3 &= (0, 1, 0); \\ b_1 &= (1, -1, 1), & b_2 &= (1, 0, -1), & b_3 &= (2, -1, 0). \end{aligned}$$

21. Legyen  $\varphi$  lineáris transzformációja az  $\mathbb{R}^3$  vektortérnek, amely az  $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$  vektort a  $\varphi(x)$  vektorba alakítja át,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

– a  $\psi$  lineáris transzformáció mátrixa ugyan ezen tér  $a_1, a_2, a_3$  bázisában. Keresse meg az  $\mathbb{R}^3$  tér kanonikus bázisában a  $\varphi, \psi, \varphi + \psi, \varphi - \psi, \varphi\psi, \psi\varphi$  lineáris transzformációk mátrixait!

$$\varphi(x) = (\chi_1 - \chi_2 + 2\chi_3, \chi_1 - \chi_2, \chi_1 + 2\chi_2);$$

$$a_1 = (1, -1, 1), a_2 = (2, -1, -1), a_3 = (3, -2, 1).$$

22. Legyen  $A$  – az  $\mathbb{R}^4$  vektortér  $\varphi$  lineáris transzformációjának mátrixa a  $c_1, c_2, c_3, c_4$  bázisban. Határozza meg az  $\text{Im}\varphi$  és a  $\text{Ker}\varphi$  alterek bázisát és dimenzióját! Győződjön meg arról, hogy  $\dim \text{Im}\varphi + \dim \text{Ker}\varphi = \dim \mathbb{R}^4$ !

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

23. Legyen  $A$  – az  $\mathbb{R}^4$  vektortér  $\varphi$  lineáris transzformáció mátrixa a kanonikus bázisban. Keresse meg a  $\varphi^2$ ,  $\varphi^3$ ,  $\varphi^4$  lineáris transzformációk mátrixait ebben a bázisban és győződjön meg arról, hogy  $f(\varphi) = 0$ , ahol  $f$  – a  $\varphi$  transzformáció karakterisztikus polinomja! Határozza meg a  $\varphi$  transzformáció összes sajátértékét és összes sajátvektorát!

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

24. Az  $\mathbb{R}^4$  euklideszi tér  $L$  altére az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak a tere. Keresse meg az  $L$  altér  $L^\perp$  ortogonális komplementerét az  $\mathbb{R}^4$  térben és a  $c$  vektor vetületét az  $L$  altérre és az  $L^\perp$  ortogonális komplementerére!

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, & c = (-14, -3, 5, 0). \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 0, \\ -x_1 - 6x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$$

25. Az  $\mathbb{R}^4$  euklideszi térben ortonormalizálja az  $a_1, a_2, a_3, a_4$  vektorrendszert!

$$a_1 = (1, 1, 1, -1), a_2 = (1, 0, 0, 1), a_3 = (1, 1, 1, 0), a_4 = (0, 1, 1, 1).$$

26. A  $C_{[\alpha, \beta]}^2$  euklideszi térben, mely az összes olyan függvény tere, melyek négyzete integrálható, ortogonalizálja a  $p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2, p_4 = x^3$  polinomok rendszerét (a  $C_{[\alpha, \beta]}^2$  tér két tetszőleges  $f$  és  $g$  függvényének skaláris szorzata a következő módon határozható meg:

$$(f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx \text{ !}$$

$$\alpha = 2, \quad \beta = 3.$$

27. Keresse meg megfelelően a valós és komplex számok teste felett az  $f(x_1, x_2, x_3)$  kvadratikus alak normálalakját valamint az ismeretlenek transzformációit, amelyek ehhez az alakhoz vezetnek az  $f$  alakot!

$$f = -x_1^2 + 4x_2^2 - x_3^2 + 8x_2x_3 - 4x_1x_3.$$

28. A  $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X^T A X$  kvadratikus alak, amely az  $A$  mátrixszal van megadva, pozitív definit, negatív definit vagy indefinit?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

## 6. Változat

1. Számítsa ki a kifejezés értékét  $(9 - i)(3 + 4i) + (8 + i)(1 + 9i)$  !
2. Keresse meg a  $-1 - i$  komplex szám trigonometrikus alakját!
3. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0! \end{cases}$$

4. Írja ki az összes heted rendű permutációt, amelyek az alábbi páronként idegen ciklusok szorzataként vannak megadva:

$$(7\ 5\ 3\ 1)(2\ 4\ 6)!$$

5. A determináns meghatározása alapján számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 2 & a \\ d & 0 & 0 & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \end{vmatrix}!$$

6. Számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}!$$

7. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a Cramer-szabály szerint:

$$\begin{cases} 6x + 5y - 2z + 4t + 4 = 0, \\ 9x - y + 4z - t - 13 = 0, \\ 3x + 4y + 2z - 2t - 1 = 0, \\ 3x - 9y + 2t - 11 = 0! \end{cases}$$

8. Keresse meg az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}!$$

9. Határozza meg, hogy lineárisan összefüggő-e az alábbi vektorrendszer:

$$a_1 = (5, 4, 3), a_2 = (3, 3, 2), a_3 = (8, 1, 3).$$

10. Számítsa ki az alábbi mátrix rangját az elemi átalakítások segítségével:

$$\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}!$$

11. Vizsgálja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert megoldhatóságára és keresse meg általános és egy konkrét megoldását:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7! \end{cases}$$

12. Keresse meg az egyenletrendszer fundamentális rendszerét és általános megoldását:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0! \end{cases}$$

13. Csoportot alkot-e az komplex számok halmaza az összeadás műveletét tekintve?

14. Ossza el az  $f(x)$  polinomot a  $g(x)$  polinomra, ha:

$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6, \quad g(x) = x^2 - 3x + 1!$$

15. A Horner-elrendezés algoritmusának segítségével számítsa ki az  $f(x)$  polinom  $f(c)$  értékét (amikor  $x = c$ ), ha:

$$f(x) = x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 4x + 1, \quad c = -2!$$

16. Bizonyítsa be, hogy az  $a_1, a_2, a_3, a_4$  vektorrendszer az  $\mathbb{R}^4$  vektoriális tér bázisa lesz a valós számok  $\mathbb{R}$  teste fölött! Keresse meg az  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$  vektor koordinátáinak képleteit ebben a bázisban! Milyenek lesznek a  $c \in \mathbb{R}^4$  vektor koordinátái az  $a_1, a_2, a_3, a_4$  bázisban?

$$a_1 = (-2, 5, 0, 3), \quad a_2 = (1, 3, 2, 6), \quad a_3 = (1, 1, 1, 0), \quad a_4 = (2, 2, 2, 2), \quad c = (3, 6, 9, -2).$$

17. Bizonyítsa be, hogy az  $a_1, a_2, a_3$  és a  $b_1, b_2, b_3$  vektorrendszerek az  $\mathbb{R}^3$  vektoriális tér bázisai! Keresse meg az átmeneti mátrixot és a koordináták átalakításának képleteit az egyik bázisból való átmenet során a másikba. Ezután határozza meg a  $c = (1, 2, 3)$  vektor koordinátáit mindkét bázisban, és ellenőrizze le a kapott eredményt a koordináták átalakítási képleteinek segítségével!

$$\begin{aligned} a_1 &= (2, 1, 1), & a_2 &= (1, 1, 3), & a_3 &= (3, 2, 5); \\ b_1 &= (1, 1, 1), & b_2 &= (2, 1, 1), & b_3 &= (3, 1, 3). \end{aligned}$$

18. Keresse meg az  $L_1 + L_2$  összeg dimenzióját és bázisát, valamint az  $\mathbb{R}^5$  tér  $L_1$  és  $L_2$  lineáris altereinek  $L_1 \cap L_2$  metszetét, ahol  $L_1$  – az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak tere,  $L_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$  – az  $a_1, a_2$  vektorrendszerből előállított lineáris burok!

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 0; \end{cases} \quad \begin{aligned} a_1 &= (1, 1, 1, 1, 1), \\ a_2 &= (0, 2, 3, 4, -6). \end{aligned}$$

19. A  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  leképezés minden  $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$  vektort  $\varphi(x) \in \mathbb{R}^3$  vektorba alakít át (képez). Bizonyítsa be, hogy a  $\varphi$  lineáris transzformáció lesz! Keresse meg a vektor képének koordinátáinak képletét az  $\mathbb{R}^3$  tér  $e_1, e_2, e_3$  kanonikus bázisában; az  $a = (1, 1, 1)$  és  $e_1, e_2, e_3$  vektorok képét és a  $\varphi$  transzformáció mátrixát ugyan ebben a bázisban!

$$\varphi(x) = (2\chi_1 - \chi_3, 2\chi_2 - \chi_3, \chi_1 - \chi_3).$$

20. Határozza meg az  $\mathbb{R}^3$  vektortér azon  $\varphi$  lineáris transzformációját, amely az  $a_1, a_2, a_3$  bázis vektorokat megfelelően ezen tér  $b_1, b_2, b_3$  vektoraiba alakítja át! Keresse meg a  $\varphi$  transzformáció mátrixát az  $a_1, a_2, a_3$  bázisban!

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, 0, 1), & a_2 &= (1, -1, 2), & a_3 &= (2, -1, 4); \\ b_1 &= (0, -1, 1), & b_2 &= (1, 1, 0), & b_3 &= (1, 0, 1). \end{aligned}$$

21. Legyen  $\varphi$  lineáris transzformációja az  $\mathbb{R}^3$  vektortérnek, amely az  $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$  vektort a  $\varphi(x)$  vektorba alakítja át,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

– a  $\psi$  lineáris transzformáció mátrixa ugyan ezen tér  $a_1, a_2, a_3$  bázisában. Keresse meg az  $\mathbb{R}^3$  tér kanonikus bázisában a  $\varphi, \psi, \varphi + \psi, \varphi - \psi, \varphi\psi, \psi\varphi$  lineáris transzformációk mátrixait!

$$\varphi(x) = (\chi_1 - \chi_2 - \chi_3, -\chi_1 + \chi_2 - \chi_3, -\chi_1 - \chi_2 + \chi_3);$$

$$a_1 = (2, 1, 1), a_2 = (1, 1, 3), a_3 = (3, 2, 3).$$

22. Legyen  $A$  – az  $\mathbb{R}^4$  vektortér  $\varphi$  lineáris transzformációjának mátrixa a  $c_1, c_2, c_3, c_4$  bázisban. Határozza meg az  $\text{Im}\varphi$  és a  $\text{Ker}\varphi$  alterek bázisát és dimenzióját! Győződjön meg arról, hogy  $\dim \text{Im}\varphi + \dim \text{Ker}\varphi = \dim \mathbb{R}^4$ !

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

23. Legyen  $A$  – az  $\mathbb{R}^4$  vektortér  $\varphi$  lineáris transzformáció mátrixa a kanonikus bázisban. Keresse meg a  $\varphi^2$ ,  $\varphi^3$ ,  $\varphi^4$  lineáris transzformációk mátrixait ebben a bázisban és győződjön meg arról, hogy  $f(\varphi) = 0$ , ahol  $f$  – a  $\varphi$  transzformáció karakterisztikus polinomja! Határozza meg a  $\varphi$  transzformáció összes sajátértékét és összes sajátvektorát!

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

24. Az  $\mathbb{R}^4$  euklideszi tér  $L$  altere az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak a tere. Keresse meg az  $L$  altér  $L^\perp$  ortogonális komplementerét az  $\mathbb{R}^4$  térben és a  $c$  vektor vetületét az  $L$  altérre és az  $L^\perp$  ortogonális komplementerére!

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0; \end{cases} c = (2, 8, 6, 4).$$

25. Az  $\mathbb{R}^4$  euklideszi térben ortonormalizálja az  $a_1, a_2, a_3, a_4$  vektorrendszert!

$$a_1 = (-1, 1, 1, 1), a_2 = (1, 1, 0, 0), a_3 = (0, 1, 0, 1), a_4 = (0, 0, 1, 1).$$

26. A  $C_{[\alpha, \beta]}^2$  euklideszi térben, mely az összes olyan függvény tere, melyek négyzete integrálható, ortogonalizálja a  $p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2, p_4 = x^3$  polinomok rendszerét (a  $C_{[\alpha, \beta]}^2$  tér két tetszőleges  $f$  és  $g$  függvényének skaláris szorzata a következő módon határozható meg:

$$(f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx \quad !)$$

$$\alpha = -3, \quad \beta = -2.$$

27. Keresse meg megfelelően a valós és komplex számok teste felett az  $f(x_1, x_2, x_3)$  kvadratikus alak normálalakját valamint az ismeretlenek transzformációit, amelyek ehhez az alakhoz vezetnek az  $f$  alakot!

$$f = -x_1^2 + 3x_2^2 - 3x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_2x_3 - 4x_1x_3.$$

28. A  $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X^T A X$  kvadratikus alak, amely az  $A$  mátrixszal van megadva, pozitív definit, negatív definit vagy indefinit?

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

## 7. Változat

1. Számítsa ki a kifejezés értékét  $(14 - i)(2 + 4i) + (1 - i)(2 + 3i)$  !

2. Keresse meg a  $-1 + \sqrt{3}i$  komplex szám trigonometrikus alakját!

3. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 3! \end{cases}$$

4. Adja meg páronként idegen ciklusok szorzataként az alábbi permutációkat és határozza meg azok párosságát:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}!$$

5. A determináns meghatározása alapján számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}!$$

6. Számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}!$$

7. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a Cramer-szabály szerint:

$$\begin{cases} 2x - y - 6z + 3t + 1 = 0, \\ 7x - 4y + 2z - 15t + 32 = 0, \\ x - 2y - 4z + 9t - 5 = 0, \\ x - y + 2z - 6t + 8 = 0! \end{cases}$$

8. Keresse meg az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}!$$

9. Határozza meg, hogy lineárisan összefüggő-e az alábbi vektorrendszer:

$$c_1 = (4, -5, 2, 6), c_2 = (2, -2, 1, 3), c_3 = (6, -3, 3, 9), c_4 = (4, -1, 5, 6).$$

10. Számítsa ki az alábbi mátrix rangját az elemi átalakítások segítségével:

$$\begin{pmatrix} 75 & 0 & 116 & 39 & 0 \\ 171 & -69 & 402 & 123 & 45 \\ 301 & 0 & 87 & -417 & -169 \\ 114 & -46 & 268 & 82 & 30 \end{pmatrix}!$$

11. Vizsgálja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert megoldhatóságára és keresse meg általános és egy konkrét megoldását:

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18! \end{cases}$$

12. Keresse meg az egyenletrendszer fundamentális rendszerét és általános megoldását:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0! \end{cases}$$

13. Csoportot alkot-e az komplex számok halmaza a szorzás műveletét tekintve?

14. Ossza el az  $f(x)$  polinomot a  $g(x)$  polinomra, ha:

$$f(x) = 3x^5 + 2x^2 - 1, \quad g(x) = 3x^3 - 3x - 2!$$

15. A Horner-elrendezés algoritmusának segítségével számítsa ki az  $f(x)$  polinom  $f(c)$  értékét (amikor  $x = c$ ), ha:

$$f(x) = 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 1, \quad c = -1!$$

16. Bizonyítsa be, hogy az  $a_1, a_2, a_3, a_4$  vektorrendszer az  $\mathbb{R}^4$  vektoriális tér bázisa lesz a valós számok  $\mathbb{R}$  teste fölött! Keresse meg az  $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) \in \mathbb{R}^4$  vektor koordinátáinak képleteit ebben a bázisban! Milyenek lesznek a  $c \in \mathbb{R}^4$  vektor koordinátái az  $a_1, a_2, a_3, a_4$  bázisban?

$$a_1 = (4, -1, 3, 2), a_2 = (2, 3, 1, 5), a_3 = (2, -3, 1, 1), a_4 = (2, 3, 2, 1), c = (2, -4, 3, 7).$$

17. Bizonyítsa be, hogy az  $a_1, a_2, a_3$  és a  $b_1, b_2, b_3$  vektorrendszerek az  $\mathbb{R}^3$  vektoriális tér bázisai! Keresse meg az átmeneti mátrixot és a koordináták átalakításának képleteit az egyik bázisból való átmenet során a másikba. Ezután határozza meg a  $c = (1, 2, 3)$  vektor koordinátáit mindkét bázisban, és ellenőrizze le a kapott eredményt a koordináták átalakítási képleteinek segítségével!

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, -1, 2), & a_2 &= (2, 1, 1), & a_3 &= (3, 0, 2); \\ b_1 &= (1, 1, 1), & b_2 &= (-2, -1, 1), & b_3 &= (1, 0, 3). \end{aligned}$$

18. Keresse meg az  $L_1 + L_2$  összeg dimenzióját és bázisát, valamint az  $\mathbb{R}^5$  tér  $L_1$  és  $L_2$  lineáris altereinek  $L_1 \cap L_2$  metszetét, ahol  $L_1$  – az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak tere,  $L_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$  – az  $a_1, a_2$  vektorrendszerből előállított lineáris burok!

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 0; \end{cases} \quad \begin{aligned} a_1 &= (1, 1, 1, 1, 1), \\ a_2 &= (0, -7, 6, 2, 2). \end{aligned}$$

19. A  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  leképezés minden  $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$  vektort  $\varphi(x) \in \mathbb{R}^3$  vektorba alakít át (képez). Bizonyítsa be, hogy a  $\varphi$  lineáris transzformáció lesz! Keresse meg a vektor képének koordinátáinak képletét az  $\mathbb{R}^3$  tér  $e_1, e_2, e_3$  kanonikus bázisában; az  $a = (1, 1, 1)$  és  $e_1, e_2, e_3$  vektorok képét és a  $\varphi$  transzformáció mátrixát ugyan ebben a bázisban!

$$\varphi(x) = (\chi_1 - \chi_2 + 2\chi_3, \chi_1 - \chi_2, \chi_1 + 2\chi_2).$$

20. Határozza meg az  $\mathbb{R}^3$  vektortér azon  $\varphi$  lineáris transzformációját, amely az  $a_1, a_2, a_3$  bázis vektorokat megfelelően ezen tér  $b_1, b_2, b_3$  vektoraiba alakítja át! Keresse meg a  $\varphi$  transzformáció mátrixát az  $a_1, a_2, a_3$  bázisban!

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, 1, 1), & a_2 &= (0, -1, 2), & a_3 &= (1, 0, 2); \\ b_1 &= (1, -2, 1), & b_2 &= (-1, 2, -1), & b_3 &= (1, 0, 1). \end{aligned}$$

21. Legyen  $\varphi$  lineáris transzformációja az  $\mathbb{R}^3$  vektortérnek, amely az  $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$  vektort a  $\varphi(x)$  vektorba alakítja át,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

– a  $\psi$  lineáris transzformáció mátrixa ugyan ezen tér  $a_1, a_2, a_3$  bázisában. Keresse meg az  $\mathbb{R}^3$  tér kanonikus bázisában a  $\varphi, \psi, \varphi + \psi, \varphi - \psi, \varphi\psi, \psi\varphi$  lineáris transzformációk mátrixait!

$$\varphi(x) = (\chi_1 - \chi_2, \chi_1 + \chi_2 + \chi_3, \chi_1 + 2\chi_2 - \chi_3);$$

$$a_1 = (-1, 1, -1), \quad a_2 = (1, 0, 2), \quad a_3 = (0, 1, 2).$$

22. Legyen  $A$  – az  $\mathbb{R}^4$  vektortér  $\varphi$  lineáris transzformációjának mátrixa a  $c_1, c_2, c_3, c_4$  bázisban. Határozza meg az  $\text{Im}\varphi$  és a  $\text{Ker}\varphi$  alterek bázisát és dimenzióját! Győződjön meg arról, hogy  $\dim \text{Im}\varphi + \dim \text{Ker}\varphi = \dim \mathbb{R}^4$ !

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

23. Legyen  $A$  – az  $\mathbb{R}^4$  vektortér  $\varphi$  lineáris transzformáció mátrixa a kanonikus bázisban. Keresse meg a  $\varphi^2$ ,  $\varphi^3$ ,  $\varphi^4$  lineáris transzformációk mátrixait ebben a bázisban és győződjön meg arról, hogy  $f(\varphi) = 0$ , ahol  $f$  – a  $\varphi$  transzformáció karakterisztikus polinomja! Határozza meg a  $\varphi$  transzformáció összes sajátértékét és összes sajátvektorát!

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 7 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

24. Az  $\mathbb{R}^4$  euklideszi tér  $L$  altére az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak a tere. Keresse meg az  $L$  altér  $L^\perp$  ortogonális komplementerét az  $\mathbb{R}^4$  térben és a  $c$  vektor vetületét az  $L$  altérre és az  $L^\perp$  ortogonális komplementerére!

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 0; \end{cases} \quad c = (6, 2, 3, 0).$$

25. Az  $\mathbb{R}^4$  euklideszi térben ortonormalizálja az  $a_1, a_2, a_3, a_4$  vektorrendszert!

$$a_1 = (1, 2, 1, 1), \quad a_2 = (2, -1, 1, -1), \quad a_3 = (1, 1, 2, 0), \quad a_4 = (1, 1, 0, 0).$$

26. A  $C_{[\alpha, \beta]}^2$  euklideszi térben, mely az összes olyan függvény tere, melyek négyzete integrálható, ortogonalizálja a  $p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2, p_4 = x^3$  polinomok rendszerét (a  $C_{[\alpha, \beta]}^2$  tér két tetszőleges  $f$  és  $g$  függvényének skaláris szorzata a következő módon határozható meg:

$$(f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx \quad !$$

$$\alpha = -1, \quad \beta = 1.$$

27. Keresse meg megfelelően a valós és komplex számok teste felett az  $f(x_1, x_2, x_3)$  kvadratikus alak normálalakját valamint az ismeretlenek transzformációit, amelyek ehhez az alakhoz vezetnek az  $f$  alakot!

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 - 8x_1x_2 + 4x_2x_3 + 2x_1x_3.$$

28. A  $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X^T A X$  kvadratikus alak, amely az  $A$  mátrixszal van megadva, pozitív definit, negatív definit vagy indefinit?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

## 8. Változat

1. Számítsa ki a kifejezés értékét  $\frac{(6+2i)(8-6i)}{1+2i}$ !

2. Keresse meg a  $-\sqrt{3} + \sqrt{3}i$  komplex szám trigonometrikus alakját!

3. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 7 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 14 = 0! \end{cases}$$

4. Adja meg páronként idegen ciklusok szorzataként az alábbi permutációkat és határozza meg azok párosságát:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}!$$

5. A determináns meghatározása alapján számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & -\lambda & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & -\lambda & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda + a_4 \end{vmatrix}!$$

6. Számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}!$$

7. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a Cramer-szabály szerint:

$$\begin{cases} 2x + y + 4z + 8t = -1, \\ x + 3y - 6z + 2t = 3, \\ 3x - 2y + 2z - 2t = 8, \\ 2x - y + 2z = 4! \end{cases}$$

8. Keresse meg az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}!$$

9. Határozza meg, hogy lineárisan összefüggő-e az alábbi vektorrendszer:

$$a_1 = (5, 4, 3), a_2 = (3, 3, 2), a_3 = (8, 1, 3).$$

10. Számítsa ki az alábbi mátrix rangját az elemi átalakítások segítségével:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix} !$$

11. Vizsgálja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert megoldhatóságára és keresse meg általános és egy konkrét megoldását:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 7! \end{cases}$$

12. Keresse meg az egyenletrendszer fundamentális rendszerét és általános megoldását:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0! \end{cases}$$

13. Csoportot alkot-e az egész számok halmaza a szorzás műveletét tekintve?

14. Ossza el az  $f(x)$  polinomot a  $g(x)$  polinomra, ha:

$$f(x) = 3x^5 + 2x^2 - 1, \quad g(x) = 2x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4!$$

15. A Horner-elrendezés algoritmusának segítségével számítsa ki az  $f(x)$  polinom  $f(c)$  értékét (amikor  $x = c$ ), ha:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + x + 1, \quad c = -3!$$

16. Bizonyítsa be, hogy az  $a_1, a_2, a_3, a_4$  vektorrendszer az  $\mathbb{R}^4$  vektoriális tér bázisa lesz a valós számok  $\mathbb{R}$  teste fölött! Keresse meg az  $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) \in \mathbb{R}^4$  vektor koordinátáinak képleteit ebben a bázisban! Milyenek lesznek a  $c \in \mathbb{R}^4$  vektor koordinátái az  $a_1, a_2, a_3, a_4$  bázisban?

$$a_1 = (2, 1, 3, 1), a_2 = (5, 2, 2, 5), a_3 = (3, 1, 6, 0), a_4 = (0, 6, 0, 7), c = (0, -6, -5, -11).$$

17. Bizonyítsa be, hogy az  $a_1, a_2, a_3$  és a  $b_1, b_2, b_3$  vektorrendszerek az  $\mathbb{R}^3$  vektoriális tér bázisai! Keresse meg az átmeneti mátrixot és a koordináták átalakításának képleteit az egyik bázisból való átmenet során a másikba. Ezután határozza meg a  $c = (1, 2, 3)$  vektor koordinátáit mindkét bázisban, és ellenőrizze le a kapott eredményt a koordináták átalakítási képleteinek segítségével!

$$\begin{aligned} a_1 &= (6, 4, -1), & a_2 &= (1, -2, 2), & a_3 &= (9, 3, 1); \\ b_1 &= (-3, 7, 8), & b_2 &= (2, 1, 3), & b_3 &= (0, -2, -3). \end{aligned}$$

18. Keresse meg az  $L_1 + L_2$  összeg dimenzióját és bázisát, valamint az  $\mathbb{R}^5$  tér  $L_1$  és  $L_2$  lineáris altereinek  $L_1 \cap L_2$  metszetét, ahol  $L_1$  – az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak tere,  $L_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$  – az  $a_1, a_2$  vektorrendszerből előállított lineáris burok!

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0; \end{cases} \quad \begin{aligned} a_1 &= (1, 1, 1, 1, 1), \\ a_2 &= (3, -6, 1, 7, 3). \end{aligned}$$

19. A  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  leképezés minden  $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$  vektort  $\varphi(x) \in \mathbb{R}^3$  vektorba alakít át (képez). Bizonyítsa be, hogy a  $\varphi$  lineáris transzformáció lesz! Keresse meg a vektor képének koordinátáinak képletét az  $\mathbb{R}^3$  tér  $e_1, e_2, e_3$  kanonikus bázisában; az  $a = (1, 1, 1)$  és  $e_1, e_2, e_3$  vektorok képét és a  $\varphi$  transzformáció mátrixát ugyan ebben a bázisban!

$$\varphi(x) = (\chi_1 + 2\chi_2 - \chi_3, 2\chi_1 - \chi_2 + \chi_3, \chi_1 + 2\chi_2 - \chi_3).$$

20. Határozza meg az  $\mathbb{R}^3$  vektortér azon  $\varphi$  lineáris transzformációját, amely az  $a_1, a_2, a_3$  bázis vektorokat megfelelően ezen tér  $b_1, b_2, b_3$  vektoraiba alakítja át! Keresse meg a  $\varphi$  transzformáció mátrixát az  $a_1, a_2, a_3$  bázisban!

$$\begin{aligned} a_1 &= (2, 3, 5), & a_2 &= (0, 1, 2), & a_3 &= (1, 0, 0); \\ b_1 &= (1, 1, 1), & b_2 &= (1, 1, -1), & b_3 &= (2, 1, 2). \end{aligned}$$

21. Legyen  $\varphi$  lineáris transzformációja az  $\mathbb{R}^3$  vektortérnek, amely az  $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$  vektort a  $\varphi(x)$  vektorba alakítja át,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

– a  $\psi$  lineáris transzformáció mátrixa ugyan ezen tér  $a_1, a_2, a_3$  bázisában. Keresse meg az  $\mathbb{R}^3$  tér kanonikus bázisában a  $\varphi, \psi, \varphi + \psi, \varphi - \psi, \varphi\psi, \psi\varphi$  lineáris transzformációk mátrixait!

$$\varphi(x) = (\chi_2 + 2\chi_3, 2\chi_3 - \chi_1, 3\chi_1 - \chi_2);$$

$$a_1 = (1, 2, 1), a_2 = (0, 1, 1), a_3 = (1, 1, 1).$$

22. Legyen  $A$  – az  $\mathbb{R}^4$  vektortér  $\varphi$  lineáris transzformációjának mátrixa a  $c_1, c_2, c_3, c_4$  bázisban. Határozza meg az  $\text{Im}\varphi$  és a  $\text{Ker}\varphi$  alterek bázisát és dimenzióját! Győződjön meg arról, hogy  $\dim \text{Im}\varphi + \dim \text{Ker}\varphi = \dim \mathbb{R}^4$ !

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & -1 & -5 \\ -1 & -2 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

23. Legyen  $A$  – az  $\mathbb{R}^4$  vektortér  $\varphi$  lineáris transzformáció mátrixa a kanonikus bázisban. Keresse meg a  $\varphi^2$ ,  $\varphi^3$ ,  $\varphi^4$  lineáris transzformációk mátrixait ebben a bázisban és győződjön meg arról, hogy  $f(\varphi) = 0$ , ahol  $f$  – a  $\varphi$  transzformáció karakterisztikus polinomja! Határozza meg a  $\varphi$  transzformáció összes sajátértékét és összes sajátvektorát!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

24. Az  $\mathbb{R}^4$  euklideszi tér  $L$  altére az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak a tere. Keresse meg az  $L$  altér  $L^\perp$  ortogonális komplementerét az  $\mathbb{R}^4$  térben és a  $c$  vektor vetületét az  $L$  altérre és az  $L^\perp$  ortogonális komplementerére!

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, & c = (-5, -11, 3, 5). \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 14x_3 + 3x_4 = 0; \end{cases}$$

25. Az  $\mathbb{R}^4$  euklideszi térben ortonormalizálja az  $a_1, a_2, a_3, a_4$  vektorrendszert!

$$a_1 = (0, 0, 1, -1), a_2 = (0, 1, -1, 1), a_3 = (1, 1, -1, 1), a_4 = (1, 1, 1, 1).$$

26. A  $C_{[\alpha, \beta]}^2$  euklideszi térben, mely az összes olyan függvény tere, melyek négyzete integrálható, ortogonalizálja a  $p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2, p_4 = x^3$  polinomok rendszerét (a  $C_{[\alpha, \beta]}^2$  tér két tetszőleges  $f$  és  $g$  függvényének skaláris szorzata a következő módon határozható meg:

$$(f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx \text{ !}$$

$$\alpha = -2, \quad \beta = 2.$$

27. Keresse meg megfelelően a valós és komplex számok teste felett az  $f(x_1, x_2, x_3)$  kvadratikus alak normálalakját valamint az ismeretlenek transzformációit, amelyek ehhez az alakhoz vezetnek az  $f$  alakot!

$$f = -2x_1^2 - 2x_2^2 - 8x_1x_2 - 4x_2x_3.$$

28. A  $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X^T A X$  kvadratikus alak, amely az  $A$  mátrixsal van megadva, pozitív definit, negatív definit vagy indefinit?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

## 9. Változat

1. Számítsa ki a kifejezés értékét  $\frac{(9+3i)(12-9i)}{1+2i}$  !

2. Keresse meg a  $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$  komplex szám trigonometrikus alakját!

3. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0! \end{cases}$$

4. Határozza meg az alábbi hetedrendű permutációk szorzatát:

$$[(1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6\ 7)] \cdot [(1\ 4\ 7)(2\ 3\ 5\ 6)]!$$

5. A determináns meghatározása alapján számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}!$$

6. Számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}!$$

7. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a Cramer-szabály szerint:

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z + t - 5 = 0, \\ 3x - 7y + 6z - t + 1 = 0, \\ 5x - 9y + 3z + 4t - 7 = 0, \\ 4x - 6y + 3z + t - 8 = 0! \end{cases}$$

8. Keresse meg az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}!$$

9. Határozza meg, hogy lineárisan összefüggő-e az alábbi vektorrendszer:

$$d_1 = (1,0,0,2,5), d_2 = (0,1,0,3,4), d_3 = (0,0,1,4,7), d_4 = (2,-3,4,11,12).$$

10. Számítsa ki az alábbi mátrix rangját az elemi átalakítások segítségével:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}!$$

11. Vizsgálja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert megoldhatóságára és keresse meg általános és egy konkrét megoldását:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1! \end{cases}$$

12. Keresse meg az egyenletrendszer fundamentális rendszerét és általános megoldását:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0! \end{cases}$$

13. Csoportot alkot-e a természetes számok halmaza a szorzás műveletét tekintve?

14. Ossza el az  $f(x)$  polinomot a  $g(x)$  polinomra, ha:

$$f(x) = x^5 + x^2 - 1, \quad g(x) = 3x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4!$$

15. A Horner-elrendezés algoritmusának segítségével számítsa ki az  $f(x)$  polinom  $f(c)$  értékét (amikor  $x = c$ ), ha:

$$f(x) = 5x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1, \quad c = -3!$$

16. Bizonyítsa be, hogy az  $a_1, a_2, a_3, a_4$  vektorrendszer az  $\mathbb{R}^4$  vektoriális tér bázisa lesz a valós számok  $\mathbb{R}$  teste fölött! Keresse meg az  $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) \in \mathbb{R}^4$  vektor koordinátáinak képleteit ebben a bázisban! Milyenek lesznek a  $c \in \mathbb{R}^4$  vektor koordinátái az  $a_1, a_2, a_3, a_4$  bázisban?

$$a_1 = (4, 3, 2, 1), a_2 = (-1, 3, 3, 3), a_3 = (2, 1, 2, 1), a_4 = (1, 5, 0, 1), c = (-1, -1, 2, 2).$$

17. Bizonyítsa be, hogy az  $a_1, a_2, a_3$  és a  $b_1, b_2, b_3$  vektorrendszerek az  $\mathbb{R}^3$  vektoriális tér bázisai! Keresse meg az átmeneti mátrixot és a koordináták átalakításának képleteit az egyik bázisból való átmenet során a másikba. Ezután határozza meg a  $c = (1, 2, 3)$  vektor koordinátáit mindkét bázisban, és ellenőrizze le a kapott eredményt a koordináták átalakítási képleteinek segítségével!

$$\begin{aligned} a_1 &= (4, 3, 2), & a_2 &= (1, 1, 3), & a_3 &= (2, 2, 5); \\ b_1 &= (5, 4, 3), & b_2 &= (2, 2, 1), & b_3 &= (1, 6, -1). \end{aligned}$$

18. Keresse meg az  $L_1 + L_2$  összeg dimenzióját és bázisát, valamint az  $\mathbb{R}^5$  tér  $L_1$  és  $L_2$  lineáris altereinek  $L_1 \cap L_2$  metszetét, ahol  $L_1$  – az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak tere,  $L_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$  – az  $a_1, a_2$  vektorrendszerből előállított lineáris burok!

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 0, \\ 4x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 = 0; \end{cases} \quad \begin{aligned} a_1 &= (1, 0, 1, 0, 1), \\ a_2 &= (1, 3, 7, 9, -10). \end{aligned}$$

19. A  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  leképezés minden  $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$  vektort  $\varphi(x) \in \mathbb{R}^3$  vektorba alakít át (képez). Bizonyítsa be, hogy a  $\varphi$  lineáris transzformáció lesz! Keresse meg a vektor képének koordinátáinak képletét az  $\mathbb{R}^3$  tér  $e_1, e_2, e_3$  kanonikus bázisában; az  $a = (1, 1, 1)$  és  $e_1, e_2, e_3$  vektorok képét és a  $\varphi$  transzformáció mátrixát ugyan ebben a bázisban!

$$\varphi(x) = (\chi_2 + 4\chi_3, \chi_1 + \chi_2 - 2\chi_3, 2\chi_2 - 2\chi_3).$$

20. Határozza meg az  $\mathbb{R}^3$  vektortér azon  $\varphi$  lineáris transzformációját, amely az  $a_1, a_2, a_3$  bázis vektorokat megfelelően ezen tér  $b_1, b_2, b_3$  vektoraiba alakítja át! Keresse meg a  $\varphi$  transzformáció mátrixát az  $a_1, a_2, a_3$  bázisban!

$$\begin{aligned} a_1 &= (2, 0, 3), & a_2 &= (4, 1, 5), & a_3 &= (3, 1, 2); \\ b_1 &= (1, 2, -1), & b_2 &= (4, 5, -2), & b_3 &= (1, -1, 1). \end{aligned}$$

21. Legyen  $\varphi$  lineáris transzformációja az  $\mathbb{R}^3$  vektortérnek, amely az  $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$  vektort a  $\varphi(x)$  vektorba alakítja át,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

– a  $\psi$  lineáris transzformáció mátrixa ugyan ezen tér  $a_1, a_2, a_3$  bázisában. Keresse meg az  $\mathbb{R}^3$  tér kanonikus bázisában a  $\varphi, \psi, \varphi + \psi, \varphi - \psi, \varphi\psi, \psi\varphi$  lineáris transzformációk mátrixait!

$$\varphi(x) = (\chi_1 + 4\chi_2 + \chi_3, 2\chi_1 - 3\chi_3, \chi_2 - 3\chi_1);$$

$$a_1 = (3, 1, 1), a_2 = (1, 2, -1), a_3 = (2, 0, 1).$$

22. Legyen  $A$  – az  $\mathbb{R}^4$  vektortér  $\varphi$  lineáris transzformációjának mátrixa a  $c_1, c_2, c_3, c_4$  bázisban. Határozza meg az  $\text{Im}\varphi$  és a  $\text{Ker}\varphi$  alterek bázisát és dimenzióját! Győződjön meg arról, hogy  $\dim \text{Im}\varphi + \dim \text{Ker}\varphi = \dim \mathbb{R}^4$ !

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

23. Legyen  $A$  – az  $\mathbb{R}^4$  vektortér  $\varphi$  lineáris transzformáció mátrixa a kanonikus bázisban. Keresse meg a  $\varphi^2$ ,  $\varphi^3$ ,  $\varphi^4$  lineáris transzformációk mátrixait ebben a bázisban és győződjön meg arról, hogy  $f(\varphi) = 0$ , ahol  $f$  – a  $\varphi$  transzformáció karakterisztikus polinomja! Határozza meg a  $\varphi$  transzformáció összes sajátértékét és összes sajátvektorát!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

24. Az  $\mathbb{R}^4$  euklideszi tér  $L$  altere az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak a tere. Keresse meg az  $L$  altér  $L^\perp$  ortogonális komplementerét az  $\mathbb{R}^4$  térben és a  $c$  vektor vetületét az  $L$  altérre és az  $L^\perp$  ortogonális komplementerére!

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0, & c = (-15, 29, 3, -5). \\ 4x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ -10x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 7x_4 = 0; \end{cases}$$

25. Az  $\mathbb{R}^4$  euklideszi térben ortonormalizálja az  $a_1, a_2, a_3, a_4$  vektorrendszert!

$$a_1 = (-1, 0, 0, 1), a_2 = (0, 1, 1, 1), a_3 = (1, 1, -1, -1), a_4 = (1, 0, -1, 0).$$

26. A  $C_{[\alpha, \beta]}^2$  euklideszi térben, mely az összes olyan függvény tere, melyek négyzete integrálható, ortogonalizálja a  $p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2, p_4 = x^3$  polinomok rendszerét (a  $C_{[\alpha, \beta]}^2$  tér két tetszőleges  $f$  és  $g$  függvényének skaláris szorzata a következő módon határozható meg:

$$(f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx \text{ !}$$

$$\alpha = -2, \quad \beta = 0.$$

27. Keresse meg megfelelően a valós és komplex számok teste felett az  $f(x_1, x_2, x_3)$  kvadratikus alak normálalakját valamint az ismeretlenek transzformációit, amelyek ehhez az alakhoz vezetnek az  $f$  alakot!

$$f = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 6x_2x_3 - 2x_1x_3.$$

28. A  $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X^T A X$  kvadratikus alak, amely az  $A$  mátrixszal van megadva, pozitív definit, negatív definit vagy indefinit?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

## 10. Változat

1. Számítsa ki a kifejezés értékét  $\frac{(18+6i)(24-18i)}{1+2i}$ !

2. Keresse meg a  $1 - 1i$  komplex szám trigonometrikus alakját!

3. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 1 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 1 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 1 = 0! \end{cases}$$

4. Határozza meg az alábbi hetedrendű permutációk szorzatát:

$$[(1\ 3)(5\ 7)(2\ 4\ 6)] \cdot [(1\ 3\ 5)(2\ 4)(6\ 7)]!$$

5. A determináns meghatározása alapján számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-2} & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}!$$

6. Számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}!$$

7. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a Cramer-szabály szerint:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6 = 0, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 + 8 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8 = 0! \end{cases}$$

8. Keresse meg az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}!$$

9. Határozza meg, hogy lineárisan összefüggő-e az alábbi vektorrendszer:

$$a_1 = (5, 4, 3), a_2 = (3, 3, 2), a_3 = (8, 1, 3).$$

10. Számítsa ki az alábbi mátrix rangját az elemi átalakítások segítségével:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}!$$

11. Vizsgálja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert megoldhatóságára és keresse meg általános és egy konkrét megoldását:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 7! \end{cases}$$

12. Keresse meg az egyenletrendszer fundamentális rendszerét és általános megoldását:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0! \end{cases}$$

13. Csoportot alkot-e a racionális számok halmaza a szorzás műveletét tekintve?

14. Ossza el az  $f(x)$  polinomot a  $g(x)$  polinomra, ha:

$$f(x) = 6x^5 + 2x^2 - 1, \quad g(x) = 2x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4!$$

15. A Horner-elrendezés algoritmusának segítségével számítsa ki az  $f(x)$  polinom  $f(c)$  értékét (amikor  $x = c$ ), ha:

$$f(x) = 7x^4 - 3x^3 + 5x^2 + x + 1, \quad c = -3!$$

16. Bizonyítsa be, hogy az  $a_1, a_2, a_3, a_4$  vektorrendszer az  $\mathbb{R}^4$  vektoriális tér bázisa lesz a valós számok  $\mathbb{R}$  teste fölött! Keresse meg az  $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) \in \mathbb{R}^4$  vektor koordinátáinak képleteit ebben a bázisban! Milyenek lesznek a  $c \in \mathbb{R}^4$  vektor koordinátái az  $a_1, a_2, a_3, a_4$  bázisban?

$$a_1 = (0, 5, 1, 3), a_2 = (2, 4, 0, 1), a_3 = (1, 3, 1, 5), a_4 = (3, 6, 0, 1), c = (3, 8, -2, -10).$$

17. Bizonyítsa be, hogy az  $a_1, a_2, a_3$  és a  $b_1, b_2, b_3$  vektorrendszerek az  $\mathbb{R}^3$  vektoriális tér bázisai! Keresse meg az átmeneti mátrixot és a koordináták átalakításának képleteit az egyik bázisból való átmenet során a másikba. Ezután határozza meg a  $c = (1, 2, 3)$  vektor koordinátáit mindkét bázisban, és ellenőrizze le a kapott eredményt a koordináták átalakítási képleteinek segítségével!

$$\begin{aligned} a_1 &= (8, 1, -1), & a_2 &= (3, 2, -3), & a_3 &= (4, -1, 2); \\ b_1 &= (1, 2, -1), & b_2 &= (4, 4, -1), & b_3 &= (3, 0, 2). \end{aligned}$$

18. Keresse meg az  $L_1 + L_2$  összeg dimenzióját és bázisát, valamint az  $\mathbb{R}^5$  tér  $L_1$  és  $L_2$  lineáris altereinek  $L_1 \cap L_2$  metszetét, ahol  $L_1$  – az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak tere,  $L_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$  – az  $a_1, a_2$  vektorrendszerből előállított lineáris burok!

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_4 + 2x_5 = 0, \\ -x_1 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 11x_4 + 6x_5 = 0; \end{cases} \quad \begin{aligned} a_1 &= (1, 0, 1, 0, 1), \\ a_2 &= (-11, 6, -6, 1, -3). \end{aligned}$$

19. A  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  leképezés minden  $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$  vektort  $\varphi(x) \in \mathbb{R}^3$  vektorba alakít át (képez). Bizonyítsa be, hogy a  $\varphi$  lineáris transzformáció lesz! Keresse meg a vektor képének koordinátáinak képletét az  $\mathbb{R}^3$  tér  $e_1, e_2, e_3$  kanonikus bázisában; az  $a = (1, 1, 1)$  és  $e_1, e_2, e_3$  vektorok képét és a  $\varphi$  transzformáció mátrixát ugyan ebben a bázisban!

$$\varphi(x) = (2\chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3, \chi_1 - \chi_3, \chi_2 + \chi_3).$$

20. Határozza meg az  $\mathbb{R}^3$  vektortér azon  $\varphi$  lineáris transzformációját, amely az  $a_1, a_2, a_3$  bázis vektorokat megfelelően ezen tér  $b_1, b_2, b_3$  vektoraiba alakítja át! Keresse meg a  $\varphi$  transzformáció mátrixát az  $a_1, a_2, a_3$  bázisban!

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, 1, 1), & a_2 &= (1, 1, -1), & a_3 &= (2, 1, 2); \\ b_1 &= (1, 1, 1), & b_2 &= (1, 1, 1), & b_3 &= (1, 1, 0). \end{aligned}$$

21. Legyen  $\varphi$  lineáris transzformációja az  $\mathbb{R}^3$  vektortérnek, amely az  $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$  vektort a  $\varphi(x)$  vektorba alakítja át,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

– a  $\psi$  lineáris transzformáció mátrixa ugyan ezen tér  $a_1, a_2, a_3$  bázisában. Keresse meg az  $\mathbb{R}^3$  tér kanonikus bázisában a  $\varphi, \psi, \varphi + \psi, \varphi - \psi, \varphi\psi, \psi\varphi$  lineáris transzformációk mátrixait!

$$\varphi(x) = (2\chi_2 - 2\chi_3, 2\chi_1 - 2\chi_3, -\chi_2 - \chi_1);$$

$$a_1 = (0, 1, -1), \quad a_2 = (1, 2, -1), \quad a_3 = (1, 1, -1).$$

22. Legyen  $A$  – az  $\mathbb{R}^4$  vektortér  $\varphi$  lineáris transzformációjának mátrixa a  $c_1, c_2, c_3, c_4$  bázisban. Határozza meg az  $\text{Im}\varphi$  és a  $\text{Ker}\varphi$  alterek bázisát és dimenzióját! Győződjön meg arról, hogy  $\dim \text{Im}\varphi + \dim \text{Ker}\varphi = \dim \mathbb{R}^4$ !

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -2 & -4 \\ 4 & -3 & 2 & -4 \\ 5 & -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

23. Legyen  $A$  – az  $\mathbb{R}^4$  vektortér  $\varphi$  lineáris transzformáció mátrixa a kanonikus bázisban. Keresse meg a  $\varphi^2$ ,  $\varphi^3$ ,  $\varphi^4$  lineáris transzformációk mátrixait ebben a bázisban és győződjön meg arról, hogy  $f(\varphi) = 0$ , ahol  $f$  – a  $\varphi$  transzformáció karakterisztikus polinomja! Határozza meg a  $\varphi$  transzformáció összes sajátértékét és összes sajátvektorát!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

24. Az  $\mathbb{R}^4$  euklideszi tér  $L$  altere az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak a tere. Keresse meg az  $L$  altér  $L^\perp$  ortogonális komplementerét az  $\mathbb{R}^4$  térben és a  $c$  vektor vetületét az  $L$  altérre és az  $L^\perp$  ortogonális komplementerére!

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, & c = (14, -5, 1, -5). \\ -2x_1 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 0; \end{cases}$$

25. Az  $\mathbb{R}^4$  euklideszi térben ortonormalizálja az  $a_1, a_2, a_3, a_4$  vektorrendszert!

$$a_1 = (0, 1, 1, 1), \quad a_2 = (1, -1, 2, 0), \quad a_3 = (0, 0, 1, 1), \quad a_4 = (1, 1, 1, 1).$$

26. A  $C_{[\alpha, \beta]}^2$  euklideszi térben, mely az összes olyan függvény tere, melyek négyzete integrálható, ortogonalizálja a  $p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2, p_4 = x^3$  polinomok rendszerét (a  $C_{[\alpha, \beta]}^2$  tér két tetszőleges  $f$  és  $g$  függvényének skaláris szorzata a következő módon határozható meg:

$$(f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx \quad !$$

$$\alpha = -1, \quad \beta = 2.$$

27. Keresse meg megfelelően a valós és komplex számok teste felett az  $f(x_1, x_2, x_3)$  kvadratikus alak normálalakját valamint az ismeretlenek transzformációit, amelyek ehhez az alakhoz vezetnek az  $f$  alakot!

$$f = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3 + 2x_1x_3.$$

28. A  $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X^T A X$  kvadratikus alak, amely az  $A$  mátrixszal van megadva, pozitív definit, negatív definit vagy indefinit?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

## II. Második félév. Geometria

### Példadolgozat megoldással

1. Találjon olyan pontot a téglalapban, amelyből kiinduló vektorok összege, amelyek a négyszög csúcsaihoz vezetnek, egyenlő legyen nullvektorral!

**Megoldás:**

A téglalap átlóinak metszéspontja (azaz a középpont) kielégíti ezt a feltételt. Ha a téglalap csúcsai:  $A, B, C, D$ , akkor

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0},$$

ha  $O$  a téglalap középpontja.

2. Adott az  $\vec{a} = (2, -1, 3)$ ,  $\vec{b} = (4, 0, -2)$  és  $\vec{c} = (-1, 1, 2)$  vektor.

Fejtse ki az  $\vec{m} = (5, 0, 7)$  vektort az  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  bázis szerint!

**Megoldás:**

Keressük az  $\alpha, \beta, \gamma$  valós számokat, amelyekre:

$$\alpha(2, -1, 3) + \beta(4, 0, -2) + \gamma(-1, 1, 2) = (5, 0, 7).$$

Ez a következő egyenletrendszer adja:

$$\begin{cases} 2\alpha + 4\beta - \gamma = 5; \\ -\alpha + \gamma = 0; \\ 3\alpha - 2\beta + 2\gamma = 7. \end{cases}$$

Megoldva:

$$\gamma = \alpha$$

$$3\alpha - 2\beta + 2\alpha = 7 \rightarrow 5\alpha - 2\beta = 7$$

$$2\alpha + 4\beta - \alpha = 5 \rightarrow \alpha + 4\beta = 5$$

Megoldás:  $\alpha = 3, \beta = 0.5, \gamma = 3$ .

Tehát:  $\vec{m} = 3\vec{a} + 0.5\vec{b} + 3\vec{c}$ .

3. Milyen feltétel mellett lesz  $\vec{a} + \vec{b} \perp \vec{a} - \vec{b}$ ?

**Megoldás:**

A két vektor akkor merőleges, ha a skalárszorzatuk 0:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0 \Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}|.$$

4. Határozza meg az  $\vec{a} = -2\vec{m} + 4\vec{n}$  abszolút értékét, ha  $|\vec{m}| = 3, |\vec{n}| = 2$ , a közbezárt szögük  $\pi/6$ !

**Megoldás:**

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 &= (-2)^2 \cdot |\vec{m}|^2 + 4^2 \cdot |\vec{n}|^2 + 2 \cdot (-2) \cdot 4 \cdot |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \\ &= 4 \cdot 9 + 16 \cdot 4 + (-16) \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 36 + 64 - 48\sqrt{3} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{100 - 48\sqrt{3}} \approx \\ &\approx 3.52 \end{aligned}$$

5. Az  $\vec{a}$  és  $\vec{b}$  vektorok  $\varphi = \pi/4$  szöget zárják be,  $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 2\sqrt{2}$ . Számítsa ki az  $[[\vec{a}, \vec{b}]]$  értékét!

**Megoldás:**

$$|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi) = 5 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10.$$

6. Adottak az  $\vec{a} = (1, -2, 3), \vec{b} = (4, 0, -1)$  vektorok. Számítsa ki  $[\vec{a}, \vec{b}]$ !

**Megoldás:**

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}((-2) \cdot (-1) - 3 \cdot 0) - \vec{j}(1 \cdot (-1) - 3 \cdot 4) + \vec{k}(1 \cdot 0 - (-2) \cdot 4) = \\ &= (2, 11, 8). \end{aligned}$$

7. Számítsa ki a következő vegyes szorzatot:  $(\vec{i} + \vec{j}, \vec{j} + \vec{k}, \vec{k} + \vec{i})$ !

**Megoldás:**

Legyen

$$\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} = (1, 1, 0), \vec{b} = \vec{j} + \vec{k} = (0, 1, 1), \vec{c} = \vec{k} + \vec{i} = (1, 0, 1).$$

Előbb számítsuk ki  $[\vec{b}, \vec{c}]$ :

$$[\vec{b}, \vec{c}] = (1 \cdot 1 - 1 \cdot 0, 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1, 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = (1, 1, -1).$$

Ezután:

$$(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = (1, 1, 0) \cdot (1, 1, -1) = 1 + 1 + 0 = 2.$$

8. Ellenorizze le, hogy az  $\vec{a} = (2, -1, 3), \vec{b} = (0, 2, -1), \vec{c} = (-2, 3, -2)$  vektorok komplanárisak!

**Megoldás:**

Számítsuk ki a vegyes szorzatot:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot [\vec{b}, \vec{c}].$$

Először:

$$[\vec{b}, \vec{c}] = (2 \cdot (-2) - (-1) \cdot 3, -1 \cdot (-2) - 0 \cdot (-2), 0 \cdot 3 - 2 \cdot (-2)) = (-1, 2, 4).$$

$$\vec{a} \cdot [\vec{b}, \vec{c}] = (2, -1, 3) \cdot (-1, 2, 4) = -2 - 2 + 12 = 8.$$

Mivel nem 0, nem komplanárisak.

9. Határozza meg, hogy az  $A_1(0,2)$ ,  $A_2(3,-1)$ ,  $A_3(2,1)$  pontok közül melyek fekszenek az  $x - y + 1 = 0$  egyenesen!

**Megoldás:** Helyettesítés:

- $A_1$ :  $0 - 2 + 1 = -1 \neq 0 \rightarrow$  nem fekszik rajta.
- $A_2$ :  $3 - (-1) + 1 = 5 \neq 0 \rightarrow$  nem fekszik rajta.
- $A_3$ :  $2 - 1 + 1 = 2 \neq 0 \rightarrow$  nem fekszik rajta.

Egyik pont sem fekszik az egyenesen.

10. Határozza meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az  $A(3,1)$  ponton és merőleges a  $4x + y - 6 = 0$  egyenesre!

**Megoldás:**

Az adott egyenes normálvektora:  $(4,1)$ , tehát az új egyenes irányvektora  $(4,1)$ .

Tehát:  $\frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{1}$  a keresett egyeness kanonikus egyenlete lesz.

11. Határozza meg annak a síknak az egyenletét, amelynek minden pontja egyenlő távolságra van az  $A(2, -1, 4)$  és  $B(-4, 3, 2)$  pontoktól!

**Megoldás:**

Ez a sík az  $A$  és  $B$  pontokat összekötő szakasz felezősíkjá.

Felezőpont:

$$M = \left( \frac{2+(-4)}{2}, \frac{-1+3}{2}, \frac{4+2}{2} \right) = (-1, 1, 3).$$

Irányvektor:  $\vec{n} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-6, 4, -2)$ .

A sík egyenlete:

$$-6(x + 1) + 4(y - 1) - 2(z - 3) = 0 \Rightarrow -6x + 4y - 2z + 4 = 0.$$

12. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely áthalad az  $M(1, 0, -2)$  ponton, és párhuzamos az  $\vec{a} = (1, 2, 1)$  és  $\vec{b} = (0, -1, 2)$  vektorokkal!

**Megoldás:**

Sík egyenlete:  $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ .

Vegyük a vektoriális szorzatot:

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (4 + 1, -2, -1) = (5, -2, -1).$$

Sík egyenlete:

$$5(x - 1) - 2(y - 0) - (z + 2) = 0 \Rightarrow 5x - 2y - z - 3 = 0.$$

**13.** Határozza meg annak a síknak az egyenletét, amely merőleges az  $(x + 2)/1 = (y - 3)/(-2) = (z + 1)/2$  egyenesre és áthalad a  $P(2, 4, 1)$  ponton!

**Megoldás:** Az egyenes irányvektora egybeesik a sík normálvektorával:  $(1, -2, 2)$ . Sík egyenlete:  $1(x - 2) - 2(y - 4) + 2(z - 1) = 0$ , vagyis  $x - 2y + 2z - 4 = 0$ .

**14.** Határozza meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad az  $M(0, 2, -1)$  ponton, és merőleges a  $x - y + z = 5$  síkra!

**Megoldás:** Sík normálvektora:  $(1, -1, 1) \rightarrow$  egyenes irányvektora. Egyenes:  $x = t, y = -t + 2, z = t - 1$ .

**15.** Határozza meg az ellipszis egyenletét, ha a fókuszpontok közötti távolság 10 és az excentricitása  $\varepsilon = \frac{3}{5}$ !

**Megoldás:**

- Fókusz távolság:  $2c = 10 \Rightarrow c = 5$ .
- $\varepsilon = \frac{c}{a} \Rightarrow a = \frac{c}{\varepsilon} = \frac{5}{3/5} = \frac{25}{3}$ .
- $b^2 = a^2 - c^2 = \left(\frac{25}{3}\right)^2 - 25 = \frac{625}{9} - 25 = \frac{625 - 225}{9} = \frac{400}{9}$ .

Egyenlet:

$$\frac{x^2}{\frac{625}{9}} + \frac{y^2}{\frac{400}{9}} = 1.$$

**16.** Határozza meg a következő körök középpontjai közötti távolságot:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 12x + 14y + 64 &= 0, \\ x^2 + y^2 + 4x - 10y - 96 &= 0. \end{aligned}$$

**Megoldás:**

- Első kör középpontja:  $(6, -7)$ .
- Második kör középpontja:  $(-2, 5)$ .

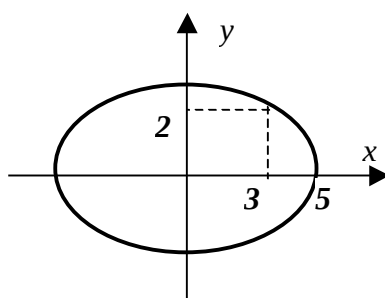
Távolság:

$$d = \sqrt{(6 + 2)^2 + (-7 - 5)^2} = \sqrt{64 + 144} = \sqrt{208}.$$

## 1. Változat

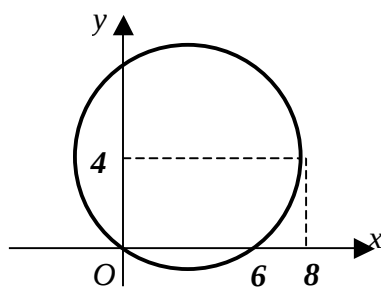
1. Lehet-e az  $\vec{a} = (1, 2, -3)$ ,  $\vec{b} = (2, -1, 1)$  és  $\vec{c} = (-3, -1, 2)$  vektorokból háromszöget alkotni?
2. Az  $\vec{a}$  és  $\vec{b}$  nem kollineáris vektorok alapján ábrázolja a következő vektort  $\vec{a} + 2\vec{b}$ !
3. Határozza meg az  $\vec{a} = -3\vec{m} + \vec{n}$  vektor abszolút értékét, ha  $|\vec{m}| = 1$ ,  $|\vec{n}| = 3$ ,  $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$ !
4. Határozza meg az  $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$  és  $\vec{b} = -3\vec{m} + 2\vec{n}$  vektorok közötti szöget, ha  $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 2$ ,  $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$ ! Az  $\vec{a}$  és  $\vec{b}$  vektorok a  $\varphi$  szöget zárják be,  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ,  $|\vec{a}| = \sqrt{3}$ ,  $|\vec{b}| = 4$ . Határozza meg az  $||[\vec{a}, \vec{b}]||$ !
5. Az  $\alpha$  milyen értéke mellett kollineárisak a  $\vec{p} = \alpha\vec{a} - 4\vec{b}$  és a  $\vec{q} = 2\vec{a} + 5\vec{b}$  vektorok?
6. Bizonyítsa, hogy az  $\vec{a} = (3, 2, -1)$ ,  $\vec{b} = (1, -1, 3)$  és  $\vec{c} = (9, 1, 7)$  vektorok lineárisan összefüggőek, és határozzon meg egy tetszőleges lineáris kombinációjukat!
7. Határozza meg hogy az  $A(2, 3, 1)$ ,  $B(6, 1, 4)$ ,  $C(0, -1, 1)$  és  $D(2, -1, 3)$  pontok egy síkon fekszenek-e?
8. Határozza meg az  $A(-4, -2)$ ,  $B(2, 0)$  és  $C(2, -4)$  csúcspontokkal rendelkező háromszög súlyvonalainak egyenleteit!
9. Határozza meg azon egyenes egyenletét, amely  $\varphi$  szöget zár be az  $Ox$  tengely pozitív irányával és az  $Oy$  tengelyt a  $b = 3$  szakaszban metszi!
10. Határozza meg az  $M(2, 3, -5)$  pontból a  $4x - 2y + 5z - 12 = 0$  síkra húzott merőleges hosszát!
11. Bizonyítsa be, hogy a  $7x + 4y + 7z + 1 = 0$ ,  $2x - y - z + 2 = 0$ ,  $x + 2y + 3z - 1 = 0$  síkok egy egyenesen haladnak át!
12. Határozza meg a  $P(2, -1, 3)$  pont vetületét az  $x = 3t$ ,  $y = 5t - 7$ ,  $z = 2t$  egyenesre.
13. Határozza meg a  $P(4, 1, 6)$  pont  $Q$  szimmetrikus pontját a következő egyeneshez képest  

$$\begin{cases} x - y - 4z + 12 = 0, \\ 2x + y - 2z + 3 = 0! \end{cases}$$
14. . Határozza meg az ellipszis egyenletét, ha a fókuszpontok közötti távolság 12 és az excentricitása  $\varepsilon = \frac{2}{3}$ !
15. Határozza meg az ellipszis egyenletét, ha az áthalad az  $A(6; 4)$  és  $B(8; 3)$  pontokon.
16. Határozza meg az alábbi ábrán látható görbe egyenletét!



## 2. Változat

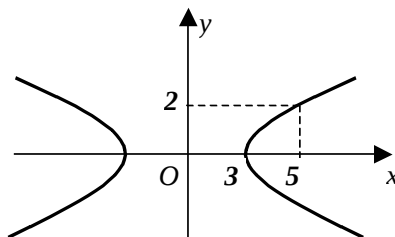
1. Milyen feltételnek kell megfelelnie az  $\vec{a}$  és  $\vec{b}$  vektoroknak, hogy az  $\vec{a} + \vec{b}$  vektor a közöttük lévő szöget felezze?
2. Az  $ABC$  háromszögben  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$  és  $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ . Határozza meg azokat a vektorokat, amelyek egybeesnek a háromszög súlyvonalalaival!
3. Az  $\vec{a}$  és  $\vec{b}$  vektorok skalárszorzata alapján határozza meg a köztük lévő szög koszinuszát és tangensét!
4. Milyen feltételnek kell megfelelnie az  $\vec{a}$  és  $\vec{b}$  vektoroknak, hogy  $\vec{a} + \vec{b} \perp \vec{a} - \vec{b}$ ?
5. Az  $\alpha$  milyen értéke mellett kollineárisak a  $\vec{p} = \alpha\vec{a} - 4\vec{b}$  és a  $\vec{q} = 2\vec{a} + 5\vec{b}$  vektorok?
6. Az  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  és  $\vec{c}$  vektorok kielégítik a  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$  feltételt. Bizonyítsa, hogy  $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}]$ !
7. Komplanárisak-e a következő vektorok:  $\vec{a} = (2, 1, 3)$ ,  $\vec{b} = (1, -3, 2)$ ,  $\vec{c} = (4, -5, 7)$ .
8. Számítsa ki az alábbi vegyes szorzatokat:  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ !
9. Határozza meg, hogy az  $x - 3y + 6 = 0$  egyenes hol metszi a koordináta-tengelyeket!
10. Bizonyítsa be, hogy az  $m^2x^2 + 2mnxy + n^2y^2 - 4l^2 = 0$  egyenlet egy egyenes-párt határoz meg! Határozza meg az egyenesek egyenleteit!
11. Határozza meg azon sík egyenletét, melynek minden pontja egyenlő távolságra van a  $P(1, -4, 2)$  és  $Q(7, 1 - 5)$  pontoktól!
12. Bizonyítsa be, hogy a  $7x + 4y + 7z + 1 = 0$ ,  $2x - y - z + 2 = 0$ ,  $x + 2y + 3z - 1 = 0$  síkok egy egyenesen haladnak át!
13. Határozza meg azt a pontot, amely szimmetrikus a  $P(1, -2, -6)$  ponthoz az
14.  $\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0, \\ x - z + 2 = 0 \end{cases}$  egyeneshez képest!
15. Határozza meg a  $P(-1, 3, 3)$  pont és az  $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1}$  egyenes közötti távolságot!
16. Határozza meg azon egyenesek által bezárt szöget, amelyek áthaladnak az  $x^2 + y^2 - 4x - 16y + 32 = 0$  körvonal középpontján és az  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$  ellipszis fókuszpontjain megfelelően!
17. Határozza meg a körvonal egyenletét, ha az áthalad az  $A(-8; 3)$  és  $B(2; -7)$  pontokon és a középpontja az  $x + 4y + 16 = 0$  egyenesen fekszik!
18. Határozza meg az alábbi ábrán látható görbe egyenletét!



### 3. Változat

- Legyen  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$  – az  $ABCD$  paralelogramma három csúcspontjának helyvektorai. Határozza meg a  $D$  csúcspont helyvektorát!
- Az  $x$  és  $y$  milyen valós értékeire az  $\vec{a}$  és  $\vec{b}$  vektorok nem kollineárisak, ha a vektorok a következő összefüggéssel vannak megadva:  $(3x - y + 2)\vec{a} + (x + 2y + 3)\vec{b} = \vec{0}$ ?
- Határozza meg a háromszög belső szögeit, ha csúcspontjai  $A(0,0,5)$ ,  $B(1,1,1)$  és  $C(-1,2,3)$ !
- Az  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  vektorok háromszöget alkotnak. Számítsa ki:  $(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{c})$ !
- Határozza meg a paralelogramma területét, amely a következő vektorokra van felépítve:  $\vec{a} = (8,4,1)$ ,  $\vec{b} = (2, -2,1)$ !
- Adva vannak az  $A(3,1,2)$ ,  $B(4,0,1)$ ,  $C(5,4,7)$  pontok. Határozza meg az  $ABC$  háromszög területét!
- Bizonyítsa, hogy az  $\vec{a} = (3,2, -1)$ ,  $\vec{b} = (1, -1,3)$  és  $\vec{c} = (9,1,7)$  vektorok lineárisan összefüggők, és határozzon meg egy tetszőleges lineáris kombinációjukat!
- Határozza meg hogy az  $A(2,3,1)$ ,  $B(6,1,4)$ ,  $C(0, -1,1)$  és  $D(2, -1,3)$  pontok egy síkon fekszenek!
- Bizonyítsa be, hogy tetszőleges egyenes egyenlete megadható paraméteres alakban:  $x = x_0 + lt, y = y_0 + mt$ !
- Határozza meg azon pontok mértani helyének egyenletét, amelyeknél az  $A(-2,1)$  és  $B(1,3)$  pontoktól való távolságainak négyzeteinek különbsége 5-tel egyenlő!
- Határozza meg a sík egyenletét, ha az  $A(1, -2,0)$  és  $B(3,2,6)$  pontok szimmetrikusak hozzá képest!
- Határozza meg annak a síknak az egyenletét, amelyre az origóból a síkra húzott merőleges talppontja az  $A(-1,2,3)$  pont!
- Határozza meg sík egyenletét, amely áthalad az  

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{-2}, \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2}$$
egyeneseken!
- Bizonyítsa be, hogy az  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$  és  $\begin{cases} x = 3t + 7, \\ y = 2t + 2, \\ z = -2t + 1 \end{cases}$  egyenesek egy síkon helyezkednek el, és határozza meg ezen sík egyenletét!
- Határozza meg az ellipszis egyenletét, ha a fókuszpontok közötti távolság 12 és az excentricitása  $\varepsilon = \frac{2}{3}$ !
- Határozza meg az ellipszis egyenletét, ha az áthalad az  $A(6; 4)$  és  $B(8; 3)$  pontokon.
- Ábrázolja a  $x^2 - 2x + y + 8 = 0$  parabolát és határozza meg fókuszpontját és direkrixét!
- Határozza meg az alábbi ábrán látható görbe egyenletét!



## 4. Változat

1. Lehet-e az  $\vec{a} = (1,2,3)$ ,  $\vec{b} = (2,-1,-1)$ ,  $\vec{c} = (-3,-1,-2)$  vektorokból háromszöget alkotni?
2. Adottak az  $\vec{a} = (2,1)$  és  $\vec{b} = (3,4)$  vektorok. Fejtse ki az  $\vec{m} = (-1,2)$  vektort az  $\vec{a}$  és  $\vec{b}$  bázis szerint!
3. Határozza meg az  $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$  és  $\vec{b} = -3\vec{m} + 2\vec{n}$  vektorok közötti szöget, ha  $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 2$ ,  $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$ !
4. Határozza meg a háromszög belső szögeit, ha csúcspontjai  $A(0,0,5)$ ,  $B(1,1,1)$  és  $C(-1,2,3)$ !
5. Határozza meg azon vektor egységvektorát, amely merőleges az  $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$  és a  $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$  vektorokhoz!
6. Határozza meg a paralelogramma területét, amely a következő vektorokra van felépítve:  $\vec{a} = \vec{m} + \vec{n}$  és  $\vec{b} = 3\vec{m} + 2\vec{n}$ , ahol  $\vec{m}$  és  $\vec{n}$  egységvektorok és  $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{6}$ !
7. Bizonyítsa, hogy az  $\vec{a} = (3,2,-1)$ ,  $\vec{b} = (1,-1,3)$  és  $\vec{c} = (9,1,7)$  vektorok lineárisan összefüggőek, és határozzon meg egy tetszőleges lineáris kombinációjukat!
8. Határozza meg hogy az  $A(2,3,1)$ ,  $B(6,1,4)$ ,  $C(0,-1,1)$  és  $D(2,-1,3)$  pontok egy síkon fekszenek!
9. Milyen feltétel mellett lesz a  $l_1x + m_1y = 0$ ,  $l_2x + m_2y = 0$  egyenesek által bezárt szög szögfelezője az  $Ox$  tengely?
10. Bizonyítsa be, hogy azok az egyenesek, amelyek egyenlő hosszúságú szakaszokat metszenek a koordináta-tengelyeken, vagy párhuzamosak, vagy merőlegesek!
11. Határozza meg annak a síknak az egyenletét, amely áthalad a  $P(-1,2,3)$  ponton és metszi az  $Ox$  és  $Oy$  tengelyeken megfelelően az  $a = 2$ , és  $b = -1$  szakaszokban!
12. Húzzon egy síkot a  $P(1,2,-1)$  ponton keresztül, amely a koordináta-tengelyeken egyenlő hosszúságú szakaszokat metsz!
13. Bizonyítsa be, hogy a  $\begin{cases} x = 2t + 5, \\ y = -t + 2, \\ z = t - 7, \end{cases}$  és  $a \begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0, \\ x - y - 3z - 2 = 0, \end{cases}$
14. egyenesek párhuzamosak, és határozza meg azon sík egyenletét, amelyen ezek az egyenesek elhelyezkednek!
15. 9. Határozza meg azon sík egyenletét, amely áthalad a  $P(5; 7; -1)$  ponton és merőleges az
16.  $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+3}{-2}$  egyenesre!
17. Ábrázolja az alábbi egyenlettel megadott görbét  $5x^2 + 9y^2 - 720 = 0$ !
18. Határozza meg az  $A(10/3, 5/3)$  pontból az  $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$  ellipszishez húzott érintők egyenleteit!

## 5. Változat

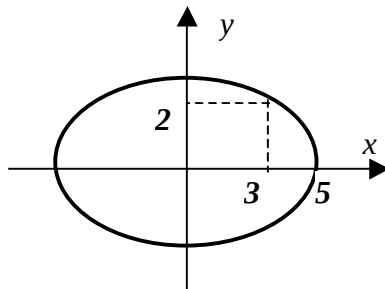
1. Az  $x$  és  $y$  milyen valós értékeire az  $\vec{a}$  és  $\vec{b}$  vektorok nem kollineárisak, ha a vektorok a következő összefüggéssel vannak megadva:  $(3x - y + 2)\vec{a} + (x + 2y + 3)\vec{b} = \vec{0}$ ?
2. Az  $x$ ,  $y$  és  $z$  milyen értékeire az  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  és  $\vec{c}$  vektorok nem komplanárisak, ha a vektorok a következő összefüggéssel vannak megadva:  $(x + y - z - 2)\vec{a} + (2x - 2y + z - 1)\vec{b} + (x - 1)\vec{c} = \vec{0}$ ?
3. Határozza meg az  $\vec{x}$  vektort, amely merőleges az  $\vec{a} = (1, 1, 2)$  és  $\vec{b} = (3, 1, 2)$  vektorokhoz, és kielégíti a következő feltételt:  $(\vec{x}, 3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}) = -6$ !
4. Adott az  $\vec{a} = (3, -6, 21)$ ,  $\vec{b} = (1, 4, -5)$ ,  $\vec{c} = (3, -4, 12)$ . Számítsa ki:  $((\vec{a} + \vec{c}), \vec{b})$ !
5. Az  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  és  $\vec{c}$  vektorok kielégítik a  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$  feltételt. Bizonyítsa, hogy  $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}]$ !
6. Adott az  $[\vec{a}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}]$ ,  $\vec{c} \neq \vec{0}$ . Lehet-e arra következtetni, hogy  $\vec{a} = \vec{b}$ ?
7. Az  $OABC$  tetraéder  $O$  csúcspontjából súlyvonalak vannak húzva az oldalfelületeken. Bizonyítsa, hogy az élektől vett új tetraéder térfogata az  $\frac{1}{4}$  része az  $OABC$  tetraéder térfogatának!
8. Komplanárisak-e a következő vektorok:  $\vec{a} = (1, -1, 2)$ ,  $\vec{b} = (5, 1, 3)$ ,  $\vec{c} = (0, 1, -1)$ .
9. A  $P(1, -1)$  pont egy négyzet középpontja, amelynek az egyik oldala az  $x - 2y + 12 = 0$  egyenesen fekszik. Határozza meg a négyzet többi oldalainak egyenleteit!
10. Az  $a$  mely értékei mellett a  $2x - y + 1 = 0$ ,  $x + y - 4 = 0$  és  $3x + ay - 2 = 0$  egyenesek egy ponton keresztül haladnak át?
11. Bizonyítsa be, hogy a  $7x + 4y + 7z + 1 = 0$ ,  $2x - y - z + 2 = 0$ ,  $x + 2y + 3z - 1 = 0$  síkok egy egyenesen haladnak át!
12. Írja fel a sík egyenletét, amely az  $M(0, 2, 1)$  ponton halad át és párhuzamos az  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$  vektorokhoz!
13. Határozza meg a  $P(2, 3, -1)$  pont és az  $\frac{x-5}{3} = \frac{y}{3} = \frac{z+25}{-2}$  egyenes közti távolságot!
14. Határozza meg sík egyenletét, amely áthalad az 
$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{-2}, \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2}$$
 egyeneseken!
15. Határozza meg az  $A(10/3, 5/3)$  pontból az  $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$  ellipszishez húzott érintők egyenleteit!

16. Milyen feltételek szükségesek, hogy az  $y = kx + m$  egyenes érintse az  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ellipszist?
17. Határozza meg az  $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$  hiperbola érintőinek egyenleteit, amelyek merőlegesek a  $4x + 3y - 7 = 0$  egyenesre!
18. Határozza meg azon egyenesek egyenleteit, amelyek az  $M(-1,3)$  ponton áthaladnak és párhuzamosak az  $x^2 - \frac{y^2}{16} = 1$  hiperbola megfelelő aszimptotáival!

## 6. Változat

- Adottak az  $\vec{a} = (-1, 3, 2)$  és  $\vec{b} = (0, 1, 4)$  vektorok. Határozza meg a következő vektorok koordinátáit:  $\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{a} - \vec{b}$ ,  $\frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3}$ ,  $\frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{2}$ ,  $2\vec{a} + 3\vec{b}$ !
- Lehet-e az  $\vec{a} = (1, 2, 3)$ ,  $\vec{b} = (2, -1, -1)$ ,  $\vec{c} = (-3, -1, -2)$  vektorokból háromszöget alkotni?
- Határozza meg az  $\vec{a}$  vektort, ha ismerjük két koordinátáját  $x = -3$ ,  $y = 4$  és abszolút értékét  $|\vec{a}| = 13$ !
- Határozza meg az  $\vec{a} = -3\vec{m} + \vec{n}$  vektor abszolút értékét, ha  $|\vec{m}| = 1$ ,  $|\vec{n}| = 3$ ,  $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$ !
- Tisztázza, hogy jobbsodrású vagy balsodrású hármast alkotnak az alábbi vektorok:  $\vec{a} = (2, 1, 2)$ ,  $\vec{b} = (3, -2, 1)$ ,  $\vec{c} = (3, -1, -2)$ !
- Határozza meg a tetraéder térfogatát az  $A(-5, -4, 8)$ ,  $B(2, 3, 1)$ ,  $C(4, 1, -2)$  és  $D(6, 3, 7)$  csúcspontok alapján!
- Bizonyítsa, hogy az  $\vec{a} = (3, 2, -1)$ ,  $\vec{b} = (1, -1, 3)$  és  $\vec{c} = (9, 1, 7)$  vektorok lineárisan összefüggőek, és határozzon meg egy tetszőleges lineáris kombinációjukat!
- Határozza meg hogy az  $A(2, 3, 1)$ ,  $B(6, 1, 4)$ ,  $C(0, -1, 1)$  és  $D(2, -1, 3)$  pontok egy síkon fekszenek!
- Bizonyítsa be, hogy az  $x + 2y + 3 = 0$ ,  $x - 2y + 3 = 0$ ,  $x + 2y - 3 = 0$  és  $x - 2y - 3 = 0$  egyenesekkel határolt négyszög rombusz!
- Határozza meg annak az egyenesnek az egyenletét, mely a  $P(-1, 3)$  ponton áthalad és merőleges a  $4x - 2y + 3 = 0$  egyenesre!
- Húzzon egy síkot a  $P(1, 2, -1)$  ponton keresztül, amely a koordináta-tengelyeken egyenlő hosszúságú szakaszokat metsz!
- Határozza meg az  $x + y - z + 2 = 0$ ,  $2x + y - 5 = 0$  és  $4x - 3y - 2z + 5 = 0$  síkok metszéspontjait!
- Bizonyítsa be, hogy az  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$  és  $\begin{cases} x = 3t + 7, \\ y = 2t + 2, \\ z = -2t + 1 \end{cases}$  egyenesek egy síkon helyezkednek el, és határozza meg ezen sík egyenletét!
- A  $2x - y + 3z - 9 = 0$  síkon keresse meg azt a pontot, amelyre az  $A(-1, 0, 1)$  és  $B(3, 1, 1)$  pontoktól vett távolságoknak az összege a legkevesebb!
- Határozza meg az ellipszis egyenletét, ha az áthalad az  $A(6; 4)$  és  $B(8; 3)$  pontokon.
- Határozza meg a következő körvonalak középpontok közötti távolságot  $x^2 + y^2 - 10x + 16y + 80 = 0$  és  $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 12 = 0$ !

17. Határozza meg azon egyenesek által bezárt szöget, amelyek áthaladnak az  $x^2 + y^2 - 4x - 16y + 32 = 0$  körvonal középpontján és az  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$  ellipszis fókuszpontjain megfelelően!
18. Határozza meg az alábbi ábrán látható görbe egyenletét!

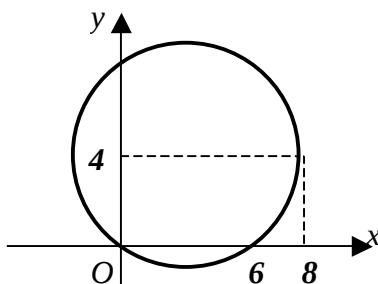


## 7. Változat

- Adott, hogy  $\overrightarrow{AB} = \vec{a} + 2\vec{b}$ ,  $\overrightarrow{BC} = -4\vec{a} - \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{CD} = -5\vec{a} - 3\vec{b}$ . Bizonyítsa be, hogy  $ABCD$  trapéz!
- Találjon olyan pontot a téglalapban, amelyből kiinduló vektorok összege, amelyek a négyszög csúcsaihoz vezetnek, egyenlő legyen nullával!
- Határozza meg az  $\vec{a}$  vektort, ha ismerjük két koordinátáját  $x = -3$ ,  $y = 4$  és abszolút értékét  $|\vec{a}| = 13$ !
- Határozza meg az  $\vec{a} = -3\vec{m} + \vec{n}$  vektor abszolút értékét, ha  $|\vec{m}| = 1$ ,  $|\vec{n}| = 3$ ,  $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$ !
- Az  $\vec{a}$  és  $\vec{b}$  vektorok által bezárt szög  $\alpha$  jelöli. Fejezze ki a  $\operatorname{tg} \alpha$  ezen vektorok skaláris és vektoriális szorzata által!
- Az  $\alpha$  milyen értéke mellett kollineárisak a  $\vec{p} = \alpha\vec{a} - 4\vec{b}$  és a  $\vec{q} = 2\vec{a} + 5\vec{b}$  vektorok?
- Bizonyítsa, hogy bármely  $\vec{a}, \vec{b}$  és  $\vec{c}$  vektorokra a  $\vec{b} - \vec{c}, \vec{a} - \vec{b}$  és  $\vec{c} - \vec{a}$  vektorok komplanárisak!
- Bizonyítsa, hogy  $\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}] = \vec{a}[\vec{b}, \vec{c} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}]$ , ahol  $\lambda, \mu$  tetszőleges számok!
- Határozza meg azon pontok mértani helyének egyenletét, amelyeknél az  $A(-2, 1)$  és  $B(1, 3)$  pontoktól való távolságainak négyzeteinek különbsége 5-tel egyenlő!
- Az  $ABC$  háromszög  $AB$ ,  $BC$  és  $AC$  oldalai, megfelelően a  $2x - 3y - 1 = 0$ ,  $3x - 4y - 1 = 0$  és  $x - y - 1 = 0$  egyenletekkel vannak megadva. Határozza meg a csúcspontjainak koordinátáit!
- Írja fel azon sík egyenletét, amely az  $Oz$  tengelyhez párhuzamos és áthalad az  $A(1, 2, 1)$  és  $B(0, 3, -1)$  pontokon!
- Határozza meg annak a síknak az egyenletét, amely áthalad a  $P(-1, 2, 3)$  ponton és metszi az  $Ox$  és  $Oy$  tengelyeken megfelelően az  $a = 2$ , és  $b = -1$  szakaszokban!
- Határozza meg azon sík egyenletét, amely áthalad a  $P(5; 7; -1)$  ponton és merőleges az  $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+3}{-2}$  egyenesre!
- Határozza meg azt a pontot, amely szimmetrikus a  $P(1, -2, -6)$  ponthoz az  $\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0, \\ x - z + 2 = 0 \end{cases}$  egyeneshez képest!
- Az  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$  ellipszisen keressen egy pontot, amelynek a fokális sugara  $r = \frac{10}{3}$ !
- Határozza meg a hiperbola egyenletét, ha a képzete tengelye 12 és a hiperbola áthalad az  $A(20; 8)$  ponton!
- Ábrázolja a  $4x^2 - y^2 - 16 = 0$  hiperbolát és határozza meg fókuszpontjait, excentricitását, direktrixét és aszimptótáit!
- Határozza meg a hiperbola egyenletét, ha a fókuszpontok között 10 a távolság és  $y = \pm \frac{4}{3}x$  az aszimptóták!

## 8. Változat

1. Adva van az  $\vec{a} = (1, 5, 2)$ ,  $\vec{b} = (6, -4, -2)$ ,  $\vec{c} = (0, -5, 7)$ ,  $\vec{d} = (-20, 27, -35)$ . Határozza meg azt az  $\alpha, \beta$  és  $\gamma$  számokat, melyekre az  $\alpha\vec{a}, \beta\vec{b}, \gamma\vec{c}$  vektorokból zárt tört egyenest lehet alkotni!
2. Ellenőrizze, hogy az  $A(-1, 5, 10)$ ,  $B(5, -7, 8)$ ,  $C(2, 2, -7)$  és  $D(5, -4, 2)$  pontok egy trapéz csúcspontjai-e?
3. Határozza meg az  $\vec{a} = -3\vec{m} + \vec{n}$  vektor abszolút értékét, ha  $|\vec{m}| = 1$ ,  $|\vec{n}| = 3$ ,  $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$ !
4. Határozza meg az  $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$  és  $\vec{b} = -3\vec{m} + 2\vec{n}$  vektorok közötti szöget, ha  $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 2$ ,  $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$ !
5. Határozza meg a tetraéder  $D$  csúcspontjából húzott magasságának a hosszát, ha az  $A(1, 0, 6)$ ,  $B(4, 5, -2)$ ,  $C(7, 3, 4)$  és  $D(-1, 2, 1)$  a csúcspontjai!
6. A tetraéder térfogata  $V = 5$ , három csúcspontja az  $A(2, 1, -1)$ ,  $B(3, 0, 1)$  és  $C(2, -1, 3)$  pontokban helyezkedik el. Határozza meg a negyedik csúcspont koordinátáit, ha ismeretes, hogy az  $OY$  tengelyen helyezkedik el!
7. Bizonyítsa, hogy az  $\vec{a} = (3, 2, -1)$ ,  $\vec{b} = (1, -1, 3)$  és  $\vec{c} = (9, 1, 7)$  vektorok lineárisan összefüggőek, és határozzon meg egy tetszőleges lineáris kombinációjukat!
8. Határozza meg hogy az  $A(2, 3, 1)$ ,  $B(6, 1, 4)$ ,  $C(0, -1, 1)$  és  $D(2, -1, 3)$  pontok egy síkon fekszenek!
9. Határozza meg az  $A(-4, -2)$ ,  $B(2, 0)$  és  $C(2, -4)$  csúcspontokkal rendelkező háromszög súlyvonalainak egyenleteit!
10. Határozza meg azon egyenes egyenletét, amely  $\varphi$  szöget zár be az  $Ox$  tengely pozitív irányával és az  $Oy$  tengelyt a  $b = 3$  szakaszban metszi!
11. Határozza meg az  $M(2, 3, -5)$  pontból a  $4x - 2y + 5z - 12 = 0$  síkra húzott merőleges hosszát!
12. Bizonyítsa be, hogy a  $7x + 4y + 7z + 1 = 0$ ,  $2x - y - z + 2 = 0$ ,  $x + 2y + 3z - 1 = 0$  síkok egy egyenesen haladnak át!
13. Az  $\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0, \\ 3x - y + 4z - 29 = 0 \end{cases}$  egyenesen határozza meg azt a pontot, mely egyenlő távolságra van az  $A(3, 11, 4)$  és  $B(-5, -13, -2)$  pontoktól!
14. Az  $A$  és  $D$  paraméterek milyen értékeire az  $\frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{1}$  egyenes az  $Ax + 2y - 4z + D = 0$  síkon fekszik?
15. Határozza meg a  $P(1, 2, \frac{3}{2})$  pont vetületét az  $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z+1}{2}$  egyenesre!
16. Határozza meg azt a pontot, amely szimmetrikus a  $P(1, -2, -6)$  ponthoz az  $\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0, \\ x - z + 2 = 0 \end{cases}$  egyeneshez képest!
17. Határozza meg az alábbi ábrán látható görbe egyenletét!



18. Ábrázolja az alábbi egyenlettel megadott görbét  $5x^2 + 9y^2 - 720 = 0$ !

## 9. Változat

1. Az  $\vec{a}$  és  $\vec{b}$  nem kolineáris vektorok alapján ábrázolja a következő vektorokat:  $a) \vec{a} + \vec{b}, b) \vec{a} - \vec{b}, c) \vec{b} - \vec{a}, d) -\vec{a} - \vec{b}, e) \frac{3\vec{a}-\vec{b}}{2}, f) \frac{2\vec{b}-3\vec{a}}{2}$  !
2. Az  $\vec{a} + \vec{b}$  és  $\vec{a} - \vec{b}$  vektorok milyen feltételek mellett lesznek kollineárisak?
3. Határozza meg a háromszög belső szögeit, ha csúcspontjai  $A(0,0,5), B(1,1,1)$  és  $C(-1,2,3)$ !
4. Az  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  vektorok háromszöget alkotnak. Számítsa ki:  $(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{c})$ !
5. Az  $\vec{a}$  és  $\vec{b}$  vektorok a  $\varphi$  szöget zárják be,  $\varphi = \frac{\pi}{3}, |\vec{a}| = \sqrt{3}, |\vec{b}| = 4$ . Határozza meg az  $||[\vec{a}, \vec{b}]||$ !
6. Az  $\vec{a}$  és  $\vec{b}$  vektorok által bezárt szög  $\alpha$  jelöli. Fejezze ki a  $\operatorname{tg} \alpha$  ezen vektorok skaláris és vektoriális szorzata által!
7. Határozza meg a paralelogramma területét, amely a következő vektorokra van felépítve:  $\vec{a} = (8,4,1), \vec{b} = (2,-2,1)$ !
8. Adva vannak az  $A(3,1,2), B(4,0,1), C(5,4,7)$  pontok. Határozza meg az  $ABC$  háromszög területét!
9. Bizonyítsa, hogy az  $\vec{a} = (3,2,-1), \vec{b} = (1,-1,3)$  és  $\vec{c} = (9,1,7)$  vektorok lineárisan összefüggőek, és határozzon meg egy tetszőleges lineáris kombinációjukat!
10. Határozza meg hogy az  $A(2,3,1), B(6,1,4), C(0,-1,1)$  és  $D(2,-1,3)$  pontok egy síkon fekszenek!
11. Határozza meg, hogy az  $x - 3y + 6 = 0$  egyenes hol metszi a koordináta-tengelyeket!
12. Bizonyítsa be, hogy az  $m^2x^2 + 2mnxy + n^2y^2 - 4l^2 = 0$  egyenlet egy egyenes-párt határoz meg! Határozza meg az egyenesek egyenleteit!
13. Bizonyítsa be, hogy a  $7x + 4y + 7z + 1 = 0, 2x - y - z + 2 = 0, x + 2y + 3z - 1 = 0$  síkok egy egyenesen haladnak át!
14. Írja fel a sík egyenletét, amely az  $M(0,2,1)$  ponton halad át és párhuzamos az  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$  vektorokhoz!
15. Határozza meg a  $P(4,1,6)$  pont  $Q$  szimmetrikus pontját a következő egyeneshez képest
 
$$\begin{cases} x - y - 4z + 12 = 0, \\ 2x + y - 2z + 3 = 0! \end{cases}$$
16. Határozza meg a  $P(2,3,-1)$  pont és az  $\frac{x-5}{3} = \frac{y}{3} = \frac{z+25}{-2}$  egyenes közti távolságot!
17. Határozza meg azon egyenesek által bezárt szöget, amelyek áthaladnak az  $x^2 + y^2 - 4x - 16y + 32 = 0$  körvonal középpontján és az  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$  ellipszis fókuszpontjain megfelelően!
18. Határozza meg a körvonal egyenletét, ha az áthalad az  $A(-8; 3)$  és  $B(2; -7)$  pontokon és a középpontja az  $x + 4y + 16 = 0$  egyenesen fekszik!

## 10. Változat

- Adott, hogy  $\overrightarrow{AB} = \vec{a} + 2\vec{b}$ ,  $\overrightarrow{BC} = -4\vec{a} - \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{CD} = -5\vec{a} - 3\vec{b}$ . Bizonyítsa be, hogy  $ABCD$  trapéz!
- Találjon olyan pontot a téglalapban, amelyből kiinduló vektorok összege, amelyek a négyszög csúcsaihoz vezetnek, egyenlő legyen nullával!
- Lehet-e az  $\vec{a} = (1, 2, -3)$ ,  $\vec{b} = (2, -1, 1)$  és  $\vec{c} = (-3, -1, 2)$  vektorokból háromszöget alkotni?
- Az  $\alpha$  milyen értéke mellett kollineárisak a  $\vec{p} = \alpha\vec{a} - 4\vec{b}$  és a  $\vec{q} = 2\vec{a} + 5\vec{b}$  vektorok?
- Az  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  és  $\vec{c}$  vektorok kielégítik a  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$  feltételt. Bizonyítsa, hogy  $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}]$ !
- Bizonyítsa, hogy bármely  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  és  $\vec{c}$  vektorokra a  $\vec{b} - \vec{c}$ ,  $\vec{a} - \vec{b}$  és  $\vec{c} - \vec{a}$  vektorok komplanárisak!
- Bizonyítsa, hogy  $\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}] = \vec{a}[\vec{b}, \vec{c} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}]$ , ahol  $\lambda, \mu$  tetszőleges számok!
- Határozza meg azon pontok mértani helyének egyenletét, amelyeknél az  $A(-2, 1)$  és  $B(1, 3)$  pontoktól való távolságainak négyzeteinek különbsége 5-tel egyenlő!
- Az  $ABC$  háromszög  $AB$ ,  $BC$  és  $AC$  oldalai, megfelelően a  $2x - 3y - 1 = 0$ ,  $3x - 4y - 1 = 0$  és  $x - y - 1 = 0$  egyenletekkel vannak megadva. Határozza meg a csúcspontjainak koordinátáit!
- Legyen az  $A(3, 4)$  csúcspontja az  $\alpha = 30^\circ$  szögnek a derékszögű háromszögben, és az ellentétes befogó egyenlete:  $x - y + 2 = 0$ . Határozza meg a háromszög két másik oldalának egyenleteit!
- Határozza meg az  $M(2, 3, -5)$  pontból a  $4x - 2y + 5z - 12 = 0$  síkra húzott merőleges hosszát!
- Bizonyítsa be, hogy a  $7x + 4y + 7z + 1 = 0$ ,  $2x - y - z + 2 = 0$ ,  $x + 2y + 3z - 1 = 0$  síkok egy egyenesen haladnak át!
- Az  $\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0, \\ 3x - y + 4z - 29 = 0 \end{cases}$  egyenesen határozza meg azt a pontot, mely egyenlő távolságra van az  $A(3, 11, 4)$  és  $B(-5, -13, -2)$  pontoktól!
- Az  $A$  és  $D$  paraméterek milyen értékeire az  $\frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{1}$  egyenes az  $Ax + 2y - 4z + D = 0$  síkon fekszik?
- Határozza meg az ellipszis egyenletét, ha az áthalad az  $A(6; 4)$  és  $B(8; 3)$  pontokon.
- Határozza meg a következő körvonalak középpontok közötti távolságot  $x^2 + y^2 - 10x + 16y + 80 = 0$  és  $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 12 = 0$ !
- Határozza meg az  $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$  hiperbola érintőinek egyenleteit, amelyek merőlegesek a  $4x + 3y - 7 = 0$  egyenesre!
- Határozza meg azon egyenesek egyenleteit, amelyek az  $M(-1, 3)$  ponton áthaladnak és párhuzamosak az  $x^2 - \frac{y^2}{16} = 1$  hiperbola megfelelő aszimptotáival!

## Irodalomjegyzék

1. *Fried Ervin* Algebra I. Elemi és lineáris algebra. – Budapest: Nemzeti tankönyvkiadó, 2000.
2. *D.K. Fagyjev, I.Sz. Szominszkij* Felsőfokú algebrai példatár. – Budapest: Typotex, 2006.
3. *A.G. Kuros* Felsőbb algebra. – Budapest: Tankönyvkiadó, 1967.
4. *B. Bódi* Az algebra alapjai. – Ungvár: PoliPrint, 2010.
5. *Baboss Csaba* Geometria I. – Nyugat-magyarországi Egyetem Geoinformatikai kar, Székesfehérvár. –2007.
6. *Coxeter H. S. M.* A geometriák alapjai – Műszaki Könyvkiadó. –Budapest. – 1973.
7. *Hajós György* Bevezetés a geometriába –Tankönyvkiadó. – Budapest. –1966.
8. *Kárteszi Ferenc* Bevezetés a véges geometriákba – Akadémia Kiadó. – Budapest. –1972.
9. *Kárteszi Ferenc* Lineáris transzformációk – Tankönyvkiadó. – Budapest. –1974.
10. *Pelle Béla* Geometria. –Tankönyvkiadó. –Budapest. –1974.
11. *Reiman István* A geometria és határterületei. – Gondolat Könyvkiadó. –1986.
12. *Баранник В.Ф., Погоріляк Є.Я., Рудько В.П., Шапочка І.В.* Лінійна алгебра. – Ужгород: Ужгород. держ. ун-т, 2000.
13. *Гудивок П.М., Погоріляк Є.Я., Шапочка І.В.* Практикум з алгебри і теорії чисел для студентів першого курсу. – Ужгород: Ужгород. держ. ун-т, 2002.
14. Основи аналітичної геометрії та лінійної алгебри. Навчаль-ний посібник // Укл. *Пукальський І.Д., Перун Г.М.* – Чернівці:Рута, 2002. – 108 с.
15. *Ф.С.Гудименко та інші.* Збірник задач з вищої математики. Видавництво Київського університету, 1963. – 352 с.
16. *Шестопал А.Ф.* Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998. – 164 с.

Посібник з алгебри та геометрії для інформатиків призначений для студентів I курсу Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці спеціальності А 4.09 Середня освіта (Інформатика) заочної форми навчання з метою організації контрольної роботи з курсу "Алгебра та геометрія".

Посібник умовно поділений на дві частини: перший та другий семестр навчання, кожен з яких, містить приклад розв'язаного варіанту 10 варіантів контрольних робіт з курсу "Алгебра та геометрія".

Матеріал призначений для використання як навчально-методичний посібник з дисципліни "Алгебра та геометрія".

Затверджено до використання у навчальному процесі  
на засіданні кафедри математики та інформатики  
(протокол № 10 від «23» червня 2025 року)

Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості вищої освіти  
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II  
(протокол №7 від 26 серпня 2025 року)

Рекомендовано до видання у електронній формі (PDF)  
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II  
(протокол №8 від 28 серпня 2025 року)

Підготовлено до видання у електронній формі (PDF) кафедрою математики та інформатики з  
Видавничим відділом Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II