

Кафедра математики та інформатики
Matematika és Informatika Tanszék

«АЛГЕБРА ТА ГЕМЕТРИЯ»
(МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ)

(для студентів 1-го курсу спеціальності 014 Середня освіта (Інформатика))

ALGEBRA ÉS MÉRTAN

(Módszertani útmutató az önálló munkához)

Перший (бакалаврський) / Alapképzés (BA)
(ступінь вищої освіти / a felsőoktatás szintje)

A Osztás / A Oktatás
(галузь знань / képzési ág)

"Інформатика"
"Informatika"
(освітня програма / képzési program)



Берегове / Beregszász
2025 р. / 2025

Посібник з алгебри та геометрії для інформатиків призначений для студентів I курсу Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці спеціальності А 4.09 Середня освіта (Інформатика) денної та заочної форми навчання з метою організації самостійної роботи з курсу "Алгебра та геометрія".

Посібник умовно поділений на дві частини: лінійну алгебру та аналітичну геометрію, кожна з яких, містить розділи в яких наведені теоретичні питання та практичні завдання для самостійної роботи студента з курсу "Алгебра та геометрія".

Матеріал призначений для використання як навчально-методичний посібник з дисципліни "Алгебра та геометрія".

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики
(протокол № 10 від «23» червня 2025 року)

Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості вищої освіти
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол №7 від 26 серпня 2025 року)

Рекомендовано до видання у електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол №8 від 28 серпня 2025 року)

Укладач:

СТОЙКА МИРОСЛАВ ВІКТОРОВИЧ – доцент кафедри математики та інформатики
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Рецензенти:

БОРТОШ МАРІЯ ЮЛІЇВНА – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри та диференціальних рівнянь ДВНЗ «УжНУ»;
МЕСАРОШ ЛІВІА ВАСИЛІВНА – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики та інформатики ЗУІ.

Відповідальний за випуск:

Олександр ДОБОШ – начальник Видавничого відділу ЗУІ ім. Ф.Ракоці II

За зміст посібника відповідальність несуть розробники.

Видавництво: Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II (адреса: пл. Кошута 6, м. Берегове, 90202. Електронна пошта: foiskola@kmf.uz.ua)

© Мирослав Стойка, 2025

© Кафедра математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II, 2025

Az Algebra és mértan a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola, I. éves, informatika szakos, nappali és levelezős hallgatóinak készült, az Algebra és mértan c. tantárgy alaposabb tanulmányozásának és elsajátításának megkönnyítése céljából.

Ez a jegyzet elsősorban informatika szakos hallgatók számára készült, de hasznos lehet mindazok számára, akik bármely más szakon tanulnak matematikát.

A jegyzet két részre van osztva: lineáris algebra és analitikus mértan. A jegyzet gyakorlati feladatokat tartalmaz.

Az oktatási folyamatban történő felhasználását jóváhagyta

a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Matematika és Informatika Tanszéke

(2025. június 23, 10. számú jegyzőkönyv).

Megjelentetésre javasolta a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Minőségbiztosítási Tanácsa

(2025. augusztus 26, 7. számú jegyzőkönyv).

Elektronikus formában (PDF fájlformátumban) történő kiadásra javasolta

a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Tudományos Tanácsa

(2025. augusztus 28, 8. számú jegyzőkönyv).

Kiadásra előkészítette a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Matematika és Informatika Tanszéke és Kiadói Részlege.

Szerkesztő:

SZTOJKA MIROSZLÁV – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének docense

Szakmai lektorok:

BARTOS MÁRIA – fizika és matematika tudományok kandidátusa, docens, az Ungvári Nemzeti Egyetem Algebra és Diferenciál Egyenletek Tanszékének docense;

MÉSZÁROS LÍVIA – fizika és matematika tudományok kandidátusa, II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének docense.

A kiadásért felel:

DOBOS Sándor – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Kiadói Részlegének vezetője

A tartalomért kizárólag a jegyzet szerkesztője felel.

Kiadó: a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola (cím: 90 202, Beregszász, Kossuth tér 6. E-mail: foiskola@kmf.uz.ua)

© Sztojka Mirosláv, 2025

© A II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Matematika és Informatika Tanszéke, 2025

Tartalomjegyzék

1.	Komplex számok.	
	A komplex számok algebrai alakja	6
2.	A komplex számok trigonometrikus alakja.....	9
3.	Lineáris egyenletrendszerek. A Gauss-elimináció	12
4.	Permutációk. Transzpozíciók.....	14
5.	n -edrendű determinánsok.	
	A determinánsok tulajdonságai	17
6.	Az aldetermináns és az elem komplementere.	
	Determinánsok kiszámítása.....	19
7.	A Cramer-szabály	21
8.	Mátrix-műveletek. A mátrix inverze	23
9.	Az n -dimenziós számtani vektortér.	
	Vektorrendszerek lineáris összefüggősége	25
10.	A mátrix rangja.....	27
11.	Lineáris egyenletrendszer. A Kronecker-Capelli tétel	29
12.	Homogén lineáris egyenletrendszerek	31
13.	Csoportok. Gyűrűk. Testek.....	34
14.	A polinomok gyűrűje.....	37
15.	A polinomok gyökei	39
16.	Irreducibilis polinomok.	
	Polinomok a racionális számok teste felett	42
17.	A lineáris tér bázisa.....	44
18.	Átmeneti mátrix egyik bázisból a másikba	45
19.	Műveletek lineáris alterekkel	47
20.	Lineáris transzformáció.....	49
21.	Lineáris transzformáció mátrixa egy bázisban.....	50
22.	Műveletek lineáris transzformációkkal	52

23. Lineáris transzformáció nulltere és képtere	54
24. Lineáris transzformáció sajátvektora és sajátértéke	56
25. Lineáris altér ortogonális komplementere.....	58
26. Gram-Schmidt-féle ortonormalizációs eljárás	60
27. Kvadratikus alak normálalakja.....	62
28. Pozitív és negatív definit kvadratikus alakok	64
29. Vektorok. Műveletek vektorokkal	66
30. Vektorok skaláris szorzata	69
31. Vektorok vektoriális szorzata.....	71
32. Vektorok vegyes szorzata.....	73
33. A síkbeli egyenes egyenlete	75
34. A sík egyenlete	79
35. A térbeli egyenes egyenlete.....	82
36. Másodrendű görbék.....	85
 Irodalomjegyzék	 88

1. Komplex számok. Komplex számok algebrai alakja

Elméleti kérdések

1. Mi a komplex szám fogalma?
2. Milyen alakban írható fel egy komplex szám algebrai alakban?
3. Mi a valós rész és mi a képzetes rész a komplex számok esetén?
4. Mit nevezünk imaginárius egységnek, és milyen tulajdonsággal rendelkezik?
5. Hogyan történik két komplex szám összeadása algebrai alakban?
6. Hogyan történik két komplex szám kivonása algebrai alakban?
7. Ismertesse a komplex számok szorzásának szabályát algebrai alakban!
8. Hogyan osztunk két komplex számot algebrai alakban? Miért használjuk a konjugáltat?
9. Mit jelent a komplex szám konjugáltja? Hogyan jelöljük és számítjuk ki?
10. Mi a komplex szám abszolút értéke és hogyan számoljuk ki?
11. Milyen geometriai értelmezése van a komplex számoknak a komplex síkon?
12. Mi a különbség valós és nem valós komplex szám között?
13. Hogyan kapcsolódik a másodfokú egyenletek megoldása a komplex számokhoz?
14. Mit jelent az, hogy a komplex számok halmaza algebrailag zárt?
15. Miért szükséges a komplex számfogalom bevezetése a valós számok bővítéseként?

Gyakorlatok

1. Számítsa ki a kifejezések értékét:

- a) $(4 + 2i) + (1 - i) + (5 + 2i)(3 - 5i)$; b) $\frac{(3+i)(4-3i)}{1+2i}$;
- c) $(5 - 3i)(2 + i) + (-1 + i)(8 + 3i)$; d) $\frac{(3-i)(1-4i)}{2-i}$;
- e) $(7 - 2i)(3 + 4i) + (3 + i)(1 + 2i)$; f) $\frac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}$!

2. Számítsa ki az i^{77} ; i^{98} ; i^n kifejezések értékét, ahol n egy természetes szám!

3. Bizonyítsa be az alábbi egyenlőségeket:

a) $(1 + i)^{8n} = 2^{4n} \ (n \in \mathbb{Z})$; b) $(1 + i)^{4n} = (-1)^n 2^{2n} \ (n \in \mathbb{Z})$!

4. Keresse meg az x és y valós számokat, amelyek kielégítik a következő egyenleteket:

a) $(2 + i)x + (1 + 2i)y = 1 - 4i$;

b) $(3 + 2i)x + (1 + 3i)y = 4 - 9i$!

5. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket:

a) $\begin{cases} (3 - i)x + (4 + 2i)y = 2 + 6i, \\ (4 + 2i)x - (2 + 3i)y = 5 + 4i; \end{cases}$

b) $\begin{cases} (2 + i)x + (2 - i)y = 6, \\ (3 + 2i)x + (3 - 2i)y = 8; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + iy - 2z = 10, \\ x - y + 2iz = 20, \\ ix + 3iy - (1 + i)z = 30! \end{cases}$

6. Legyen $\alpha \in \mathbb{C}$ és $\sqrt{\alpha}$ — olyan komplex szám, hogy $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$. Számítsa ki:

a) $\sqrt{2i}$; b) $\sqrt{-15 + 8i}$; c) $\sqrt{-3 - 4i}$; d) $\sqrt{-11 + 60i}$;

e) $\sqrt[4]{-1}$; f) $\sqrt{8 + 6i}$; g) $\sqrt{1 - i\sqrt{3}}$; h) $\sqrt[4]{2 - i\sqrt{12}}$!

7. Oldja meg az alábbi egyenleteket:

a) $x^2 - (2 + i)x - 1 + 7i = 0$;

b) $x^2 - (3 - 2i)x + 5 - 5i = 0$;

c) $(2 + i)x^2 - (5 - i)x + 2 - 2i = 0$;

d) $(1 - i)x^2 - (2 - 16i)x - 23 - 39i = 0$!

8. Bizonyítsa be, hogy:

a) a z komplex szám akkor és csakis akkor lesz valós, ha $\bar{z} = z$;

b) a z komplex szám akkor és csakis akkor lesz tiszta képzetes, ha $\bar{z} = -z$!

9. Bizonyítsa be, hogy a tetszőleges x és y komplex számokra teljesülnek a következők:

a) $\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$; b) $\overline{x \cdot y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$; c) $\overline{-x} = -\bar{x}$; d) $\overline{y^{-1}} = (\bar{y})^{-1} \ (y \neq 0)$!

10. Keresse meg az összes olyan komplex számot, amely saját négyzetének konjugáltja!

11. Tüntesse fel a komplex síkon azokat a pontokat, amelyek megfelelnek az alábbi számoknak:

$$5, \quad -2, \quad -3i, \quad \pm 1 \pm \sqrt{3}i !$$

12. Keresse meg azokat a komplex számokat, amelyek megfelelnek:

a) egy négyzet csúcspontjainak, melynek középpontja a koordinátarendszer kezdőpontja, oldalai 1 egységnyi hosszúak, és párhuzamosak a koordinátarendszer tengelyeivel;

b) egy szabályos háromszög csúcspontjainak, melynek középpontja a koordinátarendszer kezdőpontja, oldala párhuzamos az képzetes tengellyel, egyik csúcspontja a negatív valós féltengelyen helyezkedik el és a körülírt kör sugara 1 egységgel egyenlő!

13. Hogyan helyezkednek el a komplex síkon azok a pontok, amelyek megfelelnek az x , y és z komplex számoknak, és melyekre teljesülnek a következők:

$$x + y + z = 0, \quad x\bar{x} = y\bar{y} = z\bar{z} \neq 0 ?$$

2. A komplex számok trigonometrikus alakja

Elméleti kérdések

1. Mi a komplex szám trigonometrikus alakja?
2. Hogyan számítjuk ki egy komplex szám abszolút értékét?
3. Mit jelent egy komplex szám argumentuma ($\arg z$)?
4. Hogyan számítható ki egy komplex szám argumentuma a valós és képzetes részek alapján?
5. Milyen összefüggés van a komplex szám algebrai és trigonometrikus alakja között?
6. Hogyan ábrázolható egy komplex szám a komplex síkon polárkoordinátákkal?
7. Írja fel a komplex szám trigonometrikus alakját az abszolút érték és az argumentum segítségével!
8. Hogyan szorzunk két komplex számot trigonometrikus alakban?
9. Hogyan osztunk két komplex számot trigonometrikus alakban?
10. Mi a De Moivre-formula, és hogyan használható a komplex számok hatványozására?
11. Hogyan hatványozunk komplex számot trigonometrikus alakban?
12. Hogyan vonunk gyököt komplex számból trigonometrikus alakban?
13. Mit jelent az n -edik gyökök fogalma komplex számok esetén?
14. Miért előnyös a trigonometrikus alak használata bizonyos műveleteknél?
15. Hány különböző n -edik gyöke van egy nem nulla komplex számnak?

Gyakorlatok

1. Keresse meg az alábbi komplex számok trigonometrikus alakját!

- a) -2 ; b) $1 + i$; c) $\sqrt{3} - i$; d) $\sqrt{5} - \sqrt{5}i$; e) $2 + \sqrt{3} + i$;
f) $5i$; g) $1 - i$; h) $1 + \sqrt{3}i$; i) $1 + \frac{\sqrt{3}}{3}i$; j) $\cos \varphi - i \sin \varphi$.

2. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $|z| + z = 8 + 4i$; b) $|z| - z = 8 + 12i$.

3. Határozza meg azon pontok mértani helyét a komplex síkon, melyek megfelelnek azoknak a z számoknak, melyek kielégítik az alábbi feltételeket:

a) $1 \leq |z| \leq 2$; b) $|z - 1 - i| < 1$; c) $\frac{\pi}{6} < \text{Arg } z \leq \frac{\pi}{3}$;
d) $|z - 2| \leq 1$; e) $0 < \text{Re } iz < 1$; f) $|z - 1| + |z + 1| = 3$.

4. Számítsa ki az alábbi kifejezések értékét!

a) $(1 + i)^{100}$; b) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}$; c) $\left(1 - \frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$; d) $(2 - \sqrt{2} + i)^{12}$.

5. Bizonyítsa be, hogy $(\sqrt{3} - i)^n = 2^n \left(\cos \frac{\pi n}{6} - i \sin \frac{\pi n}{6}\right)$, ahol $n \in \mathbb{N}$!

6. Írja fel a $\sin x$ -től és $\cos x$ -től függő polinom alakjában az alábbi függvényeket:

a) $\sin 4x$; b) $\cos 6x$; c) $\sin 7x$!

7. Írja ki trigonometrikus alakban az alábbi kifejezések összes gyökeit:

a) $\sqrt[10]{512(1 - \sqrt{3}i)}$; b) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$!

8. Írja ki algebrai alakban az alábbi kifejezéseknek a megfelelő gyökeit:

a) $\sqrt[3]{i}$; b) $\sqrt[4]{8\sqrt{3}i - 8}$; c) $\sqrt[4]{-72(1 - i\sqrt{3})}$; d) $\sqrt{2 - 2i}$;
e) $\sqrt[4]{-4}$; f) $\sqrt[3]{\frac{8+24i}{3-i}}$; g) $\sqrt[3]{\frac{27-54i}{2+i}}$; h) $\sqrt[4]{-\frac{18}{1+i\sqrt{3}}}$!

9. Oldja meg az alábbi egyenleteket:

a) $(z + 1)^n - (z - 1)^n = 0$; b) $(z + i)^n - (z - i)^n = 0$, ($n \in \mathbb{N}$).

10. Írja ki az 1-es szám összes alábbi fokú gyökét:

a) 3; b) 4; c) 8; d) 12!

11. Írja ki az 1-es szám összes alábbi fokú primitív gyökét:

a) 3; b) 4; c) 8; d) 12!

12. Mutassa meg az 1-es szám összes a) 16-odik ; b) 24-edik gyökei közül melyik primitív!

13. Határozza meg az 1-es szám összes n -edik gyökeinek összegét!

14. Legyen ε az 1-es primitív $2n$ -edik gyöke. Számolja ki az $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^{n-1}$ összeget!

15. Keresse meg az 1-es szám összes n -edik gyökének k -ad fokainak összegét!

16. Számítsa ki az 1-es szám összes a) 16-odik ; b) 24-edik primitív gyökeinek összegét!

17. Legyen k és l — természetes relatív prím számok, ε — az 1-es szám k -edik gyöke, és a ξ — pedig az 1-es szám l -edik primitív gyöke. Bizonyítsa be, hogy $\varepsilon\xi$ — az 1-es szám kl -edik primitív gyöke!

18. Megjelöljük $\varphi(n)$ -el az 1-es szám összes n -edik primitív gyökeinek a számát. Bizonyítsa be, hogy a $\varphi(kl) = \varphi(k)\varphi(l)$, hogyha k és l relatív prím számok!

19. Jelölje $\varphi(n)$ ugyan azt, mint az előző feladatban. Bizonyítsa be, hogy ha $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}$, ahol $p_1, p_2, \dots, p_s$ — különböző relatív prím számok, akkor

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right) !$$

3. Lineáris egyenletrendszerek. A Gauss-elimináció

Elméleti kérdések

1. Mit nevezünk lineáris egyenletrendszernek?
2. Mit jelent az, hogy egy egyenletrendszer megoldható, és mikor nincs megoldása?
3. Milyen típusú megoldásai lehetnek egy lineáris egyenletrendszernek?
4. Mi a bővített mátrix fogalma, és hogyan használjuk az egyenletrendszerek megoldásához?
5. Mit jelent az ekvivalens átalakítás az egyenletrendszerek esetében?
6. Mi a Gauss-elimináció (Gauss-algoritmus) célja?
7. Milyen lépésekből áll a Gauss-elimináció módszere?
8. Mit jelent a lépcsős (soros) alak egy mátrix esetében?
9. Mi a különbség a Gauss- és a Gauss–Jordan-elimináció között?
10. Milyen feltételek mellett van pontosan egy megoldása egy lineáris egyenletrendszernek?
11. Milyen szerepet játszik a főelem (pivot elem) a Gauss-elimináció során?
12. Hogyan használható a Gauss-elimináció számítógépes algoritmusokban?
13. Mikor érdemes a Gauss–Jordan módszert alkalmazni a Gauss-elimináció helyett?
14. Mi az inverz mátrix szerepe lineáris egyenletrendszerek megoldásában?

Gyakorlatok

Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket:

$$1. \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} -9x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7, \\ -4x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 7x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 13, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 3. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 7 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 14 = 0. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 1 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 1 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 1 = 0! \end{cases}$$

Vizsgálja meg az alábbi egyenletrendszerek megoldhatóságát és keresse meg azok általános megoldását a λ paramétertől függően:

$$11. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = 7. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9, \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 - 10x_4 = 11. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} (1 + \lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1 + \lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + (1 + \lambda)x_3 = \lambda^2! \end{cases}$$

15. Keresse meg azokat a homogén lineáris egyenletrendszereket, melyeknek az alábbi számrendszerek lesznek a megoldásai:

$$(1, 1, 0, -3, -1), (1, -1, 2, -1, 0), (4, -2, 6, 3, -4), (2, 4, -2, 4, -7)!$$

4. Permutációk. Transzpozíciók

Elméleti kérdések

1. Mit nevezünk rendezésnek?
2. Hány különböző rendezése van egy n elemű halmaznak?
3. Mi a transzpozíció definíciója?
4. Mikor alkott a rendezés két eleme inverziót?
5. Hogyan írható fel az összes rendezés transzpozíciók által?
6. Milyen rendezést nevezünk párosnak vagy páratlannak?
7. Hogyan változik a rendezés paritása a transzpozíciótól?
8. Hány páros rendezés írható fel egy n elemű rendezésből?
9. Mit nevezünk permutációnak?
10. Mit nevezünk páros és páratlan permutációnak?
11. Milyen szabály szerint szorozzuk össze a permutációkat?
12. Mikor tekintünk két permutációt egyenlőnek?
13. Hogyan határozható meg egy permutáció inverze?

Gyakorlatok

1. Írja ki azokat a transzpozíciókat, melyek segítségével az $1, 2, 3, 4, 5$ permutációtól eljuthatunk a $2, 5, 3, 4, 1$ permutációhoz!
2. Bizonyítsa be, hogy bármilyen $i_1, i_2, \dots, i_n$ rendezést meg lehet kapni egy bármilyen másik $j_1, j_2, \dots, j_n$ rendezésből nem több, mint $n - 1$ transzpozíció segítségével!
3. Határozza meg az alábbi rendezések paritását:
a) $7, 5, 6, 4, 1, 3, 2$; b) $1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8$;
c) $2, 4, 6, 8, \dots, 2n, 1, 3, 5, 7, \dots, 2n - 1$!
4. Az $1, 2, 3, \dots, n$ számok melyik rendezésében lesz a legnagyobb az inverziók száma és mennyivel lesz egyenlő?
5. Az $i_1, i_2, \dots, i_n$ rendezésben az inverziók száma egyenlő k -val. Mennyivel egyenlő az inverziók száma az $i_n, i_{n-1}, \dots, i_2, i_1$ rendezésben?

6. Bizonyítsa be, hogy bármely k ($0 \leq k \leq C_n^2$) egész számra létezik az $1, 2, 3, \dots, n$ számok rendezése, amelyben az inverziók száma k -val egyenlő!

7. Határozza meg az alábbi permutációk szorzatát:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}!$$

8. Adja meg páronként idegen ciklusok szorzataként az alábbi permutációkat és határozza meg azok párosságát:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}; & \text{b) } & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}; \\ \text{c) } & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \dots & 2n & 2n-1 \end{pmatrix}; & \text{d) } & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & \dots & 3n-1 & 3n & 3n-2 \end{pmatrix}! \end{aligned}$$

9. Írja ki az összes heted rendű permutációt, amelyek az alábbi páronként idegen ciklusok szorzataként vannak megadva:

$$\text{a) } (1\ 5)(2\ 3\ 4); \quad \text{b) } (1\ 3)(2\ 5)(4\ 7); \quad \text{c) } (7\ 5\ 3\ 1)(2\ 4\ 6)!$$

10. Írja fel azt a $2n$ -edrendű permutációt, mely $(1\ 2\ 3\ \dots\ 2n-1\ 2n)$ ciklus által van megadva!

11. Határozza meg az alábbi hetedrendű permutációk szorzatát:

$$\begin{aligned} \text{a) } & [(1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6\ 7)] \cdot [(1\ 4\ 7)(2\ 3\ 5\ 6)]; \\ \text{b) } & [(1\ 3)(5\ 7)(2\ 4\ 6)] \cdot [(1\ 3\ 5)(2\ 4)(6\ 7)]! \end{aligned}$$

12. Bizonyítsa be, hogy bármely $\delta \in S_n$ ciklusra, melynek hossza k , teljesül a következő egyenlőség: $\delta^k = e$ (e – egységpermutáció az S_n -ből)!

13. Legyen $\delta \in S_n$ – k hosszúságú ciklus és l – olyan természetes szám, hogy $\delta^l = e$. Bizonyítsa be, hogy l osztható k -ra!

14. Legyen

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Oldja meg az alábbi egyenleteket: a) $\alpha\beta x = \gamma$; b) $\beta = \gamma x \alpha$, ahol x – valamilyen ötöd rendű permutáció!

15. Bizonyítsa be, hogy bármely n -edrendű permutáció felírható az alábbi permutációk szorzataként:

- a) $(1\ 2), (1\ 3), \dots, (1\ n);$ b) $(1\ 2), (2\ 3), \dots, (n-1\ n)!$

5. n -edrendű determinánsok.

A determinánsok tulajdonságai

Elméleti kérdések

1. Hogyan definiáljuk egy $n \times n$ -es mátrix determinánsát?
2. Mit jelent az, hogy egy determináns tagjainak előjele a permutáció előjelétől függ?
3. Hogyan számítjuk ki egy 2×2 -es és egy 3×3 -as mátrix determinánsát?
4. Mi az n -edrendű determináns oszlop- vagy sor-szerinti kifejtése?
5. Milyen változások történnek a determináns értékében, ha transzponáljuk azt?
6. Milyen változások történnek a determináns értékében, ha két sort vagy két oszlopot felcserélünk?
7. Milyen hatással van a determinánssra, ha egy sort vagy oszlopot megszorozunk egy skalárral?
8. Hogyan változik a determináns értéke, ha egy sorhoz (vagy oszlophoz) hozzáadjuk egy másik sor (vagy oszlop) többszörösét?
9. Mivel egyenlő az a determináns, ha sorának vagy oszlopának minden eleme két szám összege?
10. Mi a háromszögmátrix determinánása, és miért?
11. Milyen kapcsolat van a determináns és a mátrix inverze között?
12. Milyen feltétel mellett nulla egy mátrix determinánása?

Gyakorlatok

1. Határozza meg, hogy az alábbi szorzatok közül melyek tartoznak a megfelelő rendű determinánsokba és milyen előjellel rendelkeznek:

- a) $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$; b) $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$;
c) $a_{12}a_{23}a_{34} \cdots a_{n-1,n}a_{kk} \ (1 \leq k \leq n)$; d) $a_{12}a_{23}a_{34} \cdots a_{n-1,n}a_{n1}$!

2. Válassza ki az i, j, k értékeit úgy, hogy az $a_{51}a_{i6}a_{1j}a_{35}a_{44}a_{6k}$ szorzat negatív előjellel kerüljön bele egy hatod rendű determinánsba!

3. Keresse meg a negyed rendű determináns összes tagját, amely tartalmazza az a_{32} elemet és negatív előjellel kerül a determinánsba!

4. Keresse meg az

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$$

determináns összes olyan elemét, amely tartalmazza az : a) x^4 és x^2 ; b) x^3 és x tényezőket!

5. A determináns meghatározása alapján számítsa ki az alábbi determinánsok értékét:

$$a) \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-2} & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix};$$

$$b) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$c) \begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix};$$

$$d) \begin{vmatrix} 2 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 2 & a \\ d & 0 & 0 & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \end{vmatrix};$$

$$e) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & -\lambda & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & -\lambda & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda + a_4 \end{vmatrix}!$$

6. Hogyan változik a determináns, ha:

a) az első oszlopát az utolsó helyére tesszük, az összes többi pedig balra toljuk, megőrizve kölcsönös elhelyezkedésüket;

b) a sorait fordított sorrendben írjuk fel?

7. Hogyan változik a determináns, ha:

a) az összes oszlopához, kezdve a másodikkal, hozzáadjuk az előzőt;

b) az összes sorához, kezdve a másodiktól, hozzáadjuk az összes előzőt?

8. Legyen $\Delta = |a_{jk}|$ ($a_{jk} \in \mathbb{C}$) – n -edrendű determináns, mely elemei kielégítik a következő feltételeket: 1) $a_{jk} \in \mathbb{R}$, ha $j > k$; 2) $a_{kj} = ia_{jk}$, ha $j \geq k$ (i – imaginárius). Az n milyen értékeinél lesz a Δ determináns valós szám?

9. Hogyan változik a determináns, ha az összes a_{jk} elemét megszorozzuk c^{j-k} -ra, ahol $c \neq 0$?

10. A 20604, 53227, 25755, 20927 és 289 számok oszthatóak 17-re. Bizonyítsa be, hogy a

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

determináns osztható 17-re!

11. Mennyivel egyenlő az a determináns, melyben a páros számú sorok összege egyenlő a páratlan számú sorok összegével?

12. Bizonyítsa be, hogy

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}!$$

13. Számítsa ki a következő determinánst:

$$\begin{vmatrix} a_1+x & x & \dots & x \\ x & a_2+x & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \dots & a_n+x \end{vmatrix}!$$

6. Az aldetermináns és az elem komplementere.

Determinánsok kiszámítása

Elméleti kérdések

1. Mit nevezünk aldeterminánsnak?
2. Mit értünk egy mátrix elemének algebrai komplementere alatt?
3. Mit értünk egy aldetermináns algebrai komplementere alatt?
4. Hogyan számítjuk ki egy mátrix elemének algebrai komplementerét?
5. Hogyan számítjuk ki egy aldetermináns algebrai komplementerét?
6. Hogyan fejthető ki egy determináns sora vagy oszlopa szerint?
7. Milyen módszerrel lehet meghatározni egy $n \times n$ -es mátrix determinánsát aldeterminánsok segítségével?
8. Miért célszerű olyan sort vagy oszlopot választani a kifejtéshez, amely sok nullaelemet tartalmaz?
9. Hogyan lehet a determinánst sor- vagy oszlopműveletekkel egyszerűsíteni a számításhoz?
10. Hogyan lehet kifejezteni több sor vagy oszlop szerint egy determinánst?
11. Milyen típusú hibák fordulhatnak elő a determináns kézi kiszámításakor, és hogyan kerülhetők el?

Gyakorlatok

Számítsa ki az alábbi determinánsok értékét:

$$1. \begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}!$$

$$2. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}!$$

$$3. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}!$$

$$4. \begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}!$$

$$5. \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}!$$

$$6. \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}!$$

$$7. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}!$$

$$8. \begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}!$$

$$9. \begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}!$$

$$10. \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}!$$

$$11. \begin{vmatrix} 2 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}!$$

$$12. \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}!$$

$$13. \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}!$$

$$14. \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & z \end{vmatrix}!$$

$$15. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ y_1 & y_2 & \cos \beta & \sin \beta \\ z_1 & z_2 & \cos \gamma & \sin \gamma \end{vmatrix}!$$

$$16. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 9 & 4 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}!$$

$$17. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 27 & 0 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 10 \end{vmatrix}!$$

$$18. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}!$$

$$19. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}!$$

$$20. \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}!$$

$$21. \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & x \end{vmatrix}!$$

$$22. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}!$$

$$23. \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ a_{11} & 1 & x & \dots & x^{n-1} \\ a_{21} & a_{22} & 1 & \dots & x^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 1 \end{vmatrix}!$$

7. A Cramer-szabály

Elméleti kérdések

1. Mi a Cramer-szabály, és milyen típusú egyenletrendszerek megoldására használható?
2. Milyen feltétel szükséges ahhoz, hogy egy lineáris egyenletrendszert Cramer-szabállyal meg tudjunk oldani?
3. Mit jelent a fődetermináns (Δ), és hogyan számítjuk ki?
4. Hogyan képezzük az Δ_i determinánsokat a Cramer-szabály alkalmazásakor?
5. Milyen összefüggés van az ismeretlenek és a determinánsok között a Cramer-szabályban?
6. Mi történik, ha a fődetermináns (Δ) értéke nulla?
7. Hogyan alkalmazzuk a Cramer-szabályt egy 2×2 -es egyenletrendszer esetén?
8. Hogyan alkalmazzuk a Cramer-szabályt egy 3×3 -as egyenletrendszer esetén?
9. Miért nem alkalmas a Cramer-szabály nagyobb méretű rendszerek hatékony megoldására?
10. Milyen előnyei és hátrányai vannak a Cramer-szabály alkalmazásának más módszerekhez képest?
11. Mikor lehet több vagy végtelen sok megoldása egy egyenletrendszernek, és mit jelez ez a Cramer-szabály szerint?

Gyakorlatok

Oldja meg az alábbi egyenletrendszereket a Cramer-szabály szerint:

$$1. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3! \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37! \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x - 5y + 3z + t - 5 = 0, \\ 3x - 7y + 6z - t + 1 = 0, \\ 5x - 9y + 3z + 4t - 7 = 0, \\ 4x - 6y + 3z + t - 8 = 0! \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6 = 0, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 + 8 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8 = 0! \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0! \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 6x + 5y - 2z + 4t + 4 = 0, \\ 9x - y + 4z - t - 13 = 0, \\ 3x + 4y + 2z - 2t - 1 = 0, \\ 3x - 9y + 2t - 11 = 0! \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x - y - 6z + 3t + 1 = 0, \\ 7x - 4y + 2z - 15t + 32 = 0, \\ x - 2y - 4z + 9t - 5 = 0, \\ x - y + 2z - 6t + 8 = 0! \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 2x + y + 4z + 8t = -1, \\ x + 3y - 6z + 2t = 3, \\ 3x - 2y + 2z - 2t = 8, \\ 2x - y + 2z = 4! \end{cases}$$

9. Ellenőrizze le, hogy az 1,1,1,1 számrendszer megoldása lesz-e a következő egyenletrendszernek:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 11x_3 - 13x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 0, \\ 13x_1 - 25x_2 + x_3 + 11x_4 = 0! \end{cases}$$

Számítsa ki az egyenletrendszer determinánsát!

10. Oldja meg az x_1, x_2, x_3 ismeretlenektől függő alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_1^2 x_3 = \beta_1, \\ x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_2^2 x_3 = \beta_2, \\ x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_3^2 x_3 = \beta_3, \end{cases}$$

ahol $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – páronként különböző valós számok; $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$.

8. Mátrix-műveletek. A mátrix inverze

Elméleti kérdések

1. Mit nevezünk mátrixnak, és hogyan jelöljük?
2. Milyen alapvető műveleteket végezhetünk mátrixokkal?
3. Mikor értelmezhető két mátrix összeadása és kivonása?
4. Hogyan történik két mátrix szorzása, és mik a feltételei?
5. Mi a skalárral való szorzás szabálya mátrix esetén?
6. Mit jelent a mátrix transzponáltja, és hogyan számítjuk ki?
7. Mit jelent az, hogy egy mátrix szimmetrikus vagy háromszögmátrix?
8. Mit nevezünk egységmátrixnak, és milyen tulajdonságai vannak?
9. Mit jelent egy mátrix inverze, és hogyan jelöljük?
10. Milyen feltétel mellett létezik egy mátrix inverze?
11. Hogyan számítható ki egy $n \times n$ -es mátrix inverze?
12. Mi a szerepe a determinánsnak a mátrix inverzének kiszámításában?
13. Milyen kapcsolat van a mátrix és az inverzei közötti determinánsoknak?
14. Hogyan használható az inverz mátrix lineáris egyenletrendszerek megoldásában?

Gyakorlatok

Számítsa ki az alábbi mátrixok szorzatát:

1. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}!$
2. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}!$
3. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}!$
4. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 13 \\ 3 & -16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}!$
5. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}!$
6. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}!$
7. $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^5!$
8. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^n!$
9. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n!$
10. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n!$
11. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n!$

12. Hogyan változik az A és B mátrixok AB szorzata, ha:

- a) az A mátrix i -edik és j -edik sorát megcseréljük;
- b) az A mátrix i -edik sorához hozzáadjuk a j -edik sor α -szorosát;

c) a B mátrix i -edik és j -edik oszlopát megcseréljük;

d) a B mátrix i -edik oszlopához hozzáadjuk j -edik oszlop α -szorosát?

13. A négyzetes mátrix *spurjának*(*nyomának*) nevezzük azon elemeinek összegét, melyek a mátrix főátlóján helyezkednek el. Bizonyítsa be, hogy az AB szorzat spurja egyenlő a BA szorzat spurjával!

14. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges n -edrendű A és B négyzetes mátrixokra $AB - BA \neq E$, ahol E – n -edrendű egységmátrix!

15. Legyenek A és B – azonos rendű mátrixok. Bizonyítsa be, hogy $AB = BA$ akkor és csak akkor, ha a következő egyenlőségek közül az egyik igaz:

a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$; b) $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$!

16. Legyen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Bizonyítsa be, hogy

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = O,$$

ahol E , O – megfelelően másodrendű egység- és nullás mátrixok!

17. Keresse meg az összes olyan másodrendű mátrixot, melyeknek négyzete nullás mátrixszal egyenlő!

18. Keresse meg az összes olyan másodrendű mátrixot, melyeknek négyzete egységmátrixszal egyenlő!

19. Keresse meg az összes olyan mátrixot, melyek kommutálnak az A mátrixszal, ha:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$!

Keresse meg az alábbi mátrixok inverzét:

20. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$!

21. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$!

22. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$!

23. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$!

24. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$!

25. Oldja meg az alábbi mátrixegyenletet:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}!$$

9. Az n -dimenziós számtani vektortér. Vektorrendszerek lineáris összefüggősége

Elméleti kérdések

1. Mit értünk n -dimenziós számtani vektortéren?
2. Milyen elemekből áll az $\mathbb{R}^n$ vektortér?
3. Milyen műveletek végezhetők el az $\mathbb{R}^n$ vektorokon?
4. Mit nevezünk vektorok lineáris kombinációjának?
5. Mit jelent a vektorrendszerek lineáris összefüggősége?
6. Mikor mondjuk, hogy egy vektorrendszer lineárisan független?
7. Mikor mondjuk, hogy egy vektorrendszer lineárisan összefüggő?
8. Hogyan lehet eldönteni egy vektorrendszerről, hogy lineárisan független-e?
9. Hány legfeljebb lineárisan független vektor lehet egy $\mathbb{R}^n$ térben?
10. Mi a rang fogalma egy vektorrendszerrel kapcsolatban?
11. Mit nevezünk a vektortér bázisának?
12. Milyen tulajdonságai vannak a bázisnak az $\mathbb{R}^n$ térben?
13. Hogyan lehet egy vektort felírni adott bázis vektorainak lineáris kombinációjaként?

Gyakorlatok

1. Keresse meg az alábbi vektorok $3a_1 + 5a_2 - a_3$ lineáris kombinációját

$$a_1 = (4, 1, 3, -2), \quad a_2 = (1, 2, -3, 2), \quad a_3 = (16, 9, 1, -3)!$$

2. Határozza meg az x és y vektorokat az alábbi egyenletekből:

$$a) \quad a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4x = \vec{0}, \quad b) \quad 3(a_1 - y) + 2(a_2 + y) = 4(a_3 - y),$$

ahol $a_1 = (5, -8, -1, 2)$, $a_2 = (2, -1, 4, -3)$, $a_3 = (-3, 2, -5, 4)$.

Határozza meg, hogy lineárisan összefüggőek-e az alábbi vektorrendszerek:

3. $a_1 = (5, 4, 3)$, $a_2 = (3, 3, 2)$, $a_3 = (8, 1, 3)$.

4. $b_1 = (2, -4, 1)$, $b_2 = (0, 5, -6)$, $b_3 = (1, -2, 4)$.

5. $c_1 = (4, -5, 2, 6)$, 6. $d_1 = (1, 0, 0, 2, 5)$,

$c_2 = (2, -2, 1, 3)$, $d_2 = (0, 1, 0, 3, 4)$,

$c_3 = (6, -3, 3, 9)$, $d_3 = (0, 0, 1, 4, 7)$,

$c_4 = (4, -1, 5, 6)$. $d_4 = (2, -3, 4, 11, 12)$.

7. Bizonyítsa be, hogy két arányos vektort tartalmazó vektorrendszer lineárisan összefüggő!

8. Bizonyítsa be, hogy nullás vektort tartalmazó vektorrendszer lineárisan összefüggő!

9. Bizonyítsa be, hogy ha az a_1, a_2, a_3 vektorrendszer lineárisan összefüggő és az a_3 vektor az a_1, a_2 vektorok lineáris kombinációja, akkor vagy az a_1 vektor lesz arányos az a_2 vektorral, vagy fordítva, az a_2 lesz arányos az a_1 vektorral!

10. Legyen $a_1, a_2, \dots, a_s$ – k -adrangú n -dimenziós vektorrendszer. Bizonyítsa be, hogy bármelyik lineárisan független részrendszere, amely k vektorból áll, bázisa lesz ennek a rendszernek!

11. Bizonyítsa be, hogy az adott vektorrendszer bármelyik lineárisan független részrendszere kibővíthető ezen rendszer bázisává!

12. Milyen esetben lesz a vektorrendszernek egyetlen bázisa?

13. Ekvivalens lesz-e két vektorrendszer, ha egyforma ranggal rendelkeznek?

14. Legyen $a_1 = (0,1,0,2,0)$, $a_2 = (7,4,1,8,3)$, $a_3 = (0,3,0,4,0)$, $a_4 = (1,9,5,7,1)$, $a_5 = (0,1,0,5,0)$. Kiválasztható-e a γ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4, 5$) szám úgy, hogy a

$$b_1 = \sum_{k=1}^5 \gamma_{1k} a_k, \quad b_2 = \sum_{k=1}^5 \gamma_{2k} a_k, \quad \dots, \quad b_5 = \sum_{k=1}^5 \gamma_{5k} a_k$$

vektorrendszer lineárisan összefüggő legyen?

Keresse meg a λ paraméter minden olyan értékét, amelynél a b vektor az a_1, a_2, a_3 vektorok lineáris kombinációja lesz, ha:

15. $a_1 = (2,3,5),$	16. $a_1 = (4,4,3),$
$a_2 = (3,7,8),$	$a_2 = (7,2,1),$
$a_3 = (1, -6,1),$	$a_3 = (4,1,6),$
$b = (7, -2, \lambda).$	$b = (5,9, \lambda).$

17. $a_1 = (3,2,5),$	18. $a_1 = (3,2,6),$
$a_2 = (2,4,7),$	$a_2 = (7,3,9),$
$a_3 = (5,6, \lambda),$	$a_3 = (5,1,3),$
$b = (1,3,5).$	$b = (\lambda, 2,5).$

Keresse meg az alábbi vektorrendszerek összes bázisát:

19. $a_1 = (1,2,3,4),$	20. $a_1 = (1,2,3),$
$a_2 = (2,3,4,5),$	$a_2 = (2,3,4),$
$a_3 = (3,4,5,6),$	$a_3 = (3,2,3),$
$a_4 = (4,5,6,7).$	$a_4 = (4,3,4),$
	$a_5 = (1,1,1).$

21. Hány bázisa lesz a $k + 1$ vektorból álló k -adrangú rendszernek, amely a nullás vektortól eltérő arányos vektorokat tartalmaz?

10. A mátrix rangja

Elméleti kérdések

1. Mit értünk egy mátrix rangján?
2. Hogyan határozható meg egy mátrix rangja sor- vagy oszlopvektorok alapján?
3. Mi a kapcsolat a mátrix rangja és a lineáris függetlenség között?
4. Milyen módszerekkel lehet kiszámítani egy mátrix rangját?
5. Hogyan segíti a Gauss-elimináció a mátrix rangjának meghatározását?
6. Mi a lépcsős alak, és hogyan kapcsolódik a rang meghatározásához?
7. Milyen tulajdonságai vannak a rangnak sor- vagy oszlopműveletek során?
8. Mi a maximális rangja egy $m \times n$ típusú mátrixnak?
9. Mi történik a ranggal, ha nullsorokat vagy lineárisan összefüggő sorokat tartalmaz a mátrix?
10. Milyen kapcsolat van a mátrix rangja és a lineáris egyenletrendszerek megoldhatósága között?
11. Hogyan használható a rang a homogén és inhomogén egyenletrendszerek megoldásainak vizsgálatára?
12. Milyen szerepe van a rangnak a mátrix inverzének létezésében?
13. Mi a kapcsolat a mátrix determinánsa és rangja között?

Gyakorlatok

1. Számítsa ki az alábbi mátrixok rangját a beszegési aldeterminánsok módszerével:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 11 \\ 3 & 3 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix};$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix};$

c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix};$

d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}!$

2. Keresse meg a λ paraméter értékét, melyre az alábbi mátrixnak a legkisebb a rangja:

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}!$

3. Mivel lesz egyenlő az alábbi mátrixok rangja a λ paraméter különböző értékeinél:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 - \lambda^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9 - \lambda^2 \end{pmatrix}?$$

4. Számítsa ki az alábbi mátrixok rangját az elemi átalakítások segítségével:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 75 & 0 & 116 & 39 & 0 \\ 171 & -69 & 402 & 123 & 45 \\ 301 & 0 & 87 & -417 & -169 \\ 114 & -46 & 268 & 82 & 30 \end{pmatrix}; \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}!$$

5. Bizonyítsa be, hogy ha a mátrixhoz hozzácsatolnak egy sort (vagy egy oszlopot), vagy nem változik a rangja, vagy megnövekedik eggyel!

6. Bizonyítsa be, hogy egy r -edrangú tetszőleges mátrix felírható elsőrangú r számú mátrixok összegeként, de nem írható fel kevesebb, mint r ilyen mátrix összegeként!

7. Legyen $A = \|a_{ij}\| - n > 1$ -edrendű mátrix és r – ezen mátrix rangja. Határozza meg az adjungált $A^* = \|A_{ij}\|$ mátrix rangját, ahol A_{ij} – az A mátrix a_{ji} elemének algebrai komplementere!

11. Lineáris egyenletrendszer. A Kronecker-Capelli tétel

Elméleti kérdések

1. Mit nevezünk lineáris egyenletrendszernek?
2. Milyen típusú megoldásai lehetnek egy lineáris egyenletrendszernek?
3. Mit értünk a bővített mátrix alatt, és hogyan állítjuk elő?
4. Mi a rang fogalma, és hogyan határozható meg egy mátrix rangja?
5. Mit mond ki a Kronecker–Capelli tétel a lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságáról?
6. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy lineáris egyenletrendszernek legyen megoldása?
7. Milyen esetben nincs megoldása egy lineáris egyenletrendszernek a Kronecker–Capelli tétel szerint?
8. Hogyan függ össze a főmátrix és a bővített mátrix rangja a megoldások számával?
9. Mi a különbség homogén és inhomogén lineáris egyenletrendszerek között?
10. Hogyan használható a Kronecker–Capelli tétel a gyakorlatban a rendszer megoldhatóságának gyors ellenőrzésére?

Gyakorlatok

1. Vizsgálja meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket megoldhatóságukra és keresse meg általános és egy konkrét megoldásukat:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2; \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4; \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12; \end{cases}$$

$$\text{g) } \begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1; \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3; \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7; \end{cases}$$

$$\text{h) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 7; \end{cases}$$

$$\text{i)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1; \end{cases} \quad \text{j)} \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1! \end{cases}$$

2. Vizsgálja meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket megoldhatóságukra és a λ paraméter értékétől függően keresse meg az általános megoldásukat:

$$\begin{aligned} \text{a)} \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5, \\ -x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 20x_4 = 11, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 2; \end{cases} \\ \text{c)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9, \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11; \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + \lambda x_4 = 9; \end{cases} \\ \text{e)} \begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1; \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} (1 + \lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1 + \lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + (1 + \lambda)x_3 = \lambda^2! \end{cases} \end{aligned}$$

3. Vizsgálja meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket megoldhatóságukra és az a, b, c, d paraméterek értékétől függően keresse meg az általános megoldásaikat:

$$\text{a)} \begin{cases} x + y + z = 1, \\ ax + by + cz = d, \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2; \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} ax + y + z = 1, \\ x + by + z = 1, \\ x + y + cz = 1! \end{cases}$$

12. Homogén lineáris egyenletrendszerek

Elméleti kérdések

1. Mit nevezünk homogén lineáris egyenletrendszernek?
2. Mi az általános alakja egy homogén lineáris egyenletrendszernek?
3. Miért van mindig legalább egy megoldása egy homogén rendszernek?
4. Mit nevezünk triviális megoldásnak?
5. Mikor mondjuk, hogy egy homogén egyenletrendszernek csak a triviális megoldása van?
6. Milyen feltételek mellett létezik nemtriviális megoldás?
7. Mi a kapcsolat a homogén rendszer megoldásainak száma és a mátrix rangja között?
8. Mit jelent a megoldások vektortere, és milyen dimenziójú ez a tér?
9. Hogyan határozhatjuk meg a homogén rendszer megoldáshalmazát lépcsős alak segítségével?
10. Mi a különbség homogén és inhomogén lineáris egyenletrendszerek között?
11. Hogyan függ össze a homogén rendszer megoldásterének dimenziója (fundamentális rendszer elemszáma) a változók számával és a ranggal?
12. Milyen szerepet játszanak a homogén rendszerek a vektorok lineáris összefüggőségének vizsgálatában?
13. Hogyan alkalmazhatóak a homogén rendszerek a vektorterek elméletében és a bázis meghatározásában?
14. Milyen gyakorlati algoritmus van a homogén egyenletrendszer megoldásának?

Gyakorlatok

1. Keresse meg az egyenletrendszerek fundamentális rendszerét és általános megoldásait:

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0; \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0; \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0, \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0, \\ -x_3 + x_5 = 0, \\ -x_4 + x_6 = 0; \end{cases} \quad f) \begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0! \end{cases}$$

2. Az

$$A = \begin{pmatrix} 30 & -24 & 43 & -50 & -5 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

mátrixok sorai fundamentális rendszerét alkotják-e az alábbi egyenletrendszernek

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 11x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 0? \end{cases}$$

3. Az alábbi mátrix mely sorai alkotják

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 & -7 \\ 5 & 3 & 7 & -6 & -14 \\ 8 & 0 & -5 & 6 & 13 \\ 4 & -2 & -7 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

a

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszer fundamentális rendszerét?

4. Keresse meg azokat a homogén lineáris egyenletrendszereket, melyek számára az alábbi vektorrendszerek a fundamentális rendszerei lehetnének:

$$a) (3, 4, 2, 1, 6), (5, 9, 7, 4, 7); \quad b) (4, 3, -1, -1, 11), (1, 6, 8, 5, -4)!$$

5. Bizonyítsa be, hogy ha a homogén lineáris egyenletrendszer rangjának értéke eggyel kevesebb az ismeretlenek számánál, akkor a rendszer tetszőleges két megoldása arányos lesz egymással!

6. Legyen A – n ismeretlentől vett $n - 1$ homogén lineáris egyenletből álló rendszer mátrixa, M_i – az A mátrix aldeterminánsa, amely az A mátrix i -edik sora kihúzásával kapható meg. Bizonyítsa be, hogy a lineáris egyenletrendszer megoldásai közül az egyik az alábbi számrendszer

$$M_1, -M_2, M_3, -M_4, \dots, (-1)^{n-1}M_n,$$

emellett, ha ez a megoldás nem nulla, akkor bármelyik másik megoldás arányos lesz vele!

7. Felhasználva az előző feladat eredményeit, keresse meg az alábbi egyenletrendszerek általános megoldását:

$$a) \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 6x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0; \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0! \end{cases}$$

8. Bizonyítsa be, hogy a homogén lineáris egyenletrendszer tetszőleges megoldásának k -adik komponense akkor és csak akkor lesz egyenlő nullával, ha a rendszer mátrixának rangja a k -adik oszlop kihúzása esetén eggyel csökken!

9. Milyen feltételek mellett lesz az inhomogén lineáris egyenletrendszer tetszőleges megoldásainak adott lineáris kombinációja ismét megoldása ennek a rendszernek?

13. Csoportok. Gyűrűk. Testek

Elméleti kérdések

1. Mit nevezünk csoportnak az algebrai struktúrák között?
2. Melyek a csoport definíciójának alapvető axiómái?
3. Mi a különbség a csoport és az abelcsoport (kommutatív csoport) között?
4. Mi az egységelem szerepe egy csoportban?
5. Mit értünk egy elem inverzén egy csoportban?
6. Milyen példákat ismerünk véges és végtelen csoportra?
7. Hogyan definiáljuk egy elem rendjét egy csoportban?
9. Mit nevezünk csoporthomomorfizmusnak?
10. Mi a gyűrű fogalma, és milyen műveletekkel rendelkezik?
11. Mely axiómáknak kell teljesülniük ahhoz, hogy egy struktúra gyűrű legyen?
12. Mit jelent az, hogy egy gyűrű kommutatív?
13. Mi a nullosztó fogalma egy gyűrűben?
14. Mikor nevezünk egy gyűrűt egységelemes gyűrűnek?
16. Mi a test fogalma az algebrában?
17. Miben különbözik egy test egy kommutatív gyűrűtől?
18. Mi a különbség a véges és végtelen testek között?

Gyakorlatok

1. Az alábbi halmazok közül melyek alkotnak csoportot a megadott műveletre nézve:
 - a) a racionális számok halmaza az összeadás műveletét tekintve;
 - b) a racionális számok halmaza az szorzás műveletét tekintve;
 - c) az összes pozitív racionális szám halmaza az szorzás műveletét tekintve;
 - d) egy adott $a \neq 0$ valós szám egész kitevőjű hatványainak halmaza a szorzás műveletét tekintve;
 - e) az egész számok halmaza, hogyha a művelet a következőképpen van meghatározva: $a * b = a^b$;
 - f) az egész számok halmaza, hogyha a művelet a következőképpen van meghatározva: $a * b = a^2 b^2$;
 - g) a komplex számok halmaza adott φ argumentummal a szorzás műveletét tekintve;
 - h) az összes komplex n -edik egységgyökök halmaza a szorzás műveletét tekintve;

- i) a nullától eltérő összes komplex szám halmaza, melyeknek abszolút értéke nem nagyobb egy rögzített r számtól, a szorzás műveletét tekintve;
- j) az összes n -ed rendű páros permutációk halmaza a szorzás műveletét tekintve;
- k) az összes n -ed rendű páratlan permutációk halmaza a szorzás műveletét tekintve;
- l) az $\mathbb{R}^n$ halmaz összes n -dimenziós vektora az összeadás műveletét tekintve az $\mathbb{R}$ felett;
- m) a sík összes elforgatásának halmaza egy rögzített pont körül az elforgatások folyamatos műveletét tekintve;
- n) a sík összes párhuzamos eltolásának halmaza a párhuzamos eltolások folyamatos műveletét tekintve!

2. Bizonyítsa be, hogy egy tetszőleges G csoportban egyetlen egységelem és egyetlen inverz elem létezik a G csoport tetszőleges elemére!

3. Legyen $G - e$ egységelemet tartalmazó csoport a szorzás műveletét nézve. Bizonyítsa be, hogyha tetszőleges $a \in G$ elemre $a^2 = e$, akkor a $G - \text{Abel-csoport!}$

4. Legyen $G_1, G_2 -$ megfelelően e_1 és e_2 egységelemeket tartalmazó izomorf csoportok és $f : G_1 \rightarrow G_2 -$ olyan bijektív leképezés, hogy tetszőleges $a, b \in G_1$ elemekre $f(ab) = f(a)f(b)$. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $a \in G_1$ elemre $f(e_1) = e_2$ és $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$!

5. Bizonyítsa be, hogy az egész számok $\mathbb{Z}$ csoportja az összeadás műveletére nézve izomorf lesz egy adott természetes n szám egész többszöröseinek $n\mathbb{Z}$ csoportjával az összeadás műveletét tekintve!

6. Bizonyítsa be, hogy a valós számok csoportja az összeadásra nézve izomorf lesz pozitív egész számok csoportjával a szorzás műveletét tekintve!

7. Bizonyítsa be, hogy egy tetszőleges n -edrendű csoport izomorf lesz az n -edfokú permutációk S_n csoportjának valamely részcsoportjával!

8. Keresse meg az összes 3-adrendű csoportot (az izomorfizmus pontosságával)!

9. Keresse meg a $\mathbb{Z}^+$ egész számok csoportjának összes részcsoportját az összeadás műveletére nézve!

10. Írja ki a 3-adrendű permutációk S_3 csoportjának összes részcsoportját!

11. Az alábbi halmazok közül melyek alkotnak gyűrűt (testet) a megadott műveletre nézve:

- a) az összes páros egész szám halmaza az összeadás és szorzás műveletét tekintve;
- b) egy adott természetes n szám egész többszöröseinek halmaza az összeadás és szorzás műveletét tekintve;
- c) az összes racionális szám halmaza az összeadás és szorzás műveletét tekintve;
- d) az összes valós számok halmaza az összeadás és szorzás műveletét tekintve;
- e) az összes komplex szám halmaza az összeadás és szorzás műveletét tekintve;
- f) az $a + b\sqrt{2}$ alakú valós számok halmaza, ahol $a, b -$ egész számok, az összeadás és szorzás műveletét tekintve;

g) az $a + b\sqrt[3]{3}$ alakú valós számok halmaza, ahol a, b – racionális számok, az összeadás és szorzás műveletét tekintve;

h) az $a + bi$ alakú komplex számok halmaza, ahol a, b – egész számok, az összeadás és szorzás műveletét tekintve;

i) az $a + bi$ alakú komplex számok halmaza, ahol a, b – racionális számok, az összeadás és szorzás műveletét tekintve;

j) az összes egész elemű n -es mátrixok halmaza az összeadás és szorzás műveletét tekintve;

k) az összes valós elemű n -es mátrixok halmaza az összeadás és szorzás műveletét tekintve;

l) az összes a, b racionális elemű $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ alakú mátrix halmaza az összeadás és szorzás műveletét tekintve!

12. Legyen K – 1 egységelemet tartalmazó gyűrű. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $a, b \in K$ elemekre igazak a $-(-a) = a$, $(-1) \cdot a = -a$, $(-a)(-b) = ab$ egyenlőségek!

13. Bizonyítsa be, hogy a valós elemű n -es mátrixok gyűrűjében csakis az elfajult mátrixok lesznek nullosztók!

14. Bizonyítsa be, hogy az összes $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ alakú mátrixok halmaza, ahol a, b – valós számok, a mátrixok összeadásának és szorzásának műveletét tekintve testet alkot, amely izomorf a komplex számok testével!

15. Bizonyítsa be, hogy az $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ alakú elemekből álló mátrixok teste izomorf az $a + b\sqrt{2}$ alakú elemekből álló számok testével (a, b racionális számok)!

14. A polinomok gyűrűje

Elméleti kérdések

1. Mit értünk a polinom fogalma alatt egy adott test vagy gyűrű felett?
2. Hogyan definiáljuk a polinomok összeadását és szorzását?
3. Miért alkot gyűrűt a polinomok halmaza egy adott gyűrű vagy test felett?
4. Milyen tulajdonságokkal rendelkezik a polinomgyűrű: asszociativitás, kommutativitás, disztributivitás?
5. Mi a polinom fok, és hogyan számítjuk ki két polinom szorzatának fokát?
6. Mit jelent az, hogy egy polinom osztható egy másik polinommal?
7. Hogyan működik a polinomosztás maradékkal (hasonlóan az egész számok osztásához)?
8. Mi a legnagyobb közös osztó fogalma polinomok esetén?
9. Mi az euklideszi algoritmus szerepe a polinomgyűrűben?
10. Mit nevezünk irreducibilis polinomnak?

Gyakorlatok

1. Számítsa ki az alábbi polinomok szorzatát a komplex számok teste felett:

- a) $(2x^4 - x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 - 3x + 1)$;
- b) $(3x^5 + 2x^2 - 1)(2x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4)$;
- c) $((1 - i)x^3 + (2 + 3i)x^2 - ix + 1 + i)((1 + i)x - 3)$;
- d) $(ix^3 - 4)(-x^4 + (3 - i)x^2 + 7 - i)$!

2. Ossa el az $f(x)$ polinomot a $g(x)$ polinomra a komplex számok teste felett, ha:

- a) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$, $g(x) = x^2 - 3x + 1$;
- b) $f(x) = 3x^5 + 2x^2 - 1$, $g(x) = 3x^3 - 3x - 2$;
- c) $f(x) = (-1 + 5i)x^3 - (6 + 11i)x^2 + (3 + 5i)x + 2 - 5i$,
 $g(x) = (1 + i)x - 3$;
- d) $f(x) = (-1 + 3i)x^4 + 9x^3 + (-9 + 3i)x^2 + (7 + 6i)x - (2 + 2i)$,
 $g(x) = ix^2 + (2 - i)x - 2 + 3i$!

3. Milyen feltételek mellett fog osztódni az $f(x)$ polinom a $g(x)$ polinomra a valós számok teste felett, ha:

- a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$, $g(x) = (x - 1)^2$ ($a, b \in \mathbb{R}$);
- b) $f(x) = x^4 + px^2 + q$, $g(x) = x^2 + mx + 1$ ($p, q, m \in \mathbb{R}$)?

4. Határozza meg a polinomok legnagyobb közös osztóját:

- a) $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ és $x^3 + x^2 - x - 1$;
b) $x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1$ és $3x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 2$;
c) $x^6 - 7x^4 + 8x^3 - 7x + 7$ és $3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - 7$;
d) $x^5 + x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ és $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1$;
e) $x^4 - 10x^2 + 1$ és $x^4 - 4\sqrt{2}x^3 + 6x^2 + 4\sqrt{2}x + 1$;
f) $x^4 - 4x^3 + 1$ és $x^3 - 3x^2 + 1$!

5. Felhasználva az Euklideszi algoritmust, határozza meg azokat az $u(x)$ és $v(x)$ polinomokat, melyekre teljesül, hogy $u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$, ahol $d(x) = (f(x), g(x))$, hogyha:

- a) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$, $g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$;
b) $f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1$, $g(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2$;
c) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2$, $g(x) = x^2 - x + 1$;
d) $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1$, $g(x) = x^2 - x - 1$!

6. A határozatlan együtthatók módszerének segítségével határozza meg az $u(x)$ és $v(x)$ polinomokat úgy, hogy teljesüljön: $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$, hogyha:

- a) $f(x) = x^3$, $g(x) = (x - 1)^2$;
b) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$!

7. Határozza meg azt a legkisebb fokszámú polinomot, mely az $(x - 1)^2$ -re való osztásakor $2x$ maradékot, az $(x - 1)^3$ -re való osztásakor pedig $3x$ maradékot ad!

8. Legyen $u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$, ahol $d(x)$ — az $f(x)$ és $g(x)$ polinomok legnagyobb közös osztója. Mivel egyenlő az $u(x)$ és $v(x)$ polinomok legnagyobb közös osztója?

15. A polinomok gyökei

Elméleti kérdések

1. Mit nevezünk egy polinom gyökerének?
2. Hogyan ellenőrizhető, hogy egy adott szám gyöke-e egy polinomnak?
3. Mi a multiplicitás fogalma egy polinom gyökére vonatkozóan?
4. Mi lesz az $f(x)$ polinom maradéka $(x - c)$ -re való osztásnál?
5. Mit állít a Bézout-tétele?
6. Mi az alapvető algebrai tétel (alaptétel) a komplex gyökökről?
7. Hány gyöke lehet egy n fokszámú polinomnak, és ezek hogyan viszonyulnak a fokszámhoz?
8. Hogyan viselkednek a polinom gyökei a valós és komplex számtesteken?
9. Mit jelent az, hogy egy polinom irreducibilis egy adott test felett?
10. Hogyan kapcsolódnak a gyökök a polinom deriváltjához (pl. többszörös gyök esetén)?

Gyakorlatok

1. A Horner-elrendezés algoritmusának segítségével számítsa ki az $f(x)$ polinom $f(c)$ értékét (amikor $x = c$), ha:

- a) $f(x) = 5x^4 - 19x^3 - 7x^2 + 9x + 3$, $c = 2$;
- b) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 5x^2 + x + 33$, $c = -2$;
- c) $f(x) = x^5 + (1 + 2i)x^4 - (1 + 3i)x^2 + 7$, $c = -2 - i$!

2. Bontsa fel az $f(x)$ polinomot az $x - c$ hatványai szerint, valamint keresse meg azok deriváltjainak értékét amikor $x = c$, ha:

- a) $f(x) = x^5$, $c = 1$;
- b) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 90$, $c = 2$;
- c) $f(x) = x^4 + 2ix^3 - (1 + i)x^2 - 3x + 7 + i$, $c = -i$;
- d) $f(x) = x^4 + (3 - 8i)x^3 - (21 + 18i)x^2 - (33 - 20i)x + 7 + 18i$, $c = -i + 2i$!

3. Határozza meg az $f(x)$ polinom c gyökének multiplicitását:

a) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$, $c = 2$;

b) $f(x) = x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 36x^2 - 27x - 54$, $c = 3$;

4. Az a milyen értéke mellett lesz az $x^5 - ax^2 - ax + 1$ polinom -1 -es gyökének multiplicitása legalább 2?

5. Az a és b melyik értékénél osztható az a) $ax^4 + bx^3 + 1$; b) $ax^n + bx^{n-1} + 1$ polinom az $(x - 1)^2$?

6. Keresse meg azt a feltételt, ami mellett az $x^5 - ax^3 - b$ polinom ($a, b \in \mathbb{R}$) rendelkezik nem nulla gyökkel, melynek multiplicitása 2!

7. Bizonyítsa be, hogy az $1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$ polinom nem rendelkezik többszörös gyökökkel!

8. Bontsa fel az $f(x)$ polinomot irreducibilis polinomok szorzatába a komplex számok teste felett, ha:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$; b) $f(x) = x^4 + 10x^2 + 1$;

c) $f(x) = x^8 + 27x^2$; d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$!

9. Bontsa fel az $f(x)$ polinomot irreducibilis polinomok szorzatába a komplex számok teste felett, ha:

a) $f(x) = x^6 + 27$; b) $f(x) = x^{2n} - 2x^n + 2$;

c) $f(x) = x^{2n} + x + 1$; d) $f(x) = x^4 - ax^2 + 1$ ($-2 < a < 2$);

e) $f(x) = x^6 - x^3 + 1$; f) $f(x) = x^{12} + x^8 + x^4 + 1$!

10. Határozza meg a komplex számok teste felett azt a polinomot, melynek legkisebb a fokszáma a megadott gyökök alapján:

a) 1 — kétszeres gyök, és $2, 3, 1 + i$ — egyszeres gyökök;

b) i — háromszoros gyök, és $-1, -i$ — egyszeres gyökök!

11. Határozza meg a valós számok teste felett azt a polinomot, melynek legkisebb a fokszáma a megadott (komplex) gyökök alapján:

a) 1 — kétszeres gyök, és $2, 3, 1 - i$ — egyszeres gyökök;

b) $(2 - 3i)$ — háromszoros gyök, és $-i$ — egyszeres gyök!

12. Bizonyítsa be, hogy az $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+1}$ polinom osztható az $x^2 + x + 1$ polinomra bármilyen természetes m, n, p számokra!

13. Milyen feltételek mellett osztható az $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+1}$ polinom az $x^2 + x + 1$ polinomra?

14. $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ gyökei az $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ polinomnak. Milyen gyökei vannak az alábbi polinomoknak:

a) $a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} - \dots + (-1)^n a_0;$

b) $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n;$

c) $a_n x^n + a_{n-1} b x^{n-1} + a_{n-2} b^2 x^{n-2} + \dots + a_0 b^n ?$

15. Keresse meg az összefüggést az $x^3 + px^2 + qx + r$ polinom együtthatói között, melynek egyik gyöke egyenlő a másik két gyök összegével!

16. Határozza meg a λ -t úgy, hogy az $x^3 - 7x + \lambda$ polinom egyik gyöke egy másik gyökének kétszerese legyen!

17. Az $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda$ polinom két gyöke egyenlő 1-el. Határozza meg a λ értékét!

18. Határozza meg az a, b, c -t, hogy azok az $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ egyenlet megoldásai legyenek!

16. Irreducibilis polinomok.

Polinomok a racionális számok teste felett

Elméleti kérdések

1. Mit nevezünk polinomnak a racionális számok teste felett?
2. Mi az irreducibilis polinom definíciója a $\mathbb{Q}$ test felett?
3. Milyen módszerekkel dönthető el, hogy egy polinom irreducibilis-e a $\mathbb{Q}$ test felett?
4. Mit mond ki Gauss-lemma az irreducibilitásról?
5. Mi az Eisenstein-féle kritérium, és hogyan használható irreducibilitás ellenőrzésére?
6. Milyen kapcsolat van egy polinom fokszáma és irreducibilitása között?
7. Mikor tekintünk egy másod- vagy harmadfokú polinomot irreducibilisnek a racionális számok teste felett?
8. Mit jelent az, hogy egy polinom felbontható lineáris tényezőkre a $\mathbb{C}$ test felett, de nem a $\mathbb{Q}$ felett?
9. Mi a különbség az oszthatóság és az irreducibilitás fogalma között polinomok esetén?

Gyakorlatok

1. Legyen P – az F test részteste és $g(x) \in P[x]$. Az alábbi állítások közül melyek igazak:

- a) ha $g(x)$ – irreducibilis polinom a P test felett, akkor irreducibilis lesz az F test felett is;
- b) ha $g(x)$ – irreducibilis polinom a F test felett, akkor irreducibilis lesz az P test felett is;
- c) ha $g(x)$ – reducibilis polinom a P test felett, akkor reducibilis lesz az F test felett is;
- d) ha $g(x)$ – reducibilis polinom a F test felett, akkor reducibilis lesz az P test felett is?

2. Legyen F – test. Bizonyítsa be, hogy a 2-ed vagy 3-ad fokszámú polinom az F felett akkor és csak akkor lesz irreducibilis, ha létezik gyöke az F testben. Igaz lesz-e ez az állítás a 4-ed fokszámú polinomok esetére is?

3. Legyen $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ – irreducibilis polinom a $\mathbb{Q}$ felett. Bizonyítsa be, hogy az $f(x)$ polinomnak nincsenek többszörös komplex gyökei!

4. Eisenstein-féle irreducibilitási kritériumot felhasználva bizonyítsa be az alábbi polinomok irreducibilisságát a $\mathbb{Q}$ felett:

- a) $x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$; b) $x^5 - 12x^3 + 36x - 12$;
 c) $x^4 - x^3 + 2x + 1$; d) $x^{(p-1)p^k} + x^{(p-2)p^k} + \dots + x^{p^k} + 1$,

ahol p – természetes prímszám, $k \in \mathbb{N}$!

5. Bizonyítsa be, hogy az egész számú $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ polinom irreducibilis lesz a $\mathbb{Q}$ test felett, ha nincsenek egész gyökei és nem osztdízik egyetlen $x^2 + \frac{cm-am^2}{d-m^2}x + m$ alakú polinomra sem, ahol m – a d szám osztója!

6. Az előző feladat segítségével bontsa fel szorzatokra a következő polinomokat vagy bizonyítsa irreducibilisságukat:

- a) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 3x - 9$; b) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 6$!

7. Bizonyítsa be, hogyha az irreducibilis (egyszerűsíthetetlen) $\frac{p}{q}$ tört az egész számú $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ polinom gyöke, akkor:

- a) q az a_n szám osztója;
 b) p az a_0 szám osztója;
 c) $p - mq$ az $f(m)$ szám osztója tetszőleges egész m számra!

8. Keresse meg az alábbi polinomok racionális gyökeit:

- a) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24$;
 b) $x^5 - 7x^3 - 12x^2 + 6x + 36$;
 c) $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$;
 d) $24x^4 - 42x^3 - 77x^2 + 56x + 60$;
 e) $10x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 18x - 24$;
 f) $x^6 - 6x^5 + 11x^4 - x^3 - 18x^2 + 20x - 8$.

9. Bizonyítsa be, hogy az egész számú $f(x)$ polinomnak nincsenek egész gyökei, ha $f(0)$ és $f(1)$ – páratlan számok!

10. Keresse meg az alábbi polinomok legnagyobb közös osztóját:

- a) $(x-1)^3(x+2)^2(x-3)(x+4)$ és $(x-1)^2(x+2)(x+5)$;
 b) $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)$ és $(x+1)(x^2+1)(x^3+1)(x^4+1)$;
 c) $x^n - 1$ és $x^m - 1$ ($n, m \in \mathbb{N}$)!

17. A lineáris tér bázisa

Elméleti kérdések

1. Mit nevezünk lineáris térnek (vektortérnek)?
2. Mit értünk egy vektorrendszer lineáris kombinációja alatt?
3. Mit jelent az, hogy egy vektorrendszer lineárisan független?
4. Mikor mondjuk, hogy egy vektorrendszer generálja a vektorteret?
5. Mit nevezünk a lineáris tér bázisának?
6. Mit értünk a vektortér dimenziója alatt, és hogyan kapcsolódik ez a bázishoz?
7. Hogyan lehet egy vektort felírni a bázis vektorainak lineáris kombinációjaként?
8. Igaz-e, hogy egy adott vektortérnek több különböző bázisa is lehet?
9. Mi a kapcsolat a bázis és a koordinátarendszer között?

Gyakorlatok

Bizonyítsa be, hogy az a_1, a_2, a_3, a_4 vektorrendszer az $\mathbb{R}^4$ vektoriális tér bázisa lesz a valós számok $\mathbb{R}$ teste fölött! Keresse meg az $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) \in \mathbb{R}^4$ vektor koordinátáinak képleteit ebben a bázisban! Milyenek lesznek a $c \in \mathbb{R}^4$ vektor koordinátái az a_1, a_2, a_3, a_4 bázisban?

1. $a_1 = (2, 1, 1, 3), a_2 = (3, 3, 1, 4), a_3 = (1, 4, 2, 4), a_4 = (4, 1, 2, 2), c = (14, 6, 9, 12).$
2. $a_1 = (2, 1, 2, 2), a_2 = (2, 1, 1, 2), a_3 = (2, 2, 1, 1), a_4 = (1, 1, 1, 0), c = (1, -1, 1, -1).$
3. $a_1 = (1, 1, 1, 1), a_2 = (1, -1, 1, -1), a_3 = (2, 1, 1, 1), a_4 = (3, 4, 1, 1), c = (3, -3, 0, 12).$
4. $a_1 = (-1, 2, 2, 1), a_2 = (0, 3, 2, 1), a_3 = (1, 1, 4, 2), a_4 = (1, -2, 1, 3), c = (2, -4, 5, 6).$
5. $a_1 = (3, -1, 1, 3), a_2 = (2, 0, 6, 1), a_3 = (1, -1, 1, 1), a_4 = (2, 4, 1, 1), c = (2, 4, 3, -1).$
6. $a_1 = (-2, 5, 0, 3), a_2 = (1, 3, 2, 6), a_3 = (1, 1, 1, 0), a_4 = (2, 2, 2, 2), c = (3, 6, 9, -2).$
7. $a_1 = (4, -1, 3, 2), a_2 = (2, 3, 1, 5), a_3 = (2, -3, 1, 1), a_4 = (2, 3, 2, 1), c = (2, -4, 3, 7).$
8. $a_1 = (2, 1, 3, 1), a_2 = (5, 2, 2, 5), a_3 = (3, 1, 6, 0), a_4 = (0, 6, 0, 7), c = (0, -6, -5, -11).$
9. $a_1 = (4, 3, 2, 1), a_2 = (-1, 3, 3, 3), a_3 = (2, 1, 2, 1), a_4 = (1, 5, 0, 1), c = (-1, -1, 2, 2).$
10. $a_1 = (0, 5, 1, 3), a_2 = (2, 4, 0, 1), a_3 = (1, 3, 1, 5), a_4 = (3, 6, 0, 1), c = (3, 8, -2, -10).$

18. Átmeneti mátrix egyik bázisból a másikba

Elméleti kérdések

1. Mit jelent a bázisváltás egy vektortérben?
2. Mi az átmeneti (vagy bázisváltó) mátrix definíciója?
3. Hogyan számítható ki az átmeneti mátrix két adott bázis között?
4. Milyen kapcsolatban van egy vektor koordinátája a két bázisban és az átmeneti mátrix?
5. Mi a különbség az eredeti és az új bázis közötti koordináta-ábrázolásban?
6. Mit mondhatunk az átmeneti mátrix inverzéről?
7. Milyen tulajdonságai vannak az átmeneti mátrixnak? (pl. mindig invertálható-e?)
8. Mit jelent az, hogy két bázis egymás inverz átmeneti mátrixával kapcsolatos?
9. Milyen módszerrel lehet az átmeneti mátrixot kiszámítani gyakorlatban?

Gyakorlatok

Bizonyítsa be, hogy az a_1, a_2, a_3 és a b_1, b_2, b_3 vektorrendszerek az $\mathbb{R}^3$ vektoriális tér bázisai! Keresse meg az átmeneti mátrixot és a koordináták átalakításának képleteit az egyik bázisból való átmenet során a másikba. Ezután határozza meg a $c = (1, 2, 3)$ vektor koordinátáit mindkét bázisban, és ellenőrizze le a kapott eredményt a koordináták átalakítási képleteinek segítségével!

1. $a_1 = (1, -1, 1), \quad a_2 = (2, -1, -1), \quad a_3 = (3, -2, 1);$
 $b_1 = (-1, 1, 0), \quad b_2 = (2, -1, 1), \quad b_3 = (1, 0, 0).$
2. $a_1 = (3, 3, -2), \quad a_2 = (1, -1, 3), \quad a_3 = (11, 6, 2);$
 $b_1 = (-2, 1, 4), \quad b_2 = (3, -2, 1), \quad b_3 = (-11, 7, 2).$
3. $a_1 = (1, -1, 1), \quad a_2 = (-1, 2, 0), \quad a_3 = (0, 1, 2);$
 $b_1 = (1, -1, 1), \quad b_2 = (2, -1, 0), \quad b_3 = (3, -2, 0).$
4. $a_1 = (1, -1, -1), \quad a_2 = (-1, 2, 0), \quad a_3 = (0, 1, 0);$
 $b_1 = (1, 0, 1), \quad b_2 = (1, -1, 2), \quad b_3 = (2, -1, 4).$
5. $a_1 = (0, 1, 2), \quad a_2 = (1, -2, -1), \quad a_3 = (1, -1, 2);$
 $b_1 = (-1, 1, 0), \quad b_2 = (2, -1, 1), \quad b_3 = (1, 0, 2).$
6. $a_1 = (2, 1, 1), \quad a_2 = (1, 1, 3), \quad a_3 = (3, 2, 5);$
 $b_1 = (1, 1, 1), \quad b_2 = (2, 1, 1), \quad b_3 = (3, 1, 3).$
7. $a_1 = (1, -1, 2), \quad a_2 = (2, 1, 1), \quad a_3 = (3, 0, 2);$
 $b_1 = (1, 1, 1), \quad b_2 = (-2, -1, 1), \quad b_3 = (1, 0, 3).$

8. $a_1 = (6, 4, -1), \quad a_2 = (1, -2, 2), \quad a_3 = (9, 3, 1);$
 $b_1 = (-3, 7, 8), \quad b_2 = (2, 1, 3), \quad b_3 = (0, -2, -3).$
9. $a_1 = (4, 3, 2), \quad a_2 = (1, 1, 3), \quad a_3 = (2, 2, 5);$
 $b_1 = (5, 4, 3), \quad b_2 = (2, 2, 1), \quad b_3 = (1, 6, -1).$
10. $a_1 = (8, 1, -1), \quad a_2 = (3, 2, -3), \quad a_3 = (4, -1, 2);$
 $b_1 = (1, 2, -1), \quad b_2 = (4, 4, -1), \quad b_3 = (3, 0, 2).$

19. Műveletek lineáris alterekkel

Elméleti kérdések

1. Mit nevezünk lineáris altérnek egy vektortérben?
2. Milyen feltételek mellett mondhatjuk egy halmazról, hogy lineáris altér?
3. Hogyan értelmezzük két altér metszetét, és miért lesz az is altér?
4. Mit értünk két altér összegén, és hogyan definiáljuk azt?
5. Milyen esetben mondjuk, hogy két altér direkt összeget alkot?
6. Mi a különbség az altér összege és direkt összege között?
7. Mit jelent az, hogy egy vektortér az alterek direkt összegeként írható fel?
8. Mi az altér dimenziója, és hogyan számítható ki?
9. Mit mond ki a dimenzióképlet: $\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$?
10. Milyen kapcsolat van az altér és az őt generáló vektorok lineáris kombinációi között?
11. Hogyan kapcsolódik az altér fogalma a homogén lineáris egyenletrendszerek megoldásteréhez?

Gyakorlatok

Keresse meg az $L_1 + L_2$ összeg dimenzióját és bázisát, valamint az $\mathbb{R}^5$ tér L_1 és L_2 lineáris altereinek $L_1 \cap L_2$ metszetét, ahol L_1 – az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak tere, $L_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$ – az a_1, a_2 vektorrendszerből előállított lineáris burok!

1.
$$\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ -5x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 6x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 12x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0; \end{cases}$$
$$a_1 = (4, 3, 1, 2, -1),$$
$$a_2 = (1, 7, -2, -1, -10).$$
2.
$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 - x_5 = 0; \end{cases}$$
$$a_1 = (3, 4, -7, -3, -3),$$
$$a_2 = (-4, 8, -8, -5, -4).$$
3.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_4 + 2x_5 = 0; \end{cases}$$
$$a_1 = (7, -4, 1, 2, 1),$$
$$a_2 = (10, 0, -6, -1, -2).$$

$$4. \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0; \end{cases} \quad \begin{aligned} a_1 &= (-5, 4, 1, 2, 3), \\ a_2 &= (1, 1, 1, 1, 1). \end{aligned}$$

$$5. \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 0; \end{cases} \quad \begin{aligned} a_1 &= (1, 1, 1, 1, 0), \\ a_2 &= (2, 1, -1, 1, 1). \end{aligned}$$

$$6. \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 0; \end{cases} \quad \begin{aligned} a_1 &= (1, 1, 1, 1, 1), \\ a_2 &= (0, 2, 3, 4, -6). \end{aligned}$$

$$7. \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 0; \end{cases} \quad \begin{aligned} a_1 &= (1, 1, 1, 1, 1), \\ a_2 &= (0, -7, 6, 2, 2). \end{aligned}$$

$$8. \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0; \end{cases} \quad \begin{aligned} a_1 &= (1, 1, 1, 1, 1), \\ a_2 &= (3, -6, 1, 7, 3). \end{aligned}$$

$$9. \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 0, \\ 4x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 = 0; \end{cases} \quad \begin{aligned} a_1 &= (1, 0, 1, 0, 1), \\ a_2 &= (1, 3, 7, 9, -10). \end{aligned}$$

$$10. \quad \begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_4 + 2x_5 = 0, \\ -x_1 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 11x_4 + 6x_5 = 0; \end{cases} \quad \begin{aligned} a_1 &= (1, 0, 1, 0, 1), \\ a_2 &= (-11, 6, -6, 1, -3). \end{aligned}$$

20. Lineáris transzformáció

Elméleti kérdések

1. Mit nevezünk lineáris transzformációnak egy vektortérben?
2. Melyek a lineáris transzformáció definíciójának alapvető feltételei?
3. Milyen példák léteznek tipikus lineáris transzformációkra a síkban vagy térben?
4. Mit nevezünk a lineáris transzformáció képhalmazának (imágójának)?
5. Mit nevezünk a lineáris transzformáció magjának (nulalterének)?
6. Milyen kapcsolat van a lineáris transzformáció mátrixrepresentációja és a bázis között?
7. Mit jelent az, hogy egy transzformáció injektív, szürjektív vagy bijektív?
8. Hogyan lehet kiszámítani egy transzformáció mátrixát adott bázisok között?
9. Mit jelent a lineáris transzformáció kompozíciója, és hogyan történik annak mátrixrepresentációja?
10. Hogyan hat egy lineáris transzformáció egy adott vektorra?

Gyakorlatok

A $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezés minden $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$ vektort $\varphi(x) \in \mathbb{R}^3$ vektorba alakít át (képez). Bizonyítsa be, hogy a φ lineáris transzformáció lesz! Keresse meg a vektor képének koordinátáinak képletét az $\mathbb{R}^3$ tér e_1, e_2, e_3 kanonikus bázisában; az $a = (1, 1, 1)$ és e_1, e_2, e_3 vektorok képét és a φ transzformáció mátrixát ugyan ebben a bázisban!

1. $\varphi(x) = (3\chi_1 - \chi_2, \chi_1 + 2\chi_2 - \chi_3, \chi_3 - \chi_2).$
2. $\varphi(x) = (2\chi_1 - \chi_2 - \chi_3, \chi_1 - 2\chi_2 + \chi_3, \chi_1 + \chi_2 - 2\chi_3).$
3. $\varphi(x) = (\chi_1 - \chi_2 - \chi_3, -\chi_1 + \chi_2 - \chi_3, -\chi_1 - \chi_2 + \chi_3).$
4. $\varphi(x) = (\chi_1 - \chi_2, \chi_2 - \chi_3, \chi_1 - \chi_3).$
5. $\varphi(x) = (\chi_2 + 3\chi_3, 2\chi_2 - \chi_3, \chi_2 + \chi_3).$
6. $\varphi(x) = (2\chi_1 - \chi_3, 2\chi_2 - \chi_3, \chi_1 - \chi_3).$
7. $\varphi(x) = (\chi_1 - \chi_2 + 2\chi_3, \chi_1 - \chi_2, \chi_1 + 2\chi_2).$
8. $\varphi(x) = (\chi_1 + 2\chi_2 - \chi_3, 2\chi_1 - \chi_2 + \chi_3, \chi_1 + 2\chi_2 - \chi_3).$
9. $\varphi(x) = (\chi_2 + 4\chi_3, \chi_1 + \chi_2 - 2\chi_3, 2\chi_2 - 2\chi_3).$
10. $\varphi(x) = (2\chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3, \chi_1 - \chi_3, \chi_2 + \chi_3).$

21. Lineáris transzformáció mátrixa egy bázisban

Elméleti kérdések

1. Mit jelent egy lineáris transzformáció mátrixa adott bázisban?
2. Hogyan lehet kiszámítani egy lineáris transzformáció mátrixát adott bázis alapján?
3. Milyen kapcsolat van a transzformáció mátrixa és a bázis vektorain való hatása között?
4. Hogyan határozható meg a transzformáció mátrixa, ha ismerjük a képeket az alapvektorokon?
5. Mit jelent az, hogy a transzformáció mátrixa megváltozik bázisváltás esetén?
6. Hogyan néz ki a mátrixtranszformáció képlete bázisváltás után?
7. Mi az összefüggés az átmeneti mátrix és a transzformáció mátrixa között különböző bázisokban?
8. Mit jelent az, hogy a transzformáció mátrixa hasonló egy másik mátrixhoz?
9. Hogyan segít a mátrixreprezentáció a lineáris leképezések összetett műveleteinek számításában?

Gyakorlatok

Határozza meg az $\mathbb{R}^3$ vektortér azon φ lineáris transzformációját, amely az a_1, a_2, a_3 bázis vektorokat megfelelően ezen tér b_1, b_2, b_3 vektoraiba alakítja át! Keresse meg a φ transzformáció mátrixát az a_1, a_2, a_3 bázisban!

1. $a_1 = (1, 3, -2), a_2 = (4, -2, 1), a_3 = (-4, -1, 1);$
 $b_1 = (-4, -1, 1), b_2 = (7, -1, 0), b_3 = (0, -1, 0).$
2. $a_1 = (1, -1, 1), a_2 = (1, 0, 1), a_3 = (2, -1, 1);$
 $b_1 = (1, 1, 1), b_2 = (1, 1, 1), b_3 = (1, 1, 0).$
3. $a_1 = (1, -1, 1), a_2 = (2, 1, -1), a_3 = (3, 0, 1);$
 $b_1 = (-1, 1, 1), b_2 = (0, -1, 1), b_3 = (-1, 0, 2).$
4. $a_1 = (1, -1, 1), a_2 = (2, -1, 0), a_3 = (3, -2, 0);$
 $b_1 = (-1, 0, 1), b_2 = (0, 0, 0), b_3 = (0, 1, 1).$
5. $a_1 = (1, -1, -1), a_2 = (-1, 2, 0), a_3 = (0, 1, 0);$
 $b_1 = (1, -1, 1), b_2 = (1, 0, -1), b_3 = (2, -1, 0).$
6. $a_1 = (1, 0, 1), a_2 = (1, -1, 2), a_3 = (2, -1, 4);$
 $b_1 = (0, -1, 1), b_2 = (1, 1, 0), b_3 = (1, 0, 1).$

7. $a_1 = (1, 1, 1), \quad a_2 = (0, -1, 2), \quad a_3 = (1, 0, 2);$
 $b_1 = (1, -2, 1), \quad b_2 = (-1, 2, -1), \quad b_3 = (1, 0, 1).$
8. $a_1 = (2, 3, 5), \quad a_2 = (0, 1, 2), \quad a_3 = (1, 0, 0);$
 $b_1 = (1, 1, 1), \quad b_2 = (1, 1, -1), \quad b_3 = (2, 1, 2).$
9. $a_1 = (2, 0, 3), \quad a_2 = (4, 1, 5), \quad a_3 = (3, 1, 2);$
 $b_1 = (1, 2, -1), \quad b_2 = (4, 5, -2), \quad b_3 = (1, -1, 1).$
10. $a_1 = (1, 1, 1), \quad a_2 = (1, 1, -1), \quad a_3 = (2, 1, 2);$
 $b_1 = (1, 1, 1), \quad b_2 = (1, 1, 1), \quad b_3 = (1, 1, 0).$

22. Műveletek lineáris transzformációkkal

Elméleti kérdések

1. Milyen műveletek végezhetők lineáris transzformációkkal?
2. Hogyan definiálható két lineáris transzformáció összege?
3. Mit jelent a lineáris transzformációk skalárral való szorzása?
4. Hogyan definiálható a lineáris transzformációk kompozíciója (összetétele)?
5. Mely feltételek mellett lesz a két lineáris transzformáció kompozíciója ismét lineáris transzformáció?
6. Hogyan jelennek meg ezek a műveletek mátrixokkal végzett műveletekként?
7. Mi az összefüggés a transzformációk összeadásának és mátrixaik összeadásának művelete között?
8. Milyen tulajdonságokkal rendelkezik a transzformációk kompozíciója (pl. asszociativitás)?
9. Mikor kommutatív két lineáris transzformáció kompozíciója?
10. Mit jelent a transzformáció inverze, és hogyan határozható meg?
11. Milyen kapcsolat van a transzformáció inverze és mátrixának inverze között?
12. Mikor létezik egy lineáris transzformációnak inverze?
13. Mi a nulltranszformáció és az identitástranszformáció fogalma?
14. Milyen algebrai struktúrát alkotnak a lineáris transzformációk egy adott vektortéren?

Gyakorlatok

Legyen φ lineáris transzformációja az $\mathbb{R}^3$ vektortérnek, amely az $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$ vektort a $\varphi(x)$ vektorba alakítja át,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

– a ψ lineáris transzformáció mátrixa ugyan ezen tér a_1, a_2, a_3 bázisában. Keresse meg az $\mathbb{R}^3$ tér kanonikus bázisában a $\varphi, \psi, \varphi + \psi, \varphi - \psi, \varphi\psi, \psi\varphi$ lineáris transzformációk mátrixait!

1. $\varphi(x) = (2\chi_2 - 3\chi_3, \chi_1 + 2\chi_2 + 3\chi_3, \chi_3 - \chi_1);$
 $a_1 = (1, 1, 2), a_2 = (1, 1, 1), a_3 = (1, -1, 2).$
2. $\varphi(x) = (2\chi_1 - \chi_2, 2\chi_2 - \chi_3, \chi_1 + \chi_2 + \chi_3);$
 $a_1 = (1, 1, 1), a_2 = (2, 1, 1), a_3 = (3, 2, 3).$

3. $\varphi(x) = (\chi_1 + \chi_2 + \chi_3, 2\chi_1 - \chi_3, 3\chi_2 - \chi_1);$
 $a_1 = (1, -1, 1), a_2 = (-1, 2, 0), a_3 = (0, 1, 2).$
4. $\varphi(x) = (2\chi_1 - \chi_2 - \chi_3, \chi_1 + \chi_3, \chi_1 + \chi_2 - 2\chi_3);$
 $a_1 = (1, 1, -1), a_2 = (-1, 2, 0), a_3 = (0, 1, 0).$
5. $\varphi(x) = (\chi_1 - \chi_2 + 2\chi_3, \chi_1 - \chi_2, \chi_1 + 2\chi_2);$
 $a_1 = (1, -1, 1), a_2 = (2, -1, -1), a_3 = (3, -2, 1).$
6. $\varphi(x) = (\chi_1 - \chi_2 - \chi_3, -\chi_1 + \chi_2 - \chi_3, -\chi_1 - \chi_2 + \chi_3);$
 $a_1 = (2, 1, 1), a_2 = (1, 1, 3), a_3 = (3, 2, 3).$
7. $\varphi(x) = (\chi_1 - \chi_2, \chi_1 + \chi_2 + \chi_3, \chi_1 + 2\chi_2 - \chi_3);$
 $a_1 = (-1, 1, -1), a_2 = (1, 0, 2), a_3 = (0, 1, 2).$
8. $\varphi(x) = (\chi_2 + 2\chi_3, 2\chi_3 - \chi_1, 3\chi_1 - \chi_2);$
 $a_1 = (1, 2, 1), a_2 = (0, 1, 1), a_3 = (1, 1, 1).$
9. $\varphi(x) = (\chi_1 + 4\chi_2 + \chi_3, 2\chi_1 - 3\chi_3, \chi_2 - 3\chi_1);$
 $a_1 = (3, 1, 1), a_2 = (1, 2, -1), a_3 = (2, 0, 1).$
10. $\varphi(x) = (2\chi_2 - 2\chi_3, 2\chi_1 - 2\chi_3, -\chi_2 - \chi_1);$
 $a_1 = (0, 1, -1), a_2 = (1, 2, -1), a_3 = (1, 1, -1).$

23. Lineáris transzformáció nulltere és képtere

Elméleti kérdések

1. Mit nevezünk egy lineáris transzformáció nullterének (magjának)?
2. Mit értünk a lineáris transzformáció képtere (imágója) alatt?
3. Milyen tulajdonságokkal rendelkeznek a nulltér és a képtér (pl. altér-e mindkettő)?
4. Hogyan határozható meg a nulltér és a képtér adott transzformáció esetén?
5. Milyen kapcsolatban áll a nulltér dimenziója, a képtér dimenziója és a teljes tér dimenziója?
6. Mit mond ki a dimenziótétel (Rang–nullitás tétel)?

$$\dim(\text{nulltér}) + \dim(\text{képtér}) = \dim(\text{domain})$$

7. Hogyan lehet a nullteret és képet kiszámítani a transzformáció mátrixából?
8. Hogyan kapcsolódik a nulltér egyenletrendszerek homogén megoldásaihoz?
9. Mikor tekinthető a képtér egy másik tér részeként értelmezett leképezés teljes képének?

Gyakorlatok

Legyen A – az $\mathbb{R}^4$ vektortér φ lineáris transzformációjának mátrixa a c_1, c_2, c_3, c_4 bázisban. Határozza meg az $\text{Im}\varphi$ és a $\text{Ker}\varphi$ alterek bázisát és dimenzióját! Győződjön meg arról, hogy $\dim \text{Im}\varphi + \dim \text{Ker}\varphi = \dim \mathbb{R}^4$!

1. $A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$

4. $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

5. $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$

$$7. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$9. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$8. \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & -1 & -5 \\ -1 & -2 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$10. \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -2 & -4 \\ 4 & -3 & 2 & -4 \\ 5 & -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

24. Lineáris transzformáció sajátvektora és sajátértéke

Elméleti kérdések

1. Mit nevezünk egy lineáris transzformáció sajátvektorának?
2. Mit értünk egy lineáris transzformáció sajátértéke alatt?
3. Mi a különbség a sajátvektor és a sajátérték fogalma között?
4. Hogyan lehet meghatározni egy mátrix sajátértékeit?
5. Hogyan vezet a sajátértékek kiszámításához a sajátérték-egyenlet ($\det(A - \lambda E) = 0$)?
6. Hogyan számíthatók ki a sajátvektorok egy adott sajátértékhez?
7. Mikor tekinthető egy mátrix diagonalizálhatónak?
8. Hogyan kapcsolódik a karakterisztikus polinom gyökeihez a sajátértékek fogalma?

Gyakorlatok

Legyen A – az $\mathbb{R}^4$ vektortér φ lineáris transzformáció mátrixa a kanonikus bázisban. Keresse meg a φ^2 , φ^3 , φ^4 lineáris transzformációk mátrixait ebben a bázisban és győződjön meg arról, hogy $f(\varphi) = 0$, ahol f – a φ transzformáció karakterisztikus polinomja! Határozza meg a φ transzformáció összes sajátértékét és összes sajátvektorát!

1.
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

4.
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$7. \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 7 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$8. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$9. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$10. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

25. Lineáris altér ortogonális komplementere

Elméleti kérdések

1. Mit nevezünk egy vektortér lineáris altere ortogonális komplementerének?
2. Hogyan definiálható az ortogonális komplementer az $\mathbb{R}^n$ térben?
3. Milyen geometriai jelentése van az ortogonális komplementernek?
4. Milyen kapcsolat van egy altér és annak ortogonális komplementere között?
5. Milyen tulajdonságokkal rendelkezik az ortogonális komplementer? (pl. metszetük csak a nullvektor)
6. Igaz-e, hogy minden vektor felírható egy altérbeli és egy ortogonális komplementerbeli vektor összegére?
7. Milyen dimenzióösszefüggés van egy altér és ortogonális komplementere között?

$$\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V)$$

8. Hogyan számítható ki egy altér ortogonális komplementere mátrix segítségével?
9. Hogyan használható a Gauss–Jordan-elimináció az ortogonális komplementer meghatározására?

Gyakorlatok

Az $\mathbb{R}^4$ euklideszi tér L altere az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak a tere. Keresse meg az L altér $L^\perp$ ortogonális komplementerét az $\mathbb{R}^4$ térben és a c vektor vetületét az L altérre és az $L^\perp$ ortogonális komplementerére!

$$1. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, & c = (-5, 4, 6, -1). \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0; \end{cases} \quad 2. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_4 = 0, & c = (2, 0, 4, -1). \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0; \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 + 3x_3 + 3x_4 = 0, & c = (5, 1, -4, 0). \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 0; \end{cases} \quad 4. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, & c = (1, -2, -4, 5). \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0; \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, & c = (-14, -3, 5, 0). \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 0, \\ -x_1 - 6x_3 - x_4 = 0; \end{cases} \quad 6. \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, & c = (2, 8, 6, 4). \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0; \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, & c = (6, 2, 3, 0). \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 0; \end{cases} \quad 8. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, & c = (-5, -11, 3, 5). \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 14x_3 + 3x_4 = 0; \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0, & c = (-15, 29, 3, -5). \\ 4x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ -10x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 7x_4 = 0; \end{cases} \quad 10. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ -2x_1 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 0; \end{cases}$$

$$c = (14, -5, 1, -5).$$

26. Gram-Schmidt-féle ortonormalizációs eljárás

Elméleti kérdések

1. Mi a célja a Gram–Schmidt-féle ortonormalizációs eljárásnak?
2. Milyen feltételek szükségesek ahhoz, hogy a Gram–Schmidt eljárás alkalmazható legyen egy vektorrendszerre?
3. Hogyan definiáljuk két vektor ortogonalitását és ortonormáltóságát?
4. Hogyan működik lépésről lépésre a Gram–Schmidt eljárás?
5. Mi a különbség az ortogonális és az ortonormált rendszerek között?
6. Hogyan biztosítja az eljárás, hogy a keletkező vektorrendszer ugyanazt az alteret feszítse ki, mint az eredeti rendszer?
7. Miért fontos a normalizálás minden lépés végén?

Gyakorlatok

1. Az $\mathbb{R}^4$ euklideszi térben ortonormalizálja az a_1, a_2, a_3, a_4 vektorrendszert!

1.1. $a_1 = (1, 1, 1, 1), a_2 = (1, -1, 1, -1), a_3 = (0, 1, 1, 1), a_4 = (0, 0, 1, 1).$

1.2. $a_1 = (1, -1, 1, -1), a_2 = (1, 0, -1, 0), a_3 = (0, 1, 1, 1), a_4 = (0, 0, 1, -1).$

1.3. $a_1 = (-1, -1, 1, 1), a_2 = (1, 0, -1, 0), a_3 = (1, 1, 1, 0), a_4 = (1, 0, 0, -1).$

1.4. $a_1 = (1, 1, -1, -1), a_2 = (1, 0, 1, 0), a_3 = (1, 1, 0, 1), a_4 = (1, 1, 0, 0).$

1.5. $a_1 = (1, 1, 1, -1), a_2 = (1, 0, 0, 1), a_3 = (1, 1, 1, 0), a_4 = (0, 1, 1, 1).$

1.6. $a_1 = (-1, 1, 1, 1), a_2 = (1, 1, 0, 0), a_3 = (0, 1, 0, 1), a_4 = (0, 0, 1, 1).$

1.7. $a_1 = (1, 2, 1, 1), a_2 = (2, -1, 1, -1), a_3 = (1, 1, 2, 0), a_4 = (1, 1, 0, 0).$

1.8. $a_1 = (0, 0, 1, -1), a_2 = (0, 1, -1, 1), a_3 = (1, 1, -1, 1), a_4 = (1, 1, 1, 1).$

1.9. $a_1 = (-1, 0, 0, 1), a_2 = (0, 1, 1, 1), a_3 = (1, 1, -1, -1), a_4 = (1, 0, -1, 0).$

1.10. $a_1 = (0, 1, 1, 1), a_2 = (1, -1, 2, 0), a_3 = (0, 0, 1, 1), a_4 = (1, 1, 1, 1).$

2. A $C_{[\alpha, \beta]}^2$ euklideszi térben, mely az összes olyan függvény tere, melyek négyzete integrálható, ortogonalizálja a $p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2, p_4 = x^3$ polinomok rendszerét (a $C_{[\alpha, \beta]}^2$ tér két tetszőleges f és g függvényének skaláris szorzata a következő módon határozható meg:

$$(f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx \quad)!$$

- | | | | | | |
|-------------|----------------|--------------|--------------|----------------|---------------|
| 2.1. | $\alpha = 0,$ | $\beta = 1.$ | 2.2. | $\alpha = -1,$ | $\beta = 0.$ |
| 2.3. | $\alpha = 1,$ | $\beta = 2.$ | 2.4. | $\alpha = -2,$ | $\beta = -1.$ |
| 2.5. | $\alpha = 2,$ | $\beta = 3.$ | 2.6. | $\alpha = -3,$ | $\beta = -2.$ |
| 2.7. | $\alpha = -1,$ | $\beta = 1.$ | 2.8. | $\alpha = -2,$ | $\beta = 2.$ |
| 2.9. | $\alpha = -2,$ | $\beta = 0.$ | 2.10. | $\alpha = -1,$ | $\beta = 2.$ |

27. Kvadratikus alak normálalakja

Elméleti kérdések

1. Mit nevezünk kvadratikus alaknak?
2. Hogyan írható fel egy kvadratikus alak mátrixos formában?
3. Mi a kapcsolat egy kvadratikus alak és a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix között?
4. Mit jelent a kvadratikus alak normálalakja?
5. Hogyan lehet egy kvadratikus alakot normálalakra hozni transzformációval?
6. Mi a célja a kvadratikus alak diagonalizálásának?
7. Milyen lépésekből áll a kvadratikus alak normálalakra hozásának folyamata?
8. Mit jelent az, hogy két kvadratikus alak ekvivalens?

Gyakorlatok

Keresse meg megfelelően a valós és komplex számok teste felett az $f(x_1, x_2, x_3)$ kvadratikus alak normálalakját valamint az ismeretlenek transzformációit, amelyek ehhez az alakhoz vezetnek az f alakot!

1. $f = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3.$
2. $f = -x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3.$
3. $f = x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_2x_3.$
4. $f = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 - 6x_1x_2 - 4x_2x_3.$
5. $f = -x_1^2 + 4x_2^2 - x_3^2 + 8x_2x_3 - 4x_1x_3.$
6. $f = -x_1^2 + 3x_2^2 - 3x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_2x_3 - 4x_1x_3.$
7. $f = x_1^2 + 2x_2^2 - 8x_1x_2 + 4x_2x_3 + 2x_1x_3.$
8. $f = -2x_1^2 - 2x_2^2 - 8x_1x_2 - 4x_2x_3.$

9. $f = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 6x_2x_3 - 2x_1x_3.$

10. $f = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3 + 2x_1x_3.$

28. Pozitív és negatív definit kvadratikus alakok

Elméleti kérdések

1. Mit jelent az, hogy egy kvadratikus alak pozitív definit?
2. Mit jelent az, hogy egy kvadratikus alak negatív definit?
3. Mi a különbség a pozitív definit, negatív definit és indefinit kvadratikus alakok között?
4. Milyen feltételek mellett mondható egy kvadratikus alak pozitív vagy negatív definitnek?
5. Hogyan dönthető el egy kvadratikus alakról, hogy pozitív vagy negatív definit a főalminorok (sarokaldeterminánsok) segítségével?
6. Mit mond ki a Sylvester-kritérium, és hogyan használható a kvadratikus alakok jellemzésére?
7. Mi a jelentősége a pozitív definit kvadratikus alakoknak a matematikai analízisben és az optimalizálásban?
8. Hogyan határozható meg egy kvadratikus alak típusa a normálalakja alapján?

Gyakorlatok

A $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X^T A X$ kvadratikus alak, amely az A mátrixszal van megadva, pozitív definit, negatív definit vagy indefinit?

$$1. A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3. A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$4. A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{5.} \ A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{6.} \ A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{7.} \ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{8.} \ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{9.} \ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{10.} \ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Geometria

29. Vektorok. Műveletek vektorokkal

Elméleti kérdések

1. Mit nevezünk vektornak? Miben különbözik egy skalártól?
2. Milyen geometriai és algebrai jellemzői vannak a vektoroknak?
3. Mit jelent a vektor hossza (abszolút értéke), és hogyan számítható ki?
4. Hogyan történik két vektor összeadása, és mi a geometriai jelentése?
5. Mit jelent egy vektor skalárral való szorzása, és hogyan változik ekkor a vektor iránya és hossza?
6. Mi a vektorok kivonásának értelmezése?
7. Milyen vektorokat nevezünk kollineárisnak?
8. Milyen vektorokat nevezünk egyirányúnak?
9. Mik a bázis vektorok a síkon és a térben?

Gyakorlatok

1. Adott, hogy $\overrightarrow{AB} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = -4\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = -5\vec{a} - 3\vec{b}$. Bizonyítsa be, hogy $ABCD$ trapéz!
2. Találjon olyan pontot a téglalapban, amelyből kiinduló vektorok összege, amelyek a négyszög csúcsaihoz vezetnek, egyenlő legyen nullával!
3. Lehet-e az $\vec{a} = (1, 2, -3)$, $\vec{b} = (2, -1, 1)$ és $\vec{c} = (-3, -1, 2)$ vektorokból háromszöget alkotni?
4. Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ nem kollineáris vektorok alapján ábrázolja a következő vektorokat: a) $\vec{a} + \vec{b}$, b) $\vec{a} - \vec{b}$, c) $\vec{b} - \vec{a}$, d) $-\vec{a} - \vec{b}$, e) $\frac{3\vec{a} - \vec{b}}{2}$, f) $\frac{2\vec{b} - 3\vec{a}}{2}$!
5. Az $\vec{a} + \vec{b}$ és $\vec{a} - \vec{b}$ vektorok milyen feltételek mellett lesznek kollineárisak?
6. Milyen tulajdonságokkal kell rendelkeznie az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektoroknak, hogy igazak legyenek a következő egyenlőségek: a) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$; b) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$; c) $\vec{a} + \vec{b} = \lambda(\vec{a} - \vec{b})$; d) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$; e) $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$?
7. Milyen feltételnek kell megfelelnie az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektoroknak, hogy az $\vec{a} + \vec{b}$ vektor a közöttük lévő szöget felezze? (Tegyük fel, hogy mindhárom vektor egy pontból indul ki.)

8. Bizonyítsa, hogy egy szabályos n -szög középpontját a csúcspontjaival összekötő vektorok összege a nullvektor.
9. Bizonyítsa, hogy egy tetszőleges háromszögben létezik egy olyan pont, amelyből a háromszög csúcsaihoz húzott vektorok összege a nullvektor.
10. Az ABC háromszögben $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ és $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Határozza meg azokat a vektorokat, amelyek egybeesnek a háromszög súlyvonalával!
11. Bizonyítsa, hogy a háromszög súlyvonaláiból fel lehet építeni egy háromszöget!
12. Keressen egy olyan vektort, amely az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok közötti szöveget elfelezi!
13. Legyen $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ – az $ABCD$ paralelogramma három csúcspontjának helyvektorai. Határozza meg a D csúcspont helyvektorát!
14. Az x és y milyen valós értékeire az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok nem kollineárisak, ha a vektorok a következő összefüggéssel vannak megadva: $(3x - y + 2)\vec{a} + (x + 2y + 3)\vec{b} = \vec{0}$?
15. Az x , y és z milyen értékeire az $\vec{a}, \vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok nem komplanárisak, ha a vektorok a következő összefüggéssel vannak megadva: $(x + y - z - 2)\vec{a} + (2x - 2y + z - 1)\vec{b} + (x - 1)\vec{c} = \vec{0}$?
16. Adottak az $\vec{a} = (-1, 3, 2)$ és $\vec{b} = (0, 1, 4)$ vektorok. Határozza meg a következő vektorok koordinátáit: $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}, \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3}, \frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{2}, 2\vec{a} + 3\vec{b}$!
17. Lehet-e az $\vec{a} = (1, 2, 3), \vec{b} = (2, -1, -1), \vec{c} = (-3, -1, -2)$ vektorokból háromszöget alkotni?
18. Adottak az $\vec{a} = (2, 1)$ és $\vec{b} = (3, 4)$ vektorok. Fejtse ki az $\vec{m} = (-1, 2)$ vektort az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ bázis szerint!
19. Adottak az $\vec{a} = (2, 1, -3), \vec{b} = (3, -2, 1)$ és $\vec{c} = (-1, 0, 2)$ vektorok. Fejtse ki az $\vec{m} = (-2, 2, 1)$ vektort az $\vec{a}, \vec{b}$ és $\vec{c}$ bázis szerint!
20. Adottak az $A(2, -3, 4)$ és $B(5, 6, -1)$ pontok. Határozza meg az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{BA}$ vektorok koordinátáit!
21. Az $\vec{a} = (3, 1, -2)$ vektor kezdőpontja egybeesik az $M(-2, 7, 1)$ ponttal. Határozza meg azt a pontot, amely egybeesik a végpontjával!
22. Adva van az $\vec{a} = (1, 5, 2), \vec{b} = (6, -4, -2), \vec{c} = (0, -5, 7), \vec{d} = (-20, 27, -35)$. Határozza meg azt az α, β és γ számokat, melyekre az $\alpha\vec{a}, \beta\vec{b}, \gamma\vec{c}$ vektorokból zárt tört egyenest lehet alkotni!
23. Ellenőrizze, hogy az $A(-1, 5, 10), B(5, -7, 8), C(2, 2, -7)$ és $D(5, -4, 2)$ pontok egy trapéz csúcspontjai-e?

24. Adott, hogy $|\vec{a}| = 5$ és azok a szögek, amelyeket a koordinátatengelyekkel alkot: $\alpha = 120^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 60^\circ$. Határozza meg a vektor vetületét a koordinátatengelyekre!
25. Adottak az $\vec{a} = (1, 3, 2)$ és $\vec{b} = (2, 1, -1)$ vektorok. Határozza meg a következő vektorok vetületét a tengelyek bázisvektoraira: a) $\vec{a} + \vec{b}$; b) $\vec{a} - \vec{b}$; c) $2\vec{a} + 3\vec{b}$; d) $\frac{\vec{a} - 3\vec{b}}{2}$!
26. Határozza meg az $\vec{a} = 4\vec{m} + 3\vec{n} - \vec{p}$ vektor vetületét az ordináta tengelyre, ha $\vec{m} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}, \vec{n} = \vec{i} + 2\vec{k}, \vec{p} = -\vec{j} + \vec{k}$!

30. Vektorok skaláris szorzata

Elméleti kérdések

1. Mit értünk két vektor skaláris szorzatán?
2. Hogyan számítható ki a skaláris szorzat komponensalakban(koordinátaalakban) adott vektorok esetén?
3. Hogyan fejezi ki a skaláris szorzat a két vektor által bezárt szöget?
4. Milyen feltételek mellett lesz két vektor skaláris szorzata nulla?
5. Milyen tulajdonságai vannak a skaláris szorzatnak?
6. Mi a kapcsolat a skaláris szorzat és a vektor hossza között?
7. Hogyan alkalmazható a skaláris szorzat az ortogonalitás vizsgálatára?
8. Milyen következtetések vonhatók le a skaláris szorzat előjeléből?

Gyakorlatok

1. Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok skalárszorzata alapján határozza meg a köztük lévő szög koszinuszát és tangensét!
2. Milyen feltételnek kell megfelelnie az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektoroknak, hogy $\vec{a} + \vec{b} \perp \vec{a} - \vec{b}$?
3. Határozza meg az $\vec{a} = (5, -7, 6)$ vektor abszolút értékét és irány koszinuszát!
4. Határozza meg az $\vec{a} = (3, -4, -5\sqrt{3})$ vektor egységvektorát!
5. Határozza meg az $\vec{a}$ vektort, ha ismerjük két koordinátáját $x = -3$, $y = 4$ és abszolút értékét $|\vec{a}| = 13$!
6. Határozza meg az $\vec{a} = -3\vec{m} + \vec{n}$ vektor abszolút értékét, ha $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 3$, $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$!
7. Határozza meg az $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$ és $\vec{b} = -3\vec{m} + 2\vec{n}$ vektorok közötti szöget, ha $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 2$, $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$!
8. Határozza meg a háromszög belső szögeit, ha csúcspontjai $A(0,0,5)$, $B(1,1,1)$ és $C(-1,2,3)$!
9. Az $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorok háromszöget alkotnak. Számítsa ki: $(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{c})$!
10. Határozza meg az $\vec{x}$ vektort, amely kollineáris az $\vec{a} = (1, -1, 2)$ vektorhoz, és tudjuk, hogy $|\vec{x}| = 3\sqrt{6}$, és az OX tengellyel tompaszöget alkot!
11. Határozza meg azt a vektort, amely merőleges az OY tengelyhez és az $\vec{a} = (1, 2, -3)$ vektorhoz, és abszolút értéke $3\sqrt{10}$!
12. Határozza meg az $\vec{x}$ vektort, amely merőleges az $\vec{a} = (1, 1, 2)$ és $\vec{b} = (3, 1, 2)$ vektorokhoz, és kielégíti a következő feltételt: $(\vec{x}, 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) = -6$!
13. Adott az $\vec{a} = (3, -6, 21)$, $\vec{b} = (1, 4, -5)$, $\vec{c} = (3, -4, 12)$. Számítsa ki: $((\vec{a} + \vec{c}), \vec{b})$!

14. Alkothat-e egy vektor a koordinátatengelyekkel következő szögeket: 1) $\alpha = 45^\circ, \beta = 30^\circ, \gamma = 102^\circ$; 2) $\alpha = 150^\circ, \beta = 90^\circ, \gamma = 60^\circ$?
15. A vektor az OX és OY tengelyekkel $\alpha = 30^\circ, \beta = 90^\circ$ szögeket alkot. Milyen szöget alkot az OZ tengellyel?
16. Az $\vec{a}$ vektor az OX, OY koordinátatengelyekkel egyenlő szöget alkot, és az OZ tengellyel – kétszer akkorát, mint az OX vagy OY tengelyekkel. Határozza meg az α, β és γ szögeket!
17. Alkothat-e egy vektor az OX tengellyel 30° szöget, és az OZ tengellyel -45° szöget?
18. Adottak az $A(-1, 3, 2)$ és $B(1, -2, 1)$ pontok. Határozza meg az $\overrightarrow{AB}$ vektor annak a tengelyre való vetületét, amely a koordinátatengelyekkel egyenlő tompaszögeket alkot!
19. Adottak az $\overrightarrow{AB} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$ és $\overrightarrow{BC} = -2\vec{i} + 4\vec{j}$ vektorok, amelyek egybeesnek az ABC háromszög oldalaival. Határozza meg az A csúcspontból húzott magasság hosszát!
20. Ellenőrizze le az alábbi azonosságot: $(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)$!
21. Adott az $\vec{a} = (3, -4, 12)$ vektor. Határozza meg annak az egységvektornak a koordinátáit, amely egyirányú az $\vec{a}$ vektorral!

31. Vektorok vektoriális szorzata

Elméleti kérdések

1. Mit értünk két vektor vektoriális szorzatán?
2. Milyen dimenziójú térben van értelme a vektoriális szorzatnak?
3. Hogyan határozható meg a vektoriális szorzat komponensalakban (koordinátalakban)?
4. Mi a vektoriális szorzat geometriai jelentése?
5. Hogyan számítható ki a vektoriális szorzat nagysága?
6. Milyen irányú a vektoriális szorzat eredménye a két kiinduló vektorhoz képest?
7. Mi a jobbkéz-szabály, és hogyan alkalmazható a vektoriális szorzat irányának meghatározásához?
8. Milyen tulajdonságokkal rendelkezik a vektoriális szorzat?
9. Milyen feltétel mellett lesz két vektor vektoriális szorzata nullvektor?
10. Milyen kapcsolat van a vektoriális szorzat és a két vektor által kifeszített paralelogramma területe között?
11. Mi a különbség a skaláris szorzat és a vektoriális szorzat között?

Gyakorlatok

1. Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok a φ szöget zárják be, $\varphi = \frac{\pi}{3}$, $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 4$. Határozza meg az $[[\vec{a}, \vec{b}]]$!
2. Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok által bezárt szög α jelöli. Fejezze ki a $\operatorname{tg} \alpha$ ezen vektorok skaláris és vektoriális szorzata által!
3. Az α milyen értéke mellett kollineárisak a $\vec{p} = \alpha \vec{a} - 4 \vec{b}$ és a $\vec{q} = 2 \vec{a} + 5 \vec{b}$ vektorok?
4. Az $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok kielégítik a $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ feltételt. Bizonyítsa, hogy $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}]$!
5. Adott az $[\vec{a}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}]$, $\vec{c} \neq 0$. Lehet-e arra következtetni, hogy $\vec{a} = \vec{b}$?
6. Bizonyítsa, hogy ha $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{c}, \vec{d}]$, és $[\vec{a}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{d}]$, akkor az $\vec{a} - \vec{d}$ és $\vec{b} - \vec{c}$ vektorok, kollineárisak!
7. Határozza meg a paralelogramma területét, amely a következő vektorokra van felépítve: $\vec{a} = (8, 4, 1)$, $\vec{b} = (2, -2, 1)$!
8. Adva vannak az $A(3, 1, 2)$, $B(4, 0, 1)$, $C(5, 4, 7)$ pontok. Határozza meg az ABC háromszög területét!

9. Határozza meg azon vektor egységvektorát, amely merőleges az $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ és a $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$ vektorokhoz!
10. Határozza meg a paralelogramma területét, amely a következő vektorokra van felépítve: $\vec{a} = \vec{m} + \vec{n}$ és $\vec{b} = 3\vec{m} + 2\vec{n}$, ahol $\vec{m}$ és $\vec{n}$ egységvektorok és $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{6}$!
11. Tisztázza, hogy jobbsodrású vagy balsodrású hármast alkotnak az alábbi vektorok:
 - a) $\vec{a} = (2, 1, 2), \vec{b} = (3, -2, 1), \vec{c} = (3, -1, -2)$;
 - b) $\vec{a} = (2, -2, -3), \vec{b} = (2, 0, 3), \vec{c} = (1, 1, 1)$.
12. Határozza meg a tetraéder térfogatát az $A(-5, -4, 8), B(2, 3, 1), C(4, 1, -2)$ és $D(6, 3, 7)$ csúcspontok alapján!
13. Határozza meg a tetraéder D csúcspontjából húzott magasságának a hosszát, ha az $A(1, 0, 6), B(4, 5, -2), C(7, 3, 4)$ és $D(-1, 2, 1)$ a csúcspontjai!
14. A tetraéder térfogata $V = 5$, három csúcspontja az $A(2, 1, -1), B(3, 0, 1)$ és $C(2, -1, 3)$ pontokban helyezkedik el. Határozza meg a negyedik csúcspont koordinátáit, ha ismeretes, hogy az OY tengelyen helyezkedik el!
15. Határozza meg az $[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}]$, ha
 - 1) $\vec{a} = (1, 2, -1), \vec{b} = (2, 1, -2), \vec{c} = (3, 1, -1)$;
 - 2) $\vec{a} = (3, 2, 1), \vec{b} = (0, 1, -1), \vec{c} = (-1, 1, 1)$!
16. Számítsa ki, az $[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}] - [\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$, ha $\vec{a} = (1, -1, 3), \vec{b} = (-2, 2, 1), \vec{c} = (3, -2, 5)$!
17. Milyen feltétel mellett lesz $[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}] = 0$?
18. Bizonyítsa az alábbi azonosságokat:
 - a) $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] + [\vec{b}, [\vec{c}, \vec{a}]] + [\vec{c}, [\vec{a}, \vec{b}]] = 0$;
 - b) $[\vec{a}, \vec{b}][\vec{b}, \vec{c}][\vec{c}, \vec{a}] = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2$!

32. Vektorok vegyes szorzata

Elméleti kérdések

1. Mit nevezünk három vektor vegyes szorzatának?
2. Milyen műveletekből áll a vegyes szorzat (pl. vektoriális szorzat, majd skaláris szorzat)?
3. Milyen algebrai alakban fejezhető ki a vegyes szorzat?
4. Mi a geometriai jelentése a vegyes szorzat abszolút értékének?
5. Hogyan kapcsolódik a vegyes szorzat a három vektor által kifeszített paralelepipedon térfogatához?
6. Milyen feltételek mellett lesz a vegyes szorzat értéke nulla?
7. Milyen szimmetria- vagy antiszimmetria-tulajdonságai vannak a vegyes szorzatnak?
8. Mi történik a vegyes szorzat értékével, ha két vektor szerepet cserél benne?
9. Hogyan használható a vegyes szorzat három vektor komplanaritásának vizsgálatára?
10. Milyen számítási módja van a vegyes szorzatnak a vektorok koordinátaival (pl. determináns segítségével)?
11. Milyen alkalmazásai vannak a vegyes szorzatnak a geometriában?
12. Igaz-e, hogy a vegyes szorzat előjele a három vektor térbeli orientációját is kifejezi?
13. Hogyan kapcsolódik a vegyes szorzat a háromdimenziós koordinátagometriához?
14. Hogyan lehet eldönteni, hogy három vektor egy síkban van-e a vegyes szorzat segítségével?

Gyakorlatok

1. Számítsa ki az alábbi vegyes szorzatokat:

- 1) $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$;
- 2) $(\vec{k}, \vec{j}, \vec{i})$;
- 3) $(\vec{i}, \vec{k}, \vec{j})$;
- 4) $(\vec{i}, [\vec{j}, \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}])$!

2. Bizonyítsa, hogy bármely $\vec{a}, \vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorokra a $\vec{b} - \vec{c}, \vec{a} - \vec{b}$ és $\vec{c} - \vec{a}$ vektorok komplanárisak!
3. Bizonyítsa, hogy $\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}] = \vec{a}[\vec{b}, \vec{c} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}]$, ahol λ, μ tetszőleges számok!
4. Bizonyítsa, hogy az $\vec{r}_1 = \{4, -2, -2\}, \vec{r}_2 = \{3, 1, 1\}, \vec{r}_3 = \{4, 2, 0\}$ és $\vec{r}_4 = \{7, -1, -6\}$ helyvektorok végpontjai egy síkon fekszenek!
5. Bizonyítsa, hogy

$$\left(\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}, \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}, \frac{\vec{c} + \vec{a}}{2}\right) = \frac{1}{4}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

6. Az $OABC$ tetraéder O csúcspontjából súlyvonalak vannak húzva az oldalfelületeken. Bizonyítsa, hogy az élektől vett új tetraéder térfogata az $\frac{1}{4}$ része az $OABC$ tetraéder térfogatának!
7. Komplanárisak-e a következő vektorok:
- 1) $\vec{a} = (2, 1, 3), \vec{b} = (1, -3, 2), \vec{c} = (4, -5, 7);$
 - 2) $\vec{a} = (1, -1, 2), \vec{b} = (5, 1, 3), \vec{c} = (0, 1, -1).$
8. Bizonyítsa, hogy az $\vec{a} = (3, 2, -1), \vec{b} = (1, -1, 3)$ és $\vec{c} = (9, 1, 7)$ vektorok lineárisan összefüggők, és határozzon meg egy tetszőleges lineáris kombinációjukat!
9. Határozza meg hogy az $A(2, 3, 1), B(6, 1, 4), C(0, -1, 1)$ és $D(2, -1, 3)$ pontok egy síkon fekszenek!

33. A síkbeli egyenes egyenlete

Elméleti kérdések

1. Hogyan definiálható egy egyenes a síkban matematikailag?
2. Milyen különböző alakjai ismertek az egyenes egyenletének a síkban? (pl. normálvektoros, irányítányezős, általános alak)
3. Mit jelent az egyenes általános alakja: $ax + by + c = 0$?
4. Milyen feltételek mellett írható fel egy egyenes irányítányezős alakban: $y = kx + b$?
5. Hogyan határozható meg az egyenes egyenlete, ha ismert egy pontja és az irányvektora?
6. Mi az egyenes normálvektoros alakja, és hogyan értelmezzük?
7. Hogyan számítható ki két egyenes metszéspontja a síkban?
8. Milyen feltételek mellett párhuzamos vagy merőleges két síkbeli egyenes?
9. Milyen módon határozható meg az egyenes egyenlete, ha két pontját ismerjük?
10. Mit jelent az, hogy egy pont illik egy egyenes egyenletébe?
11. Hogyan lehet kiszámítani a távolságot egy pont és egy egyenes között?
12. Milyen geometriai jelentése van az egyenes egyenletének egy adott koordináta-rendszerben?
13. Hogyan lehet eldönteni, hogy két egyenes azonos, párhuzamos, vagy metszi egymást?
14. Milyen szerepet játszik a síkbeli egyenes egyenlete az analitikus geometriában?

Gyakorlatok

1. Határozza meg, hogy az $A_1(1, -2)$, $A_2(1, 1)$, $A_3(3, -4)$ pontok közül, melyek fekszenek az $x + 2y - 3 = 0$ egyenesen!
2. Határozza meg, hogy az $x - 3y + 6 = 0$ egyenes hol metszi a koordináta-tengelyeket!
3. Bizonyítsa be, hogy az $m^2x^2 + 2mnxy + n^2y^2 - 4l^2 = 0$ egyenlet egy egyenes-párt határoz meg! Határozza meg az egyenesek egyenleteit!
4. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges egyenes egyenlete megadható paraméteres alakban: $x = x_0 + lt, y = y_0 + mt$!
5. Határozza meg azon pontok mértani helyének egyenletét, amelyeknél az $A(-2, 1)$ és $B(1, 3)$ pontoktól való távolságainak négyzeteinek különbsége 5-tel egyenlő!
6. Az ABC háromszög AB , BC és AC oldalai, megfelelően a $2x - 3y - 1 = 0$, $3x - 4y - 1 = 0$ és $x - y - 1 = 0$ egyenletekkel vannak megadva. Határozza meg a csúcspontjainak koordinátáit!

7. Határozza meg az $A(-4, -2)$, $B(2, 0)$ és $C(2, -4)$ csúcspontokkal rendelkező háromszög súlyvonalainak egyenleteit!
8. Határozza meg azon egyenes egyenletét, amely φ szöget zár be az Ox tengely pozitív irányával és az Oy tengelyt a $b = 3$ szakaszban metszi!
9. Milyen szöget zár be az Ox -tengellyel az az egyenes, amely áthalad az $A(-1, 3)$ és $B(4, -2)$ pontokon?
10. Határozza meg az egyenesek által bezárt szöget

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt \end{cases} \text{ és } \begin{cases} x = x_1 + l_1 t, \\ y = x_1 + m_1 t. \end{cases}$$

11. Határozza meg az $A(0, 0)$, $B(2, -1)$, $C(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ csúcspontokkal rendelkező háromszög belső szögeit!
12. Bizonyítsa be, hogy az $A(1, 1)$, $B(0, 3)$, $C(2, 4)$ és $D(3, 2)$ csúcspontokkal rendelkező négyszög négyzet!
13. Bizonyítsa be, hogy az $x + 2y + 3 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$ és $x - 2y - 3 = 0$ egyenesekkel határolt négyszög rombusz!
14. Milyen feltétel mellett lesz a $l_1x + m_1y = 0$, $l_2x + m_2y = 0$ egyenesek által bezárt szög szögfelezője az Ox tengely?
15. Bizonyítsa be, hogy azok az egyenesek, amelyek egyenlő hosszúságú szakaszokat metszenek a koordináta-tengelyeken, vagy párhuzamosak, vagy merőlegesek!
16. Határozza meg annak az egyenesnek az egyenletét, mely a $P(-1, 3)$ ponton áthalad és merőleges a $4x - 2y + 3 = 0$ egyenesre!
17. Határozza meg annak az egyenesnek az egyenletét, mely a $P(1, 2)$ ponton áthalad és merőleges az $5x + 2y - 11 = 0$ egyenesre!
18. Határozza meg az $A(1, 0)$, $B(4, 5)$ és $C(7, 3)$ csúcspontokkal rendelkező háromszög magasságainak egyenleteit!
19. Határozza meg a $P(1, -2)$ pont vetületét a $3x - y - 9 = 0$ egyenesre!
20. Határozza meg a $P(8, -9)$ pont szimmetrikus pontját az $A(3, -4)$ és $B(-1, -2)$ pontokon áthaladó egyeneshez képest!
21. Ismerve a háromszög $A(3, -4)$ csúcspontját és két magasságának egyenleteit: $7x - 2y - 1 = 0$ és $2x - 7y - 6 = 0$; határozza meg a háromszög oldalainak egyenleteit!
22. Ismerve a háromszög $A(2, -4)$ csúcspontját és két szögének a szögfelezőjeinek egyenleteit: $x + y - 2 = 0$, $x - 3y - 6 = 0$; határozza meg a háromszög oldalainak egyenleteit!
23. Ismerve a háromszög $A(-4, 2)$ csúcspontját és két súlyvonalának egyenletét: $3x - 2y + 2 = 0$, $3x + 5y - 12 = 0$; határozza meg a háromszög oldalainak egyenletét!

24. Az $M(5, -1)$ ponton keresztül húzott egyenes 45° -os szöget zár be az $5x + 2y - 11 = 0$ egyenessel. Határozza meg ennek az egyenesnek az egyenletét!
25. Határozza meg az egyenlőszárú, derékszögű háromszög befogóinak egyenleteit, ha a $C(5, -2)$ a derékszög csúcspontja, és az átfogó egyenlete: $2x - 3y + 5 = 0$!
26. Legyen az $A(3, 4)$ csúcspontja az $\alpha = 30^\circ$ szögnek a derékszögű háromszögben, és az ellentétes befogó egyenlete: $x - y + 2 = 0$. Határozza meg a háromszög két másik oldalának egyenleteit!
27. A $P(1, -1)$ pont egy négyzet középpontja, amelynek az egyik oldala az $x - 2y + 12 = 0$ egyenesen fekszik. Határozza meg a négyzet többi oldalainak egyenleteit!
28. Az a mely értékei mellett a $2x - y + 1 = 0$, $x + y - 4 = 0$ és $3x + ay - 2 = 0$ egyenesek egy ponton keresztül haladnak át?
29. Az $x + 2y - 1 = 0$ és $2x + y - 4 = 0$ egyenesek metszéspontján keresztül húzzon egy egyenest:
- amely áthalad az $M(-1, 3)$ ponton;
 - amely párhuzamos az Oy -tengellyel;
 - amely merőleges az $x - 2y + 11 = 0$ egyenesre.
30. Határozza meg az $x - 2y - 5 = 0$ és $x + y - 8 = 0$ egyenletekkel megadott egyenesek metszéspontjából az $x^2 + y^2 = 25$ körhöz húzott érintők egyenleteit!
31. Határozza meg, hogy a következő egyenesek egyenletei közül, melyik van Hesse-féle normálalakban felírva?
- $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 3 = 0$;
 - $-\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y - 1 = 0$;
 - $\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y + 2 = 0$;
 - $x + y - 2 = 0$;
 - $y - 2 = 0$.
32. Írja fel az alábbi egyenesek egyenletét Hesse-féle normálalakban
- $4x + 3y + 11 = 0$;
 - $x + 2y - 1 = 0$;
 - $x + 2 = 0$.
33. Számítsa ki a P pont távolságát az alábbi egyenesektől:
- $P(-2, 1), 4x - 3y - 2 = 0$;
 - $P(3, -2), 12x + 5y - 3 = 0$;
 - $P(0, 1), x - 2y + 1 = 0$.

34. Adottak a téglalap két oldalán áthaladó egyenesek egyenletei $3x - 2y - 5 = 0$, $2x + 3y + 7 = 0$ és az $A(-2,1)$ pont egyik csúcspontja. Határozza meg a téglalap területét!
35. A négyzet két oldala az $x - 2y + 2 = 0$, $x - 2y - 5 = 0$ egyeneseken fekszik. Határozza meg a négyzet területét!
36. Határozza meg a $P(-5,13)$ pont szimmetrikus pontját a $2x - 3y - 3 = 0$ egyenlettel megadott egyeneshez képest!

34. A sík egyenlete

Elméleti kérdések

1. Mit nevezünk síknak a háromdimenziós térben?
2. Hogyan írható fel a sík egyenlete normálvektoros alakban?
3. Hogyan határozható meg egy sík, ha ismert egy pontja és egy normálvektora?
4. Mi a sík normálegyenlete, és hogyan értelmezzük a benne szereplő elemeket?
5. Milyen formája van a sík általános egyenletének: $ax + by + cz + d = 0$?
6. Hogyan lehet meghatározni egy sík egyenletét három nem kollineáris pont alapján?
7. Mit jelent az, hogy egy pont illeszkedik egy síkra? Hogyan ellenőrizzük ezt?
8. Mikor mondjuk, hogy két sík párhuzamos vagy metszi egymást?
9. Hogyan határozható meg a metszésvonala két síknak, ha metszik egymást?
10. Milyen kapcsolat van a sík normálvektora és a sík irányai között?
11. Hogyan számítható ki a távolság egy pont és egy sík között?
12. Hogyan lehet eldönteni, hogy egy egyenes és egy sík metszi egymást, párhuzamosak vagy illeszkednek egymásba?
13. Milyen geometriai jelentése van a sík egyenletében szereplő együtthatóknak?

Gyakorlatok

1. Határozza meg azon sík egyenletét, melynek minden pontja egyenlő távolságra van a $P(1, -4, 2)$ és $Q(7, 1 - 5)$ pontoktól!
2. Határozza meg az $M(2, 3, -5)$ pontból a $4x - 2y + 5z - 12 = 0$ síkra húzott merőleges hosszát!
3. Bizonyítsa be, hogy a $7x + 4y + 7z + 1 = 0$, $2x - y - z + 2 = 0$, $x + 2y + 3z - 1 = 0$ síkok egy egyenesen haladnak át!
4. Írja fel a sík egyenletét, amely az $M(0, 2, 1)$ ponton halad át és párhuzamos az $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ vektorokhoz!
5. Bizonyítsa be, hogy a $3x - 4y - 2z + 5 = 0$ sík metszi az $M_1(3, -2, 1)$ és $M_2(-2, 5, 2)$ pontok által határolt szakaszt!
6. Bizonyítsa be, hogy három $2x - y + 3z + 5 = 0$, $3x + y + 2z - 1 = 0$, $4x + 3y + z + 2 = 0$ sík, három különböző párhuzamos egyenesen metszik egymást!
7. Ellenőrizze, hogy az $A(-1, 2, 3)$, $B(1, -2, 1)$, $C(0, 1, 2)$, $D(3, 0, 3)$ és $E(5, -7, 11)$ pontok a $2x - 3y + z - 9 = 0$ síkon fekszenek!

8. Határozza meg a tetraéder térfogatát, melynek egyik csúcsa az origóban van és a koordináta-síkokat a következő síkokban metszi:
 - a) $3x - 2y + z - 12 = 0$,
 - b) $x - y + 3z - 3 = 0$,
 - c) $x + 2y - 5z + 10 = 0$,
 - d) $2x + 5y - 4z - 20 = 0$!
9. Határozza meg a sík egyenletét, ha az $A(1, -2, 0)$ és $B(3, 2, 6)$ pontok szimmetrikusak hozzá képest!
10. Határozza meg annak a síknak az egyenletét, amelyre az origóból a síkra húzott merőleges talppontja az $A(-1, 2, 3)$ pont!
11. Írja fel mindazon sík egyenleteit, amelyek áthaladnak a $P(-3, 2, 5)$ ponton és párhuzamosak valamely koordináta-síkkal!
12. Írja fel mindazon sík egyenleteit, amelyek áthaladnak a $P(-1, 3, 7)$ ponton és valamely koordináta-tengelyen!
13. Írja fel azon sík egyenletét, amely az Oz tengelyhez párhuzamos és áthalad az $A(1, 2, 1)$ és $B(0, 3, -1)$ pontokon!
14. Határozza meg annak a síknak az egyenletét, amely áthalad a $P(-1, 2, 3)$ ponton és metszi az Ox és Oy tengelyeken megfelelően az $a = 2$, és $b = -1$ szakaszokban!
15. Húzzon egy síkot a $P(1, 2, -1)$ ponton keresztül, amely a koordináta-tengelyeken egyenlő hosszúságú szakaszokat metsz!
16. Határozza meg az $x + y - z + 2 = 0$, $2x + y - 5 = 0$ és $4x - 3y - 2z + 5 = 0$ síkok metszéspontjait!
17. Az l és m mely értékeinél metszik egymást a $2x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 2y - z + m = 0$ és $x + ly - 6z + 10 = 0$ síkok: a) egy pontban, b) egy egyenesben, c) párhuzamos egyeneseken?
18. Határozza meg az $x + y - z + 5 = 0$ és $2x + y + z - 3 = 0$ síkok metszés egyenesén keresztül húzott sík egyenletét:
 - a) amely áthalad az $M(-1, 3, 4)$ ponton;
 - b) párhuzamos az Oy -tengelyhez;
 - c) merőleges a $3x - y + 2z - 11 = 0$ síkra;
 - d) amely az $x - 2y + 2z - 17 = 0$ síkkal $\alpha = \arccos \frac{1}{3\sqrt{3}}$ szöget zár be!
19. Írja fel a sík egyenletét, amely merőleges az $5x - y + 3z - 2 = 0$ síkra és egy xOy síkhoz tartozó egyenesen metszi őt!
20. Bizonyítsa be, hogy az $x - 2y + 3z - 13 = 0$, $5x + y - z - 11 = 0$ és $3x + 5y - 7z + 15 = 0$ síkok egy és ugyanazon ponton haladnak át!

21. Határozza meg az $5x + 8y - z - 7 = 0$, $x + 2y + 3z - 1 = 0$ és $2x - 3y + 2z - 9 = 0$ síkok metszéspontján keresztül húzott sík egyenletét, amely:
- a) áthalad a $P_1(1,2,4)$ és $P_2(-1,3,1)$ pontokon keresztül;
 - b) áthalad az Oy-tengelyen;
 - c) áthalad az $y + 2 = 0$, $x + 2z + 1 = 0$ egyeneseken;
 - d) párhuzamos a $3x - 5y + 8z - 19 = 0$ síkhoz;
 - e) merőleges a $2x + 3z - 11 = 0$ síkra!
22. Az Oy-tengelyen keressen egy pontot, amely egyenlő távolságra van az alábbi két síktól: $x - 2y + 3z - 6 = 0$ és $2x + 3y + z - 1 = 0$!
23. Határozza meg annak a síknak az egyenletét, amely 5 egységnyi távolságra van és párhuzamos az $x - 2y + 2z - 14 = 0$ síkhoz!
24. Határozza meg a $2x + 2y - z - 15 = 0$ és $4x + 4y - 2z + 11 = 0$ síkok közti távolságot!

35. A térbeli egyenes egyenlete

Elméleti kérdések

1. Hogyan definiálható egy egyenes a háromdimenziós térben?
2. Milyen formában adható meg a térbeli egyenes egyenlete?
3. Mit jelent a térbeli egyenes paraméteres egyenlete?
4. Milyen adatok szükségesek egy térbeli egyenes meghatározásához?
5. Hogyan írható fel az egyenes egyenlete, ha ismert egy pontja és egy irányvektora?
6. Mi a geometriai jelentése a paraméteres egyenletben szereplő paraméternek?
7. Hogyan ellenőrizhető, hogy egy adott pont rajta van-e a térbeli egyenesen?
8. Mikor mondjuk, hogy két térbeli egyenes párhuzamos, metszi egymást, vagy kitérő?
9. Hogyan határozható meg a metszéspontja két térbeli egyenesnek?
10. Hogyan vizsgálható két egyenes metszéspontja algebrai úton?
11. Milyen különbségek vannak a síkbeli és a térbeli egyenes egyenlete között?
12. Milyen szerepe van az irányvektornak a térbeli egyenes tulajdonságainak meghatározásában?
13. Hogyan lehet megállapítani, hogy egy térbeli egyenes és egy sík metszi egymást, párhuzamosak, vagy illeszkedik az egyenes a síkra?

Gyakorlatok

1. Határozza meg a $P(2, -1, 3)$ pont vetületét az $x = 3t, y = 5t - 7, z = 2t$ egyenesre.
2. Határozza meg a $P(4, 1, 6)$ pont Q szimmetrikus pontját a következő egyeneshez képest

$$\begin{cases} x - y - 4z + 12 = 0, \\ 2x + y - 2z + 3 = 0! \end{cases}$$

3. Határozza meg a $P(2, 3, -1)$ pont és az $\frac{x-5}{3} = \frac{y}{3} = \frac{z+25}{-2}$ egyenes közti távolságot!
4. Határozza meg sík egyenletét, amely áthalad az

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{-2}, \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2}$$

egyeneseken!

5. Bizonyítsa be, hogy az $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$ és $\begin{cases} x = 3t + 7, \\ y = 2t + 2, \\ z = -2t + 1 \end{cases}$ egyenesek egy síkon helyezkednek el, és határozza meg ezen sík egyenletét!
6. A $2x - y + 3z - 9 = 0$ síkon keresse meg azt a pontot, amelyre az $A(-1, 0, 1)$ és $B(3, 1, 1)$ pontoktól vett távolságoknak az összege a legkevesebb!
7. Bizonyítsa be, hogy az

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-5}{-4} \text{ és } \frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$$

egyenesek metszik egymást, és határozza meg azon sík egyenletét, amelyen az egyenesek elhelyezkednek!

8. Bizonyítsa be, hogy a $\begin{cases} x = 2t + 5, \\ y = -t + 2, \\ z = t - 7, \end{cases}$ és a $\begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0, \\ x - y - 3z - 2 = 0, \end{cases}$

egyenesek párhuzamosak, és határozza meg azon sík egyenletét, amelyen ezek az egyenesek elhelyezkednek!

9. Határozza meg azon sík egyenletét, amely áthalad a $P(5; 7; -1)$ ponton és merőleges az

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+3}{-2} \text{ egyenesre!}$$

10. Határozza meg a $P(1, 2, \frac{3}{2})$ pont vetületét az $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{0} = \frac{y+1}{2}$ egyenesre!

11. Határozza meg azt a pontot, amely szimmetrikus a $P(1, -2, -6)$ ponthoz az

$$\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0, \\ x - z + 2 = 0 \end{cases} \text{ egyeneshez képest!}$$

12. Határozza meg a $P(-1, 3, 3)$ pont és az $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1}$ egyenes közötti távolságot!

13. Határozza meg az $\begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0, \\ x - y - z - 22 = 0. \end{cases}$ és $\frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$ egyenesek közötti távolságot!

14. Bizonyítsa be, hogy azon pontok mértani helye, amelyek egyenlőtávolságra vannak a háromszög csúcspontjaitól, egy egyenes. Határozza meg az egyenes egyenletét, ha $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ és $C(x_3, y_3, z_3)$ – a háromszög csúcspontjai!

16. Határozza meg a sík egyenletét, amely áthalad az $\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = -3t + 2, \\ z = 2t - 3 \end{cases}$ egyenesen és az $M(2, -2, 1)$ ponton!

17. Határozza meg az alábbi egyenesek vetületét a koordináta síkokra:

$$\text{a) } \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}; \quad \text{b) } \begin{cases} x - y + z - 2 = 0, \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

18. Határozza meg az $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{2}$ egyenes vetületét az $x + 4y - 2z - 11 = 0$ síkra!

19. Határozza meg a sík egyenletét, amely áthalad az $\begin{cases} x = 3t + 1, \\ y = 2t + 3, \\ z = -t - 2, \end{cases}$ egyenesen és párhuzamos a

$$\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + 2y - z - 5 = 0 \end{cases} \text{ egyeneshez!}$$

20. Határozza meg az egyenes egyenletét, amely áthalad az $M_0(3, -2, -4)$ ponton, párhuzamos a

$$3x - 2y - 3z - 4 = 0 \text{ síkkal és metszi az } \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z-1}{19} \text{ egyenest!}$$

21. Az $\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0, \\ 3x - y + 4z - 29 = 0 \end{cases}$ egyenesen határozza meg azt a pontot, mely egyenlő távolságra van az $A(3, 11, 4)$ és $B(-5, -13, -2)$ pontoktól!

22. Az A és D paraméterek milyen értékeire az $\frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{1}$ egyenes az $Ax + 2y - 4z + D = 0$ síkon fekszik?

23. Határozza meg a következő két kitérő egyenes közös merőlegesének az egyenletét:

a) $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{-1}$ és $\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$;

b) $\frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{1}$ és $\frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2}$!

24. Határozza meg a következő egyenesek közötti távolságot (a legkisebbet):

$$\frac{x+3}{4} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z-3}{2} \text{ és } \frac{x-4}{8} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+7}{3}!$$

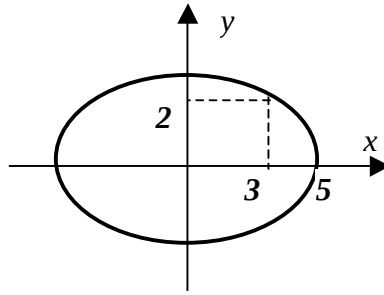
36. Másodrendű görbék

Elméleti kérdések

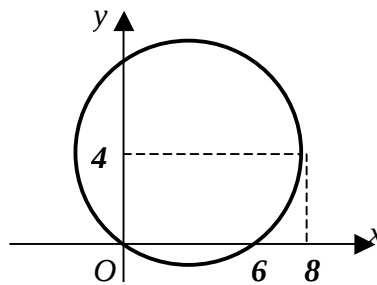
1. Mi a körvonal egyenlete, és mi abban a középpont koordinátái?
2. Mi a kanonikus alakja az ellipszis egyenletének?
3. Hogyan értelmezhető az ellipszis féltengelyeinek hossza a kanonikus egyenletben?
4. Mi a kanonikus alakja a hiperbola egyenletének?
5. Hogyan különböztethető meg a hiperbola bal és jobb ága a kanonikus egyenlet alapján?
6. Mi a kanonikus alakja a parabola egyenletének?
7. Hogyan határozható meg a parabola fókuszpontja és direktrixa a kanonikus alak segítségével?
8. Milyen geometriai jelentősége van az ellipszis, hiperbola és parabola kanonikus egyenletében szereplő paramétereknek?
9. Hogyan különböztethetők meg a három görbetípus az egyenleteik alapján?
10. Milyen feltételek mellett egy másodfokú egyenlet ír le ellipszist, hiperbolát vagy parabolát?
11. Hogyan jelenik meg a fókuszpont a kanonikus egyenletekben?
12. Milyen szerepe van az excentricitásnak az ellipszis és hiperbola kanonikus egyenletében?
13. Mi a mértani helye az ellipszis, hiperbola és parabola pontjainak a síkon?

Gyakorlatok

1. Határozza meg az ellipszis egyenletét, ha a fókuszpontok közötti távolság 12 és az excentricitása $\varepsilon = \frac{2}{3}$!
2. Határozza meg az ellipszis egyenletét, ha az áthalad az A (6; 4) és B (8; 3) pontokon.
3. Határozza meg a következő körvonalak középpontok közötti távolságot $x^2 + y^2 - 10x + 16y + 80 = 0$ és $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 12 = 0$!
4. Határozza meg azon egyenesek által bezárt szöget, amelyek áthaladnak az $x^2 + y^2 - 4x - 16y + 32 = 0$ körvonal középpontján és az $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ ellipszis fókuszpontjain megfelelően!
5. Határozza meg a körvonal egyenletét, ha az áthalad az A(-8; 3) és B(2; -7) pontokon és a középpontja az $x + 4y + 16 = 0$ egyenesen fekszik!
6. Határozza meg az alábbi ábrán látható görbe egyenletét!



7. Határozza meg az alábbi ábrán látható görbe egyenletét!



8. Ábrázolja az alábbi egyenlettel megadott görbét $5x^2 + 9y^2 - 720 = 0$!

9. Határozza meg az $A(10/3, 5/3)$ pontból az $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ ellipszishez húzott érintők egyenleteit!

10. Milyen feltételek szükségesek, hogy az $y = kx + m$ egyenes érintse az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszist?

11. Határozza meg az $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ hiperbola érintőinek egyenleteit, amelyek merőlegesek a $4x + 3y - 7 = 0$ egyenesre!

12. Határozza meg azon egyenesek egyenleteit, amelyek az $M(-1, 3)$ ponton áthaladnak és párhuzamosak az $x^2 - \frac{y^2}{16} = 1$ hiperbola megfelelő aszimptotáival!

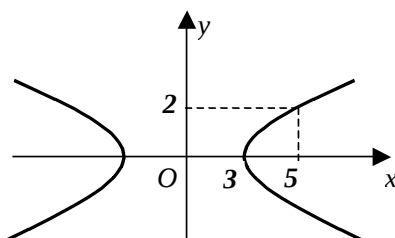
13. Az $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ ellipszisen keressen egy pontot, amelynek a fokális sugara $r = \frac{10}{3}$!

14. Határozza meg a hiperbola egyenletét, ha a képzei tengelye 12 és a hiperbola áthalad az $A(20; 8)$ ponton!

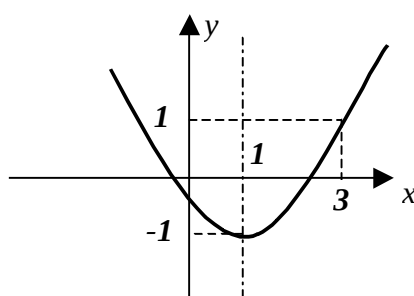
15. Ábrázolja a $4x^2 - y^2 - 16 = 0$ hiperbolát és határozza meg fókuszpontjait, excentricitását, direktrixét és aszimptotáit!

16. Határozza meg a hiperbola egyenletét, ha a fókuszpontok között 10 a távolság és $y = \pm \frac{4}{3}x$ az aszimptoták!

17. Határozza meg a parabola egyenletét, amelynek csúcsa az origóban van, szimmetrikus az Ox tengelyhez képest, és áthalad a $(5; -3)$ ponton! Határozza meg a fókuszpont koordinátáit és a direktrix egyenletét és ábrázolja a parabolát!
18. Ábrázolja a $x^2 - 2x + y + 8 = 0$ parabolát és határozza meg fókuszpontját és direktrixét!
19. Határozza meg az alábbi ábrán látható görbe egyenletét!



20. Határozza meg az alábbi ábrán látható görbe egyenletét!



21. Határozza meg azon görbe egyenletét, mely egyenlő távolságra van az $A(2, 2; 2)$ ponttól és az $x - 1,8 = 0$ egyenestől!
22. Az $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ ellipszisen keresse meg azt a pontot, melynek fokális sugara $r = \frac{10}{3}$!
23. Határozza meg az $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ ellipszis és az $x - 2y + 2 = 0$ egyenes metszéspontjait!
24. Az ellipszisbe beírt téglalapok közül találja meg azt, amelynek legnagyobb a területe!
25. Határozza meg az $M(2, 4)$ ponton keresztül húzott érintők egyenleteit az $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ ellipszishoz!
26. Határozza meg az $y^2 = 2x$ parabola érintőjének egyenletét, amely merőleges a $4x + y - 23 = 0$ egyeneshez!
27. Milyen feltétel szükséges, hogy az $Ax + By + C = 0$ egyenes érintse az $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ görbét?

Irodalomjegyzék

1. *Fried Ervin* Algebra I. Elemi és lineáris algebra. – Budapest: Nemzeti tankönyvkiadó, 2000.
2. *D.K. Fagyjev, I.Sz. Szominszkij* Felsőfokú algebrai példatár. – Budapest: Typotex, 2006.
3. *A.G. Kuros* Felsőbb algebra. – Budapest: Tankönyvkiadó, 1967.
4. *B. Bódi* Az algebra alapjai. – Ungvár: PoliPrint, 2010.
5. *Baboss Csaba* Geometria I. – Nyugat-magyarországi Egyetem Geoinformatikai kar, Székesfehérvár. –2007.
6. *Coxeter H. S. M.* A geometriák alapjai – Műszaki Könyvkiadó. –Budapest. – 1973.
7. *Hajós György* Bevezetés a geometriába –Tankönyvkiadó. – Budapest. –1966.
8. *Kárteszi Ferenc* Bevezetés a véges geometriákba – Akadémia Kiadó. – Budapest. –1972.
9. *Kárteszi Ferenc* Lineáris transzformációk – Tankönyvkiadó. – Budapest. –1974.
10. *Pelle Béla* Geometria. –Tankönyvkiadó. –Budapest. –1974.
11. *Reiman István* A geometria és határterületei. – Gondolat Könyvkiadó. –1986.
12. *Баранник В.Ф., Погоріляк Є.Я., Рудько В.П., Шапочка І.В.* Лінійна алгебра. – Ужгород: Ужгород. держ. ун-т, 2000.
13. *Гудивок П.М., Погоріляк Є.Я., Шапочка І.В.* Практикум з алгебри і теорії чисел для студентів першого курсу. – Ужгород: Ужгород. держ. ун-т, 2002.
14. Основи аналітичної геометрії та лінійної алгебри. Навчаль-ний посібник // Укл. *Пукальський І.Д., Перун Г.М.* – Чернівці:Рута, 2002. – 108 с.
15. *Ф.С.Гудименко та інші.* Збірник задач з вищої математики. Видавництво Київського університету, 1963. – 352 с.
16. *Шестопал А.Ф.* Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998. – 164 с.

Посібник з алгебри та геометрії для інформатиків призначений для студентів I курсу Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці спеціальності А 4.09 Середня освіта (Інформатика) денної та заочної форми навчання з метою організації самостійної роботи з курсу "Алгебра та геометрія".

Посібник умовно поділений на дві частини: лінійну алгебру та аналітичну геометрію, кожна з яких, містить розділи в яких наведені теоретичні питання та практичні завдання для самостійної роботи студента з курсу "Алгебра та геометрія".

Матеріал призначений для використання як навчально-методичний посібник з дисципліни "Алгебра та геометрія".

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики
(протокол № 10 від «23» червня 2025 року)

Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості вищої освіти
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол №7 від 26 серпня 2025 року)

Рекомендовано до видання у електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол №8 від 28 серпня 2025 року)