ЗАКАРПАТСЬКИЙ УГОРСЬКИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ
ФЕРЕНЦА РАКОЦІ II
II. RÁKÓCZI FERENC KÁRPÁTALJAI MAGYAR FŐISKOLA

Кафедра математики та інформатики
Matematika és Informatika Tanszék

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
з дисципліни
«ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА»

ELŐADÁS VÁZLATA
a **«DISZKRÉT MATEMATIKA»** tudományágról

Перший (бакалаврський) / Alapképzés (BA)
(ступінь вищої освіти /a felsőoktatás szintje)

A4 Освіта / A4 Oktatás
(галузь знань / képzési ág)

«Інформатика», «Математика» / «Informatika», «Matematika»
(освітня програма / képzési program)

Берегове / Beregszász
2025 р. / 2025

Тилищак О.А. Конспект лекцій з дисципліни «Дискретна математика» для студентів II курсів Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II предметної спеціальності A4.09 Середня освіта (Інформатика) та A4.04 Середня освіта (Математика) відповідно. Берегове: Закарпатський угорський інститут ім. Ф.Ракоці I, 2025. 65 с.

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики
(протокол № 10 від 23 червня 2025 року)

Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості освіти
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол № 7 від «26» серпня 2025 року)

Рекомендовано до видання у електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту імені
Ференца Ракоці II
(протокол № 8 від «28» серпня 2025 року)

Підготовлено до видання у електронній формі (PDF) кафедрою
математики та інформатики з Видавничим відділом Закарпатського
угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Укладач: ТИЛИЩАК ОЛЕКСАНДР АНДРІЙОВИЧ — доцент кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Рецензенти:
СТОЙКА МИРОСЛАВ ВІКТОРОВИЧ — кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики та інформатики ЗУІ;
ТЕГЗА АНТОНІНА МИХАЙЛІВНА — кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри теорії ймовірностей та математичного аналізу ДВНЗ «УжНУ»

Відповідальний за випуск: ОЛЕКСАНДР ДОБОШ — начальник Видавничого відділу ЗУІ ім. Ф. Ракоці II

За зміст посібника відповідальність несуть розробники.

Видавництво: Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II (адреса: пл. Кошута 6, м. Берегове, 90202. Електронна пошта: `foiskola@kmf.uz.ua`)

Tilistyák S. Előadás vázlata a «Diszkrét matematika» tudományágról, a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola, I éves, A4.09 Középiskolai oktatás (informatika) és A4.04 Középiskolai oktatás (matematika) szakirányokon. Beregszász: II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar főiskola, 2025. 65 o.

Az oktatási folyamatban történő felhasználását jóváhagyta
a Matematika és Informatika Tanszéke
(2025. június 23, 10. számú jegyzőkönyv)

Megjelentetésre javasolta a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar
Főiskola Minőségbiztosítási Tanácsa
(2025. augustzus 26, 7. számú jegyzőkönyv).

Elektronikus formában (PDF fájlformátumban) történő kiadásra
javasolta
a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Tudományos Tanácsa
(2025. augustzus 28, 8. számú jegyzőkönyv).

Kiadásra előkészítette a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Matematika és Informatika Tanszéke és Kiadói Részlege

Szerkesztő: TILISTYÁK SÁNDOR — a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének docense

Szakmai lektorok:
SZTOJKA MIROSZLÁV — fizika és matematika tudományok kandidátusa, docens, a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének docense
TEGZA ANTONINA — fizikai és matematikai tudományok kandidátusa, docens, az Ungvári Nemzeti Egyetem Valószínűségszámítás és Matematikai Elemzés Tanszék docense

A kiadásért felel: DOBOS Sándor — a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Kiadói Részlegének vezetője

A tartalomért kizárólag a jegyzet szerkesztője felel.

Kiadó: a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola (cím: 90 202, Beregszász, Kossuth tér 6. E-mail: `foiskola@kmf.uz.ua`)

Символ на полях вказує про необхідність самостійного обгрунтування вказаного твердження.

A margókon található szimbólum a megadott állítás független igazolásának szükségességét jelzi.

Зміст / Tartalom

1 Бінарні відношення

1.1 Декартовий добуток

Нехай $x \neq y$ тоді для впорядкованої пари (x, y) порядок має значення:
$\{x, y\} = \{y, x\}$
$(x, y) \neq (y, x)$.

Означення 1. *Упорядковану пару (x, y) можна визначити множиною $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. У випадку впорядкованої пари (x, y) елемент x називається першою, а y — другою координатою.*

$$(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a, \\ y = b. \end{cases}$$

Означення 2. *Під декартовим добутком множин X, Y розуміємо множину впорядкованих пар $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$.*

Означення 3. *Упорядковану трійку (x, y, z) визначаємо множиною $((x, y), z)$.*

Означення 4. *Az $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ rendezett véges halmaz a*

$$((x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), x_n)$$

halmazzal definiáljuk.

Означення 5. *Упорядковану пару (x_1, x_2) визначаємо множиною*

$$\{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}.$$

Коли $n > 2$, упорядковану скінченну множину $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ визначаємо множиною

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \cup \{\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}\}.$$

Означення 6. *Під декартовим добутком множин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ розуміємо множину впорядкованих пар*

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2,\ \ldots,\ x_n \in X_n\}.$$

1 Binér relációk

1.1 Descartes-szorzatán

Adott $x \neq y$ és (x, y) rendezett pár esetén számít a sorrend:
$\{x, y\} = \{y, x\}$
$(x, y) \neq (y, x)$.

Definíció 1. *Az* (x, y) *rendezett párt a* $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ *halmazzal definiáljuk. Az (x, y) rendezett pár esetén x az első, y a második koordináta.*

$$(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a, \\ y = b. \end{cases}$$

Definíció 2. *Az* X, Y *halmazok Descartes-szorzatán az* $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ *rendezett párokból álló halmazt értjük.*

Definíció 3. *Az* (x, y, z) *rendezett három a* $((x, y), z)$ *halmazzal definiáljuk.*

Definíció 4. *Упорядковану скінченну множину* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *визначаємо множиною*

$$((x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), x_n).$$

Definíció 5. *Az* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *rendezett véges halmaz a*

$$((x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), x_n)$$

halmazzal definiáljuk.

Definíció 6. *Az* (x_1, x_2) *rendezett pár a*

$$\{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}$$

halmazzal definiáljuk. Amikor $n > 2$ *az* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *rendezett véges halmaz a*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \cup \{\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}\}$$

halmazzal definiáljuk.

Definíció 7. *Az* X_1, X_2,..., X_n *halmazok Descartes-szorzatán az*

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2,\ \ldots,\ x_n \in X_n\}$$

rendezett párokból álló halmazt értjük.

Теорема 1. *Нехай A, B і C довільні множини. Тоді*

1. $A \times B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$ *vagy* $B = \emptyset$,
2. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,
3. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,
4. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$,
5. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$,
6. $(A \backslash B) \times C = (A \times C) \backslash (B \times C)$,
7. $A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)$,
8. $B \subset C \Rightarrow A \times B \subset A \times C$,
9. $A \times B = B \times A \Rightarrow A = B$.

1.2 Визначення бінарних відношень

Означення 8. *Якщо для деяких множин X, Y маємо $R \subset X \times Y$, то говоримо, що R — це відношення між X та Y. Якщо $X = Y$, то говоримо, що R є відношенням на X (гомогенне бінарне відношення). Якщо R є бінарним відношенням, то часто замість $(x, y) \in R$ пишемо xRy, а замість $(x, y) \notin R$ пишемо $x \not R y$.*

Приклади

- $\mathbb{I}_X = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$ — відношення рівності на множині X.

  $x \; \mathbb{I}_X \; y \Leftrightarrow x = y$

- $\{(x, y) \in Z \times Z : x|y\}$ — відношення «ділиться на».

- Для системи множин F $\{(X, Y) \in F \times F : X \subset Y\}$ — відношення включення як підмножини.

Tétel 1. *Legyenek A, B és C tetszőleges halmazok. Ekkor*

1. $A \times B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$ *vagy* $B = \emptyset$,
2. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,
3. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,
4. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$,
5. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$,
6. $(A \backslash B) \times C = (A \times C) \backslash (B \times C)$,
7. $A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)$,
8. $B \subset C \Rightarrow A \times B \subset A \times C$,
9. $A \times B = B \times A \Rightarrow A = B$.

1.2 A bináris relációk definíciója

Definíció 8. *Ha valamely X, Y halmazokra $R \subset X \times Y$, akkor azt mondjuk, hogy R reláció X és Y között. Ha $X = Y$, akkor azt mondjuk, hogy R X-beli reláció (homogén binér reláció). Ha R binér reláció, akkor gyakran $(x, y) \in R$ helyett xRy-t írunk és gyakran $(x, y) \notin R$ helyett $x \not R y$-t írunk.*

Példak

- $\mathbb{I}_X = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$ az egyenlőség reláció az X halmazon. $x \; \mathbb{I}_X \; y \Leftrightarrow x = y$
- $\{(x, y) \in Z \times Z : x|y\}$ az osztója reláció.
- F halmazrendszer esetén az $\{(X, Y) \in F \times F : X \subset Y\}$ a részhalmazként tartalmazás reláció.

Якщо на скінченних множинах задано бінарні відношення, то їх можна подати за допомогою матриць відношень і графів відношень (діаграм).

У матричному методі елементи множини A розміщуються по рядках матриці $M(R)$, а елементи множини B — по стовпцях. Якщо пара (a, b) належить відношенню R, то на перетині відповідного рядка і стовпця стоїть одиниця, інакше — нуль.

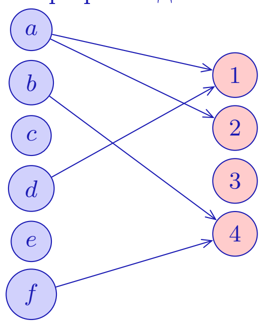
У графічному поданні елементи множин A і B розміщуються на площині у вигляді точок. Якщо пара (a, b) належить відношенню R, то точку, що відповідає елементу a, з'єднують орієнтованим відрізком з точкою, що відповідає елементу b.

Нехай $A = \{a, b, c, d, e, f\}$,
$B = \{1, 2, 3, 4\}$, і відношення
$R = \{(a, 1), (a, 2), (b, 4), (d, 1), (f, 4)\} \subset A \times B$.

Матрицею відношення буде

$$M(R) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Графом відношення буде



Ha véges halmazokon adunk meg bináris relációkat, akkor relációmátrixok és relációgráfok (diagramok) segítségével adhatók meg.

A mátrix módszerben az A halmaz elemeinek arányát a mátrix soraihoz illesztjük $M(R)$, a B halmaz elemei - oszlopok. Ha egy pár (a, b) az R relációban van, majd a megfelelő egyenes metszéspontjában van és a mátrix oszlopa egy, egyébként nulla.

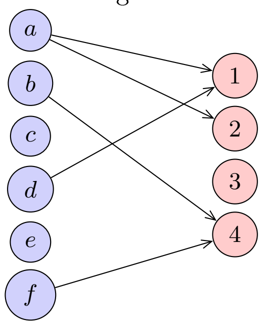
A grafikus beállításnál az A és B halmaz elemeihez fűződő kapcsolatokat a síkon lévő pontnak megfelelően helyezzük. Ha egy pár (a, b) az R relációban van, majd az a elemnek megfelelő pontot egy irányszakasz köti össze a b elemnek megfelelő ponttal.

Legyen $A = \{a, b, c, d, e, f\}$,
$B = \{1, 2, 3, 4\}$, és reláció
$R = \{(a, 1), (a, 2), (b, 4), (d, 1), (f, 4)\} \subset A \times B$.

Relációmátrix les

$$M(R) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Relációgráfok les



2 Однорідні бінарні відношення

2.1 Властивості днорідних бінарних відношень

Означення 9. *Нехай X — довільна множина. Відношення R між X та X називають однорідним відношенням на множині X або відношенням на множині X. ($R \subset X \times X$.)*

Приклади.

Відношення:	$=, <, \leq$	$\mid$	$\subset$	T
Множина:	$\mathbb{R}$	на $\mathbb{N}$ або $\mathbb{Z}$	підмножини деякої множини	$\mathbb{R}$

$T = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R},\ |x - y| < 1\}$

Означення 10. *Нехай R — відношення на X. Тоді кажемо, що:*

- *R транзитивне, якщо $\forall x, y, z \in X$: $(x\,R\,y \wedge y\,R\,z) \Rightarrow x\,R\,z$; ($=$, $<$, $\leq$, $|$, $\subset$)*
- *R симетричне, якщо $\forall x, y \in X$: $x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x$; ($=$, T)*
- *R антисиметричне, якщо $\forall x, y \in X$: $(x\,R\,y \wedge y\,R\,x) \Rightarrow x = y$; ($=$, $\leq$, $\subset$, $<$)*
- *R строго антисиметричне, якщо $\forall x, y \in X$: $x\,R\,y \Rightarrow y \not{R}\, x$; ($<$)*
- *R рефлексивне, якщо $\forall x \in X$: xRx; ($=$, $\leq$, $|$, $\subset$, T)*
- *R іррефлексивне, якщо $\forall x \in X$: $x \not{R}\, x$; ($<$)*
- *R трихотомне, якщо для $\forall x, y \in X$ виконується рівно одна з умов: $x = y$, $x\,R\,y$, $y\,R\,x$; ($<$)*
- *R дихотомне, якщо для $\forall x, y \in X$ виконується: $x\,R\,y$ або $y\,R\,x$ (можливо обидві); ($\leq$)*

Лема 1. *Нехай X — множина, R — відношення на X. Якщо R строго антисиметричне, тоді R антисиметричне.*

2 Homogén binér relációk

2.1 Homogén binér relációk tulajdonságai

Definíció 9. *Legyen X egy tetszőleges halmaz. Az X és X közötti R relációt homogén relációnak nevezzük az X halmazon, vagy relációnak az X halmazon. ($R \subset X \times X$.)*

Példak.

Reláció:	$=, <, \leq$	$\mid$	$\subset$	T
Halmoz:	$\mathbb{R}$	$\mathbb{N}$-en vagy $\mathbb{Z}$	Részhalmazok egy halmazát	$\mathbb{R}$

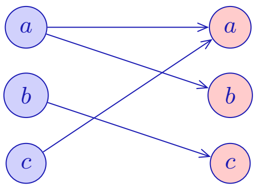
$T = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, \ |x - y| < 1\}$

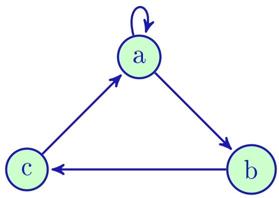
Definíció 10. *Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy*

- *R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (x \, R \, y \wedge y \, R \, z) \Rightarrow x \, R \, z$; $(=, <, \leq, |, \subset)$*
- *R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : x \, R \, y \Rightarrow y \, R \, x$; $(=, T)$*
- *R antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (x \, R \, y \wedge y \, R \, x) \Rightarrow x = y$; $(=, \leq, \subset, <)$*
- *R szigorúan antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : x \, R \, y \Rightarrow y \not R \, x$; $(<)$*
- *R reflexív, ha $\forall x \in X : x \; R \; x$; $(=, \leq, |, \subset, T)$*
- *R irreflexív, ha $\forall x \in X : x \not R \, x$; $(<)$*
- *R trichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén $x = y, x \, R \, y$ és $y \, R \, x$ közül pontosan egy teljesül; $(<)$*
- *R dichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén $x \, R \, y$ vagy $y \, R \, x$ (esetleg mindkettő) teljesül. $(\leq)$*

Lemma 1. *Legyen X egy halmaz, R reláció X-en. Ha R relációt szigorúan antiszimmetrikus akkor R antiszimmetrikus.*

Приклад 1. *Нехай* $X = \{a, b, c\}$ *— множина,* $R = \{(a,a),(a,b),(b,c),(c,a)\}$ *— відношення на* X*. Відношення* R *таке*



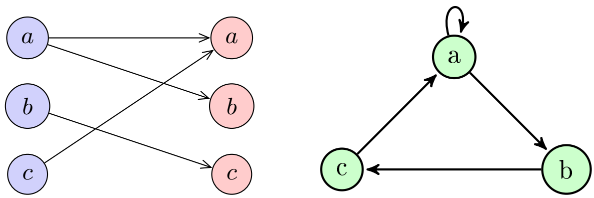


транзитивне	×	строго антисиметричний	×
трихотомне	×	симетричний	×
рефлексивне	×	дихотомічний	×
антисиметричне	✓	іррефлексивне	×

Теорема 2. *Нехай* X *— довільна множина,* R *— відношення на* X*. Якщо* R *— трихотомне відношення, то* R *є нерефлексивним.*

Теорема 3. *Нехай* X *— довільна множина,* R *— відношення на* X*. Якщо* R *— дихотомне відношення, то* R *є рефлексивним.*

Példa 1. *Legyen halmaz* $X = \{a, b, c\}$*,* $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, a)\}$ *reláció* X*-en. Az* R *relációt*



tranzitív	×	szigorúan antiszimmetrikus	×
trichotóm	×	szimmetrikus	×
reflexív	×	dichotóm	×
antiszimmetrikus	✓	irreflexív	×

Tétel 2. *Legyen* X *egy halmaz,* R *reláció* X*-en. Ha* R *relációt trichotóm akkor* R *irreflexív.*

Tétel 3. *Legyen* X *egy halmaz,* R *reláció* X*-en. Ha* R *relációt dichotóm akkor* R *reflexív.*

Означення 11. *Нехай X — довільна множина, R — відношення на X. Відношення R називається відношенням еквівалентності, якщо воно є рефлексивним, симетричним та транзитивним.*

Однорідне відношення R називається відношенням еквівалентності, якщо

1. $\forall x \in X$: x R x; (рефлексивне)
2. $\forall x, y \in X$: $x \, R \, y \Rightarrow y \, R \, x$; (симетричне)
3. $\forall x, y, z \in X$: $(x \, R \, y \wedge y \, R \, z) \Rightarrow x \, R \, z$; (транзитивний)

Приклади

1. $=$ (наприклад, на множині $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$);
2. паралельність на множині прямих площини;
3. Для $\forall x, y \in \mathbb{Z}$: $x \sim y$ якщо $5|(x - y)$.

Definíció 11. *Legyen X egy halmaz, R reláció X-en. Az R relációt ekvivalenciarelációnak nevezzük, ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív.*

Az R homogén relációt ekvivalenciarelációnak von akkor

1. $\forall x \in X$: x R x; (reflexív)
2. $\forall x, y \in X : x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x$; (szimmetrikus)
3. $\forall x, y, z \in X : (x\,R\,y \wedge y\,R\,z) \Rightarrow x\,R\,z$; (tranzitív)

Példák

1. $=$ (pl. az $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ vagy a $\mathbb{C}$ halmazon);
2. párhuzamosság egy sík egyeneseinek halmazán;
3. $\forall x, y \in \mathbb{Z}$-re: $x \sim y$, ha $5|(x-y)$.

3 Класифікація елементів множини

Означення 12. *Система Ω підмножин (непорожньої) множини X називається розбиттям на класи множини X або класифікацією елементів множини X, якщо*

1. *Ω складається з непорожніх множин,*

2. *Ω є попарно непересічними системами множин, та*

3. *$\cup\Omega = X$.*

Тоді елементи Ω (які самі є множинами) називаються класами X.

Приклади

1. $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ — це класифікація: $\{\{a, c\}, \{b\}, \{e\}, \{d, f, g\}\}$,

2. $\mathbb{R}$ — це класифікація: $\{\{a\} \mid a \in \mathbb{R}\}$,

3. $\mathbb{C}$ — це інша класифікація: $\{\{a \in \mathbb{C} \mid |a| = r\} : r \in \mathbb{R}_0^+\}$.

Означення 13. *Нехай $\sim$ відношення еквівалентності на непорожній множині X класом еквівалентності з представником $x \in X$ називається множина $[x] = \{y : y \in X,\ y \sim x\}$.*

Нехай $\sim$ відношення еквівалентності на непорожній множині X, $x,\ y \in X$.

- $x \in [x]$;
- $[x] \neq [y] \Rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$;
- $[x] = [y] \Leftrightarrow x \sim y$.

Теорема 4. *У випадку відношення еквівалентності $\sim$ на непорожній множині X, множина класів еквівалентності $\{[x] : x \in X\}$ є класифікацією X. Позначимо цю класифікацію як $X/\sim$.*

3 Halmaz elemeinek osztályozása

Definíció 12. *Egy (nemüres) X halmaz részhalmazainak egy Ω rendszerét az X halmaz elemeinek osztályozása nevezzük, ha*

1. *Ω nemüres halmazokból áll ,*
2. *Ω páronként diszjunkt halmazrendszer és*
3. *$\cup\Omega = X$.*

Ekkor az Ω elemeit (melyek maguk is halmazok) az X osztályainak nevezzük.

Példák

1. $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ egy osztályozása: $\{\{a, c\}, \{b\}, \{e\}, \{d, f, g\}\}$,
2. $\mathbb{R}$ egy osztályozása: $\{\{a\} \mid a \in \mathbb{R}\}$,
3. $\mathbb{C}$ egy másik osztályozása: $\{\{a \in \mathbb{C} \mid |a| = r\} : r \in \mathbb{R}_0^+\}$.

Definíció 13. *Legyen $\sim$ egy ekvivalenciareláció egy nem üres X halmazon, egy ekvivalenciaosztály egy $x \in X$ reprezentánssal, amelyet $[x] = \{y : y \in X,\ y \sim x\}$. halmaznak nevezünk.*

Legyen $\sim$ egy ekvivalenciareláció egy nem üres X halmazon, $x,\ y \in X$.

- $x \in [x]$;
- $[x] \neq [y] \Rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$;
- $[x] = [y] \Leftrightarrow x \sim y$.

Tétel 4. *Egy nemüres X halmazon értelmezett $\sim$ ekvivalenciareláció esetén az ekvivalenciaosztályok halmaza $\{[x] : x \in X\}$ az X egy osztályozása. Ezt az osztályozást $X/\sim$-mal jelöljük.*

4 Частковий порядок та порядок

4.1 Визначення часткого порядку та порядку

Означення 14. *1. Рефлексивне, транзитивне та антисиметричне відношення на множині X називається частковим упорядкуванням. (Позначення: $\leq$, $\preceq$, . . .)*

2. Якщо $\preceq$ є частковим упорядкуванням на X , то пара $(X, \preceq)$ називається частково упорядкованою множиною.

3. Якщо для будь-якого x , $y \in X$, $x \preceq y$ або $y \preceq x$ виконується, то x та y є порівнянними. (Якщо кожна пара елементів порівняння, то відношення є дихотомічним.)

4. Якщо частковий порядок на множині X є дихотомічним (тобто якщо будь-які два елементи порівнянні), то він називається порядком.

Приклади.

На R відношення $\leq$ є порядком: x , $y \in X$ є $x \leq y$ або $y \leq x$.

На N відношення $|$ (дільник) є частковим порядком, але не порядком: $4 \not| 5$, $5 \not| 4$.

Відношення $\subset$ є частковим упорядкуванням на множині $X = P(\{a, b, c\})$ підмножин множини $\{a, b, c\}$, але воно не є упорядкуванням: $\{a\} \not\subset \{b, c\}$, $\{b, c\} \not\subset \{a\}$.

4.2 Діаграма Хассе часткого порядку

Означення 15. *Нехай $(X, \preceq)$ — частково впорядкована множина. Якщо для деякої x, $y \in X$ $x \preceq y$, але немає $z \in X$, для якого $x \preceq z \preceq y$, то ми кажемо, що x безпосередньо передує y.*

4 Részbenrendezés és rendezés

4.1 Részbenrendezést és rendezést definíciója

Definíció 14. 1. *Az X halmazon értelmezett reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus relációt részbenrendezésnek nevezzük. (Jele: $\leq$, $\preceq$, ...)*

2. *Ha $\preceq$ egy részbenrendezés X -en, akkor az $(X, \preceq)$ párt részbenrendezett halmaznak nevezzük.*

3. *Ha valemely x , $y \in X$ -re $x \preceq y$ vagy $y \preceq x$ teljesül, akkor x és y összehasonlítható . (Ha minden elempár összehasonlítható, akkor a reláció dichotóm.)*

4. *Ha az X halmazon értelmezett részbenrendezés dichotóm (azaz, ha bármely két elem összehasonlítható), akkor rendezésnek nevezzük.*

Példák.

R-en a $\leq$ reláció rendezés: x , $y \in X$ -re $x \leq y$ vagy $y \leq x$.

N -en az $|$ (osztója) reláció részbenrendezés, de nem rendezés: $4 \not| 5$, $5 \not| 4$.

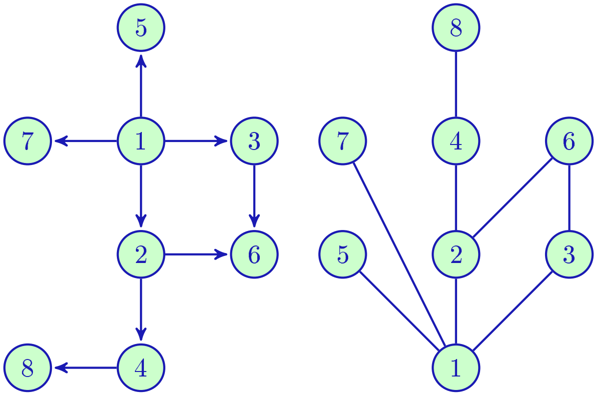
A $\subset$ reláció részbenrendezés az $\{a, b, c\}$ hatványhalmazán, $X = P(\{a, b, c\})$ -n, de nem rendezés: $\{a\} \not\subset \{b, c\}$, $\{b, c\} \not\subset \{a\}$.

4.2 Részbenrendezések Hasse-diagramja

Definíció 15. *Legyen $(X, \preceq)$ egy részbenrendezett halmaz. Ha valamely x, $y \in X$-re $x \preceq y$, de nem létezik olyan $z \in X$, amelyre $x \preceq z \preceq y$, akkor azt mondjuk, hogy x közvetlenül megelőzi y-t.*

Якщо ми зобразимо елементи частково впорядкованої множини точками та намалюємо орієнтоване ребро лише для тих пар x, y, для яких x безпосередньо передує y, то отримаємо діаграму Хассе частково впорядкованої множини. Іноді замість орієнтованих ребер ми малюємо неорієнтоване ребро, а менший елемент розміщуємо нижче.

Приклад: Нехай $X = \{1, 2, \dots, 8\}$ з подільністю:



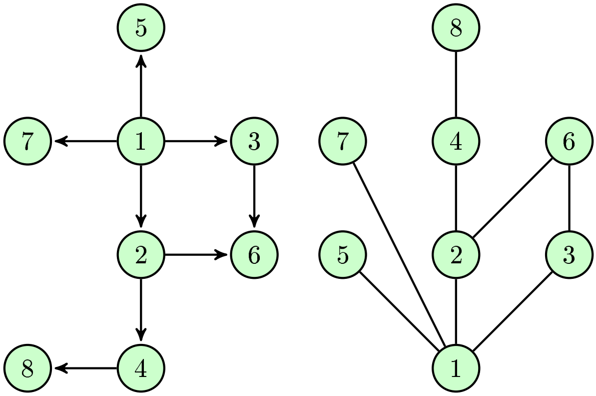
На множині $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, для часткового впорядкування $|$ зображено діаграми Хассе, де ми малюємо орієнтоване ребро лише для тих пар x, y, для яких x безпосередньо передує y.

4.3 Найменший, найбільший, мінімальний, максимальний елемент

Означення 16. *Кажуть, що частково впорядкована множина $(X, \preceq)$ має найменший елемент: $x \in X$, якщо $\forall y \in X,\ x \preceq y$; має найбільший елемент: $x \in X$, якщо $\forall y \in X,\ y \preceq x$; має мінімальний елемент: $x \in X$, якщо $\nexists y \in X,\ x \neq y,\ y \preceq x$; має максимальний елемент: $x \in X$, якщо $\nexists y \in X,\ x \neq y,\ x \preceq y$.*

Ha egy részbenrendezett halmaz elemeit pontokkal ábrázoljuk, és csak azon x, y párok esetén rajzolunk irányított élt, amelyre x közvetlenül megelőzi y-t, akkor a részbenrendezett halmaz Hasse-diagramját kapjuk. Néha irányított élek helyett irányítatlan élt rajzolunk, és a kisebb elem kerül lejjebb.

Példa: Legyen $X = \{1, 2, \ldots, 8\}$ az oszthatósággal:



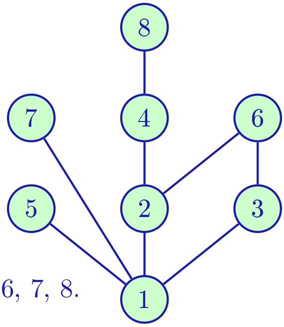
A $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ halmazon a $|$ részbenrendezésnek reláció a grafikon, hova csak azon x, y párok esetén rajzolunk irányított élt, amelyre x közvetlenül megelőzi y-t és a Hasse-diagram alapján.

4.3 Legkisebb, legnagyobb, minimális, maximális elem

Definíció 16. *Az $(X, \preceq)$ részbenrendezett halmaz legkisebb eleme: olyan $x \in X : \forall y \in X,\ x \preceq y$; legnagyobb eleme: olyan $x \in X : \forall y \in X,\ y \preceq x$; minimális eleme: olyan $x \in X : \nexists y \in X,\ x \neq y,\ y \preceq x$; maximális eleme: olyan $x \in X : \nexists y \in X,\ x \neq y,\ x \preceq y$.*

Приклад: Розглянемо ще раз множину $X = \{1, 2, \ldots, 8\}$ з подільністю:

найменший елемент 1,
найбільший елемент,
мінімальний елемент 1,
максимальний елемент 5, 6, 7, 8.



Задача 1. *На множині* $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ *задано відношення часткового порядку* $|$. *Знайдіть найменший, найбільший, мінімальний, максимальний елемент.*

Теорема 5. *Якщо частково порядкована множина містить найбільший (найменший) елемент, то це її єдиний максимальний (мінімальний) елемент.*

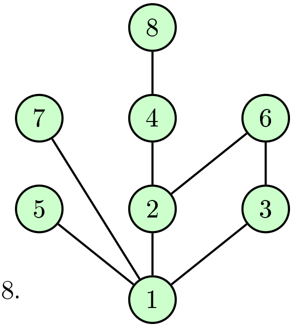
Теорема 6. *Кожна непорожня скінченна частково порядкована множина містить принаймні один мінімальний і принаймні один максимальний елемент.*

Означення 17. *Нехай* $(X, \preceq)$ *— частково впорядкована множина.*

1. *Множина* $A \subset X$ *називається обмеженою зверху, якщо* $\exists x \in X$ *таке, що* $a \in A$ *тоді* $a \preceq x$, *і тоді елемент* a *називається верхньою межею множини* A.
2. *Множина* $A \subset X$ *називається обмеженою знизу, якщо* $\exists x \in X$ *таке, що* $\forall a \in A$ *тоді* $x \preceq a$, *і тоді елемент* x *називається нижньою межею множини* A.
3. *Множина* $A \subset X$ *називається обмеженою, якщо вона обмежена як знизу, так і зверху.*

Példa: Legyen $X = \{1, 2, \ldots, 8\}$ az oszthatósággal:

legkisebb elem: 1,
legnagyobb elem: nincs,
minimális elem: 1,
maximális elemek: 5, 6, 7, 8.



Feladat 1. *A $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ halmazon a $|$ részbenrendezésnek reláció. Keresd ki legkisebb, legnagyobb, minimális, maximális.*

Tétel 5. *Ha egy részbenrendezett halmaz tartalmazza a legnagyobb (legkisebb) elem, ez az egyetlen maximális (minimális) eleme.*

Tétel 6. *Minden nem üres véges részbenrendezett halmaz tartalmaz legalább egy minimális és legalább egy maximális elem.*

Definíció 17. *Legyen $(X, \preceq)$ részbenrendezett halmaz.*

1. *Egy $A \subset X$ halmazt felülről korlátosnak nevezünk, ha $\exists x \in X$ úgy, hogy $a \in A$ esetén $a \preceq x$, és ekkor az a elemet a A halmaz felső korlátjának nevezzük.*

2. *Egy $A \subset X$ halmazt alulról korlátosnak nevezünk, ha $\exists x \in X$ úgy, hogy $\forall a \in A$ esetén $x \preceq a$, és ekkor az x elemet a A halmaz alsó korlátjának nevezzük.*

3. *Egy $A \subset X$ halmazt korlátosnak nevezünk, ha alulról és felülről is korlátos.*

Означення 18. *Нехай $(X, \preceq)$ — частково впорядкована множина.*

1. *Точна верхня межа множини $A \subset X$ — це верхня межа $x \in X$ така, що x менша за будь-яку іншу верхню межу. Її позначення: $x = \sup A$ (точна верхня межа).*

2. *Точна нижня межа множини $A \subset X$ — це нижня межа $x \in X$ така, що X x більша за будь-яку іншу нижню межу. Її позначення: $x = \inf A$ (точна нижня межа).*

$(\mathbb{N}, |)$, $(P(M), \subset)$

Означення 19. *Впорядкована множина називається повною, якщо будь-яка її непорожня обмежена зверху підмножина має точну верхню межу.*

4.4 Строге часткове впорядкування, строге впорядкування

Означення 20. *Транзитивне та нерефлексивне відношення, визначене на множині X, називається строгим впорядкуванням. (Позначення: $<$, $\prec$, $\ldots$) Якщо строге підпорядкування є трихотомічним, то воно називається строгим впорядкуванням.*

Приклади

1. На $\mathbb{R}$ відношення $<$ є строгим порядком: для $\forall x, y \in \mathbb{R}$ виконується рівно одна з наступних трьох умов: $x = y$, $x < y$ та $y < x$.

2. Відношення $\subsetneq$ є строгим частковим упорядкуванням на степеневій множині $\{a, b, c\}$, $X = P(\{a, b, c\})$, але воно не є строгим упорядкуванням: $\{a\} = \{b, c\}$, $\{a\} \subsetneq (\{b, c\}$ та $\{b, c\} \subsetneq (\{a\})$ не виконуються.

Теорема 7. *Якщо скінченна строго впорядкована множина має один максимальний (мінімальний) елемент, це її найбільший (найменший) елемент.*

Definíció 18. *Legyen* $(X, \preceq)$ *részbenrendezett halmaz.*

1. *Egy* $A \subset X$ *halmaz pontos felső korlátja egy olyan* $x \in X$ *felső korlát, amelynél kisebb felső korlátja a* A*-nek nincsen. Jele:* $x = \sup A$ *(szuprémum).*

2. *Egy* $A \subset X$ *halmaz pontos alsó korlátja egy olyan* $x \in X$ *alsó korlát, amelynél nagyobb alsó korlátja a* X*-nek nincsen. Jele:* $x = \inf A$ *(infimum).*

$(\mathbb{N}, |)$, $(P(M), \subset)$

Definíció 19. *Egy rendezett halmazt teljesnek nevezünk, ha bármely nem üres felülről korlátos részhalmazának létezik pontos felső korlátja.*

4.4 Szigorú részbenrendezés, szigorú rendezés

Definíció 20. *Az* X *halmazon értelmezett tranzitív és irreflexív relációt szigorú részbenrendezésnek nevezzük. (Jele:* $<$, $\prec$, $\ldots$*) Ha egy szigorú részbenrendezés trichotóm, akkor szigorú rendezésnek nevezzük.*

Példák

1. $\mathbb{R}$-en a $<$ reláció szigorú rendezés: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ esetén pontosan egyik teljesül a következő három feltételből: $x = y$, $x < y$ és $y < x$.

2. A $\subsetneq$ reláció szigorú részbenrendezés az $\{a, b, c\}$ hatványhalmazán, $X = P(\{a, b, c\})$-n, de nem szigorú rendezés: $\{a\} = \{b, c\}$, $\{a\} \subsetneq (\{b, c\}$ és $\{b, c\} \subsetneq (\{a\}$ közül egyik sem teljesül.

Tétel 7. *Ha egy véges szigorú rendezett halmazban egyetlen maximális (minimális) elem van, ez a legnagyobb (legkisebb) eleme.*

5 Функції

Означення 21. *Відношення $f \subset X \times Y$ називається функціональним відношенням або функцією якщо*

$$\forall x, y_1, y_2 : (x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2.$$

Замість позначення $(x, y) \in f$ (xfy) ми використовуємо позначення $f : x \mapsto y$, $f(x) = y$. y — це значення функції f у точці x (в аргументі).

Приклади

1. $f = \{(x, x^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$ є функцією відношення: $f(x) = x^2$.
2. Обернене відношення $f^{-1} = \{(x^2, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$ не є функцією: $(4, 2)$, $(4, -2) \in f^{-1}$.
3. Нехай F_n буде послідовністю Фібоначчі: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ та $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, якщо $n \geq 2$: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8,... Тоді можна розглядати $F \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ як функціональне відношення, яке у точці n приймає значення $F(n) = F_n$.

Означення 22. *Множина функцій $f \subset X \times Y$ позначається як $X \to Y$, тому ми можемо використовувати позначення $f \in X \to Y$. Якщо $dmn(f) = X$, тоді ми використовуємо позначення $f : X \to Y$ (це позначення дійсне лише тоді, коли $dmn(f) = X$). Примітка: Якщо $f : X \to Y$, тоді $dmn(f) = X$ та $rng(f) \subset Y$.*

Приклад
Нехай $f(x) = \sqrt{x}$. Тоді $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, але не $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$.

Означення 23. *Функція $f : X \to Y$ є оборотною, якщо $f^{-1} : Y \to X$ також є функцією. Тоді f^{-1} називається оберненою функцією до f. Оборотні функції називаються взаємовиключними.*

Теорема 8. *Функція $f : X \to Y$ є оборотною тоді і тільки тоді, коли існує функція $g : Y \to X$, яка задовольняє умови*

$$f \circ g = \mathbb{I}_Y, \quad g \circ f = \mathbb{I}_X.$$

Тоді $g = f^{-1}$.

5 Függvények

Definíció 21. *Egy $f \subset X \times Y$ relációt függvénynek nevezünk, ha*

$$\forall x, y_1, y_2 : (x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2.$$

Az $(x, y) \in f$ (xfy) jelölés helyett ilyenkor az $f : x \mapsto y$, $f(x) = y$ jelölést használjuk. Az y az f függvény x helyen (argumentumban) felvett értéke.

Példak

1. $f = \{(x, x^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$ reláció függvény: $f(x) = x^2$.
2. Az $f^{-1} = \{(x^2, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$ inverz reláció nem függvény: $(4, 2)$, $(4, -2) \in f^{-1}$.
3. Legyen F_n a Fibonacci sorozat: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ és $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, ha $n \geq 2 :$ 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8,... Ekkor az $F \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ reláció függvény, n helyen az értéke $F(n) = F_n$.

Definíció 22. *Az $f \subset X \times Y$ függvények halmazát $X \to Y$ jelöli, így használható az $f \in X \to Y$ jelölés. Ha $dmn(f) = X$, akkor az $f : X \to Y$ jelölést használjuk (ez a jelölés csak akkor használható, ha $dmn(f) = X$). Megjegyzés: Ha $f : X \to Y$, akkor $dmn(f) = X$ és $rng(f) \subset Y$.*

Példa
Legyen $f(x) = \sqrt{x}$. Ekkor $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de nem $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$.

Definíció 23. *Az $f : X \to Y$ függvény invertálható, ha $f^{-1} : Y \to X$ is függvény. Ekkor f^{-1}-et az f inverzfüggvényének nevezzük. Az invertálható függvényeket kölcsönösen egyértelműnek nevezzük.*

Tétel 8. *Az $f : X \to Y$ függvény akkor és csak akkor invertálható, ha van egy $g : Y \to X$ függvény, amely kielégíti a feltételeket*

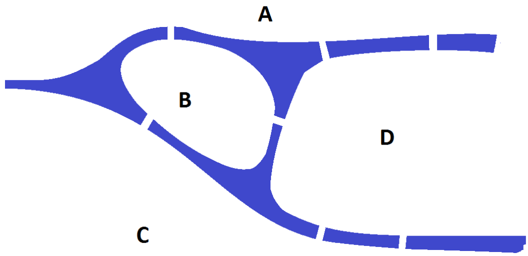
$$f \circ g = \mathbb{I}_Y, \quad g \circ f = \mathbb{I}_X.$$

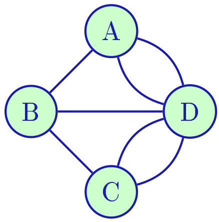
Akkor $g = f^{-1}$.

6 Вступ в теорію графів

Класичним вступним прикладом є задача «Кенігсберзькі мости», розв'язана Ейлером у 1736 році.

Схема міста Кенігсберг показана на рисунку. Задача «Кенігсберзькі мости» стосується можливого переходу через мости річки Прегель. Тут мости представляють з'єднання між ділянками суші, де ми можемо пройти з одного місця в інше, а потім вибрати інший міст.





Приклад 2. *Прикладом є задача про вовка, козу та капусту. Ця задача добре відома: на одному березі річки є вовк (В), коза (К) та качан капусти (к), і лише один з них може поміститися в човен. Поромник повинен перевезти їх на інший берег, не з'ївши іншого.*

Приклад 3. *Приклад трьох криниць. Є три будинки і три криниці. Вам потрібно прокласти дороги від кожного будинку до кожної криниці так, щоб дороги не перетиналися.*

$$\{1,2,2,3,3,3\} = \{1,2,3\}\text{множина}$$

$$\{3,4,5\} = \{4,5,3\}\text{множина}$$

$$(3,4,5) \neq (4,5,3)\text{впорядкована множина}$$

Невпорядкована система об'єктів, де можливі їх повторення називається мультимножиною. Під час запису елементи мультимножини записуються в кутових дужках.

Приклад мультимножини $\langle 1,2,2,3,3,3\rangle$.

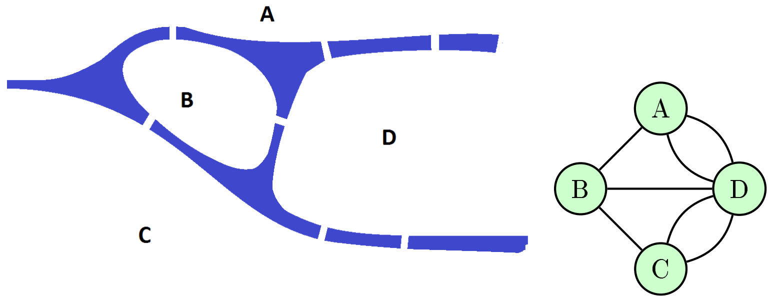
$$\langle 1,2,2,3,3,3\rangle \neq \langle 1,2,3\rangle\text{мультимножина}$$

$$\langle 1,2,2,3,3,3\rangle = \langle 1,2,3,2,3,3\rangle\text{мультимножина}$$

6 Gráfok. Bevezetés

Klasszikus bevezető példa a Königsbergi hidak problémája, melyet Euler oldott meg 1736-ban.

Königsberg városának sémája az ábrán. A Königsbergi hidak problémája egy lehetséges sétát kérdez a Pregel folyó hídjain keresztül. Itt a hidak jelentik a kapcsolatokat a szárazföldek között, ahol átsétálhatunk egyik helyről a másikra, majd egy újabb hidat választhatunk.



Példa 2. *Példa a Farkas-Kecske-Káposzta probléma. A feladat közismert: a folyó egyik partján áll egy Farkas (F), Kecske (K) és egy fej káposzta (k), a csónakba közülük csak egy fér be. Úgy kell a révésznek átvinnie őket a túlsó partra, hogy egyik se egye meg a másikat.*

Példa 3. *Példa három kútra. Három ház és három kút van. Kell kövezzen ki utakat minden háztól minden kútig, hogy az utak ne keresztezzék egymást.*

$$\{1,2,2,3,3,3\} = \{1,2,3\} \text{ halmaz}$$

$$\{3,4,5\} = \{4,5,3\} \text{ halmaz}$$

$$(3,4,5) \neq (4,5,3) \text{ rendezett halmaz}$$

A multihalmaz objektumok rendezetlen rendszere, esetleg abból ismétlések. Íráskor a többhalmazos elemeket háromszögletes zárójelben írjuk.

Példa multihalmazra: $\langle 1,2,2,3,3,3 \rangle$.

$$\langle 1,2,2,3,3,3 \rangle \neq \langle 1,2,3 \rangle \text{ multihalmaz}$$

$$\langle 1,2,2,3,3,3 \rangle = \langle 1,2,3,2,3,3 \rangle \text{ multihalmaz}$$

Означення 24. *Будь-яка непорожня множина $V \neq \emptyset$ та мультимножина E, яка містить елементи, які є або двоелементними мультимножинами $\langle x, y \rangle$, або впорядкованими парами (x, y), де $x, y \in V$. Алгебраїчна структура*

$$G = (V; E)$$

називається графом. Елементи V називаються вершинами або точками, тоді як елементи E називаються ребрами.

Існує три типи ребер:

1. *$\langle x, y \rangle$ є ланка або невпорядковане ребро. Множина ланок позначається $\overline{E}$.*

2. *(x, y) дуга або впорядковане ребро. Множина дуг позначається $\vec{E}$.*

3. *$\langle x, x \rangle$ або (x, x) петля — це ребро, у якого початок і кінець збігається.*

$$\langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow (x, x) = (y, y)$$

Тоді далі ми розглядаємо лише (x, x) впорядковані петлі та $E = \overline{E} \cup \vec{E}$.

Далі ми припускаємо, що кожен граф має скінченні V та E. Кількість вершин графа називається його порядком.

В разі існування ребра (x, y), (y, x) або $\langle x, y \rangle$, яке з'єднує вершини x та y, ми кажемо, що вершини x та y суміжні та інцидентними самому ребру.

Означення 25. *Для $e = \langle x; y \rangle \in E$ $(x; y \in V)$ ми кажемо, що x та y (вершини) з'єднані ребром e, або суміжними , або збігаються з e, або e збігаються з x; y.*

- Кількість ланок, що виходять з верши v позначається як $\overline{\deg} v$.

- Кількість дуг, що входять у вершину v, позначається як $\deg^+ v$.

- Кількість дуг, що починаються з вершини v, позначається як $\deg^- v$.

- Значення $\deg v$, яке обчислюється за формулою

  $$\deg v = \overline{\deg} v + \deg^+ v + \deg^- v$$

  , називається степенем вершини v.

Definíció 24. *Tetszőleges $V \neq \emptyset$ nemüres halmaz és E multihalmaz olyan elemek többhalmaza, amelyek kételem multihalmazok $\langle x, y\rangle$ vagy rendezett párok (x, y) ahol $x, y \in V$ esetén a*

$$G = (V; E)$$

algebrai struktúrát gráfnak nevezzük. V elemeit csúcs oknak vagy pontoknak míg E elemeit éleknek nevezzük.

Háromféle él létezik:

1. *$\langle x, y\rangle$ linkek vagy rendezetlen élek. A linkek készlete meg van jelölve $\overline{E}$.*

2. *(x, y) ívek vagy rendezett élek. A ívek készlete meg van jelölve $\vec{E}$.*

3. *$\langle x, x\rangle$ vagy (x, x) hurkok az a forma élek, melynek eleje és vége egybeesik.*

$$\langle x, x\rangle = \langle y, y\rangle \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow (x, x) = (y, y)$$

Akkor következőkben csak (x, x) rendezett hurkok tekintünk és $E = \overline{E} \cup \vec{E}$.

A következőkben feltételezzük, hogy minden gráf véges V és E. A gráf csúcsainak számát a sorrendjének nevezzük.

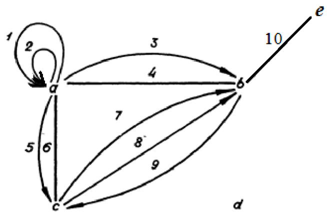
Azt mondják, hogy ebben az esetben az (x, y), (y, x) vagy $\langle x, y\rangle$ éle köti össze az x és y csúcsokat az x és y csúcsokat szomszédos és beeső éleknek nevezzük.

Definíció 25. *$e = \langle x; y\rangle \in E$ $(x; y \in V)$ esetén azt mondjuk, hogy x és y (csúcsok) az e éllel össze vannak kötve, vagy szomszédosak vagy illeszkednek e-re, vagy e illeszkedik x; y-ra.*

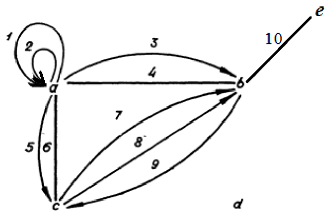
- A v csúcshoz tartozó hivatkozások számát jelöljük $\overline{\deg} v$.
- A v csúcsba belépő ívek számát $\deg^+ v$ jelöli.
- A v csúcsból kiinduló ívek számát $\deg^- v$ jelöli.
- A $\deg v$ értéke, amelyet a

$$\deg v = \overline{\deg} v + \deg^+ v + \deg^- v$$

képlet számít ki, a v csúcs fokszámát nevezzük.



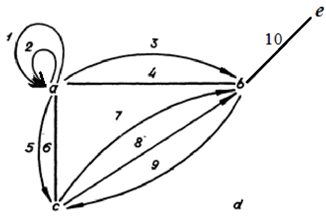
Обчисліть степінь вершин графа, діаграма якого зображена на рисунку.



Számítsd ki a gráf a csúcsának fokszámát, melynek diagramja az ábrán látható!

7 Властивості графів

7.1 Теорема про рукостискання



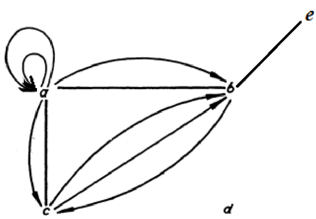
Обчислимо степінь вершини a графа, діаграма якого зображена на рисунку!

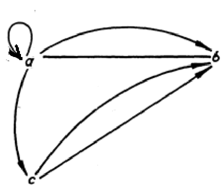
$$\deg(a) = \overline{\deg}(a) + \deg^{+}(a) + \deg^{-}(a) = 2 + 2 + 4 = 8.$$

Означення 26. *Будь-яка вершина графа G є ізольованою, якщо її степінь дорівнює 0; тобто на неї (з неї) не заходить жодне ребро.*

Означення 27. *Будь-яка вершина графа G називається підвішеною, якщо її степінь дорівнює 1; тобто до неї приєднано лише одне ребро.*

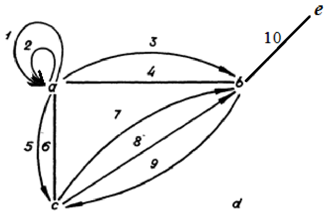
Означення 28. *Нехай $G = (V, E)$ — довільний граф. Тоді граф $H = (W, F)$ є підграфом G, якщо $W \subset V$ і $F \subset E$.*





7 Grafikon tulajdonságai

7.1 Kézfogási tétel



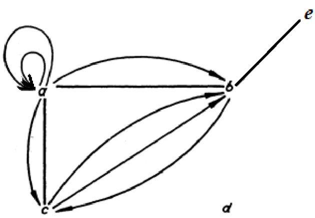
Számítsd ki a gráf a csúcsának fokszámát, melynek diagramja az ábrán látható!

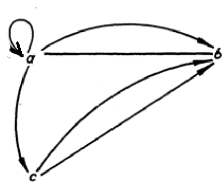
$$\deg(a) = \overline{\deg}(a) + \deg^{+}(a) + \deg^{-}(a) = 2 + 2 + 4 = 8.$$

Definíció 26. *A tetszőeges G gráf egy csúcsa izolált, ha fokszáma* 0*; vagyis él nem illeszkedik rá.*

Definíció 27. *A tetszőeges G gráf egy csúcsa függőt, ha fokszáma* 1*; vagyis csak egy él illeszkedik rá.*

Definíció 28. *Legyen $G = (V, E)$ tetszőleges gráf. Ekkor a $H = (W, F)$ gráf részgráfja G-nek, ha $W \subset V$ és $F \subset E$,*





Теорема 9 (Теорема про рукостискання). *У будь-якому графі $G = (V, E)$ сеve степінів вершин дорівнює подвоєній кількості ребер:*

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|.$$

$$\sum_{v \in V} \deg^{+}(v) + \sum_{v \in V} \deg^{-}(v) = 2 \cdot |\vec{E}|.$$

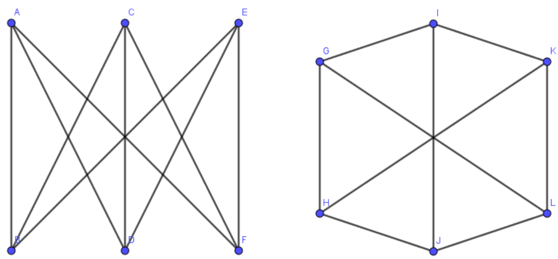
7.2 Ізоморфізми графів

Ізоморфізм графів — це бієкція множин вершин графів, яка зберігає суміжність вершин.

Це означає, що $G_1 = (V_1, E_1)$ та $G_2 = (V_2, E_2)$ є ізоморфними, якщо існує бієкція (оберотна функція) $f : V_1 \to V_2$ що задовольняє умови:

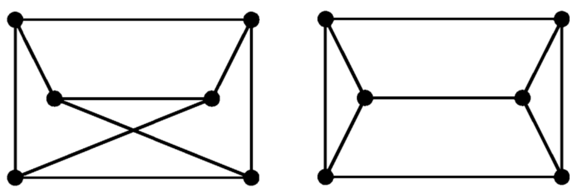
$$\langle a, b \rangle \in E_1 \Leftrightarrow \langle f(a), f(b) \rangle \in E_2, \quad (a, b) \in E_1 \Leftrightarrow (f(a), f(b)) \in E_2,$$

для любих $a, b \in V_1$.



Ці два графи є ізоморфні.

Слід зазначити, що кількість вершин, кількість ребер та степені вершин не однозначно визначають граф.



Ці два графи не є ізоморфними.

Tétel 9 (Kézfogási tétel). *Tetszőleges $G = (V, E)$ gráfban a csúcsok fokszámainak összege az élek számának kétszerese:*

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|.$$

$$\sum_{v \in V} \deg^{+}(v) + \sum_{v \in V} \deg^{-}(v) = 2 \cdot |\vec{E}|.$$

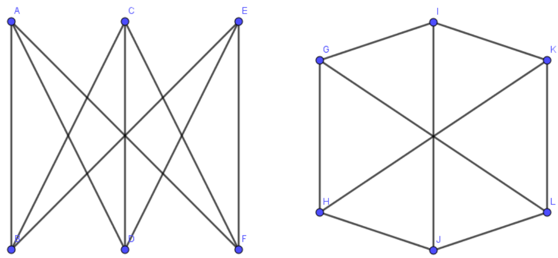
7.2 Gráfok izomorfizmusa

A gráfok izomorfizmusa az gráfok csúcshalmazainak bijekciója, amely megőrzi a csúcsok szomszédságát.

Ez számít $G_1 = (V_1, E_1)$ és $G_2 = (V_2, E_2)$ izomorf, ha van bijekció (inverz függvény) $f : V_1 \to V_2$ kielégíti feltételek:

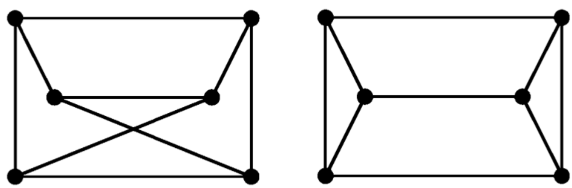
$$\langle a, b \rangle \in E_1 \Leftrightarrow \langle f(a), f(b) \rangle \in E_2, \quad (a, b) \in E_1 \Leftrightarrow (f(a), f(b)) \in E_2,$$

bármilyen $a, b \in V_1$.



Ez két gráf izomorf.

Meg kell jegyezni, hogy a csúcsok száma, élei száma és a csúcsok fok számok nem egyértelműen definiálja a gráfot.



Ez két gráf nem izomorf.

7.3 Матриці графів

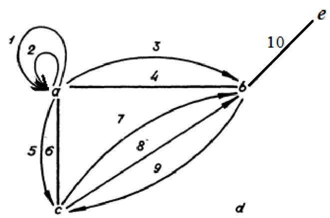
Нехай $G = (V, E)$ — довільний граф, а заданий список його вершин і ребер — $V = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ та $E = (e_1, e_2, \ldots, e_m)$. Тоді матриця інцидентності графа — це $n \times m$-матриця $A = (a_{ij})$, де $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & v_i \notin e_j, \\ -1 & \text{ha } e_j \text{ nem hurokél és kezdőpontja } v_i, \\ 1 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Нехай $G = (V, E)$ — довільний граф, а $V = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ — заданий список його вершин та ребер. Тоді матриця суміжності графа — це $n \times n$-матриця $B = (b_{ij})$, де $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$

$$a_{ij} = \alpha \overline{a}_{ij} + \beta \vec{a}_{ij},$$

де $\overline{a}_{ij}$ — кількість ребер між v_i та v_j, $\vec{a}_{ij}$ — кількість дуг, що починаються з вершини v_i та входять у вершину v_j.



Задача 2. *Знайти матрицю інциндентності та матрицю суміжності поданого графа.*

7.3 Gráf mátrixok.

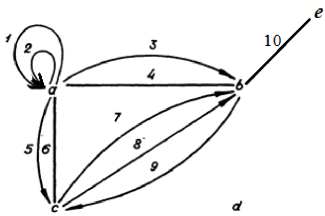
Legyen $G = (V, E)$ tetszőleges gráf, csúcsainak és éleinek egy adott felsorolása legyen $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ és $E = (e_1, e_2, \dots, e_m)$. Ekkor gráf incidencia mátrix a $n \times m$-mátrix $A = (a_{ij})$ aho $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ esetén

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & v_i \notin e_j, \\ -1 & \text{ha } e_j \text{ nem hurokél és kezdőpontja } v_i, \\ 1 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Legyen $G = (V, E)$ tetszőleges gráf, csúcsainak és éleinek egy adott felsorolása legyen $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. Ekkor gráf szomszédsági mátrix a $n \times n$-mátrix $B = (b_{ij})$ aho $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ esetén

$$a_{ij} = \alpha \overline{a}_{ij} + \beta \vec{a}_{ij},$$

hal $\overline{a}_{ij}$ a élek v_i és v_j között számát, $\vec{a}_{ij}$ a v_i csúcsból kiinduló is v_j csúcsba belépő ívek számát.



Feladat 2. *Határozza meg az adott gráf incidenciamátrixát és szomszédsági mátrixát.*

8 Шляхи

8.1 Типи графів

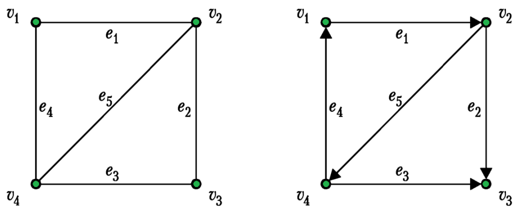
У наступному підрозділі ми представимо деякі важливі типи графів $G = (V, E)$, які можуть не лише допомогти краще зрозуміти теорію на практиці, але й є важливими з теоретичної та практичної точки зору.

- Порожній граф ($V = \emptyset$).
- Неорієнтований граф (кожне ребро є ланкою, тобто $E = \overline{E}$).
- Звичайний граф (неорієнтований, без повторення ребер).
- Орієнтований граф (кожне ребро є дугою, тобто $E = \vec{E}$).

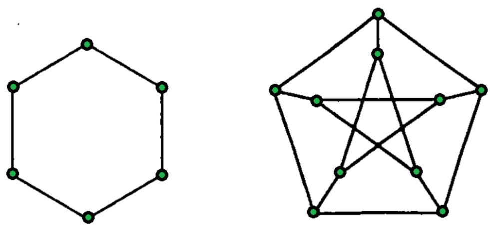
Означення 29. *Неорієнтований граф $G' = (V, E')$ називається відповідним до орієнтованого графа $G = (V, E)$, якщо*

$$E' = \langle\langle a, b\rangle | (a, b) \in E\rangle$$

.



Означення 30. *Довільний граф називається регулярним, якщо всі його вершини мають однаковий степінь. Якщо цей спільний степінь є натуральним числом $k \in \mathbb{N}$, то граф називається k-регулярним графом.*



8 Utak

8.1 Nevezetes gráfok

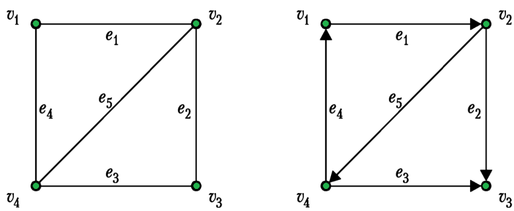
A most következő alfejezetben néhány nevezetes gráfot $G = (V, E)$ ismertetünk, melyek nem csak gyakorlás formájában segíthetik az elmélet jobb megértését, hanem elméleti és gyakorlati szempontból is fontosak.

- Üres gráf ($V = \emptyset$).
- Irányítatlan gráf (minden él link, azaz $E = \overline{E}$).
- Közönséges gráf (iránytalan, több él nélkül).
- Irányított gráf (minden él ív, azaz $E = \vec{E}$).

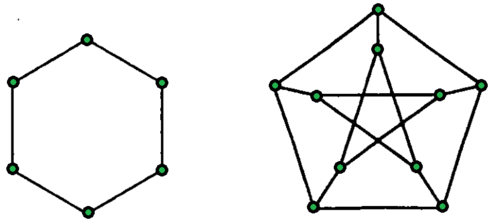
Definíció 29. *Irányítatlan gráf $G' = (V, E')$ az irányított gráf $G = (V, E)$ megfelelőnek nevezzük oszlop*

$$E' = \langle\langle a, b\rangle | (a, b) \in E\rangle$$

.

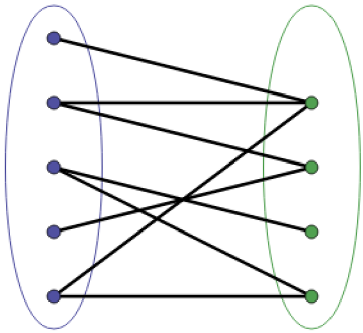


Definíció 30. *Egy tetszőleges gráf reguláris, ha minden csúcsának fokszáma ugyanannyi. Ha ez a közös fokszám a $k \in \mathbb{N}$ természetes szám, akkor a gráfot k-reguláris gráfnak hívjuk.*



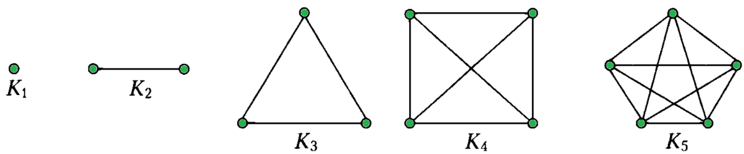
Приклад 4. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ — будь-яке натуральне число. n-вимірний куб — це звичайний граф, вершинами якого є n-вимірні логічні вектори, вершини u та v є суміжними тоді і тільки тоді, коли вони відрізняються рівно однією координатою.*

- Мультиграф (дозволено повторення ребер).
- Граф $G = (V, E)$ називається дводольним графом, якщо множину вершин V можна розбити на дві непорожні неперетинаючіся частини (полоси) так, що ребра можуть простягатися лише між вершинами різних полос, тобто $V = A \cup B$; $A \cap B = \emptyset$ $A, B \neq \emptyset$ та кожне ребро $\langle a, b \rangle$ лежить між $a \in A$, $b \in B$.
- Граф Кеніга — це звичайний дводольний граф.



- Повний граф — це граф, який містить усі ребра заданого типу графа:

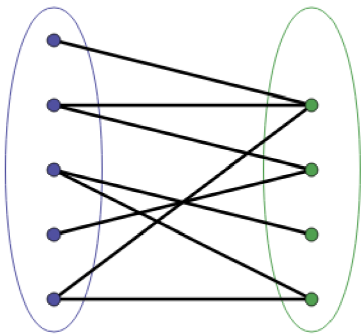
Означення 31. *Для будь-якого натурального числа $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, K_n n-вершинний повний звичайний граф має такий вигляд: $K_n = (V, E)$, де $|V| = n$ та $E = \langle \langle a, b \rangle | a, b \in V, \ a \neq b \rangle$; тобто, між n вершинами проведено всі можливі (непетлеві) ланки.*



$$K_n = (V, E) \Rightarrow |E| = C_n^2.$$

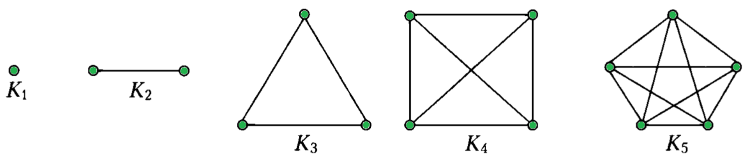
Példa 4. *Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ tetszőleges természetes szám. Az n-dimenziós kocka egy közönséges gráf, amelynek csúcsai n-dimenziós logikaiak vektorok, u és v csúcsok akkor és csak akkor szomszédosak pontosan egy koordinátában különböznek.*

- Multigráf (több él megengedett).
- G = (V,E) gráfot kétpólusú gráfnak nevezzük, ha V csúcshalmaza felbontható két nemüres részre (pólusok) úgy, hogy élek csak különböző pólusok között húzódhatnak, azaz $V = A \cup B$; $A \cap B = \emptyset$ $A, B \neq \emptyset$ és minden él $\langle a, b \rangle$ hal $a \in A$, $b \in B$.
- Koenig gráf az egy közönséges kétpólusú gráf.



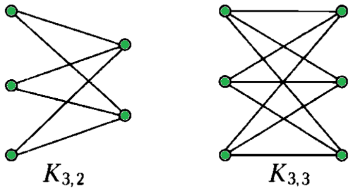
- Teljes gráf az egy gráf, amely tartalmazza az adott típusú gráfok összes élét:

Definíció 31. *Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ természetes szám esetén K_n az n-csúcsú teljes közönséges gráf a következő: $K_n = (V, E)$ ahol $|V| = n$ és $E = \langle \langle a, b \rangle | a, b \in V,\ a \neq b \rangle$; azaz az összes lehetséges (egyszeres és nem hurok) élt behúztuk az n csúcs között.*



$$K_n = (V, E) \Rightarrow |E| = C_n^2.$$

Означення 32. *Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq 1$ — будь-які два натуральні числа. Повний двополосний граф, що позначається K_{mn}, — це простий двополосний граф, у якому розміри полос $|A| = m$ та $|B| = n$; а E містить усі можливі ребра, тобто $E = \langle\langle a, b\rangle | a \in A,\ b \in B,\ a \neq b\rangle$.*



$$K_{mn} = (V, E) \Rightarrow |E| = nm.$$

Означення 33. *Нехай $G = (V, E)$ — довільний звичайний граф. Послідовність точок $P = (c_0; \ldots; c_k)$, $c_i \in V$ — це k-довжина шлях в G, якщо $\langle c_i; c_{i+1}\rangle \in E$ для всіх $0 \leq i < k$. Шлях P має початкову точку c_0, кінцеву точку c_k; тобто, шлях P з'єднує точки c_0 та c_k.*

Колом графа C є кожен шлях, початкова та кінцева точки якого однакові: $c_k = c_0$.

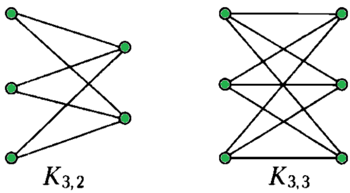
Означення 34. *Нехай $G = (V, E)$ — довільний регулярний граф. Довжина шляху (або кола) $P = (c_0, \ldots, c_k)$, $c_i \in V$ — це кількість (доторканих) ребер у ньому:*

$$l(P) = k.$$

Якщо ребра G зважені функцією $w : E \to \mathbb{R}$, тоді загальна вага шляху $P = (c_0, \ldots, c_k)$, $c_i \in V$ — це загальна вага (доторканих) ребер у ньому:

$$w(P) = \sum_{e \in P} w(e) = \sum_{i=0}^{k-1} w(\langle c_i, c_{i+1}\rangle).$$

Definíció 32. *Legyen $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq 1$ tetszőleges természetes két szám. A teljes kétpólusú gráf, jele K_{mn}, egy olyan kétpólusú egyszerű gráf, amelyben a pólusok méretei $|A| = m$ és $|B| = n$; és E az összes lehetséges élt tartalmazza, vagyis $E = \langle\langle a, b\rangle | a \in A,\ b \in B,\ a \neq b\rangle$.*



$$K_{mn} = (V, E) \Rightarrow |E| = nm.$$

Definíció 33. *Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges közönséges gráf. A $P = (c_0; \ldots; c_k)$, $c_i \in V$ pontsorozat k-hosszú út G-ben, ha $\langle c_i; c_{i+1}\rangle \in E$ minden $0 \leq i < k$ esetén. A P út kezdőpontja c_0, végpontja c_k; vagyis a P út a c_0 és c_k pontokat köti össze. A G gráf C köre minden olyan útja, amelynek kezdő és végpontja megegyezik: $c_k = c_0$.*

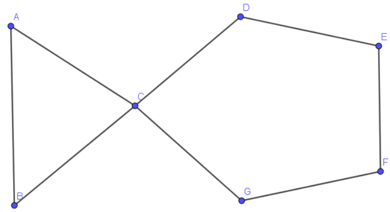
Definíció 34. *Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges közönséges gráf. A $P = (c_0, \ldots, c_k)$, $c_i \in V$ út (vagy kör) hossza a benne szereplő (érintett) élek száma:*

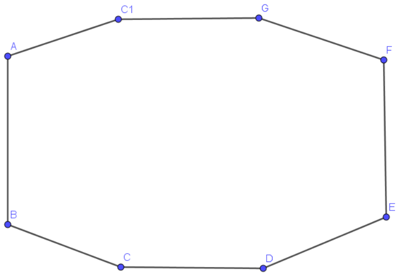
$$l(P) = k.$$

Ha G éleit a $w: E \to \mathbb{R}$ függvény súlyozza, akkor egy $P = (c_0, \ldots, c_k)$, $c_i \in V$ út összsúlya a benne szereplő (érintett) élek összsúlya:

$$w(P) = \sum_{e \in P} w(e) = \sum_{i=0}^{k-1} w(\langle c_i, c_{i+1}\rangle).$$

Означення 35. *Шлях (коло) графа $G = (V, E)$ $P = (c_0, \ldots, c_k)$, $c_i \in V$ називається простим шляхом (або коллом), якщо немає повторень вершин, окрім, можливо, c_0 та c_k.*



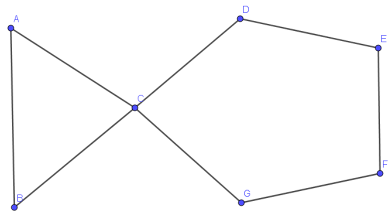


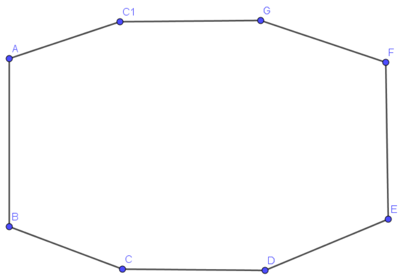
Теорема 10. *Якщо граф $G = (V, E)$ має шлях (коло) з повторенням вершин $P = (c_0, \ldots, c_k)$ $c_i \in V$, то він також має простий шлях (коло).*

Теорема 11. *Довільне коло непарної довжини містить просте коло непарної довжини.*

Теорема 12 (Кеніга)**.** *Звичайний граф є двополосним тоді і тільки тоді, коли немає кіл непарної довжини.*

Definíció 35. *A $G = (V, E)$ gráf $P = (c_0, \dots, c_k)$, $c_i \in V$ útja (köre) egyszerű út (vagy kör), ha nincs élismétlődés, kivéve talán c_0 és c_k.*





Tétel 10. *Ha egy $G = (V, E)$ gráf $P = (c_0, \dots, c_k)$ $c_i \in V$ útjában (körében) van élismétlődés akkor van egyszerű is.*

Tétel 11. *Egy tetszőleges páratlan hosszúságú kör egy tartalmaz egyszerű páratlan hosszúságú kör.*

Tétel 12 (Koenig)**.** *Egy közönséges gráf kétpólusú van akkor és csak akkor nincsenek páratlan hosszúságú egyszerű kör.*

9 Компоненти графа

Нехай $G = (V, E)$ — довільний звичайний граф. Якщо існує шлях $P = (c_0; \ldots; c_k)$ з початковую точку c_0, кінцевою точку c_k, то точки c_0 та c_k називають зв'язаними.

Теорема 13. *Відношення зв'язності на множині вершин є відношенням еквівалентності.*

Означення 36. *Довільний неорієнтований граф $G = (V, E)$ називається зв'язним, якщо будь-які дві вершини $v_1, v_2 \in V$ з'єднані між собою.*

Означення 37. *Нехай $G = (V, E)$ — довільний граф. Компонентами графа називають його максимальні зв'язні підграфи.*

Кількість компонент позначають $\kappa(G)$.

Міст — це ребро графа, видалення якого збільшує кількість компонент. Усі інші ребра називають циклічними.

9.1 Метричні параметри графа

Означення 38. *У неорієнтованому графі відстанню між вершинами u і v називається довжина найкоротшого шляху, що з'єднує ці вершини. Позначається $d(u, v)$.*

Діаметр графа — це максимальна відстань між його вершинами:

$$D(G) = \max\{d(u, v) \mid u, v \in V\}.$$

Означення 39. *Ексцентриситет вершини v — це найбільша відстань від неї до будь-якої іншої вершини:*

$$\varepsilon(v) = \max\{d(u, v) \mid u \in V\}.$$

Радіус графа — це мінімальний ексцентриситет:

$$R(G) = \min\{\varepsilon(v) \mid v \in V\}.$$

Центр графа — множина вершин, ексцентриситет яких дорівнює радіусу:

$$C(G) = \{v \in V \mid \varepsilon(v) = R(G)\}.$$

9 A gráf komponensei

Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges közönséges gráf. Ha létezik egy $P = (c_0; \ldots; c_k)$ útvonal, amelynek kezdőpontja c_0 és végpontja c_k, akkor a c_0 és c_k pontokat összekötöttnek nevezzük.

Tétel 13. *A köti össze reláció egy csúcsok halmazán ekvivalencia reláció van.*

Definíció 36. *Egy tetszőleges $G = (V, E)$ közönséges gráf összefüggő, ha bármely $v_1, v_2 \in V$ csúcsai köti össze van.*

Definíció 37. *Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges gráf. G maximális összefüggő részgráfjait a gráf komponenseinek hívjuk.*

A komponensei számát $\kappa(G)$-val jelöljük.

A híd a gráf éle, amelynek eltávolítása növeli a komponensei számát. Az összes többi borda ciklikus.

9.1 Grafikonok metrikus jellemzői

Definíció 38. *Egy irányítatlan gráf u és v csúcsai közötti távolság a hossza az ezeket a csúcsokat összekötő legrövidebb út hossza. A távolságot jelzi $d(u, v)$.*

Grafikon átmérője a csúcsok közötti maximális távolság van.

$$D(G) = max\{d(u, v) \mid u, v \in V\}.$$

Definíció 39. *A v csúcs excentricitása a legtávolabbi csúcs távolsága:*

$$\varepsilon(v) = max\{d(u, v) \mid u \in V\}.$$

Grafikon sugara — minimális excentricitás:

$$R(G) = min\{\varepsilon(v) \mid v \in V\}.$$

A gráf közepe - a gráf azon csúcsainak halmaza, amelyek minimális excentricitással rendelkeznek:

$$C(G) = \{v \in V \mid \varepsilon(v) = R(G)\}.$$

10 Обхід графа

Нехай $G = (V, E)$ — довільний звичайний граф.

Обхід графа — це систематичний обхід усіх його вершин. Зазвичай задають початкову вершину, з якої починають.

Алгоритм обходу вершин графа:

Припустимо, що спочатку всі вершини не відмічені.

1. Додаємо початкову вершину a у список L.

while $L \neq \emptyset$ {

видаляємо першу вершину v зі списку L;

позначаємо вершину v як відвідану;

додаємо в L усі невідвідані вершини, суміжні з v;

}

Якщо нові вершини додаються на початок списку, то обхід називається пошуком у глибину.

Якщо нові вершини додаються в кінець списку, то обхід називається пошуком у ширину.

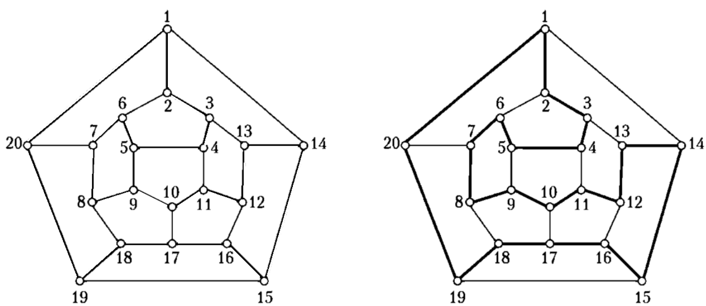
10.1 Гамільтонові цикли та шляхи

Задача: (Задача китайського листоноші): Дано зважений граф G із функцією ваг $w : E \to \mathbb{R}^+$. Знайти маршрут $C \in G$, який проходить через усі вершини графа (принаймні один раз) і для якого

$$w(C) = \sum_{e \in C} w(e)$$

мінімальний.

Означення 40. *Шлях (або цикл) у графі G, що проходить через усі його вершини рівно один раз, називається гамільтоновим шляхом або гамільтоновим циклом відповідно.*



10 A gráf bejárása

Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges közönséges gráf.

A gráf bejárása a gráf csúcsainak szisztematikus listája. A legtöbb esetben jelzi azt a kezdőcsúcsot, ahonnan a kitérőt meg kell kezdeni.

Graph vertex bejárási algoritmus:

Feltételezzük, hogy az elején nincs minden csúcs megjelölve.

1. Beírjuk a kezdő csúcsot az L listába.

while $L \neq \emptyset$ {

távolítsa el az első v csúcsot az L listából;

a v csúcsot látogatottnak jelöljük;

adjunk hozzá L-hez minden nem látogatott csúcsot, amely a v-ből elérhető;

}

Ha a bejárási algoritmusban új csúcsok kerülnek a lista elejére, akkor az ilyen bejárást mélységi keresésnek nevezzük.

Ha a bejárási algoritmusban új csúcsok kerülnek a lista végére, akkor az ilyen bejárást szélesség keresésnek nevezik.

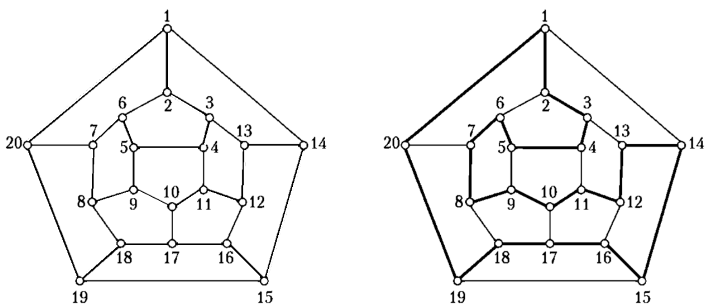
10.1 Hamilton körök és utak

Probléma: (A Kínai postás problémája): Adott egy G súlyozott élű gráf $w : E \to \mathbb{R}^+$ pozitív súlyfüggvénnyel. Keresendő olyan $C \in G$ út/kör, amely G minden pontját (legalább egyszer) tartalmazza és

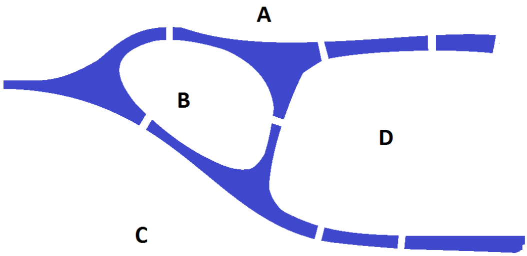
$$w(C) = \sum_{e \text{ link } C\text{-ben}} w(e)$$

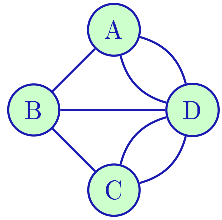
minimális.

Definíció 40. *Egy tetszőleges G gráf minden pontját pontosan egyszer tartalmazó útját/körét Hamilton út-nak ill. Hamilton kör-nek nevezzük.*



11 Кола та шляхи Ейлера





Означення 41. *Нехай $G = (V, E)$ — довільний неорієнтований зв'язний граф. Шлях або цикл C називається **Ейлеровим шляхом/циклом** графа, якщо він містить кожне ребро G рівно один раз. Якщо в C вершини розташовані в порядку*

$$C = (c_0, c_1, \ldots, c_k) \quad (c_0 \neq c_k \text{ для шляху, } c_0 = c_k \text{ для циклу}),$$

то послідовність ребер

$$\langle (c_i, c_{i+1}) \mid i < k \rangle$$

утворює множину E ребер графа G.

Означення 42. *Граф називається **Ейлеровим**, якщо він містить цикл, який проходить через усі ребра графа рівно один раз.*

Означення 43. ***Ейлерів шлях** у графі — це шлях, який проходить через усі ребра графа рівно один раз.*

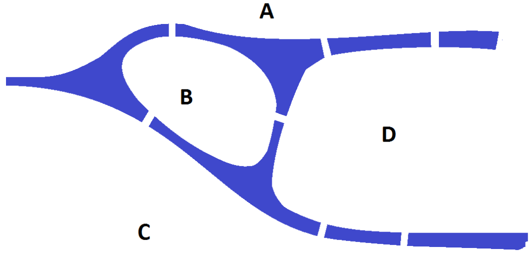
Теорема 14. *Неорієнтований зв'язний граф G має **Ейлерів цикл** тоді й тільки тоді, коли степінь кожної вершини парний.*

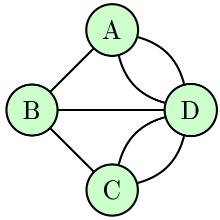
Теорема 15 (Ейлер)**.** *У графі G існує **Ейлерів шлях** тоді й тільки тоді, коли граф зв'язний (не рахуючи ізольованих вершин), а кількість вершин непарного степеня дорівнює 0 або 2.*

Алгоритм (Флері):

1. Починаємо з вершини непарного степеня (або довільної, якщо всі степені парні).
2. Видаляємо пройдені ребра та ізольовані вершини в міру проходження.
3. На кожному кроці обираємо міст тільки тоді, коли в даній вершині немає іншого циклічного ребра.

11 Euler-körök és utak





Definíció 41. *Legyen $G = (V, E)$ egy tetszőleges irányítatlan összefüggő gráf. A C út vagy kör a gráf* ***Euler-útja/köre****, ha G minden élét pontosan egyszer tartalmazza. Ha C-ben az érintett csúcsok sorrendben*

$$C = (c_0, c_1, \ldots, c_k) \quad (c_0 \neq c_k \text{ út esetén, } c_0 = c_k \text{ kör esetén}),$$

akkor az

$$\langle (c_i, c_{i+1}) \mid i < k \rangle$$

élek sorozata egyszeresen kiadja a G gráf E éleinek halmazát.

Definíció 42. *Egy gráfot* ***Euler-gráfnak*** *nevezünk, ha tartalmaz egy kört, amely minden élen pontosan egyszer halad át.*

Definíció 43. ***Euler-út*** *egy gráfban olyan út, amely minden élen pontosan egyszer halad át.*

Tétel 14. *Egy G irányítatlan összefüggő gráfban pontosan akkor van* ***Euler-kör****, ha a gráf minden csúcs fokszáma páros.*

Tétel 15 (Euler)**.** *Egy G gráfban pontosan akkor van* ***Euler-út****, ha a gráf összefüggő (izolált pontoktól eltekintve), és a páratlan fokú csúcsok száma 0 vagy 2.*

Algoritmus (Fleury):

1. Kezdjük páratlan fokú csúcsnál (vagy tetszőlegesnél, ha minden fok páros).
2. Töröljük az átment éleket, és izolált csúcsokat, ahogy haladunk.
3. Minden lépésnél hidat csak akkor választunk következő élnek, ha nincs más ciklikus él az adott csúcsnál.

12 Елементи теорії кодування

12.1 Вступ в теорію кодування

Завдання: потрібно передати повідомлення, яке може бути рядком символів деякого скінченного алфавіту, наприклад, $\{0, 1\}$ або українські чи угорські букви, або арабські числа і т. п. Так чи інакше, передача даних зводиться до передачі по деякому каналу зв'язку знаків деякого скінченного алфавіту. Практично завжди цей канал зв'язку не ідеальний. Навіть, якщо ймовірність невірної передачі одного символу є досить малою, то при передачі довгих рядків ймовірність вірно послати необхідну інформацію може виявитися недопустимо малою.

Річард Хеммінг, винахідник кодів Хеммінга, працював у Bell Labs наприкінці 1940-х років на комп'ютері Bell Model V, електромеханічна машина на основі реле з часовим циклов в секундах. Протягом робочих днів, коли виявлялися помилки в реле, машина зупинялася і спалахувала, щоб оператори могли усунути проблему.

Хеммінг працював у вихідні дні і щоразу засмучувався тим, що йому доводилося перезапускати програми з нуля через виявлені помилки. У записаному інтерв'ю Хеммінг сказав: «Якщо машина може виявити помилку, чому вона не може визначити положення помилки та виправити її?». Протягом наступних кількох років він працював над проблемою виправлення помилок, розробляючи все більш потужний масив алгоритмів. У 1950 році він опублікував те, що зараз відомий, як Код Хеммінга [9], який продовжує застосовуватись сьогодні в таких програмах, як пам'ять ECC.

Річард Хеммінг
1915–1998

12 A kódoláselmélet elemei

12.1 Bevezetés a kódoláselméletbe

Feladat: Egy üzenetet kell továbbítani, amely egy véges ábécé karaktereinek sorozata lehet, például $\{0, 1\}$, vagy ukrán vagy magyar betűk, esetleg arab számjegyek stb. Az adatok továbbítása mindenesetre valamely véges ábécé jeleinek egy kommunikációs csatornán keresztüli átvitelére vezethető vissza. Gyakorlatilag ez a kommunikációs csatorna soha nem tökéletes. Még ha egyetlen karakter hibás továbbításának valószínűsége elég kicsi is, hosszú sorozatok továbbítása esetén annak valószínűsége, hogy az információ helyesen érkezik meg, elfogadhatatlanul kicsivé válhat.

Richard Hamming, a Hamming-kódok feltalálója, az 1940-es évek végén dolgozott a Bell Labs-nál a Bell Model V számítógépen, amely egy relé-alapú elektromechanikus gép volt, másodpercekben mérhető ciklusidővel. A munkanapok során, amikor hibák jelentkeztek a relékben, a gép leállt és figyelmeztető fények villantak fel, hogy az üzemeltetők elháríthassák a problémát.

Hamming hétvégenként is dolgozott, és újra meg újra bosszankodott amiatt, hogy a programokat az észlelt hibák miatt mindig elölről kellett kezdenie. Egy felvett interjúban Hamming így fogalmazott: «Ha a gép képes felismerni a hibát, akkor miért ne tudná meghatározni a hiba helyét és kijavítani azt?» Az elkövetkező néhány évben a hibajavítás problémáján dolgozott, egyre hatékonyabb algoritmusokat fejlesztve. 1950-ben publikálta azt, amit ma Hamming-kódként [9] ismerünk, és amelyet a mai napig alkalmaznak olyan rendszerekben, mint például az ECC memóriák.

Richard Hamming
1915–1998

$$\underline{\overline{\text{Ні}}} \longrightarrow 0 \rightsquigarrow \color{red}{1} \color{black}\longrightarrow \underline{\overline{\text{Так}}}$$

$$\underline{\overline{\text{Ні}}} \longrightarrow 0 \longrightarrow 00000 \rightsquigarrow 00\color{red}{1}\color{black}0\color{red}{1} \color{black}\longrightarrow 00000 \longrightarrow 0 \longrightarrow \underline{\overline{\text{Ні}}}$$

$$C = \begin{cases} 00000, \\ 11111. \end{cases} \qquad C \subset F_2^5.$$

Означення 44. *Нехай F_q — довільний скінченний алфавіт з q символів. Довільна непорожня підмножина F_q^n називається q-арним кодом.*

Основні цілі при передачі інформації:

- Легко кодувати повідомлення.
- Легко передавати повідомлення.
- Легко декодовувати отримані повідомлення.
- Відповідно виправляти помилки, що з'яляються в каналі зв'язку.
- Поредавати більший обсяг інформації за одиницю часу.

Нехай F_q — довільний алфавіт із q символів.

Кажуть, що $w \in F_q^n$ — це слово довжини n над алфавітом F_q.

Якщо w входить до складу коду $C \subset F_q^n$, то w називається кодовим словом.

Інтуїтивне уявлення про «близькість» двох слів добре формалізується за допомогою відстані Хеммінга $d(x, y)$ між словами x і y. Для слів x, y однакової довжини над одним алфавітом $d(x, y)$ — це кількість символів, у яких x і y відрізняються.

Приклад: $d(10101, 01100) = 3$, $d(fourth, eighth) = 4$.

$$\text{Nem} \longrightarrow 0 \rightsquigarrow 1 \longrightarrow \text{Igen}$$

$$\text{Nem} \longrightarrow 0 \longrightarrow 00000 \rightsquigarrow 00101 \longrightarrow 00000 \longrightarrow 0 \longrightarrow \text{Nem}$$

$$C = \begin{cases} 00000, \\ 11111. \end{cases} \qquad C \subset F_2^5.$$

Definíció 44. *Legyen F_q tetszőleges véges ábécé q szimbólummal. A F_q^n tetszőleges nemüres részhalmazát q-áris kódnak nevezzük.*

Az információátvitel fő céljai:

- Az üzenetek egyszerű kódolása.
- Az üzenetek egyszerű továbbítása.
- Az érkezett üzenetek gyors dekódolása.
- A kommunikációs csatornában fellépő hibák megfelelő javítása.
- Nagyobb mennyiségű információ továbbítása egységnyi idő alatt.

Legyen F_q tetszőleges q szimbólumú ábécé.

Azt mondjuk, hogy $w \in F_q^n$ egy szó, amely az F_q ábécé fölött van, és hossza n.

Ha w egy kód $C \subset F_q^n$ eleme, akkor w egy kódszó.

Két szó közötti „közelség” intuitív fogalmát jól formalizálja a Hamming-távolság $d(x, y)$ a szavak x és y között. Ha x és y azonos hosszúságú szavak ugyanazon ábécé fölött, akkor $d(x, y)$ a karakterek száma, amelyekben x és y eltérnek egymástól.

Példa: $d(10101, 01100) = 3$, $d(fourth, eighth) = 4$.

12.2 Властивості відстані Хеммінга

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

2. $d(x, y) = d(y, x)$,

3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
(нерівність трикутника)

Важливим параметром коду C є його мінімальна відстань. $d(C) = \min\{h(x, y) \mid x, y \in C,\ x \neq y\}$, оскільки вона визначає найменшу кількість помилок, яку потрібно зробити, щоб одне кодове слово перетворилося на інше.

Теорема 16. • *Код C може виявляти до s помилок, якщо $s+1 \leq d(C)$.*

• *Код C може виправляти до t помилок, якщо $2t + 1 \leq d(C)$.*

12.3 Основна пробема теорії кодування

Позначення: (n, M, d)-код C — це код, для якого виконується:

- n —- довжина кодових слів,
- M —- кількість кодових слів,
- d —- мінімальна відстань у коді C.

Приклад 5. • $C_1 = \{00, 01, 10, 11\}$ — $(2, 4, 1)$-*код.*

- $C_2 = \{000, 011, 101, 110\}$ — $(3, 4, 2)$-*код.*
- $C_3 = \{00000, 01101, 10110, 11011\}$ — $(5, 4, 3)$-*код.*

Гарний (n, M, d)-код має мале n, але велике M і велике d.

Основна задача теорії кодування — оптимізувати один із параметрів n, M, d за заданих значень двох інших.

12.2 A Hamming-távolság tulajdonságai

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
   (háromszög-egyenlőtlenség)

A kódok C egyik fontos paramétere a minimális távolságuk. $d(C) = \min\{h(x, y) \mid x, y \in C,\ x \neq y\}$, mivel ez adja meg a legkisebb hibaszámot, amely szükséges egy kódszó másikká alakításához.

Tétel 16.
- *Egy C kód legfeljebb s hibát képes észlelni, ha $s + 1 \leq d(C)$.*
- *Egy C kód legfeljebb t hibát képes javítani, ha $2t + 1 \leq d(C)$.*

12.3 A kódoláselmélet alapvető problémája

Jelölés: Egy (n, M, d)-kód C olyan kód, amelyre teljesül:

- n —- a kódszavak hossza,
- M —- a kódszavak száma,
- d —- a C kód minimális távolsága.

Példa 5.
- $C_1 = \{00, 01, 10, 11\}$ – $(2, 4, 1)$-*kód.*
- $C_2 = \{000, 011, 101, 110\}$ – $(3, 4, 2)$-*kód.*
- $C_3 = \{00000, 01101, 10110, 11011\}$ – $(5, 4, 3)$-*kód.*

Egy jó (n, M, d)-kód kis n-nel, de nagy M-mel és nagy d-vel rendelkezik.

A kódoláselmélet fő problémája az, hogy az egyik paramétert (n, M, d) optimalizáljuk a másik kettő adott értéke mellett.

12.4 Лінійні коди

Нехай $F_q = F_2 = \{0, 1\}$ — поле з 2 елементів.

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\alpha \in F_2,\ u = u_1 u_2 \ldots u_n \in F_2^n,\ v = v_1 v_2 \ldots v_n \in F_2^n$:

$$\alpha u = (\alpha u_1, \alpha u_2, \ldots, \alpha u_n),\ u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n).$$

Відносно описаних операцій F_2 стає полем, а F_2^n лінійним простором над полем F_2.

Підпростір C лінійного простору F_2^n називається лінійним бінарним кодом.

$C \subset F_2^n$ — лінійний бінарний код

$$\Updownarrow$$

$$C \neq \emptyset,\ u + v \in C\ \forall u, v \in C.$$

Якщо C є підпростором розмірності k у F_2^n, то лінійний бінарний код C називається $[n, k]$-кодом, або, якщо ми також хочемо вказати мінімальну відстань d коду C, — $[n, k, d]$-кодом.

Бінарний $[n, k, d]$-код — це також бінарний $(n, 2^k, d)$-код.

$k \times n$-матриця, радки якої є базисом $[n, k, d]$-коду C називається його породжуючою матрицею.

Вага Хеммінга $w(x)$ слова x це кількість ненульових символів слова x.

$$d(C) = min\{w(u) | u \neq \overline{0} = 00\ldots0,\ u \in C\}.$$

12.4 Lineáris kódok

Legyen $F_q = F_2 = 0, 1$ — a kételemű test.

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \times & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$\alpha \in F_2, \; u = u_1 u_2 \dots u_n \in F_2^n, \; v = v_1 v_2 \dots v_n \in F_2^n :$

$$\alpha u = (\alpha u_1, \alpha u_2, \dots, \alpha u_n), \; u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n).$$

A leírt műveletek alapján F_2 testté válik, és F_2^n lineáris térré válik az F_2 test felett.

Az F_2^n lineáris tér C alterét lineáris bináris kódnak nevezzük.

$C \subset F_2^n$ — lineáris bináris kódot

$$\Updownarrow$$
$$C \neq \emptyset, \; u + v \in C \; \forall u, v \in C.$$

Ha C egy k dimenziójú altér az F_2^n-ben, akkor a C lineáris bináris kódot $[n, k]$-kódnak nevezzük, vagy ha a C kód d minimális távolságát is meg akarjuk adni, akkor $[n, k, d]$-kódnak.

A bináris $[n, k, d]$ kód egyben egy bináris $(n, 2^k, d)$ kód is.

A $k \times n$-mátrixot, amelynek sorai egy $[n, k, d]$-kód C alapját képezik, a generálómátrixának nevezzük.

Hamming-súly Az x szó $w(x)$ értéke a x szóban található nullától eltérő karakterek száma.

$$d(C) = min\{w(u) | u \neq \overline{0} = 00 \dots 0, \; u \in C\}.$$

Література / Irodalom

[1] Висоцька В. А., Литвин В. В., Лозинська О. В. Дискретна математика: практикум. 2-е видання, Львів: «Новий Світ – 2000», 2025

[2] Ганюшкін О.Г. Комбінаторний аналіз: Навчальний посібник. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2024.

[3] Матвієнко М. П. Дискретна математика: XXI століття. Київ: Ліра-К, 2017.

[4] Борисенко О. А. Дискретна математика. Суми: Університетська книга, 2017.

[5] Коцовський В. М. Дискретна мат. та теор. алгоритмів. (2. Бінарні відношення). Конспект лекцій. 2016.

[6] Коцовський В. М. Дискретна математика та теор. алгоритмів. (5. Теорія графів). Конспект лекцій. 2017.

[7] Bácsó S. Diszkrét Matematika I. Debrecen: Debreceni Egyetem, Informatikai Intézet. 2003.

[8] Szalkai I. Diszkrét Matematika. Szecheny: Pannon Egyetem. 2021.

[9] R. W. Hamming. Error detecting and error correcting codes. Bell Syst. Techn. J., **29**, 147–160 (1950).

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
ELŐADÁS VÁZLATA

Тилищак О.А. Конспект лекцій з дисципліни «Дискретна математика» для студентів I курсу Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II предметної спеціальності A4.09 Середня освіта (Інформатика) та A4.04 Середня освіта (Математика). Берегове: Закарпатський угорський інститут ім. Ф.Ракоці II, 2025. 65 с.

Tilistyák S. Előadás vázlata a «Diszkrét matematika» tudományágról, a I. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola, II éves, A4.09 Középiskolai oktatás (informatika) és A4.04 Középiskolai oktatás (matematika) szakirányokon. Beregszász: II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar főiskola, 2025. 65 o.

Відповідальний за випуск: Добош О. — начальник Видавничого відділу ЗУІ ім. Ф. Ракоці II.

A kiadásért felel: Dobos S. — a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Kiadói Részlegének vezetője.

Набрано у системі LaTeX.
Розмір сторінок: A5 (148 × 210мм).
Обсяг в авторських аркушах 1,55 (61 817 знаків із пробілами).

A kiadvány LaTeX-ben készült.
Oldalméret: A5 (148 × 210mm).
Terjedelem szerzői ívben: 1.55 (61 817 leütés szóközökkel).