**ЗАКАРПАТСЬКИЙ УГОРСЬКИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ФЕРЕНЦА РАКОЦІ ІІ**
**II. RÁKÓCZI FERENC KÁRPÁTALJAI MAGYAR FŐISKOLA**

**Кафедра математики та інформатики**
**Matematika és Informatika Tanszék**

# «МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ»
# (МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ)

(для студентів 1-го курсу спеціальності А4.09 Середня освіта (Інформатика)

# MATEMATIKAI ANALÍZIS

## (Módszertani utmutató dolgozati munkákhoz)

*Перший (бакалаврський) / Alapképzés (BA)*
(ступінь вищої освіти /a felsőoktatás szintje)

*A Освіта / A Oktatás*
(галузь знань / képzési ág)

*" Інформатика"*
*"Informatika"*
(освітня програма / képzési program)

Берегове / Beregszász
2025 р. / 2025

Посібник з математичного аналізу для інформатиків призначений для студентів І курсу Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці спеціальності А 4.09 Середня освіта (Інформатика) заочної форми навчання з метою організації контрольних робіт з курсу "Математичний аналіз".

Матеріал призначений для використання як навчально-методичний посібник з дисципліни "Математичний аналіз ".

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики
(протокол № 10 від «23» червня 2025 року)

Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості вищої освіти
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол №7 від 26 серпня 2025 року)

Рекомендовано до видання у електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

(протокол №8 від 28 серпня 2025 року)

Підготовлено до видання у електронній формі (PDF) кафедрою математики та інформатики з Видавничим відділом Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

**Укладач:**

СТОЙКА МИРОСЛАВ ВІКТОРОВИЧ – доцент кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

**Рецензенти:**

БОРТОШ МАРІЯ ЮЛІЇВНА – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри та диференціальних рівнянь ДВНЗ «УжНУ»;

МЕСАРОШ ЛІВІА ВАСИЛІВНА– кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики та інформатики ЗУІ.

Відповідальний за випуск:

Олександр ДОБОШ – начальник Видавничого відділу ЗУІ ім. Ф.Ракоці II

За зміст посібника відповідальність несуть розробники.

**Видавництво:** Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II (адреса: пл. Кошута 6, м. Берегове, 90202. Електронна пошта: foiskola@kmf.uz.ua)

**© Мирослав Стойка, 2025**

**© Кафедра математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II, 2025**

A Matematikai analízia a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola, I. éves, informatika szakos, levelező hallgatóinak készült, a Matematikai analízis c. tantárgy alaposabb tanulmányozásának és elsajátításának megkönnyítése céljából.

Ez a jegyzet elsősorban informatika szakos hallgatók számára készült, de hasznos lehet mindazok számára, akik bármely más szakon tanulnak matematikát.

A jegyzet minden félévi dolgozat tíz változatát tartalmazza, amelyek lefedik a félév tananyagtémáit. Ezen kívül egy megoldott mintaváltozat is bemutatásra kerül.

Az oktatási folyamatban történő felhasználását jóváhagyta
a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Matematika és Informatika Tanszéke
(2025. június 23, 10. számú jegyzőkönyv).

Megjelentetésre javasolta a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Minőségbiztosítási Tanácsa
(2025. augusztus 26, 7. számú jegyzőkönyv).

Elektronikus formában (PDF fájlformátumban) történő kiadásra javasolta
a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Tudományos Tanácsa
(2025. augusztus 28, 8. számú jegyzőkönyv).

Kiadásra előkészítette a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Matematika és Informatika Tanszéke és Kiadói Részlege.

**Szerkesztő:**

SZTOJKA MIROSZLÁV – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének docense

**Szakmai lektorok:**

BARTOS MÁRIA – fizika és matematika tudományok kandidátusa, docens, az Ungvári Nemzeti Egyetem Algebra és Diferenciál Egyenletek Tanszékének docense;

MÉSZÁROS LÍVIA – fizika és matematika tudományok kandidátusa, II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének docense.

A kiadásért felel:

DOBOS Sándor – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Kiadói Részlegének vezetője

A tartalomért kizárólag a jegyzet szerkesztője felel.

**Kiadó:** a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola (cím: 90 202, Beregszász, Kossuth tér 6. E-mail: foiskola@kmf.uz.ua)

**© Sztojka Miroszláv, 2025**
**© A II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszéke, 2025**

# Tartalomjegyzék

I. Félév

Példadolgozat megoldással ..... 5

1. Változat ..... 9

2. Változat ..... 10

3. Változat ..... 11

4. Változat ..... 12

5. Változat ..... 13

6. Változat ..... 14

7. Változat ..... 15

8. Változat ..... 16

9. Változat ..... 17

10. Változat ..... 18

II. Félév

Példadolgozat megoldással ..... 19

1. Változat ..... 22

2. Változat ..... 23

3. Változat ..... 24

4. Változat ..... 25

5. Változat ..... 26

6. Változat ..... 27

7. Változat ..... 28

8. Változat ..... 29

9. Változat ..... 30

10. Változat ..... 31

Irodalomjegyzék ..... 32

# I. Félév

## Példadolgozat megoldással

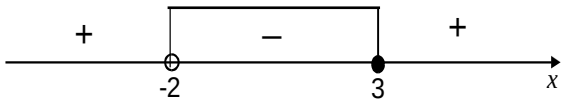
1. Határozza meg az alábbi függvények értelmezési tartományát:

$$y=\sqrt{\frac{3-x}{2x+4}}+\frac{5}{x+2}!$$

*Megoldás.*
A függvény akkor értelmezett, ha

$$\begin{cases}\dfrac{3-x}{2x+4}\ge 0,\\ x+2\ne 0,\end{cases}\quad\begin{cases}\dfrac{-(x-3)}{2(x+2)}\ge 0,\\ x\ne -2\end{cases}\Rightarrow\ \frac{x-3}{x+2}\le 0,$$

Intervallumok módszerével, kapjuk:




tehát, $x\in(-2;3]$.

2. Határozza meg az alábbi határértéket:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+3-4)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

3. Állapítsa meg, folytonos-e az alábbi függvény és készítsen vázlatos ábrát!

$$f(x)=\begin{cases}-x^2, & x\le 0,\\ (x-1)^2-1, & 0<x<2,\\ 3-x, & x\ge 2.\end{cases}$$

*Megoldás.*

Az $f(x)$ függvény folytonos a $(-\infty;0)$, $(0;2)$ és $(2;+\infty)$ intervallumokon, mivel ezeken elemi függvényként szerepel. Tehát, a szakadás csak az $x_1$ és $x_2$ pontokban lehetséges.

1) Az $x_1=0$ pont esetére kapjuk:

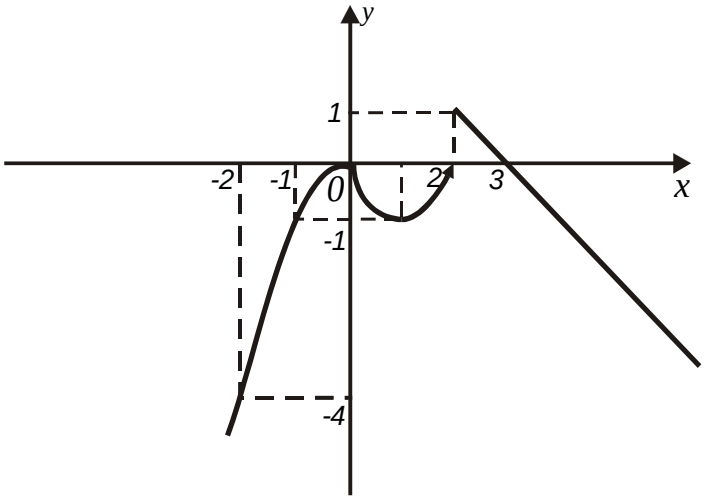
$$\lim_{x\to 0-0}f(x)=\lim_{x\to 0-0}\left(-x^2\right)=0,\ \lim_{x\to 0+0}f(x)=\lim_{x\to 0+0}\left((x-1)^2-1\right)=0,$$

$f(0)=-x^2\big|_{x=0}=0,$ vagyis az $f(x)$ függvény folytonos az $x_1=0$ pontban.

2) Az $x_2=2$ pont esetére kapjuk:

$$\lim_{x\to 2-0}f(x)=\lim_{x\to 2-0}\left((x-1)^2-1\right)=0,\ \lim_{x\to 2+0}f(x)=\lim_{x\to 2+0}(3-x)=1,\ f(2)=(3-x)\big|_{x=2}=1,$$

vagyis az $x_2=2$ pontban az $f(x)$ függvénynek elsőfajú nem megszüntethető szakadása van. A függvény grafikonja az 1.1 ábrán van ábrázolva.




1.1. ábra

4. Deriválja az alábbi függvényt:

$y = ln^3 5x \cdot arctg 8x^2$;

*Megoldás.*

$$y' = 3ln^2 5x \cdot \frac{1}{5x} \cdot 5 \cdot arctg 8x^2 + ln^3 5x \cdot \frac{1}{1+64x^4} \cdot 16x =$$

$$= \frac{3}{x} ln^2 5x \cdot arctg 8x^2 + \frac{16x \cdot ln^3 5x}{1+64x^4}.$$

5. Határozza meg az alábbi függvény szélsőértékhelyeit:

$$y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 24x - 9.$$

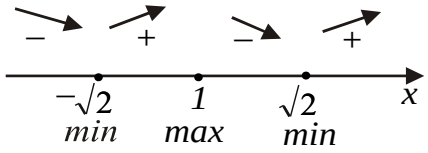
*Megoldás.*

$$y' = 12x^3 - 12x^2 - 24x + 24 = 12[x^2(x-1) - 2(x-1)] =$$

$$= 12(x-1)(x^2-2) = 12(x-1)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right).$$

$y' = 0 \Rightarrow \left(x_1 = 1; x_2 = \sqrt{2}; x_3 = -\sqrt{2}\right)$ kritikus pontok, melyek felosztják a számegyenest négy szakaszra.

Mindegyiken meghatározzuk a derivált előjelét.




Mivel az $x = \pm\sqrt{2}$ pontokon áthaladva a derivált előjelet vált «-»-ról «+»-ra, ezért a függvénynek ezen pontjai minimum pontjai.

$$y_{min} = y\left(-\sqrt{2}\right) = 3\left(-\sqrt{2}\right)^4 - 4\left(-\sqrt{2}\right)^3 - 12\left(-\sqrt{2}\right)^{-2} +$$

$$+ 24\left(-\sqrt{2}\right) - 9 \approx -43{,}6; \; y_{min} = y\left(\sqrt{2}\right) \approx 1{,}6.$$

Az $x = 1$ ponton áthaladva a derivált előjelet vált «+»-ról «-»-ra, ezért ezen pontja a függvény maximuma: $y_{max} = y(1) = 3 - 4 - 12 + 24 - 9 = 2$.

6. Végezze el a teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvénynél és ábrázolja azt:

$$y = \frac{(x+2)^2}{x-1}.$$

Vizsgáljuk a függvényt az alábbi séma szerint.

1. Az értelmezési tartomány $x \in (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$.

2. A grafikon ordinátája $y > 0$ minden $x > 1$, $y < 0$ minden $x < 1$.

3. A tengelyekkel való metszéspontok:

az $Ox$ tengellyel $y = 0, x = -2$, vagyis, $(-2;0)$;

az $Oy$ tengellyel $x = 0, y = -4$, vagyis, $(0;-4)$.

4. A függvény nem periódikus és se nem páros, se páratlan, mivel $f(-x) = \dfrac{(-x+2)^2}{-x-1} \neq \begin{bmatrix} f(x), \\ -f(x). \end{bmatrix}$

5. Mivel az $x = 1$ másodfajú szakadási pont, ezért az $x = 1$ függőleges aszimptota, és emellett $\lim\limits_{x \to 1-0} y = \lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{(x+2)^2}{x-1} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1+0} y = \lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{(x+2)^2}{x-1} = +\infty$.

Megkeressük a ferde aszimptotákat.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x+2)^2}{x(x-1)} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[ \frac{(x+2)^2}{x-1} - x \right] =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 4x + 4 - x^2 + x}{x-1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{5x+4}{x-1} = 5.$$

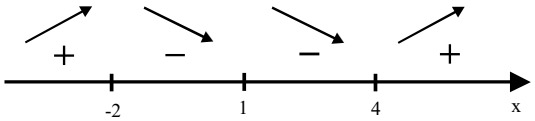
Tehát, az egyetlen aszimptota az $y = x + 5$.

6. Vizsgáljuk a függvény monotonitásának intervallumait.

$$y' = \frac{2(x+2)(x-1) - (x+2)^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - 4 - x^2 - 4x - 4}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x - 8}{(x-1)^2} = \frac{(x+2)(x-4)}{(x-1)^2}.$$

Az $x = 1$ pontban a derivált nem létezik, de ez a pont egyben nem tartozik hozzá az értelmezési tartományhoz, és így nem lesz kritikus pont. Abból, hogy $y' = 0$ kapjuk, hogy $(x+2)(x-4) = 0$, vagyis a kritikus pontok $x_1 = -2$, $x_2 = 4$. A derivált előjele:




Tehát, a függvény monoton növekvő a $(-\infty;-2) \cup (4;+\infty)$ és monoton csökkenő a $(-2;1) \cup (1;4)$. Az $x_1 = -2$ és $x = 4$ pontokban eléri helyi maximumát és minimumát megfelelően.

$$y_{max} = y(-2) = \frac{(-2+2)^2}{-2-1} = 0; \quad y_{min} = y(4) = \frac{(4+2)^2}{4-1} = 12.$$

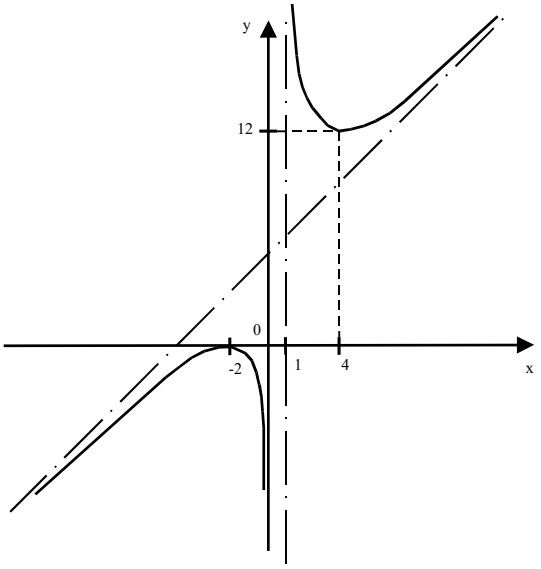
7. Megvizsgáljuk görbületére a függvényt.

$$y'' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2 - 2x - 8) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2(x-1)(x^2 - 2x + 1 - x^2 + 2x + 8)}{(x-1)^4} =$$

$= [$ mivel $x \neq 1,$ ezért osztunk $(x-1)] = \frac{18}{(x-1)^3}$. Mivel $y'' < 0$ a $(-\infty;1)$, ezért itt a függvény konkáv; mivel $y'' > 0$ a $(1;+\infty)$, ezért itt a függvény konvex. Az $x = 1$ pontban nem értelmezett, és az $y'' \neq 0$ minden értelmezési tartományból vett pontban, ezért nincsenek inflexiós pontok.

8. Ábrázoljuk a függvénygörbét (1.2 ábra).




1.2 ábra

## 1. Változat

1. Határozza meg az alábbi függvény értelmezési tartományát:

$$y = \frac{7x - 20}{5x^2 - 2x + 5} \quad !$$

2. Határozza meg az alábbi sorozat határértékét:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(3n-5)^4 - 5n^5}{n^3 - (4n-6)^5}; !$$

3. Állapítsa meg, folytonos-e az alábbi függvény és készítsen vázlatos ábrát!

$$f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \le 0, \\ 1, & 0 < x \le 2, \\ x^2 - 2, & x > 2. \end{cases}$$

4. Deriválja az alábbi függvényt

$$y = x^2 tg^3 5x!$$

5. Határozza meg az alábbi függvény monotonitásának intervallumait:

$$y = \frac{x}{x^2 - 6x - 16} !$$

6. Végezze el a teljes függvényvizsgálatát az alábbi függvénynynek és ábrázolja azt!

$$y = -ln(x^2 - 4x + 5).$$

## 2. Változat

1. Határozza meg az alábbi függvény értelmezési tartományát:

$$y = \frac{7x-4}{3x^2-27} \ !$$

2. Határozza meg az alábbi függvény határértékét:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-x}{3-5x}\right)^{7x} \ !$$

3. Állapítsa meg, folytonos-e az alábbi függvény és készítsen vázlatos ábrát!

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & x<-1, \\ x-1, & -1\le x\le 3, \\ 5-x, & x>3. \end{cases}$$

4. Deriválja az alábbi függvényt

$$y = ln^4(2x+1)\cdot cos(2x+1)^2!$$

5. Határozza meg az alábbi függvény monotonitásának intervallumait:

$$y = x^4 - 2x^2 + 5 \ !$$

6. Végezze el a teljes függvényvizsgálatát az alábbi függvénynynek és ábrázolja azt!

$$y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}.$$

## 3. Változat

1. Határozza meg az alábbi függvény értelmezési tartományát:

$$y = \frac{3}{\sqrt{x-5}} - \frac{\sqrt{x+3}}{3}\,!$$

2. Határozza meg az alábbi függvény határértékét:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}\,!$$

3. Állapítsa meg, folytonos-e az alábbi függvény és készítsen vázlatos ábrát!

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x < -1, \\ x^2+1, & -1 \le x \le 2, \\ 2x, & x > 2. \end{cases}$$

4. Deriválja az alábbi függvényt

$$y = \sqrt{arctgx} \cdot sin^5\, 2\, x^3\,!$$

5. Határozza meg az alábbi függvény monotonitásának intervallumait:

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14\,!$$

6. Végezze el a teljes függvényvizsgálatát az alábbi függvénynynek és ábrázolja azt!

$$y = x\, ln^2\, x.$$

## 4. Változat

1. Határozza meg az alábbi függvény értelmezési tartományát:

$$y = \frac{3}{\sqrt{x-5}} - \frac{\sqrt{x+3}}{3}\,!$$

2. Határozza meg az alábbi függvény határértékét:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 8x}{3x^2}\,!$$

3. Állapítsa meg, folytonos-e az alábbi függvény és készítsen vázlatos ábrát!

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \le 0, \\ 2^x, & 0 < x \le 2, \\ x+3, & x > 2. \end{cases}$$

4. Deriválja az alábbi függvényt

$$y = 3(1-x)^4 \ln^3 2x!$$

5. Határozza meg az alábbi függvény monotonitásának intervallumait:

$$y = 2x^2 - \ln x\,!$$

6. Végezze el a teljes függvényvizsgálatát az alábbi függvénynynek és ábrázolja azt!

$$y = \frac{4e^{x^2} - 1}{e^{x^2}}.$$

## 5. Változat

1. Határozza meg az alábbi függvény értelmezési tartományát:

$$y = ln|3x + 4| !$$

2. Határozza meg az alábbi függvény határértékét:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+8}\right)^{-3x} !$$

3. Állapítsa meg, folytonos-e az alábbi függvény és készítsen vázlatos ábrát!

$$f(x)=\begin{cases}2-x, & x\le -2,\\ x^3, & -2<x\le 1,\\ 2, & x>1.\end{cases}$$

4. Deriválja az alábbi függvényt

$$y = \frac{e^{5x}}{\sqrt[3]{5x-2}} !$$

5. Határozza meg az alábbi függvény monotonitásának intervallumait:

$$y = 2\sqrt{3}\sin x - 3x \ \ (0 \le x \le 2\pi) !$$

6. Végezze el a teljes függvényvizsgálatát az alábbi függvénynynek és ábrázolja azt!

$$y = x^2 e^{-x^2/2}.$$

## 6. Változat

1. Határozza meg az alábbi függvény értelmezési tartományát:

$$y = \frac{5x^3 - x + 9}{3x - 2}\,!$$

2. Határozza meg az alábbi függvény határértékét:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{5x+4}\right)^{x+1}\,!$$

3. Állapítsa meg, folytonos-e az alábbi függvény és készítsen vázlatos ábrát!

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 4, & x \le -1, \\ x^2 - 2, & -1 < x < 2, \\ x, & x \ge 2. \end{cases}$$

4. Deriválja az alábbi függvényt

$$y = \frac{e^{5x}}{\sqrt[3]{5x - 2}}\,!$$

5. Határozza meg az alábbi függvény monotonitásának intervallumait:

$$y = (x-2)^4(2x+1)^3\,!$$

6. Végezze el a teljes függvényvizsgálatát az alábbi függvénynynek és ábrázolja azt!

$$y = (x+2)e^{1-x}.$$

## 7. Változat

1. Határozza meg az alábbi függvény értelmezési tartományát:

$$y = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 - 9}} + \frac{5}{x - 4}\,!$$

2. Határozza meg az alábbi függvény határértékét:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{7 - 5x^3}{4x^3 - 9x + 7}\,!$$

3. Állapítsa meg, folytonos-e az alábbi függvény és készítsen vázlatos ábrát!

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \le 1, \\ (x-2)^2, & 1 < x \le 3, \\ 6 - x, & x > 3. \end{cases}$$

4. Deriválja az alábbi függvényt

$$y = \sqrt[4]{\frac{2x+3}{2x-3}} \cdot arccos(2x-1)\,!$$

5. Határozza meg az alábbi függvény monotonitásának intervallumait:

$$y = ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)!$$

6. Végezze el a teljes függvényvizsgálatát az alábbi függvénynynek és ábrázolja azt!

$$y = ln\left(9 - x^2\right).$$

## 8. Változat

1. Határozza meg az alábbi függvény értelmezési tartományát:

$$y = \frac{\sqrt{x}}{x^4 - 16}!$$

2. Határozza meg az alábbi függvény határértékét:

$$\lim_{x \to -3} \frac{2x^2 + 11x + 15}{3x^2 + 5x - 12}!$$

3. Állapítsa meg, folytonos-e az alábbi függvény és készítsen vázlatos ábrát!

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x < -1, \\ x - 1, & -1 \le x \le 3, \\ 5 - x, & x > 3. \end{cases}$$

4. Deriválja az alábbi függvényt

$$y = 12x^2 \, arcsin^3 \sqrt{x}\,!$$

5. Határozza meg az alábbi függvény monotonitásának intervallumait:

$$y = (x-3)^5 (3x-1)^2\,!$$

6. Végezze el a teljes függvényvizsgálatát az alábbi függvénynynek és ábrázolja azt!

$$y = \frac{\ln x}{x}.$$

## 9. Változat

1. Határozza meg az alábbi függvény értelmezési tartományát:

$$y = \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{(x+3)(x-3)}\,!$$

2. Határozza meg az alábbi függvény határértékét:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin\,5x}{tg4x}\,!$$

3. Állapítsa meg, folytonos-e az alábbi függvény és készítsen vázlatos ábrát!

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \le 0, \\ 2x^2, & 0 < x \le 1, \\ 3+x, & x > 1. \end{cases}$$

4. Deriválja az alábbi függvényt

$$y = e^{sin\,3x}\,cos^3\,3\,x!$$

5. Határozza meg az alábbi függvény monotonitásának intervallumait:

$$y = \frac{x+1}{(x-1)^2}\,!$$

6. Végezze el a teljes függvényvizsgálatát az alábbi függvénynynek és ábrázolja azt!

$$y = xe^{1/x}.$$

## 10. Változat

1. Határozza meg az alábbi függvény értelmezési tartományát:

$$y = \frac{\sqrt{x}}{x^4 - 16}\,!$$

2. Határozza meg az alábbi függvény határértékét:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{5x+4}\right)^{x+1}\,!$$

!

3. Állapítsa meg, folytonos-e az alábbi függvény és készítsen vázlatos ábrát!

$$f(x) = \begin{cases} -2x & x \le 0, \\ x^3, & 0 < x \le 2, \\ x+3, & x > 2. \end{cases}$$

4. Deriválja az alábbi függvényt

$$y = \sqrt[5]{\frac{4x-1}{4x+1}} \cdot tg(4x-1)!$$

5. Határozza meg az alábbi függvény monotonitásának intervallumait:

$$y = \frac{x+1}{(x-1)^2}\,!$$

6. Végezze el a teljes függvényvizsgálatát az alábbi függvénynynek és ábrázolja azt!

$$y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}.$$

# II. Félév

## Példadolgozat megoldással

**1**. Határozza meg az alábbi határozatlan integrált

$$\int \frac{\left(ctg3x\right)^5}{sin^2 3x}dx.$$

*Megoldás.*

$$\int \frac{\left(ctg3x\right)^5}{sin^2 3x}dx = \frac{1}{3}\int \frac{\left(ctg3x\right)^5}{sin^2 3x}d(3x) = -\frac{1}{3}\int \left(ctg3x\right)^5 d\left(ctg3x\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{\left(ctg3x\right)^6}{6} + C = -\frac{1}{18}\left(ctg3x\right)^6 + C.$$

**2**. Határozza meg az alábbi határozott integrált

$$\int_0^1 \frac{\ln^3 x}{3x}dx!$$

*Megoldás.*

$$\int_1^e \frac{\ln^3 x}{3x}dx = \frac{1}{3}\int_1^e \ln^3 x\, d\ln(x) = \frac{1}{3}\frac{\ln^4 x}{4}\Big|_1^e = \frac{1}{12}.$$

**3**. Határozza meg az $y = x^2,\ y = 2x - x^2,\ y = 0$ görbék által határolt terület mérőszámát!

*Megoldás.*

Először meghatározzuk a két parabola metszéspontjait:

$$x^2 = 2x - x^2 \Rightarrow 2x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ vagy } x = 1.$$

Tehát a görbék $x = 0$ és $x = 1$ között metszik egymást. Az alsó határgörbe a $y = x^2$, a felső $y = 2x - x^2$.

A terület:

$$T = \int_0^1 \left((2x - x^2) - x^2\right)dx = \frac{1}{3}.$$

**4**. Konvergens-e az alábbi sor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{13n}{13n+13}?$$

*Megoldás.*

Megvizsgáljuk általános tagjának határértékét:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{13n}{13n+13} = 1.$$

Nem teljesül a konvergens sor szükséges feltétele (a határértéknek 0-nak kellennie). Akkor a az adott sor divergens.

**5.** Határozza meg az alábbi függvény lokális szélsőértékhelyeit (a jellegük kel együtt) valamint nyeregpontjait (amennyiben léteznek):

$$f\ (x; y)\ =\ x^2\ -6y^2\ +2xy^2\ +4xy\ -6x-12y+2!$$

*Megoldás.*

1. Első lépésként kiszámítjuk az elsőrendű parciális deriváltakat:

$$\partial f/\partial x\ =\ 2x\ +\ 2y^2\ +\ 4y\ -\ 6,$$

$$\partial f/\partial y\ =\ -12y\ +\ 4xy\ +\ 4x\ -\ 12.$$

2. A szélsőértékhelyek meghatározásához megoldjuk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 2x\ +\ 2y^2+\ 4y\ -\ 6\ =\ 0; \\ 4xy\ +\ 4x\ -\ 12y\ -\ 12\ =\ 0. \end{cases}$$

Egyenletrendszer megoldásával a következő pontokat kapjuk:

(3, -2), (3, 0), (4, -1).

3. Második deriváltak kiszámítása:

$$f_{xx}\ =\ 2,$$

$$f_{yy}\ =\ -12\ +\ 4x,$$

$$f_{xy}\ =\ 4y\ +\ 4.$$

4. Másodrendű feltétel mátrixának determinánsa a következőképpen számítható:

$$D\ =\ f_{xx}\ *\ f_{yy}\ -\ \left(f_{xy}\right)^2.$$

A pontok elemzése:

$-\ (3,-2)$: $D\ <\ 0 \rightarrow$ nyeregpont

$-\ (3,0)$: $D\ <\ 0 \rightarrow$ nyeregpont

$-\ (4,-1)$: $D\ >\ 0$ és $f_{xx}\ >\ 0 \rightarrow$ lokális minimum.

A függvénynek két nyeregpontja van a $(3,-2)$ és $(3,0)$ pontokban.

Egy lokális minimuma van a $(4,-1)$ pontban.

**6**. Számítsa ki az alábbi kettős integrált

$$\int_0^2 dx \int_0^1 (x^2+2y)dy\ !$$

*Megoldás.*

Eláször integráljuk a belső integrált:

$$\int_0^1 (x^2+2y)dy = x^2+1.$$

Ezután a külső integrált: $\int_0^2 x^2+1)dx = \frac{14}{3}$.

Tehát az integrál értéke $\frac{14}{3}$.

**7.** Számítsa ki az $f(x,y) = x^2 + y^2$ görbementi integrált az egységkör ívén ($x = cos\, t, y = sin\, t, 0 \leq t \leq \pi/2$) $ds$ szerint!

*Megoldás.*

A görbe paraméterezése:

$$r(t) = (cos\, t, sin\, t), \text{ ahol } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

A görbementi integrál általános alakja:

$$\int_C f(x,y)\, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x(t), y(t)) \cdot ||r'(t)||\, dt\,.$$

A derivált és hossza:

$$r'(t) = (-sin\, t, cos\, t),$$

$$||r'(t)|| = \sqrt{(sin^2\, t + cos^2\, t)} = 1.$$

$f(x(t), y(t))$ behelyettesítése:

$$f(x(t), y(t)) = cos^2\, t + sin^2\, t = 1.$$

Az integrál kiszámítása:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

Válasz: a görbementi integrál értéke: $\frac{\pi}{2}$.

## 1. Változat

**1.** Adja meg az alábbi határozatlan integrált:

$$\int\left(3x^2+4\sqrt{x^5}-\frac{5}{x}\right)dx;\,!$$

**2.** Számítsa ki az alábbi integrált:

$$\int_0^1 (2x+6)^3 dx\,!$$

**3.** Határozza meg az alábbi függvények grafikonjai által határolt terület mérőszámát:

$$f(x)=9-x^2;\quad g(x)=0\,!$$

**4.** Vizsgálja az alábbi sor konvergenciáját:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n\cdot(n+2)}\,!$$

**5.** Írja fel a $P_0$ ponthoz tartozó $x$ illetve $y$ változó szerinti szintvonalfüggvényeket!

$$f\,(x;\,y)=\,2x^4\,+\,4xy^3\,+\,8y,\qquad P_0(1;\,2)$$

**6**. Számítsa ki az $f(x,y)\,=\,x\,+\,y$ függvény kettős integrálját az $[0,1]\times[0,1]$ tartományon!

**7**. Számítsa ki az $f(x,y)\,=\,x^2\,+\,y^2$ görbementi integrált az egységkör ívén ($x\,=\,cos\,t, y\,=\,sin\,t, 0\,\leq\,t\,\leq\,\pi/2$) $ds$ szerint!

**2. Változat**

**1.** Adja meg az alábbi határozatlan integrált:

$$\int \sqrt[3]{(5x-4)}dx; !$$

**2.** Számítsa ki az alábbi integrált:

$$\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} !$$

**3.** Határozza meg az alábbi függvények grafikonjai által határolt terület mérőszámát:

$$f(x) = -x^2 - 6x + 7; \quad g(x) = 0 !$$

**4.** Vizsgálja az alábbi sor konvergenciáját:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+3)!} !$$

**5.** Képezzük az $f\ (x;\ y) = 7x^3 + 8y^2 + 5x^2y^4 + 8y$ függvény első és másodrendű parciális deriváltjait!Számítsa ki $f_x{}'(3;\ 2)$ értékét!

**6**. Határozza meg az $f(x,y) = x^2 + y^2$ függvény integrálját a $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ tartományon!

**7**. Számítsa ki az $f(x,y) = x^2 + y^2$ görbementi integrált az egységkör ívén ($x = cos\, t, y = sin\, t, 0 \leq t \leq \pi/2$) $ds$ szerint!

## 3. Változat

**1.** Adja meg az alábbi határozatlan integrált:

$$\int cos(4x-7)dx;\,!$$

**2.** Számítsa ki az alábbi integrálokat:

$$\int_2^9 \sqrt[3]{x-1}dx\,!$$

**3.** Határozza meg az alábbi függvények grafikonjai által határolt terület mérőszámát:

$$f(x)=x^2-6x;\quad g(x)=0\,!$$

**4.** Vizsgálja az alábbi sor konvergenciáját:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^n}\,!$$

**5.** Számolja ki az alábbi parciális deriváltakat!

$$f_x'(x;\,y)\;=?\;f_{xy}'(x;\,y)\;=?$$

a) $f\,(x;\,y)\;=\;e^{x^2+y^2}\cdot ln\,y;$

b) $f\,(x;\,y)\;=\;y\cdot \ln\,(x^2\;+\;y^2)$!

**6**. Számítsa ki az $f(x,y)\;=\;xy$ integrálját az $x\;+\;y\;\leq\;1, x\;\geq\;0, y\;\geq\;0$ tartományon!

**7**. Számítsa ki a $f(x,y)\;=\;x$ integrált a vonalon, amely a $(0,0)$ ponttól az $(1,1)$ pontig tart egyenesen!

## 4. Változat

**1.** Adja meg az alábbi határozatlan integrált:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}dx;!$$

**2.** Számítsa ki az alábbi integrált:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx\,!$$

**3.** Határozza meg az alábbi függvények grafikonjai által határolt terület mérőszámát:

$$f(x)=2x^2-9x+10;\quad g(x)=0\,!$$

**4.** A hányados kritérium segítségével vizsgálja az alábbi sor konvergenciáját:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n}{6n-1}\right)^{2n}\,!$$

**5.** Adja meg az $f\,(x;\,y)\,=\,y^2\cdot\sqrt{x^4\,+\,2xy}$ függvény elsőrendű $x$ változó szerinti parciális deriváltját!

**6**. Számítsa ki az $f(x,y)\,=\,e^{x+y}$ függvény integrálját a négyzeten: $0\,\leq\,x\,\leq\,1,0\,\leq\,y\,\leq\,1$!

**7**. Számítsa ki az $f(x,y)\,=\,xy$ görbementi integrált a körív mentén: $x\,=\,cos\,t,y\,=\,sin\,t,0\,\leq\,t\,\leq\,\pi$!

## 5. Változat

**1.** Adja meg az alábbi határozatlan integrált:

$$\int \frac{ln^2(x+1)}{x+1} dx; !$$

**2.** Számítsa ki az alábbi integrált:

$$\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+3x} !$$

**3.** Határozza meg az alábbi függvények grafikonjai által határolt terület mérőszámát:

$$f(x) = x^2 + 2x; \quad g(x) = x + 2 !$$

**4. V**izsgálja az alábbi sor konvergenciáját:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n \cdot (2n+1)} !$$

**5.** Határozza meg az alábbi függvény lokális szélsőértékhelyeit (a jellegükkel együtt) valamint nyeregpontjait (amennyiben léteznek)!

$$f\,(x;\,y) = \frac{y^4}{4} + \,x^2\, + \,8xy\, - \,9!$$

**6**. Határozza meg az $f(x,y) = sin(x)cos(y)$ integrált a $[0,\pi] \times [0,\pi/2]$ tartományon!

**7**. Számítsa ki a görbe hosszát: $x = cos\,t, y = sin\,t, 0 \leq t \leq 2\pi$!

## 6. Változat

**1.** Adja meg az alábbi határozatlan integrált:

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin 2x + 3} dx; !$$

**2.** Számítsa ki az alábbi integrált:

$$\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} !$$

**3.** Határozza meg az alábbi függvények grafikonjai által határolt terület mérőszámát:

$$f(x) = x^2 - 4x + 4; \quad g(x) = 4 - x !$$

**4. V**izsgálja az alábbi sor konvergenciáját:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{7n}{6n-1} \right)^{2n} !$$

**5.** Határozza meg az alábbi függvény lokális szélsőértékhelyeit (a jellegükkel együtt) valamint nyeregpontjait (amennyiben léteznek):

$$f\,(x;\, y) = x^2 - 6y^2 + 2xy^2 + 4xy - 6x - 12y + 23!$$

**6**. Határozza meg a $f(x, y) = x^2 y^3$ integrálját az $[0,2] \times [0,1]$ tartományon!

**7**. Határozza meg az $f(x, y) = e^{x^2 + y^2}$ görbementi integrált a negyedkörön: $x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq \pi/2!$

## 7. Változat

**1.** Adja meg az alábbi határozatlan integrált:

$$\int \frac{\sqrt{tgx}}{cos^2 x} dx; !$$

**2.** Számítsa ki az alábbi integrált:

$$\int_1^e \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2} !$$

**3.** Határozza meg az alábbi függvények grafikonjai által határolt terület mérőszámát:

$$f(x) = 2 - x + \frac{x^2}{4}; \quad g(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x + 3 !$$

**4.** Vizsgálja az alábbi sor konvergenciáját:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{2}^n} !$$

**5.** Határozza meg az alábbi függvény lokális szélsőértékhelyeit (a jellegükkel együtt) valamint nyeregpontjait (amennyiben léteznek)!

$$f\ (x;\ y) = \frac{9}{x} + \frac{3}{y} +\ xy!$$

**6**. Számítsa ki az $f(x,y)\ =\ y/(1\ +\ x^2\ +\ y^2)$ integrált az egységkörön!

**7**. Számítsa ki az $f(x,y)\ =\ x\ +\ y$ görbementi integrált az $x\ =\ t, y\ =\ ln\ t, 1\ \leq\ t\ \leq\ e$ görbén!

## 8. Változat

**1.** Adja meg az alábbi határozatlan integrált:

$$\int \frac{\sqrt[4]{arcsinx}}{\sqrt{1-x^2}}dx;!$$

**2.** Számítsa ki az alábbi integrált:

$$\int_2^3 \frac{dx}{2x^3+3x+5}!$$

**3.** Határozza meg az alábbi függvények grafikonjai által határolt terület mérőszámát:

$$f(x)=\frac{x^2}{3}; g(x)=-\frac{2}{3}x^2+4!$$

**4.** Vizsgálja az alábbi sor konvergenciáját:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n}{6n-1}\right)^{2n}!$$

**5.** Határozza meg az alábbi függvény lokális szélsőértékhelyeit (a jellegükkel együtt) valamint nyeregpontjait (amennyiben léteznek)!

$$f\,(x;\,y)=\,y^3\,-\,4y^2\,-\,4x^2\,+\,4xy\,+\,1!$$

**6**. Határozza meg az $f(x,y)=x+2y$ integrálját a háromszögön, melynek csúcsai: $(0,0),(1,0),(1,1)$!

**7**. Határozza meg a görbe hosszát: $x=t, y=1/t, 1\leq t\leq 2$!

## 9. Változat

**1.** Adja meg az alábbi határozatlan integrált:

$$\int xe^{2-x^2}\,dx;!$$

**2.** Számítsa ki az alábbi integrált:

$$\int_2^3 \frac{dx}{2x^3+3x+5}!$$

**3.** Határozza meg az alábbi függvények grafikonjai által határolt terület mérőszámát:

$$f(x)=x^2;\quad g(x)=\frac{x^2}{4};\ h(x)=4!$$

**4.** Vizsgálja az alábbi sor konvergenciáját:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n^2+6n-3}{7n^2-2n+1}\right)^n\ !$$

**5.** Határozza meg az alábbi függvény lokális szélsőértékhelyeit (a jellegükkel együtt) valamint nyeregpontjait (amennyiben léteznek)!

$$f\ (x;\ y) = xy\ -\ 2\ ln\ x\ -\ ln\ y\ +\ 2x\ +\ 1!$$

**6**. Számítsa ki a $f(x,y)\ =\ ln(1\ +\ x^2\ +\ y^2)$ integrált a kör alakú tartományon: $x^2\ +\ y^2\ \leq\ 1$!

**7**. Számítsa ki az $f(x,y)\ =\ x^2\ +\ y^2$ görbementi integrált az egységkör ívén ($x\ =\ cos\ t, y\ =\ sin\ t, 0\ \leq\ t\ \leq\ \pi/2$) $ds$ szerint!

## 10. Változat

**1.** Adja meg az alábbi határozatlan integrált:

$$\int \frac{\sqrt[4]{x} - 3x^3 + 5}{x^2} dx; !$$

**2.** Számítsa ki az alábbi integrált:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 3x - 10} !$$

**3.** Határozza meg az alábbi függvények grafikonjai által határolt terület mérőszámát:

$$f(x) = x^3; \quad g(x) = \frac{x^2}{2}; \; h(x) = 8 !$$

**4.** Vizsgálja az alábbi sorok konvergenciáját:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^n !$$

**5.** Határozza meg az alábbi függvény lokális szélsőértékhelyeit (a jellegükkel együtt) valamint nyeregpontjait (amennyiben léteznek)!

$$f(x;\, y) \;=\; 2y^3 \;+\; x^2y \;-\; 3y^2 \;+\; x^2 \;-\; 4!$$

**6**. Számítsa ki a $f(x,y) \;=\; x^3 \;+\; y^3$ integrált az $[0,1] \times [0,1]$ tartományon!

**7**. Határozza meg az $f(x,y) \;=\; sin(xy)$ görbementi integrált az íven: $x \;=\; t, y \;=\; sin\, t, 0 \;\leq\; t \;\leq\; \pi!$

# Irodalomjegyzék


1. *Жалдак М.І., Мігілін Г.О., Деканов С.Й.* Математичний аналіз / – Київ: НПУ ім. М.П. Драгоманова, – 2007.
2. *Rimán János* Matematikai analízis I. kötet / – Eger, – 1998.
3. *Rimán János* Matematikai analízis feladatgyüjtemény I. kötet / – Eger, – 2002.
4. *Kulin Judit, Pákh György* Matematikai analízis feladatokban / Beregszász: PoliPrint Kft, – 2007.
5. *Lajkó Károly* Analízis / Debrecen: Matematikai és Informatikai Intézet, – 2000.
6. *Csernyák László* Analízis / Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó, – 2006.
7. *Györfi Jenő* A matematikai analízis elemei / Kolozsvár: Scientia Kiadó, – 2005.
8. *Tóth Zoltán* Analízis Budapest: Századvég Kiadó, – 2007.

Посібник з математичного аналізу для інформатиків призначений для студентів І курсу Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці спеціальності А 4.09 Середня освіта (Інформатика) заочної форми навчання з метою організації контрольних робіт з курсу "Математичний аналіз".

Матеріал призначений для використання як навчально-методичний посібник з дисципліни "Математичний аналіз ".

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики
(протокол № 10 від «23» червня 2025 року)

Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості вищої освіти
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол №7 від 26 серпня 2025 року)

Рекомендовано до видання у електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

(протокол №8 від 28 серпня 2025 року)

Підготовлено до видання у електронній формі (PDF) кафедрою математики та інформатики з Видавничим відділом Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II