

Кафедра математики та інформатики
Matematika és Informatika Tanszék

«МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ»
(МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДЛЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ)

(для студентів 1-го курсу спеціальності А4.09 Середня освіта (Інформатика))

MATEMATIKAI ANALÍZIS

(Módszertani útmutató gyakorlati foglalkozásokhoz)

Перший (бакалаврський) / Alapképzés (BA)
(ступінь вищої освіти / a felsőoktatás szintje)

A Osztás / A Oktatás
(галузь знань / képzési ág)

"Інформатика"
"Informatika"
(освітня програма / képzési program)



Берегове / Beregszász
2025 р. / 2025

Посібник з математичного аналізу для інформатиків призначений для студентів I курсу Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці спеціальності А 4.09 Середня освіта (Інформатика) денної та заочної форми навчання з метою організації практичної роботи з курсу "Математичний аналіз".

Кожна тема посібника умовно поділена на дві частини: короткий теоретичний матеріал та завдання для практичних занять з курсу "Математичний аналіз".

Матеріал призначений для використання як навчально-методичний посібник з дисципліни "Математичний аналіз".

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики
(протокол № 10 від «23» червня 2025 року)

Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості вищої освіти
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол №7 від 26 серпня 2025 року)

Рекомендовано до видання у електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол №8 від 28 серпня 2025 року)

Підготовлено до видання у електронній формі (PDF) кафедрою математики та інформатики з
Видавничим відділом Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Укладач:

СТОЙКА МИРОСЛАВ ВІКТОРОВИЧ – доцент кафедри математики та інформатики
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Рецензенти:

БОРТОШ МАРІЯ ЮЛІЇВНА – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри та диференціальних рівнянь ДВНЗ «УжНУ»;
МЕСАРОШ ЛІВІА ВАСИЛІВНА – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики та інформатики ЗУІ.

Відповідальний за випуск:

Олександр ДОБОШ – начальник Видавничого відділу ЗУІ ім. Ф.Ракоці II

За зміст посібника відповідальність несуть розробники.

Видавництво: Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II (адреса: пл. Кошута 6, м. Берегове, 90202. Електронна пошта: foiskola@kmf.uz.ua)

© Мирослав Стойка, 2025
© Кафедра математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II, 2025

A Matematikai analízis a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola, I. éves, informatika szakos, nappali és levelezős hallgatóinak készült, a Matematikai analízis c. tantárgy alaposabb tanulmányozásának és elsajátításának megkönnyítése céljából.

Ez a jegyzet elsősorban informatika szakos hallgatók számára készült, de hasznos lehet mindazok számára, akik bármely más szakon tanulnak matematikát.

A jegyzet minden témája két részre van osztva: rövid elméleti összefoglalókat és gyakorlati feladatokat tartalmaz.

Az oktatási folyamatban történő felhasználását jóváhagyta
a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Matematika és Informatika Tanszéke
(2025. június 23, 10. számú jegyzőkönyv).

Megjelentetésre javasolta a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Minőségbiztosítási Tanácsa
(2025. augusztus 26, 7. számú jegyzőkönyv).

Elektronikus formában (PDF fájlformátumban) történő kiadásra javasolta
a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Tudományos Tanácsa
(2025. augusztus 28, 8. számú jegyzőkönyv).

Szerkesztő:

SZTOJKA MIROSLÁV – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének docense

Szakmai lektorok:

BARTOS MÁRIA – fizika és matematika tudományok kandidátusa, docens, az Ungvári Nemzeti Egyetem Algebra és Diferenciál Egyenletek Tanszékének docense;

MÉSZÁROS LÍVIA – fizika és matematika tudományok kandidátusa, II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének docense.

A kiadásért felel:

DOBOS Sándor – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Kiadói Részlegének vezetője

A tartalomért kizárólag a jegyzet szerkesztője felel.

Kiadó: a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola (cím: 90 202, Beregszász, Kossuth tér 6. E-mail: foiskola@kmf.uz.ua)

© Sztojka Mirosláv, 2025

© A II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Matematika és Informatika Tanszéke, 2025

Tartalomjegyzék

1.	Elemi függvények és grafikonjaik. Értelmezési tartomány	5
2.	Számsorozatok és függvények határértéke	7
3.	A függvények folytonossága.....	9
4.	A deriváltfüggvény.....	14
5.	Derivált alkalmazása	20
6.	Függvényvizsgálat.....	28
7.	Határozatlan integrál	31
8.	Határozott integrál.....	40
9.	Az integrál alkalmazása	42
10.	Numerikus sorok	48
11.	Többváltozós függvények	53
12.	Kettős és többes integrálok	56
13.	Görbementi integrálok.....	58
	Irodalomjegyzék	60

1. Elemi függvények és grafikonjaik.

Értelmezési tartomány

Legyen D egy tetszőleges valós számokból álló halmaz. Ha minden $x \in D$ megfeleltetünk pontosan egy valós $f(x)$ számot, akkor azt mondjuk, hogy a D halmazon f függvény van értelmezve. A D halmazt értelmezési tartományának, és az $E = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x), x \in D\}$ – halmazt pedig az $f(x)$ függvény értékkészletének nevezzük.

Főbb elemi függvények:

1. Hatványfüggvény - $y = x^a, a \in \mathbb{R}$.
2. Exponenciális függvény - $y = a^x, a > 0, a \neq 1$.
3. Logaritmus függvény - $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$.
4. Trigonometrikus függvények - $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x,$
 $y = \operatorname{ctg} x$.
5. Arkuszfüggvények (*a trigonometrikus függvények inverzei*) -
 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arcctg} x$.

Gyakorlatok

1. Határozza meg az alábbi függvények értelmezési tartományát:

a) $y = \frac{7x-20}{5x^2-2x+5}$;

b) $y = \frac{x^2-2}{2x^2-3x+1}$;

c) $y = \frac{10}{|x|-5}$;

d) $y = \frac{\sqrt{x+3}}{x-2} - \frac{x+5}{\sqrt[4]{3x}}$;

e) $y = 5^{\frac{7 \sin x}{x+\pi}}$;

f) $y = \log_x \sqrt{\frac{x+1}{2-x}}$;

g) $y = \arccos \frac{3x-5}{4}$;

h) $y = \operatorname{ctg} \left(2x + \frac{\pi}{3} \right)$;

i) $y = \log_{|x|} |2x-3|!$

2. Ábrázolja az alábbi függvényeket:

a) $y = \frac{10}{|x|-5}$;

b) $y = \frac{6}{x-2}$;

c) $y = 2x^2 - 4x + 1$; d) $y = 2^{|x-3|}$;
 f) $y = 3 \left| \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right|$; g) $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x$;
 h) $y = \left| \log_{\frac{1}{3}} |x-1| \right|$!

3. 1) Határozza meg az alábbi függvények értelmezési tartományát:

a) $y = \frac{3x-15}{4x^2-x-3}$; b) $y = \sqrt{\frac{5-2x}{3x-6}}$; c) $y = \log_{(x+1)} |x+1|$!

2) Ábrázolja az alábbi függvényt:

$$y = |2 \cos x + 3|!$$

4. 1) Határozza meg az alábbi függvények értelmezési tartományát:

a) $y = \frac{x^2+5}{1-|2x-3|}$; b) $y = \sqrt{\frac{5-2x}{3x-6}}$; c) $y = \log_{(x+1)} |x+1|$!

2) Ábrázolja az alábbi függvényt:

$$y = 3 \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)!$$

5. 1) Határozza meg az alábbi függvények értelmezési tartományát:

a) $y = \frac{5x-1}{1-4x^2} - \frac{9}{x^3+64}$; b) $y = \sqrt[4]{\frac{3x^2+x+2}{3x-2}}$;

c) $y = \arcsin \frac{3x-4}{5}$!

2) Ábrázolja az alábbi függvényt:

$$y = 2 \log_2 |x+2|!$$

2. Számsorozatok és függvények határértéke

1. Számsorozatok határértéke. Valós számok sorozatának az $f : N \rightarrow R$ függvényt nevezzük, mely az összes természetes számok halmazán van értelmezve. Az $f(n)$ szám n -dik tagja a sorozatnak, melyet x_n -el jelölünk és az $x_n = f(n)$ az általános tagjának képletének nevezzük. A számsorozat jelölése: $\{x_n\}_{n \in N}$.

A sorozat konvergens, és az A -hoz konvergál, ha bármilyen $\varepsilon > 0$ értékre a sorozatnak véges sok tagja van az A szám ε környezetén belül: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n > n_0, |a_n - A| < \varepsilon$.

2. Függvények határértéke.

Heine-féle meghatározás:

Az $f : M \rightarrow R, M \subset R$ függvény határértéke az $x = a$ helyén az A szám, ha bármely $x = a$ -hoz konvergáló $(x_n), x_n \in M$ abszcissza sorozathoz tartozó függvényértékek $(f(x_n))$ sorozata az A -hoz tart: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Cauchy-féle meghatározás:

Az $f : M \rightarrow R, M \subset R$ függvény határértéke az $x = a$ helyén az A szám, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ hogy bármely az a szám δ környezetéből vett abszcisszához tartozó függvényérték az A szám ε környezetéhez tartozik: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, ha $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, hogy ha $0 < |x - a| < \delta$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Nevezetes határértékek:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Gyakorlatok

1. Igazolja, hogy az $\{x_n\} = \left\{\frac{2n+7}{n-1}\right\}$ sorozat határértéke az $A = 2$ szám!

2. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3n}$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n+2}{n+247}$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{72-5n}{3+8n}$;
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{89-11n}{6-3n}$;
- 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n^2}$;
- 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2n}{4+n^2+n^3}$;
- 7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{18n^2+2n^5}{8-n^6-7n^4}$;
- 8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{32n-62n^2+3n^3}{3n^4+23}$;
- 9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+5}{n}$;
- 10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin n!}{n^2+1}$;
- 11) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16-n+9n^2-4n^6}{3+13n+5n^5}$;
- 12) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^8+99n^6-35n^4-5n^2+6}{78-n-n^3-n^5+6n^7}$;
- 13) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-5)^4-5n^5}{n^3-(4n-6)^5}$;
- 14) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{n^2+1} - \frac{3n^2}{3n-1} \right)$;
- 15) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$;
- 16) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n(n-4)}}{\sqrt{5+(1+n)^2}}$;
- 17) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3+5+\dots+7}}{3n-7}$;
- 18) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{\sqrt{9n^2+1}}$;
- 19) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+13}}{\sqrt[5]{n^{10}+7n-8}}$;
- 20) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n+5n^9}+(n-2)(n+4)}{(2+3n)^3}$;
- 21) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n^3}{6n^3-5n+12}$;
- 22) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n^4+n^4+5n}{C_n^{n-3}}!$

3. Határozza meg az alábbi határértékeket:

1. a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6}$;
- b) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$;
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 5x}$;
- d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+1} \right)^{3x}$;
- e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \left(\sqrt{x^2+5} - \sqrt{x^2+1} \right) \right)!$
2. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+3x^2-x-1}{5x^2-4x+5}$;
- b) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{6x^2-5x+1}{8x^3-1}$;
- c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5}-2}{x^2-1}$;
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+\sin x)^{3 \operatorname{ctg} x}$;
- e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin 5x}{2 \operatorname{arctg} 4x}!$
3. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2-5x+1}{9x-14x^2}$;
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-4x+3}$;
- c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13}-4}{x^2-9}$;
- d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7-x}{3-x} \right)$;
- e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 4x}{x \sin x}!$

3. A függvények folytonossága

Az $y = f(x)$ függvényt, melynek D halmaz az értelmezési tartománya, folytonosnak nevezzük az x_0 pontban a D -ből, ha $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Ez a felvétel ekvivalens az alábbi feltételekkel:

- 1) $f(x)$ értelmezve van az x_0 pontban;
- 2) $f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ – bal és jobb oldali határértékek léteznek és végesek;
- 3) $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$;
- 4) $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

Ha ezen feltételek közül valamelyik nem teljesül, akkor az $f(x)$ függvénynek az x_0 pontban szakadása van.

Az $f : M \rightarrow R, M \subset R$ függvény az $x = a$ pontjában nem folytonos, de létezik véges jobb és bal oldali határértéke, akkor a szakadás elsőfajú, ha $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$, akkor a szakadás megszüntethető.

Az $f : M \rightarrow R, M \subset R$ függvény az $x = a$ pontjában nem folytonos és $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \pm\infty$ és $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \pm\infty$, akkor a szakadás másodfajú.

Gyakorlatok

1. Határozzák meg az $y = (7x + 5)/(3x^2 - 3)$ függvény folytonosságának tartományát (halmazát)!

2. Adott az alábbi függvény

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{ha } x < 0, \\ \cos x, & \text{ha } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ x - \frac{\pi}{2}, & \text{ha } x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Állapítsa meg, milyen szakadása van a megadott függvénynek!

3. Állapítsa meg, folytos-e az $y = 2^{\frac{8}{x+4}}$ függvény az $x_1 = 4$ és $x_2 = -4$ pontokban!

4. 1) Állapítsa meg, folytonos-e az $f(x) = (6x + 12)/(3x + 9)$ függvény az $x_1 = -1$, $x_2 = -3$ pontokban! Készítsen vázlatos ábrát!

2) Adott az alábbi függvény

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{ha } x < 0, \\ 2 \cos x, & \text{ha } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ 4 - x, & \text{ha } x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Állapítsa meg, milyen szakadása van a megadott függvénynek! Készítsen vázlatos ábrát!

3) Állapítsa meg, folytonos-e az $f(x) = \frac{2x - 4}{x + 4}$ függvény az $x_1 = 0$ és $x_2 = -4$ pontokban! Készítsen vázlatos ábrát!

5. Állapítsa meg, folytonosak-e az alábbi függvények és készítsen vázlatos ábrát!

$$1.1. f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq 2, \\ x^2 - 2, & x > 2. \end{cases} \quad 1.2. f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0, \\ \sin x, & 0 \leq x < \pi, \\ 3, & x \geq \pi. \end{cases}$$

$$1.3. f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x < -1, \\ x^2 + 1, & -1 \leq x \leq 2, \\ 2x, & x > 2. \end{cases} \quad 1.4. f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 2^x, & 0 < x \leq 2, \\ x + 3, & x > 2. \end{cases}$$

$$1.5. f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \leq -2, \\ x^3, & -2 < x \leq 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases} \quad 1.6. f(x) = \begin{cases} 3x + 4, & x \leq -1, \\ x^2 - 2, & -1 < x < 2, \\ x, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$1.7. f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1, \\ (x - 2)^2, & 1 < x \leq 3, \\ 6 - x, & x > 3. \end{cases} \quad 1.8. f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 1, \\ x^2 + 2, & 1 \leq x \leq 2, \\ -2x, & x > 2. \end{cases}$$

$$1.9. f(x) = \begin{cases} x^3, & x < -1, \\ x - 1, & -1 \leq x \leq 3, \\ 5 - x, & x > 3. \end{cases} \quad 1.10. f(x) = \begin{cases} x, & x < -2, \\ 1 - x, & -2 \leq x \leq 1, \\ x^3 - 1, & x > 1. \end{cases}$$

$$1.11. f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 0, \\ -x^2+3, & 0 < x < 1, \\ 3x-1, & x \geq 1. \end{cases} \quad 1.12. f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ x^2-4, & -2 < x \leq 3, \\ 2x, & x > 3. \end{cases}$$

$$1.13. f(x) = \begin{cases} -2, & x < 0, \\ \cos x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 1-x, & x > \pi. \end{cases} \quad 1.14. f(x) = \begin{cases} 3, & x < -1, \\ 1-2x, & -1 \leq x \leq 1, \\ \ln x, & x > 1. \end{cases}$$

$$1.15. f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq 0, \\ x^3, & 0 < x \leq 2, \\ x+3, & x > 2. \end{cases} \quad 1.16. f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1, \\ x^2+2, & -1 \leq x < 1, \\ 4x, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$1.17. f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ (x+1)^2, & 0 < x \leq 2, \\ 4-x, & x > 2. \end{cases} \quad 1.18. f(x) = \begin{cases} x-2, & x \leq -1, \\ x^2-4, & -1 < x \leq 0, \\ 5-x, & x > 0. \end{cases}$$

$$1.19. f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ (x-1)^2, & 0 < x < 2, \\ x-3, & x \geq 2. \end{cases} \quad 1.20. f(x) = \begin{cases} -3(x+1), & x \leq -1, \\ (x+1)^3, & -1 < x < 0, \\ 2x, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$1.21. f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 0, \\ -x, & 0 < x \leq 2, \\ x+1, & x > 2. \end{cases} \quad 1.22. f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 1, \\ x^2+1, & 1 < x \leq 3, \\ x+2, & x > 3. \end{cases}$$

$$1.23. f(x) = \begin{cases} x-3, & x < 0, \\ x^2-3, & 0 \leq x \leq 2, \\ x+3, & x > 2. \end{cases} \quad 1.24. f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq 3, \\ x-3, & x > 3. \end{cases}$$

$$1.25. f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ 2x^2, & 0 < x \leq 1, \\ 3+x, & x > 1. \end{cases} \quad 1.26. f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ 2x, & 0 \leq x \leq 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

$$1.27. f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi, \\ 2, & x \geq \pi. \end{cases} \quad 1.28. f(x) = \begin{cases} x-2, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x < 2, \\ 4(x-1), & x \geq 2. \end{cases}$$

$$1.29. f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ x^2-1, & 0 \leq x < 2, \\ -x, & x \geq 2. \end{cases} \quad 1.30. f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leq 0, \\ 1-x^2, & 0 < x \leq 2, \\ 2x, & x > 2. \end{cases}$$

6. Állapítsa meg, folytonosak-e az alábbi függvények a megadott pontokban!

$$2.1. f(x) = 8^{\frac{2}{x-2}} - 1; \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$$

$$2.2. f(x) = \frac{2x}{x-3}; \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 5.$$

$$2.3. f(x) = 5^{\frac{2}{x-3}} + 1; \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$$

$$2.4. f(x) = \frac{3x}{x^2-1}; \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2.$$

$$2.5. f(x) = \frac{7x}{x^2-4}; \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 3.$$

$$2.6. f(x) = 2^{\frac{3}{x+2}} + 1; \quad x_1 = -2, \quad x_2 = -1.$$

$$2.7. f(x) = 4^{\frac{5}{x-2}} + 2; \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$$

$$2.8. f(x) = 3^{\frac{3}{x+1}} - 2; \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 0.$$

$$2.9. f(x) = 5^{\frac{4}{x+1}} - 1; \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 0.$$

$$2.10. f(x) = \frac{x-3}{x+2}; \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 3.$$

$$2.11. f(x) = \frac{x+2}{x-2}; \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$$

$$2.12. f(x) = \frac{x-3}{x+5}; \quad x_1 = -5, \quad x_2 = -1.$$

$$2.13. f(x) = 3^{\frac{2}{1-x}+1}; \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2.$$

$$2.14. f(x) = 4^{\frac{3}{3-x}}; \quad x_1 = -3, \quad x_2 = 0.$$

$$2.15. f(x) = 6^{\frac{3}{x-4}} - 2; \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 5.$$

$$2.16. f(x) = \frac{x-2}{x+1}; \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 1.$$

$$2.17. f(x) = 2^{\frac{1}{x-3}} + 3; \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 4.$$

$$2.18. f(x) = 5^{\frac{2}{2-x}-1}; \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 0.$$

$$2.19. f(x) = \frac{x+7}{x-1}; \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$$

$$2.20. f(x) = \frac{x-5}{x+3}; \quad x_1 = -3, \quad x_2 = -1.$$

$$2.21. f(x) = 3^{\frac{1}{2-x}}; \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$$

$$2.22. f(x) = 9^{\frac{1}{5-x}}; \quad x_1 = 5, \quad x_2 = 6.$$

$$2.23. f(x) = 2^{\frac{3}{x-5}}; \quad x_1 = 5, \quad x_2 = 6.$$

$$2.24. f(x) = 5^{\frac{1}{x-4}} - 2; \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 4.$$

$$2.25. f(x) = 6^{\frac{1}{x-3}} + 1; \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 4.$$

$$2.26. f(x) = 7^{\frac{1}{5-x}} + 1; \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 5.$$

$$2.27. f(x) = \frac{x-3}{x+4}; \quad x_1 = -5, \quad x_2 = -4.$$

$$2.28. f(x) = \frac{x+5}{x-2}; \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 2.$$

$$2.29. f(x) = 5^{\frac{2}{x-1}+3}; \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2.$$

$$2.30. f(x) = 2^{\frac{5}{1-x}}; \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$$

4. A deriváltfüggvény

Legyen $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – az $y = f(x)$ függvény növekménye az x_0 pontban, mely a $\Delta x = x - x_0$ argumentum növekményének felel meg. Az $y = f(x)$ függvény x_0 ponthoz tartozó deriváltjának az alábbi határértéket nevezzük

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Elemi függvények deriváltfüggvényei

#	$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
1	$C \text{ (const)}$	0
2	$x^\alpha \text{ } (\alpha \neq 0)$	$\alpha x^{\alpha-1}$
3	$a^x \text{ } (a > 0, a \neq 1)$	$a^x \ln a$
4	e^x	e^x
5	$\log_a x \text{ } (a > 0, a \neq 1)$	$\log_a e \cdot \frac{1}{x}$
6	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
7	$\sin x$	$\cos x$
8	$\cos x$	$-\sin x$
9	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
10	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
11	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$

14	$\operatorname{arcctgx}$	$-\frac{1}{1+x^2}$
15	$\operatorname{sh}x$	$\operatorname{ch}x$
16	$\operatorname{ch}x$	$\operatorname{sh}x$
17	$\operatorname{th}x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}$
18	$\operatorname{cth}x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2x}$

Deriválási szabályok

Ha az $u(x)$, $v(x)$ – két deriválható függvény, akkor:

$$1. (u+v)' = u' + v';$$

$$2. (Cu)' = Cu' \quad (C = \text{const});$$

$$3. (uv)' = u'v + uv';$$

$$4. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2};$$

5. Ha az $y = f(x)$ függvény deriválható az x_0 pontban és a $z = g(y)$ függvény deriválható az $y_0 = f(x_0)$, akkor az összetett $z = g(f(x))$ függvény is deriválható az x_0 pontban, melynek deriváltja egyenlő $z'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$ (összetett függvény deriválási szabálya).

Legyen a függvény paraméteres alakban megadva

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Ha teljesül, hogy az $x = \varphi(t)$ függvény az (α, β) intervallumon invertálható (vagyis létezik inverzfüggvénye) és $t = \varphi^{-1}(x)$, akkor az y'_x derivált kiszámítható az alábbi képlettel

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Gyakorlatok

1. A definíció alapján határozza meg az $y = 2x^3 + 3x^2 - x + 1$ függvény deriváltját!

2. Deriválja az alábbi függvényeket

a) $y = x^5 \operatorname{tg} 7x$; b) $y = e^{x^2} \sin 5x$; c) $y = \sqrt[3]{x^3 - \cos^4 x}$;

d) $y = 3^{\sin^2 5x}$; e) $y = x \cos^2 x \cdot e^{x^3}$; f) $y = \frac{5x^4 - 1}{e^{2x}}$;

g) $y = \sqrt[4]{\frac{3x^2 - 1}{3x^2 + 1}}$; h) $y = 4^{\frac{x}{\ln x}}$; i) $y = \operatorname{sh}^3(x^{-\sqrt{x^2 + 2x}})$;

j) $y = ch^5 \operatorname{arctg} \sqrt{2 + x^2}$; k) $y = 5 \log_2^3 \left(\frac{e^{x^2}}{\arccos x^3} \right)!$

3. Logaritmikus deriválási szabály alapján deriválja az alábbi függvényeket

a) $y = (\cos 4x)^{\sin 3x}$; b) $y = (x^2 + 1)^{\operatorname{tg} 5x}$; c) $y = (\ln 2x)^{x^2}$;

d) $y = \frac{\sqrt[5]{x+3}}{(x-2)^3(x-7)!}$

4. Deriválja az alábbi $y(x)$ paraméteres alakban megadott függvényeket

a) $\begin{cases} x = t^2 + t + 1, \\ y = t^3 + t^2 - 1; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t! \end{cases}$

5. Deriválja az alábbi függvényeket:

1. a) $y = x^2 \operatorname{tg}^3 5x$; b) $y = \sqrt{\frac{\cos^2 x - 1}{\sin 2x - 1}}$;

c) $y = (3^{\cos 2x} + \sin 2x)^4$; d) $y = x \cos^2 x \cdot e^{x^3}$;

e) $y = (\operatorname{ctg} 2x)^{x^3}$; f) $e^{x^2 y^2} - x^4 + y^4 = 5$;

g) $\begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ y = t^3 + t^2 + 1! \end{cases}$

2. a) $y = \frac{x^3}{e^{\sin 3x}}$; b) $y = (\sin^5 x + \ln^2 x)^3$;

c) $y = 3^{x^4 - \sin^3 x}$; d) $y = x \operatorname{tg}^2 x \cdot \sin 5x$;

e) $y = (\sin 4x)^{\cos 5x}$; f) $y^2 + x^2 - \sin(x^2 y^2) = 5$;

$$g) \begin{cases} x = \ln t, \\ y = (2t+1)\cos t! \end{cases}$$

6. Deriválja az alábbi függvényeket:

1.

$$a) y = 3\sqrt{x} + \frac{7}{x} - 4x^3 + \frac{2}{x^4}; \quad b) y = \sqrt[3]{3x^4 + 3x - 2} + \frac{3}{(x-2)^2};$$

$$c) y = \cos^5 3x \cdot \sin 4x^5; \quad d) y = 4(x-2)^7 \cdot \ln(x^2 - x + 2);$$

$$e) y = (x-3)^6 \cdot \operatorname{sh}^2 3x; \quad f) y = \frac{e^{\arccos^2 x}}{\sqrt{x+5}};$$

$$g) y = \frac{7 \operatorname{arctg}(2x+1)}{(x-4)^2}; \quad j) y = \sqrt{\frac{x-5}{x+5}} \log_3(x-2x^2);$$

$$k) y = (\operatorname{th} 3x)^{\arcsin x}; \quad l) y = \frac{\sqrt{x+5}(x-3)^4}{(x+2)^3};$$

$$m) \sin y = xy^2 + 5; \quad n) \begin{cases} x = 6t^2 - 4, \\ y = 3t^5! \end{cases}$$

2.

$$a) y = \frac{7}{x^5} - \frac{3}{x} + 5\sqrt[4]{x^3} - 2x^2; \quad b) y = \sqrt[4]{(x-5)^3} - \frac{2}{3x^2 + x - 4};$$

$$c) y = \sin^2 2x \cdot \operatorname{tg}(5x+2)^3; \quad d) y = 2^{-x} \cdot \operatorname{arctg}^2 5x;$$

$$e) y = \operatorname{ch}^3(2x+5) \cdot \sqrt{3x-1}; \quad f) y = \frac{\sqrt{1+x-x^2}}{e^x};$$

$$g) y = \frac{5 \lg(3x^2-1)}{(x-3)^3}; \quad h) y = \sqrt[3]{\frac{3x+1}{3x-1}} \cdot \lg(4x+7);$$

$$i) y = (\cos(x+2))^{\ln x}; \quad j) y = \frac{(x+3)^5(x-2)^3}{\sqrt[5]{(x+7)^2}};$$

$$k) x^3 + y^3 = 5x; \quad l) \begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln t! \end{cases}$$

3.

$$a) y = 5x^7 - \frac{2}{x^5} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x}; \quad b) y = \frac{7}{(2x^2 - 3x + 1)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2};$$

$$c) y = \operatorname{ctg}^4 7x \cdot \arcsin 8x^2;$$

$$d) y = 2^{\cos x} \cdot \operatorname{arcctg}^4 x;$$

$$e) y = \operatorname{th}^5 2x \cdot \ln^2 2x;$$

$$f) y = \frac{2e^{-2x}}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}};$$

$$g) y = \frac{5 \operatorname{arctg} 2x}{(2x-1)^2};$$

$$h) y = \sqrt[4]{\frac{7x-2}{7x+2}} \cdot \cos(3x-5);$$

$$i) y = (\operatorname{sh} x)^{\sqrt{x}};$$

$$j) y = \frac{(x-4)^2 \sqrt{x-5}}{(3x+1)^6};$$

$$k) \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{7};$$

$$l) \begin{cases} x = \ln^2 t, \\ y = t + \ln t! \end{cases}$$

4.

$$a) y = 3\sqrt[3]{x} + \frac{7}{x^2} - \frac{8}{x} + 9x^4;$$

$$b) y = \frac{8}{(x-4)^3} + \sqrt[5]{7-2x-x^2};$$

$$c) y = \operatorname{tg} 7x^3 \cdot \arccos^2 3x;$$

$$d) y = \ln(2x-5) \cdot \operatorname{ctg} 3x^2;$$

$$e) y = \operatorname{cth}^4(7x-1) \cdot (x-2)^4;$$

$$f) y = \frac{(3x+1)^2}{4e^{-x^2}};$$

$$g) y = \frac{\ln(7x+5)}{(3-x)^5};$$

$$h) y = \sqrt[5]{\frac{5x+1}{5x-1}} \cdot \ln(3x-4);$$

$$i) y = (\ln(x+2))^{\cos \sqrt{x}};$$

$$j) y = \frac{\sqrt[3]{2x+1}(x-5)^2}{(2x+3)^5};$$

$$k) y^2 = \frac{x-y}{x+y};$$

$$l) \begin{cases} x = te^t, \\ y = \frac{t}{e^t}! \end{cases}$$

5.

$$a) y = \frac{7}{x^2} - \frac{4}{x} + \sqrt[4]{x^3} - 5x^6;$$

$$b) y = \sqrt[6]{(3-x)^5} - \frac{8}{(x^2-3x+2)^3};$$

$$c) y = \operatorname{arcctg}^4(7x-3) \cdot \sin 2x^3;$$

$$d) y = e^{\operatorname{tg} x} \cdot \cos^4 x;$$

$$e) y = e^{-3x^2} \cdot \operatorname{ch} x^3;$$

$$f) y = \frac{e^{3x}}{(3+5x)^2};$$

$$g) y = \frac{2 \log_3(3x-1)}{(x-7)^4};$$

$$h) y = \sqrt[6]{\frac{2-x}{2+x}} \cdot \cos(3x-5);$$

$$\text{i) } y = (\log_2 3x)^{\text{cthx}};$$

$$\text{j) } y = \frac{(9x-1)^6 (x-7)^5}{\sqrt[3]{(3x-1)^6}};$$

$$\text{k) } \cos y = x^3 y + 6;$$

$$\text{l) } \begin{cases} x = e^{-3t}, \\ y = e^{8t}! \end{cases}$$

6.

$$\text{a) } y = 5x^3 - \frac{8}{x^2} + 6\sqrt{x} - \frac{1}{x};$$

$$\text{b) } y = \frac{9}{7-x+2x^2} - \sqrt[3]{(x+5)^2};$$

$$\text{c) } y = \sin^8 3x \cdot \cos^3 4x^2;$$

$$\text{d) } y = 3(x-1)^5 \cdot \log_3 2x;$$

$$\text{e) } y = (4x-2)^5 \cdot \text{sh}^6 2x^3;$$

$$\text{f) } y = \frac{(3x-2)^3}{3e^{4x}};$$

$$\text{g) } y = \frac{\arcsin(x+1)}{(x-2)^3};$$

$$\text{h) } y = \sqrt[7]{\frac{x-9}{x+9}} \cdot \text{arctg} \sqrt{x+1};$$

$$\text{i) } y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\cos^2 x};$$

$$\text{j) } y = \frac{\sqrt[5]{4x-2}}{(3x+1)^6 (x-2)^5};$$

$$\text{k) } \text{ctg}^2(x+y) = 2x;$$

$$\text{l) } \begin{cases} x = \sqrt[3]{(t-1)^2}, \\ y = \sqrt{t-1}! \end{cases}$$

7.

$$\text{a) } y = 2\sqrt{x^3} - \frac{4}{x^2} + \sqrt[5]{x^2} + \frac{7}{x};$$

$$\text{b) } y = \sqrt[4]{(7-2x-x^2)^3} - \frac{4}{(x-3)^5};$$

$$\text{c) } y = \text{tg} \sqrt{x} \cdot \arcsin^2 5x;$$

$$\text{d) } y = \sqrt{e^{x+2}} \cdot \arcsin \sqrt{x};$$

$$\text{e) } y = \lg^2(x+3) \cdot \text{cth}^3 2x;$$

$$\text{f) } y = \frac{\sqrt{5x^2-x+2}}{e^{x^3}};$$

$$\text{g) } y = \frac{3\log_5(2x+4)}{(x-2)^2};$$

$$\text{h) } y = \sqrt[8]{\frac{4x-3}{4x+3}} \cdot \ln(5x-1);$$

$$\text{i) } y = \left(\sqrt[3]{x^2}\right)^{\arcsin \sqrt{x}};$$

$$\text{j) } y = \frac{\sqrt[8]{2x+5}}{(7x-2)^6 (x-4)^3};$$

$$\text{k) } x^2 y^2 + x = 5y;$$

$$\text{l) } \begin{cases} x = \frac{1}{t+1}, \\ y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2! \end{cases}$$

5. Derivált alkalmazása

Ha az $y = f(x)$ függvény deriválható az (a, b) intervallumon és $f'(x) > 0$ minden $x \in (a, b)$, akkor az $f(x)$ függvény szigorúan monoton növekvő az (a, b) intervallumon; ha pedig $f'(x) < 0$ minden $x \in (a, b)$, akkor az $f(x)$ függvény szigorúan monoton csökkenő ezen az intervallumon. Ha létezik olyan környezete az x_0 pontnak, hogy tetszőleges $x \neq x_0$ ebből a környezetből teljesül az $f(x) > f(x_0)$ egyenlőtlenség (vagy $f(x) < f(x_0)$), akkor az x_0 pontot helyi minimum (maximum) pontjának nevezzük az $y = f(x)$ függvénynek és az $f(x_0)$ – a függvény helyi minimumának (maximumának) nevezzük. Ezen pontokat a függvény szélsőértékhelyeinek nevezzük. Azon pontokat, melyekben az $f'(x) = 0$ vagy az $f'(x)$ nem létezik, a függvény kritikus pontjainak nevezzük.

Szükséges feltétel. Ha az x_0 pont az $f(x)$ függvény szélsőértékhelye, akkor $f'(x_0) = 0$ vagy $f'(x_0)$ nem létezik.

Elégséges feltételek.

1) Legyen $f(x)$ deriválható az x_0 kritikus pont valamely $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ környezetében, kivételesen az x_0 pontban. Akkor, ha $f'(x) > 0$ minden $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ és $f'(x) < 0$ minden $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, akkor az x_0 – helyi maximum pont; ha $f'(x) < 0$ minden $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ és $f'(x) > 0$ minden $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, akkor az x_0 – helyi minimum pont.

2) Legyen $y = f(x)$ függvény kétszer deriválható az x_0 kritikus pontban és annak valamely környezetében. Ha $f''(x_0) < 0$, akkor az x_0 – helyi maximum pont, ha $f''(x_0) > 0$, akkor x_0 – helyi minimum pont. Ha pedig $f''(x_0) = 0$, akkor további vizsgálatra van szükség.

Gyakorlatok

1. Igazolja, hogy az $y = x^3 + x$ függvény szigorúan monoton növekvő!
2. Határozza meg az alábbi függvények monotonitásának intervallumait:
 - a) $y = x^4 - 2x^2 - 5$;
 - b) $y = x^2 e^{-x}$;

$$c) y = \frac{x}{\ln x};$$

$$d) y = x - 2 \sin x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi !$$

3. Határozza meg az alábbi függvények szélsőérték helyeit:

$$a) y = 2x^3 - 3x^2;$$

$$b) y = \frac{2}{3} x^2 \sqrt[3]{6x-7} !$$

4. Határozza meg az alábbi függvények szélsőérték helyeit a második derivált segítségével:

$$a) y = x^3 - 2ax^2 + a^2x \quad (a > 0);$$

$$b) y = x^2 e^{-x} !$$

5. Határozza meg az alábbi függvény monotonitásának intervallumait:

$$y = \frac{x}{x^2 - 6x - 16} !$$

6. Határozza meg az alábbi függvény szélsőérték helyeit:

$$y = \sqrt[3]{(x^2 - 6x + 5)^2} !$$

7. Határozza meg az alábbi függvény monotonitásának intervallumait:

$$y = (x - 2)^5 (2x + 1)^4 !$$

8. Határozza meg az alábbi függvény szélsőérték helyeit:

$$y = x - \ln(1 + x) !$$

9. Határozza meg az alábbi függvény monotonitásának intervallumait:

$$y = x - e^x !$$

10. Határozza meg az alábbi függvény szélsőérték helyeit:

$$y = -x^2 \sqrt{x^2 + 2} !$$

11. Határozza meg az alábbi függvények monotonitásának intervallumait:

$$1.1. \quad a) y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14; \quad b) y = 2x^2 - \ln x;$$

$$b) y = 2\sqrt{3} \sin x - 3x \quad (0 \leq x \leq 2\pi) !$$

$$1.2. \quad a) y = (x - 2)^4 (2x + 1)^3; \quad b) y = x e^x;$$

$$c) y = 2x + \cos x !$$

$$1.3. \quad a) y = \frac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}; \quad b) y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2});$$

$$c) y = 2 \sin x + \cos 2x, \quad (0 \leq x \leq 2\pi)!$$

$$1.4. \quad a) y = \frac{x^2 - 1}{x}; \quad b) y = \frac{x^2}{e^x};$$

$$c) y = x + 3 \operatorname{tg} x!$$

$$1.5. \quad a) y = (x - 3)^5 (3x - 1)^2; \quad b) y = x^2 + \ln x;$$

$$c) y = \sin x - \cos x, \quad (-\pi \leq x \leq 0)!$$

$$1.6. \quad a) y = \frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}; \quad b) y = x - \ln(1 + x^2);$$

$$c) y = 3x + 3 \cos x!$$

$$1.7. \quad a) y = 3x^3 - 4^2; \quad b) y = x e^{-x};$$

$$c) y = \operatorname{ctg} x - x!$$

$$1.8. \quad a) y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}; \quad b) y = \frac{\ln x}{x};$$

$$c) y = \operatorname{tg} x + 2x!$$

$$1.9. \quad a) y = \frac{4x - x^2 - 4}{x}; \quad b) y = e^{\frac{1}{5+x}};$$

$$c) y = \sqrt{3}x - 2 \sin x, \quad (0 \leq x \leq 2\pi)!$$

$$1.10. \quad a) y = \frac{x + 1}{(x - 1)^2}; \quad b) y = x + \frac{\ln x}{x};$$

$$c) y = 5 \operatorname{tg} x + 1!$$

$$1.11. \quad a) y = \frac{x}{9 - x}; \quad b) y = x^2 - 2 \ln x;$$

$$c) y = 3 \operatorname{ctg} x - 5!$$

$$1.12. \quad a) y = 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 6x; \quad b) y = -\ln \frac{1+x}{1-x};$$

$$c) y = 2x + \cos x!$$

$$1.13. \quad a) y = \frac{(x - 2)^3}{x + 1}; \quad b) y = \ln(x^2 + 1);$$

$$c) y = 3 \operatorname{tg} x + 7!$$

$$1.14. \quad a) y = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}; \quad b) y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}};$$

$$c) y = 2 \cos x - 2 \sin x, \quad (-\pi \leq x \leq 0)!$$

$$1.15. \text{ a) } y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1; \quad \text{ b) } y = x^2 e^{\frac{1}{x}};$$

$$\text{ c) } y = 1 + tg^2 x, \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right)!$$

$$1.16. \text{ a) } y = \frac{x^2 + 6}{x^2 + 1}; \quad \text{ b) } y = \sqrt{x} \ln x;$$

$$\text{ c) } y = \sin 2x + 2 \cos x, \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)!$$

$$1.17. \text{ a) } y = \sqrt[3]{(x^2 - a^2)^2}; \quad \text{ b) } y = \ln(x^2 + 1) - x;$$

$$\text{ c) } y = \arctg x + x!$$

$$1.18. \text{ a) } y = \sqrt{2x - x^2}; \quad \text{ b) } y = ae^{px} + be^{-px};$$

$$\text{ c) } y = x - \operatorname{arccctg} x!$$

$$1.19. \text{ a) } y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 2x}; \quad \text{ b) } y = x \ln x;$$

$$\text{ c) } y = 3 \sin x - 3 \cos x, \quad (-\pi \leq x \leq 0)!$$

$$1.20. \text{ a) } y = x\sqrt{ax - x^2} \quad (a > 0); \quad \text{ b) } y = e^{\sqrt{x^2 - 1}};$$

$$\text{ c) } y = 3 \arctg x + x^3!$$

$$1.21. \text{ a) } y = \frac{1 + 3x}{\sqrt{4 + 5x^2}}; \quad \text{ b) } y = \frac{1}{\ln(x^4 + 4x^3 + 30)};$$

$$\text{ c) } y = \cos 2x - \sin^2 x, \quad (0 \leq x \leq 2\pi)!$$

$$1.22. \text{ a) } y = \frac{4\sqrt{3}}{9x\sqrt{1-x}}; \quad \text{ b) } y = x - \ln(1+x);$$

$$\text{ c) } y = x \sin x + \cos x, \quad (0 \leq x \leq 2\pi)!$$

$$1.23. \text{ a) } y = (x - 5^2) \sqrt[3]{(x+1)^2}; \quad \text{ b) } y = \frac{-3}{x} + e^x;$$

$$\text{ c) } y = \sec x + 5, \quad \left(0 \leq x \leq 2\pi, \quad x \neq \frac{\pi}{2}; \quad \frac{3\pi}{2} \right)!$$

$$1.24. \text{ a) } y = (2x - 3)^3 (x + 5)^5; \quad \text{ b) } y = \frac{1}{x} + e^{-x};$$

$$\text{ c) } y = \sec x + \operatorname{cosec} x, \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \quad x \neq 0 \right)!$$

$$1.25. a) y = \frac{x-1}{x+1};$$

$$b) y = \ln(1+x) - x;$$

$$c) y = 2 + 5 \operatorname{tg} x !$$

$$1.26. a) y = \frac{x+3}{(x+3)^2};$$

$$b) y = e^x - \frac{2}{x};$$

$$c) y = 7 \operatorname{ctg} x - 2 !$$

$$1.27. a) y = \frac{x^3+4}{x^2};$$

$$b) y = \frac{e^{2x}+1}{e^x};$$

$$c) y = \arcsin x + x^3 !$$

$$1.28. a) y = \frac{x^2}{(x+2)^2};$$

$$b) y = x + \ln(x^2 - 4);$$

$$c) y = \arccos x - x^3 !$$

$$1.29. a) y = \frac{x^4}{x^3-1};$$

$$b) y = -x \ln^2 x;$$

$$c) y = 3x - \cos x !$$

$$1.30. a) y = (x+1)\sqrt[3]{x^2};$$

$$b) y = (x+1)e^{2x};$$

$$c) y = \sin 2x - 5x !$$

12. Határozza meg az alábbi függvények szélsőérték helyeit:

$$2.1. a) y = \frac{4\sqrt{3}}{9x\sqrt{1-x}};$$

$$b) y = 2e^{3x} + 3e^{-2x} !$$

$$2.2. a) y = 3x^2 - 2x^3;$$

$$b) y = \frac{\sqrt{x}}{\ln x} !$$

$$2.3. a) y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7;$$

$$b) y = x \sin x + \cos x - \frac{1}{4}x^2;$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right) !$$

$$2.4. a) y = x^4 - 2x^2 + 5;$$

$$b) y = 2x^2 - \ln x !$$

$$2.5. a) y = \sqrt[3]{(x^2-4)^2};$$

$$b) y = e^{\frac{x^2}{4-x}} !$$

$$2.6. a) y = \frac{x-1}{(x+1)^2};$$

$$b) y = x + 2 \sin x;$$

$$(0 \leq x \leq 2\pi)!$$

$$2.7. \text{ a) } y = \frac{x^2}{4x^2 - 1};$$

$$\text{b) } y = x^3 e^{\frac{-x^2}{2}} !$$

$$2.8. \text{ a) } y = \frac{4x - x^2 - 4}{x};$$

$$\text{b) } y = x - 2 \arctg x !$$

$$2.9. \text{ a) } y = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 9; \quad \text{b) } y = \frac{e^{2x}}{e^x - 1} !$$

$$2.10. \text{ a) } y = \frac{(x-2)^2}{x+1};$$

$$\text{b) } y = x + 2 \cos x;$$

$$(0 \leq x \leq 2\pi)!$$

$$2.11. \text{ a) } y = x^4 + 2x^2 - 8x - 5; \quad \text{b) } y = \frac{\ln x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} !$$

$$2.12. \text{ a) } y = (x+1)\sqrt[3]{x};$$

$$\text{b) } y = \frac{x^2}{\ln x} !$$

$$2.13. \text{ a) } y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1; \quad \text{b) } y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} !$$

$$2.14. \text{ a) } y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}};$$

$$\text{b) } y = \ln(1 + x^2) - x !$$

$$2.15. \text{ a) } y = \frac{1 + 3x}{\sqrt{4 + 5x^2}};$$

$$\text{b) } y = e^{2x}(x-1) !$$

$$2.16. \text{ a) } y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1};$$

$$\text{b) } y = e^{-x}(x^2 - 3)!$$

$$2.17. \text{ a) } y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1};$$

$$\text{b) } y = \sin 2x - x !$$

$$2.18. \text{ a) } y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 5;$$

$$\text{b) } y = 2 \arctg x + \frac{5}{2(1+x^2)} !$$

$$2.19. \text{ a) } y = x^2(x-12)^2;$$

$$\text{b) } y = 2 \cos \frac{x}{2} + 3 \cos \frac{x}{3} !$$

$$2.20. \text{ a) } y = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2};$$

$$\text{b) } y = \operatorname{ch} x !$$

$$2.21. \text{ a) } y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1};$$

$$\text{b) } y = \frac{e^x}{x} !$$

$$2.22. \text{ a) } y = \frac{16}{x(4-x^2)};$$

$$\text{b) } y = x \ln^2 x !$$

$$2.23. a) y = \frac{x^2}{x^2 + 3};$$

$$b) y = 2xe^x!$$

$$2.24. a) y = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 8}};$$

$$b) y = x - \arctg x!$$

$$2.25. a) y = x(x-1)^2(x-2)^2;$$

$$b) y = x - \ln(1+x)!$$

$$2.26. a) y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 4}};$$

$$b) y = x \ln x!$$

$$2.27. a) y = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2};$$

$$b) y = x^2 e^{-x}!$$

$$2.28. a) y = (1+x^2)(2-x);$$

$$b) y = 2^{\frac{x^2-1}{x^2+1}}!$$

$$2.29. a) y = \frac{x}{x-2};$$

$$b) y = 2 \sin 2x + \sin 4x!$$

$$2.30. a) y = (x-3)\sqrt{x};$$

$$b) y = \frac{\ln x}{x}!$$

13. Határozza meg az alábbi függvények szélsőérték helyeit a második derivált segítségével:

$$3.1. y = x + \frac{4}{x};$$

$$3.2. y = x + \sqrt{1-x};$$

$$3.3. y = \frac{x^2}{e^x};$$

$$3.4. y = \operatorname{ch} 2x;$$

$$3.5. y = \frac{x}{\ln x};$$

$$3.6. y = \frac{e^{-x}}{x};$$

$$3.7. y = \ln(1+x^2);$$

$$3.8. y = x^4(12 \ln x - 7);$$

$$3.9. y = (x+2)^6 + 2x + 2;$$

$$3.10. y = e^{\arctg x} - \arctg x;$$

$$3.11. y = x^2 - \arcsin x;$$

$$3.12. y = \frac{\ln x}{x};$$

$$3.13. y = \frac{a}{x} \ln \frac{x}{2} (a > 0);$$

$$3.14. y = -\sqrt{x-5};$$

$$3.15. y = \frac{9}{x} + x;$$

$$3.16. y = \frac{x^2}{3-x^2};$$

$$3.17. y = x^2 + \frac{2}{x};$$

$$3.18. y = x^3 - 3x^2 + 5;$$

$$3.19. y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2};$$

$$3.20. y = x^3(x-2)^2;$$

$$3.21. y = e^{-x^2};$$

$$3.22. y = xe^x;$$

$$3.23. y = x^4 - 2x^2 - 4;$$

$$3.24. y = \ln \cos x;$$

$$3.25. y = \ln \sin x;$$

$$3.26. y = \frac{\ln x}{x^2};$$

$$3.27. y = \frac{x}{x^2 + 1};$$

$$3.28. y = e^{\sin x} \quad (0 \leq x \leq 2\pi);$$

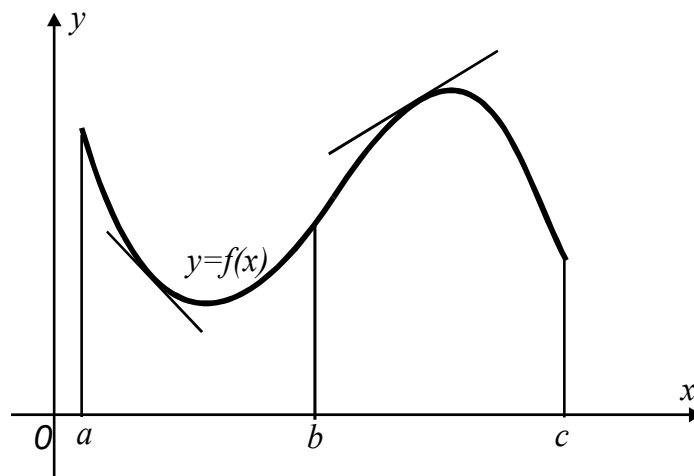
$$3.29. y = x^2 + \frac{1}{x^2};$$

$$3.30. y = \frac{e^x}{x+1} !$$

6. Függvényvizsgálat

1. Konkáv és konvex függvények egy intervallumon. Inflexiós pont.

Az $y = f(x)$ függvény grafikonját konvexnek nevezzük az (a,b) intervallumon, ha a grafikon görbe az (a,b) intervallumon az (a,b) szakaszból vett x pontban húzott érintő felett helyezkedik el. Ha a (b,c) intervallumon a grafikon görbe a (b,c) szakaszból vett x pontban húzott érintő alatt helyezkedik el, akkor az $y = f(x)$ függvény grafikonját konkávnak nevezzük a (b,c) intervallumon (6.1 ábra).



6.1 ábra

Ha az $y = f(x)$ függvény kétszer deriválható az (a,b) intervallumon és $f''(x) > 0$, akkor az konvex az (a,b) intervallumon; ha pedig $f''(x) < 0$ a (b,c) intervallumon, akkor az konkáv a (b,c) intervallumon.

Azon pontokat, melyekben a függvény grafikonja görbületet vált (konvexről konkávra, vagy fordítva) a függvény inflexiós pontjainak nevezzük.

2. Aszimptoták.

Ha az $y = f(x)$ függvényre létezik olyan egyenes, hogy az $M(x, f(x))$ pont és az egyenes közti távolság a nullához közelít, amikor az M pont a végtelenségbe tart az origóhoz képest, akkor ezt az egyenest a függvény aszimptotájának nevezzük.

Az $x = a$ egyenes függőleges aszimptotája az $y = f(x)$ függvénynek, ha $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$

vagy $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$. Folytonos függvényeknek nincs függőleges aszimptotája.

Az $y = kx + b$ ferde aszimptota, ha a következő határértékek léteznek és végesek:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{f(x)}{x} = k \text{ és } \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} (f(x) - kx) = b.$$

Gyakorlatok

1. Igazolja, hogy az $y = x \arctg x$ függvény grafikonja konvex a valós számok halmazán!
2. Igazolja, hogy az $y = \ln(x^2 - 1)$ függvény grafikonja konkáv a valós számok halmazán!
3. Határozza meg az $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$ függvény görbületeinek intervallumait és az inflexiós pontokat!
4. Végezze el a teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényeknél:

$$\text{a) } y = \frac{x^3}{3 - x^2}; \quad \text{b) } y = x^3 e^{-x} !$$

5. Végezze el a teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényeknél és ábrázolja azokat:

$$1. \quad y = -\ln(x^2 - 4x + 5)$$

$$2. \quad y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}.$$

$$3. \quad y = x^2 + \frac{2}{x} !$$

7. Végezze el a teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényeknél és ábrázolja azokat!

$$1. \text{ a) } y = \frac{2(x+1)^2}{x-2};$$

$$\text{b) } y = e^{2x-x^2}.$$

$$2. \text{ a) } y = \frac{2+x}{(x+1)^2};$$

$$\text{b) } y = x + \ln(x^2 - 4)$$

$$3. \text{ a) } y = \frac{(1-x)^3}{(x-2)^2};$$

$$\text{b) } y = x \ln^2 x.$$

$$4. \text{ a) } y = \frac{x^2}{(x+3)^2};$$

$$\text{b) } y = \frac{4e^{x^2} - 1}{e^{x^2}}.$$

$$5. \text{ a) } y = \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^2;$$

$$\text{b) } y = x^2 e^{-x^2/2}.$$

$$6. \text{ a) } y = \frac{x^3}{9-x^3};$$

$$\text{b) } y = x e^{1/x}.$$

$$7. \text{ a) } y = \frac{4x}{4+x^2};$$

$$\text{b) } y = \ln(9-x^2).$$

$$8. \text{ a) } y = \frac{x^4}{x^3-1};$$

$$\text{b) } y = x e^x.$$

$$9. \text{ a) } y = \frac{2x^2+4x+2}{2-x};$$

$$\text{b) } y = x^2 e^{1/x}.$$

$$10. \text{ a) } y = (x^2-1)^3;$$

$$\text{b) } y = (x+2)e^{1-x}.$$

7. Határozatlan integrál

Határozatlan integrál tulajdonságai:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$
2. $\int f'(x)dx = f(x) + C.$
3. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx, \quad a \neq 0.$
4. $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$

Az alapintegrálok:

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1).$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1); \quad \int e^x dx = e^x + C.$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
8. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$
9. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$
10. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0).$
11. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C \quad (a \neq 0).$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C, \quad |x| < |a|.$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C, \quad |x| > |a|.$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + C.$$

$$15. \int shx dx = chx + C.$$

$$16. \int chx dx = shx + C.$$

$$17. \int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C.$$

$$18. \int \frac{dx}{sh^2 x} = -cth x + C.$$

Gyakorlatok

I. Adja meg az alábbi határozatlan integrálokat:

$$1. \int \left(6x^3 - 4\sqrt[5]{x^2} + \frac{5}{x^2} \right) dx;$$

$$2. \int \frac{(x+2)^2}{\sqrt{x}} dx;$$

$$3. \int \left(\sin x + 4^x \cdot 3^x - \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} \right) dx;$$

$$4. \int \frac{3 + \sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}} dx;$$

$$5. \int (\cos 4x - 3 \operatorname{tg} 2x + e^{5-x}) dx;$$

$$6. \int \sqrt[5]{(7x-2)^3} dx;$$

$$7. \int \frac{(\ln x)^4}{x} dx;$$

$$8. \int \frac{(\arcsin x)^3 - x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$9. \int \frac{\arctg^5 x}{1+x^2} dx;$$

$$10. \int x^2 \sqrt{3x^3 + 4} dx;$$

$$11. \int e^{\cos x} \cdot \sin x dx;$$

$$12. \int \sin^4 x \cdot \cos x dx !$$

II. Adja meg az alábbi határozatlan integrálokat:

$$1. \int 3^x \left(1 + \frac{3^{-x}}{\sin^2 x} \right) dx;$$

$$2. \int \left(\frac{2}{\sqrt[4]{x^3}} - \frac{1}{x^5 \sqrt{x}} \right) dx;$$

$$3. \int \frac{3 - 2ctg^2 x}{\cos^2 x} dx;$$

$$4. \int (2tgx + 3ctgx)^2 dx;$$

$$5. \int \frac{dx}{x(1 + \ln x)};$$

$$6. \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{2 + tgx}};$$

$$7. \int \frac{4^x dx}{\sqrt{1 - 16^x}};$$

$$8. \int \frac{2x + (\arccos 3x)^2}{\sqrt{1 - 9x^2}} dx !$$

III. Adja meg az alábbi határozatlan integrálokat:

$$1. a) \int \left(3x^2 + 4\sqrt{x^5} - \frac{5}{x} \right) dx;$$

$$b) \int \sqrt[3]{(5x - 4)} dx;$$

$$c) \int \cos(4x - 7) dx;$$

$$d) \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}} dx;$$

$$e) \int \frac{\ln^2(x+1)}{x+1} dx;$$

$$f) \int \frac{\cos 2x}{\sin 2x + 3} dx;$$

$$g) \int \frac{\sqrt{tgx}}{\cos^2 x} dx;$$

$$h) \int \frac{\sqrt[4]{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx;$$

$$i) \int x e^{2-x^2} dx;$$

$$j) \int \frac{x+2}{3x^2 + 4} dx !$$

$$2. a) \int \frac{\sqrt[4]{x} - 3x^3 + 5}{x^2} dx;$$

$$b) \int \sqrt[5]{4 - 3x} dx;$$

$$c) \int \sin(10x - 7) dx;$$

$$d) \int x^2 \sqrt{x^3 + 9} dx;$$

$$e) \int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{\ln(x+2)}};$$

$$f) \int \sin 3x \cos^3 3x dx;$$

$$g) \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \sqrt[3]{ctg^2 x}};$$

$$h) \int \frac{dx}{(1+x^2) \arctg^3 x};$$

- i) $\int \frac{x}{e^{x^2+4}} dx;$
3. a) $\int \left(\sqrt[7]{x} + \frac{1}{x^3} + 6x^4 \right) dx;$
- c) $\int \cos(7x+5) dx;$
- e) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln(2x+1)}}{2x+1} dx;$
- g) $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{tg}^3 x}}{\cos^2 x} dx;$
- i) $\int x^2 e^{3-2x^3} dx;$
4. a) $\int \frac{\sqrt[3]{x} + 3x^2 - 4}{\sqrt{x}} dx;$
- c) $\int \cos(11x+2) dx;$
- e) $\int \frac{\sqrt{\ln^5(3x-2)}}{3x-2} dx;$
- g) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^9 3x}}{\sin^2 3x} dx;$
- i) $\int \frac{x}{e^{4x^2+1}} dx;$
5. a) $\int \left(\sqrt[5]{x^2} - \frac{1}{x} + 5x^4 \right) dx;$
- c) $\int \sin\left(\frac{1}{3}x - 2\right) dx;$
- e) $\int \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx;$
- g) $\int \frac{\operatorname{tg}^4(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx;$
- i) $\int x^2 e^{5x^3-2} dx;$
- j) $\int \frac{x-4}{\sqrt{2-9x^2}} dx!$
- b) $\int \sqrt[3]{10x+9} dx;$
- d) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}} dx;$
- f) $\int \frac{\cos 2x}{4 - \sin 2x} dx;$
- h) $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arccctg} x}}{1+x^2} dx;$
- j) $\int \frac{x-4}{25x^2+1} dx!$
- b) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5x+1}};$
- d) $\int \frac{x}{2x^2+3} dx;$
- f) $\int \frac{\cos 4x}{2 \sin^2 4x} dx;$
- h) $\int \frac{(\arccos 2x)^7}{\sqrt{1-4x^2}} dx;$
- j) $\int \frac{x+5}{\sqrt{4-25x^2}} dx!$
- b) $\int \sqrt[10]{11-5x} dx;$
- d) $\int x^2 (x^3+3)^4 dx;$
- f) $\int \sqrt{\cos^3 5x} \cdot \sin 5x dx;$
- h) $\int \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx;$
- j) $\int \frac{2x+7}{1+9x^2} dx!$

6. a) $\int \frac{\sqrt{x^7} - 4 + 5x^2}{x^3} dx;$

b) $\int \frac{dx}{12x+4};$

c) $\int \cos(20x-11)dx;$

d) $\int \frac{x}{(x^2+3)^4} dx;$

e) $\int \frac{dx}{(x+3)\ln^5(x+3)};$

f) $\int \frac{\cos 7x}{\sqrt[3]{\sin 7x}} dx;$

g) $\int \frac{\operatorname{ctg}^7 5x}{\sin^2 5x} dx;$

h) $\int \frac{4\operatorname{arctg} x - x}{1+x^2} dx;$

i) $\int x e^{3-2x^2} dx;$

j) $\int \frac{x-9}{\sqrt{4-36x^2}} dx !$

7. a) $\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2} - 6x^3 \right) dx;$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{7x+3}};$

c) $\int \sin(5x+7)dx;$

d) $\int x^3 \sqrt{x^2+8} dx;$

e) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^7(3x+2)}}{3x+2} dx;$

f) $\int (4 + \cos 5x)^2 \sin 5x dx;$

g) $\int \frac{dx}{\cos^2 7x \sqrt{\operatorname{tg} 7x}};$

h) $\int \frac{\arccos^7 3x-1}{\sqrt{1-9x^2}} dx;$

i) $\int \frac{x^2}{e^{x^3-4}} dx;$

j) $\int \frac{x+1}{2+3x^2} dx !$

8. a) $\int \left(\sqrt[7]{x^3} + \frac{4}{x^2} - 3x^5 \right) dx;$

b) $\int \sqrt[7]{4-9x} dx;$

c) $\int \cos\left(\frac{x}{5}+2\right) dx;$

d) $\int \frac{x}{\sqrt{5+x^2}} dx;$

e) $\int \frac{dx}{(x+5)\ln^4(x+5)};$

f) $\int \sqrt{\sin^3 2x} \cdot \cos 2x dx;$

g) $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg}^2(x+3)}}{\sin^2(x+3)} dx;$

h) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin^5 x};$

i) $\int x^4 e^{3-x^5} dx;$

j) $\int \frac{3x+2}{\sqrt{2-4x^2}} dx !$

9. a) $\int \frac{\sqrt{x}+2-3x^2}{\sqrt[3]{x}} dx;$

b) $\int \frac{dx}{5x+8};$

- c) $\int \sin(8x+7)dx;$
- e) $\int \frac{\ln^3(x-4)}{(x-4)}dx;$
- g) $\int \frac{\sqrt[4]{tg^3 5x}}{\cos^2 5x}dx;$
- i) $\int x^2 e^{9-2x^3}dx;$
10. a) $\int \left(\sqrt[5]{x^9} - \frac{5}{x^2} + 4x^3 \right) dx;$
- c) $\int \cos(4x-9)dx;$
- e) $\int \frac{\sqrt[8]{\ln^3(2x+3)}}{2x+3}dx;$
- g) $\int \frac{\sqrt[5]{ctg^3 2x}}{\sin^2 2x}dx;$
- i) $\int \frac{x}{e^{3x^2+5}}dx;$
11. a) $\int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^3} + \sqrt[4]{x} \right) dx;$
- c) $\int \sin(1-2x)dx;$
- e) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+\ln(x+1)}};$
- g) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot tg^7 x};$
- i) $\int x^3 e^{5x^4-3}dx;$
12. a) $\int \left(\sqrt[6]{x} + \frac{3}{x^4} - 5x^2 \right) dx;$
- c) $\int \cos(4-3x)dx;$
- d) $\int \frac{x}{1+25x^4}dx;$
- f) $\int \frac{\sin 6x}{\cos 6x+4}dx;$
- h) $\int \frac{\sqrt[3]{\arctg^2 x}}{1+x^2}dx;$
- j) $\int \frac{2x+5}{1+4x^2}dx!$
- b) $\int \sqrt[5]{9x-3}dx;$
- d) $\int x^4 \sqrt{3+x^2}dx;$
- f) $\int (\sin 4x+5)^3 \cos 4x dx;$
- h) $\int \frac{8x - \arctg 2x}{1+4x^2}dx;$
- j) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{1-4x^2}}dx!$
- b) $\int \sqrt[3]{5-6x}dx;$
- d) $\int \sqrt[3]{x^3-8} \cdot x^2 dx;$
- f) $\int \frac{\cos 3x}{1+4 \sin 3x}dx;$
- h) $\int \frac{(\arccos x)^4 - 1}{\sqrt{1-x^2}}dx;$
- j) $\int \frac{x-4}{9+x^2}dx!$
- b) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-7x}};$
- d) $\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{1+x^3}}dx;$

$$e) \int \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx;$$

$$f) \int \frac{\sin 5x}{\sqrt{2 + \cos 5x}} dx;$$

$$g) \int \frac{dx}{\sin^2 3x \cdot \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 3x}};$$

$$h) \int \frac{\arcsin^4 3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx;$$

$$i) \int x e^{5-3x^2} dx;$$

$$j) \int \frac{5+x}{\sqrt{4-9x^2}} dx !$$

$$13. a) \int \left(\sqrt{x^7} - \frac{4}{x} + 3x^6 \right) dx;$$

$$b) \int \frac{dx}{2-5x};$$

$$c) \int \sin(5x+8) dx;$$

$$d) \int x^4 \sqrt{3-x^2} dx;$$

$$e) \int \frac{\ln^6(4x+1)}{4x+1} dx;$$

$$f) \int \sqrt{2+4\sin x} \cos x dx;$$

$$g) \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1+\operatorname{tg} x}};$$

$$h) \int \frac{2+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}} dx;$$

$$i) \int x e^{2-x^2} dx;$$

$$j) \int \frac{5x-2}{x^2+4} dx !$$

$$14. a) \int \frac{(2-\sqrt[3]{x})^2}{x^3} dx;$$

$$b) \int \frac{dx}{(3x-7)^{10}};$$

$$c) \int \cos\left(3-\frac{x}{2}\right) dx;$$

$$d) \int 2^{x^2} \cdot x dx;$$

$$e) \int \frac{dx}{(x+7)\sqrt[3]{\ln^2(x+1)}};$$

$$f) \int \frac{\cos 4x}{\sqrt[3]{\sin^2 4x}} dx;$$

$$g) \int \frac{\operatorname{ctg}^5 4x}{\sin^2 4x} dx;$$

$$h) \int \frac{\operatorname{arctg}^4 3x}{1+9x^2} dx;$$

$$i) \int \frac{x^2}{e^{3x^3-2}} dx;$$

$$j) \int \frac{2x+1}{\sqrt{1-x^2}} dx !$$

$$15. a) \int \frac{(\sqrt[5]{x^2}+1)^2}{\sqrt{x}} dx;$$

$$b) \int \frac{dx}{\sqrt{3-4x}};$$

$$c) \int \sin(2x+5) dx;$$

$$d) \int \frac{x^2}{x^6+9} dx;$$

$$e) \int \frac{\sqrt{\ln^5(3x+1)}}{3x+1} dx;$$

$$f) \int \frac{\sin 6x}{3+2\cos 6x} dx;$$

- g) $\int \frac{\sqrt[7]{\operatorname{tg} 3x}}{\cos^2 3x} dx;$
- h) $\int \frac{3 - \sqrt{\arcsin 2x}}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx;$
- i) $\int x^3 e^{5-x^4} dx;$
- j) $\int \frac{3x-1}{x^2+9} dx. !$
16. a) $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx;$
- b) $\int \sqrt[4]{5x+7} dx;$
- c) $\int \cos(3x-5) dx;$
- d) $\int \frac{x}{\sqrt{3-x^4}} dx;$
- e) $\int \frac{\ln^6(5x+2)}{5x+2} dx;$
- f) $\int \frac{\sin 2x}{4+3\cos 2x} dx;$
- g) $\int \frac{dx}{\sin^2 4x \sqrt{\operatorname{ctg} 4x}};$
- h) $\int \frac{(\operatorname{arccotg} 2x)^3}{1+4x^2} dx;$
- i) $\int \frac{x}{e^{2x^2+3}} dx;$
- j) $\int \frac{4x+3}{\sqrt{1-4x^2}} dx !$
17. a) $\int \frac{x^3+2x-3}{\sqrt[4]{x}} dx;$
- b) $\int (2x+1)^{15} dx;$
- c) $\int \sin(3-2x) dx;$
- d) $\int \frac{x^4}{\sqrt{3+x^5}} dx;$
- e) $\int \frac{dx}{(x-1)\ln^3(x-1)};$
- f) $\int \frac{2\sin x}{3+\cos^2 x} dx;$
- g) $\int \frac{1+2\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} dx;$
- h) $\int \frac{2+\arcsin^4 x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$
- i) $\int e^{-x^3+1} \cdot x^2 dx;$
- j) $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-4x^2}} dx !$
18. a) $\int \left(\sqrt[5]{x^3} - \frac{3}{x} + 2x^4 \right) dx;$
- b) $\int (14x-3)^{1/4} dx;$
- c) $\int \cos(9x+4) dx;$
- d) $\int \frac{x^2}{x^6+4} dx;$
- e) $\int \frac{dx}{(x+3)^4 \sqrt{\ln(x+3)}};$
- f) $\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{3+\sin 2x}} dx;$
- g) $\int \frac{dx}{\sin^2 x (1+\operatorname{ctg} x)};$
- h) $\int \frac{dx}{(1+4x^2) \operatorname{arctg}^3 2x};$

- i) $\int \frac{x^3}{e^{-x^4+5}} dx;$
19. a) $\int \left(x^6 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} \right) dx;$
- c) $\int \sin(4x+5) dx;$
- e) $\int \frac{2+\ln(5x-3)}{5x-3} dx;$
- g) $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 7x}}{\cos^2 7x} dx;$
- i) $\int x e^{\frac{x^2}{3}+2} dx;$
20. a) $\int \frac{\sqrt[4]{x}-2x+4}{x^3} dx;$
- c) $\int \cos(3x-5) dx;$
- e) $\int \frac{\sqrt[5]{\ln(2x+7)}}{2x+7} dx;$
- g) $\int \frac{\operatorname{ctg}^{10} 2x}{\sin^2 2x} dx;$
- i) $\int x^2 e^{2-4x^3} dx;$
21. a) $\int \left(x^5 - \frac{7}{x} + \sqrt[6]{x} \right) dx;$
- c) $\int \sin(4x+7) dx;$
- e) $\int \frac{dx}{(x-7)\sqrt{\ln(x-7)}};$
- g) $\int \frac{4+3\operatorname{tg}^3 8x}{\cos^2 8x} dx;$
- i) $\int x e^{3-5x^2} dx;$
- j) $\int \frac{2-3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx!$
- b) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}};$
- d) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-4x^8}} dx;$
- f) $\int 3 \sin 4x (2+\cos 4x)^3 dx;$
- h) $\int \frac{\sqrt{\arccos 3x}}{\sqrt{1-9x^2}} dx;$
- j) $\int \frac{2x+7}{1+4x^2} dx!$
- b) $\int \frac{dx}{(13x-2)^3};$
- d) $\int x^3 \sqrt[7]{2+x^4} dx;$
- f) $\int \sqrt[5]{1-\sin 3x} \cos 3x dx;$
- h) $\int \frac{(\operatorname{arccotg} 5x)^7}{1+25x^2} dx;$
- j) $\int \frac{8-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx!$
- b) $\int \sqrt{8-3x} dx;$
- d) $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{5+3x}};$
- f) $\int \sin 2x \cdot \cos^5 2x dx;$
- h) $\int \frac{\sqrt{\arccos 2x}}{\sqrt{1-4x^2}} dx;$
- j) $\int \frac{3+x}{4+25x^2} dx!$

8. Határozott integrál

Fő meghatározás:

Az $[a; b]$ intervallumon értelmezett $f(x)$ függvény határozott, Riman integráljának nevezzük

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \text{ számot, ahol } \Delta x_i \text{ az } [a; b] \text{ intervallum } i\text{-edik részintervallumának a}$$

hossza, $f(\xi_i)$ az i -edik részintervallum tetszőleges pontjához tartozó függvényérték.

Newton-Leibniz képlet, a határozott és a határozatlan integrál kapcsolatát írja le:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

A határozott integrál főbb tulajdonságai:

$$1) \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx;$$

$$2) \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$$

$$3) \int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx;$$

$$4) \int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx;$$

$$5) \int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx;$$

$$6) m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a), \text{ ha az } f(x) \text{ korlátos az } [a; b] \text{ intervallumon, vagyis}$$

$$m \leq f(x) \leq M?$$

$$7) \int_a^b f(x)dx \geq 0, \text{ ha } f(x) \geq 0 \text{ bármely } x \in [a; b].$$

$$8) \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx, \text{ ha } f(x) \geq g(x) \text{ bármely } x \in [a; b].$$

Gyakorlatok

I. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

- $$\begin{array}{lll}
1) \int_0^1 (2x+6)^3 dx; & 2) \int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}; & 3) \int_1^4 (\sqrt{x}-5x) dx; \\
4) \int_2^9 \sqrt[3]{x-1} dx; & 5) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx; & 6) \int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+3x}}; \\
7) \int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}; & 8) \int_1^e \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2}, & 9) \int_2^3 \frac{dx}{2x^3+3x+5}; \\
10) \int_1^2 \frac{dx}{x^2+3x-10}; & 11) \int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}; & 12) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx; \\
13) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx; & 14) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin 2x dx; & 15) \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx; \\
16) \int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}; & 17) \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx; & 18) \int_0^1 x e^{-x} dx; \\
19) \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx; & 20) \int_1^2 e^x (1-e^x)^4 dx; & 21) \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x^3}} \cdot 9^{\frac{1}{\sqrt{x}}} dx!
\end{array}$$

9. Az integrál alkalmazása

1. Területszámítás:

Az $[a; b]$ intervallumon értelmezett $f(x)$ függvény grafikonja, az $x = a$ és $x = b$, valamint az $y = 0$ egyenesekkel határolt síkidom területe:

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Paraméteres magadás esetében, ha $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \varphi(t) \end{cases}$, $\alpha \leq t \leq \beta$, akkor:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) x'(t) dt.$$

Polárkoordinátás alak esetében, $r = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

Az $[a; b]$ intervallumon értelmezett $f_1(x)$ és $f_2(x)$ függvény grafikonja, az $x = a$ és $x = b$ egyenesekkel határolt síkidom területe, ha $f_1(x) \geq f_2(x)$:

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx.$$

2. Térfogatszámítás.

Az $[a; b]$ intervallumon értelmezett $f(x)$ függvény grafikonja, az $x = a$ és $x = b$, valamint az $y = 0$ egyenesekkel határolt síkidom x tengely körüli forgatásával kapott test térfogata

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Az $[a; b]$ intervallumon értelmezett $f(x)$ függvény grafikonjának az y tengely körüli forgatásával kapott test térfogata

$$V = \pi \int_c^d (f^{-1}(x))^2 dx,$$

ahol $c = f(a)$ és $d = f(b)$.

Az $[a; b]$ intervallumon értelmezett $f_1(x)$ és $f_2(x)$ függvény grafikonja, az $x = a$ és $x = b$ egyenesekkel határolt síkidom x tengely körüli forgatásával kapott test térfogata, ha $f_1(x) \geq f_2(x)$:

$$V = \pi \int_a^b (f_1^2(x) - f_2^2(x)) dx.$$

3. Forgástestek felszíne:

Az $[a; b]$ intervallumon értelmezett $f(x)$ függvény grafikonja, az $x = a$ és $x = b$, valamint az $y = 0$ egyenesekkel határolt síkidom x tengely körüli forgatásával kapott test felszíne:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Paraméteres magadás esetében, ha $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \alpha \leq t \leq \beta$, akkor:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

4. Ívhossz-számítás:

Az $[a; b]$ intervallumon differenciálható $f(x)$ függvény grafikonjának az a és b abszcisszák közé eső ívhossza, ha a differenciálhányados folytonos:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Ha a görbe paraméteresen adott akkor:

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Ha a görbe polárkoordinátákkal adott akkor:

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi.$$

Gyakorlatok

1. Határozza meg az $f(x) = x^2 - 2x + 11$ függvény grafikonja és az x tengely által közbezárt terület mérőszámát a $[0; 2]$ intervallumban!
2. Határozza meg az $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$ függvény grafikonja és az x tengely által közbezárt terület mérőszámát a $[1; 3]$ intervallumban!
3. Határozza meg az $f(x) = x^2 - 6x + 9$ függvény grafikonja és az x tengely által közbezárt terület mérőszámát a $[1; 4]$ intervallumban!

4. Határozza meg az $f(x) = x^2 + 8x + 16$ függvény grafikonja és az x tengely által közbezárt terület mérőszámát a $[-5; -1]$ intervallumban!
5. Határozza meg az $f(x) = 2\sqrt{x} + 2$ függvény grafikonja, az $x = 1$ és $x = 4$, valamint az $y = 0$ egyenesekkel határolt síkidom területét!
6. Határozza meg az $f(x) = \sqrt{x+6} + 3$ függvény grafikonja, az $x = -5$ és $x = -2$, valamint az $y = 0$ egyenesekkel határolt síkidom területét!
7. Határozza meg az $f(x) = \frac{4}{2x-6}$ függvény grafikonja, az $x = 5$ és $x = 7$, valamint az $y = 0$ egyenesekkel határolt síkidom területét!
8. Határozza meg az $f(x) = -\frac{8}{x+3}$ függvény grafikonja, az $x = -7$ és $x = -5$, valamint az $y = 0$ egyenesekkel határolt síkidom területét!
9. Határozza meg az $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{3+x^3}}$ függvény grafikonja, az $x = -1$ és $x = 1$, valamint az $y = 0$ egyenesekkel határolt síkidom területét!
10. Határozza meg az $f(x) = \ln x$ függvény grafikonja, az $x = e$ és $x = e^2$, valamint az $y = 0$ egyenesekkel határolt síkidom területét!
11. Határozza meg az $|y| = |\log_5 x|$ görbe, az $x = 0,2$ és $x = 5$ egyenesekkel határolt síkidom területét!
12. Határozza meg az $|y| = \sqrt{x-4}$ görbe, az $x = 5$ és $x = 9$ egyenesekkel határolt síkidom területét!
13. Határozza meg az $f(x) = \cos x$ függvény grafikonja, az $x = -\frac{\pi}{2}$ és $x = \frac{\pi}{2}$, valamint az $y = 0$ egyenesekkel határolt síkidom területét!
14. Határozza meg az $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény grafikonja, az $x = \frac{\pi}{4}$ és az $y = 0$ egyenesekkel határolt síkidom területét!
15. Határozza meg az alábbi függvények grafikonjai által határolt terület mérőszámát:
 1. $f(x) = 9 - x^2$; $g(x) = 0$;
 2. $f(x) = -x^2 - 6x + 7$; $g(x) = 0$;
 3. $f(x) = x^2 - 6x$; $g(x) = 0$;
 4. $f(x) = 2x^2 - 9x + 10$; $g(x) = 0$;
 5. $f(x) = x^2 + 2x$; $g(x) = x + 2$;
 6. $f(x) = x^2 - 4x + 4$; $g(x) = 4 - x$;
 7. $f(x) = 2 - x + \frac{x^2}{4}$; $g(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x + 3$;
 8. $f(x) = \frac{x^2}{3}$; $g(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 4$;
 9. $f(x) = x^2$; $g(x) = \frac{x^2}{4}$; $h(x) = 4$;
 10. $f(x) = x^3$; $g(x) = \frac{x^2}{2}$; $h(x) = 8$;

11. $f(x) = x^3$; $g(x) = 2x$; $h(x) = x$;
12. $f(x) = \sqrt{x-2}$; $g(x) = \sqrt{4-x}$; $h(x) = 0$;
13. $f(x) = 5^x$; $g(x) = 5^{-x}$; $h(x) = 25$;
14. $f(x) = \frac{27}{x^2+9}$; $g(x) = \frac{1}{6}x^2$;
15. $f(x) = \ln(x+2)$; $g(x) = 2 \ln x$!
16. Határozza meg a (2;0) és (9;3) pontokon átmenő, az abszcissza tengely és az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény grafikonja által bezárt terület mérőszámát!
17. Határozza meg a (0;4) és (1;2) pontokon átmenő, az abszcissza tengely és az $f(x) = 2x^3$ függvény grafikonja által bezárt terület mérőszámát!
18. Számítsa ki annak a területnek a nagyságát, melyet az $f(x) = x^2 - 4x + 5$ függvény grafikonja és annak a $P(0;5)$ és $M(5;10)$ pontjába húzott érintői határolnak!
19. Számítsa ki annak a területnek a nagyságát, melyet az $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ függvény grafikonja és annak a $P(0;-3)$ és $M(3;0)$ pontjába húzott érintői határolnak!
20. Határozza meg az alábbi paraméteres megadású függvények grafikonjai által határolt terület mérőszámát:
 1. $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, $t \in [0; \pi]$, $y = 0$;
 2. $x = 3 \sin t$, $y = 3 \cos t$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;
 3. $x = 4 \sin t$, $y = 2 \cos t$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $y = 0$;
 4. $x = t^2$, $y = t^3$, $t = 1; t = 3$, $y = 0$;
 5. $x = 3 \sin^3 t$, $y = 3 \cos^3 t$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $y = 0$!
21. Határozza meg az alábbi polárkoordinátákkal megadott függvények grafikonjai által határolt terület mérőszámát:
 1. $\rho = 4(1 + \cos \varphi)$ (kardioid);
 2. $\rho = 5 \sin 2\varphi$ (négylevelű rozetta);
 3. $\rho = 5 \sin 3\varphi$ (háromlevelű rozetta);
 4. $\rho = 5\varphi$, $\varphi_1 = 2\pi$; $\varphi_2 = 4\pi$; (arkhimédészi spirális);
 5. $\rho = 3(1 + \cos \varphi)$ és $\rho = 3 \cos \varphi$!
22. Határozza meg az $x^2 + 10x + y^2 + 6y + 30 = 0$ egyenlettel megadott síkidom területének mérőszámát!
23. Határozza meg az $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$ egyenlettel megadott síkidom területének mérőszámát!
24. Határozza meg az $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$ egyenlettel megadott síkidom területének mérőszámát!
25. Határozza meg $H_1 \cap H_2$ halmaz koordináta síkon ábrázolt képének területét, ha $H_1 = \{(x; y) | x^2 - 8x + y^2 + 7 \leq 0\}$ és $H_2 = \{(x; y) | x^2 + y^2 + 8y + 7 \leq 0\}$!

26. Határozza meg az a mely értéke mellett lesz az $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ grafikonja és az $x = a$, $x = -a$ és $y = 0$ egyenletű egyenesekkel határolt terület 2 egység!
27. Határozza meg a p értékét úgy, hogy az $x = p$ egyenes az $f(x) = \frac{1}{x^2}$ függvény grafikonja az $x = 1$, $x = 2$ és az $y = 0$ egyenletű egyenesekkel határolt síkidomot két egyenlő területű részre ossza!
28. Milyen arányban osztja az $y^2 = 2x$ parabola az $x^2 + y^2 \leq 8$ körlap területét?
29. Határozza meg az $f(x) = e^{-2x+5}$ függvény grafikonja és az $y = 0$ egyenessel határolt területet, ha $x \in [0; +\infty)$!
30. Határozza meg az $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ függvény grafikonja és az $y = 0$ egyenessel határolt területet, ha $x \in (-\infty; \infty)$!
31. Határozza meg az $f(x) = \frac{1}{x^2} + 2$ függvény grafikonja és vízszintes aszimptotójával határolt területet, ha $x \in (-\infty; -1]$!
32. Határozza meg az $f(x) = \frac{3}{x} + \frac{x}{3}$ függvény grafikonja és ferde aszimptotójával határolt területet, ha $x \in [3; \infty)$!
33. Forgassa az $f(x)$ függvény grafikonját az abszcissa tengely körül a megadott intervallumban és számítsa ki az így keletkező forgástest térfogatát:
1. $f(x) = \sin x$, $x[0; \pi]$;
 2. $f(x) = \frac{5}{x}$, $x[1; 5]$;
 3. $f(x) = x^2 - 6x + 12$, $x[0; 4]$;
 4. $f(x) = |x|$, $x[-2; 2]$;
 5. $f(x) = 10x - x^2$;
 6. $f(x) = \sqrt{x+1} + 1$, $x \in [0; 3]$;
 7. $f(x) = \ln x$, $x[0; 2]$;
 8. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$, $x[1; e^3]$!
34. Forgassa az $f(x)$ és $g(x)$ függvények grafikonjai által határolt síkidomot az abszcissa tengely körül és számítsa ki az így keletkező forgástest térfogatát:
1. $f(x) = x^2$ és $g(x) = \sqrt{x}$;
 2. $f(x) = x^2$ és $g(x) = -x^2 + 2$;
 3. $f(x) = x^2$, $g(x) = 2 - x$;
 4. $f(x) = x^2$, $g(x) = 2 - x$, $h(x) = 0$;
 5. $f(x) = x^2 - 6x + 9$; $g(x) = 9 + x$;
 6. $f(x) = 2^x$, $g(x) = 4^x$, $x = 1$;

$$7. f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}; g = \frac{1}{x};$$

$$8. f(x) = \operatorname{tg} x, g(x) = \operatorname{ctg} x, x = \frac{\pi}{6}!$$

35. Forgassa az $f(x)$ és $g(x)$ függvények grafikonjai által határolt síkidomot az abszcissa és az ordináta tengely körül is és számítsa ki az így keletkező forgástestek térfogatának mérőszámát:

$$1. f(x) = x^2; g(x) = 2 - x; x = 0;$$

$$2. f(x) = \sin; g(x) = 0,5;$$

$$3. f(x) = x^3 \text{ és } g(x) = \sqrt{x};$$

$$4. f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2, g(x) = 2!$$

10. Numerikus sorok

Főbb meghatározások:

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ kifejezést számsornak, numerikus sornak nevezzük, ahol

$$a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

a_n -t a sor n -edik tagjának nevezzük.

Az $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ összeget részletösszeg-sorozatának nevezzük.

A $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ értéket a sor összegének nevezzük.

Ha a sor összege véges, akkor a sort konvergensnek, ha végtelen, akkor divergensnek nevezzük.

Mértani sor: $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$.

Harmonikus sor: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Hiperharmonikus sor: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Alternáló (valtakozó előjelű) sor: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$. Az eljárást gondolatban végtelen sokszor elvégezve,

mennyi a kapott háromszögek kerülete és területe?

Főbb tételek:

1. Ha $|q| > 1$, a mértani sor divergens, ellenkező esetben konvergens és $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}$.

2. A harmonikus sor divergens.

3. A hiperharmonikus sor konvergens, ha $\alpha > 1$ és divergens ha $\alpha < 1$.

4. A sor konvergenciájának szükséges feltétele:

A sor konvergens, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

5. A sor konvergenciájának Cauchy kritériuma:

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ teljesül, hogy $|a_{n+1} + a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$.

6. A sor konvergenciájának elégséges feltételei:

1. Összehasonlító kritérium:

Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ pozitív tagú sorok tagjaira bizonyos k_0 indextől kezdve minden

$k \geq k_0$ érvényes az $a_k \leq b_k$ egyenlőtlenség, akkor

a) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergens, ha $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergens, (majoráns kritérium);

b) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergens, ha $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergens, (minoráns kritérium).

2. Hányadoskritérium, vagy D'Alembert-féle kritérium:

Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ pozitív tagú sor tagjaira létezik a $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ határérték és $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$, akkor

a sor konvergens, ha $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$, akkor divergens, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$ esetén további

vizsgálatra van szükség.

3. Gyökkritérium, vagy Cauchy-féle kritérium:

Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ pozitív tagú sor tagjaira létezik a $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k}$ határérték és $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} < 1$, akkor a

sor konvergens, ha $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} > 1$, akkor divergens, $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = 1$ esetén további vizsgálatra van szükség.

4. Integrálkritérium:

Ha az $f(x)$ függvény monoton fogyó és $f(x) > 0$, ha $x \in [1; +\infty)$, valamint $f(k) = a_k$,

minden $k \in \mathbb{N}$ -re, akkor a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ és az $\int_1^{\infty} f(x) dx$ improprius integrál egyszerre konvergens, illetve divergens.

5. Leibniz kritérium:

Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_k$ sor a_k tagjainak sorozata fogyó és $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$, akkor ez a sor konvergens, összege pozitív és nem nagyobb a sor első tagjánál.

6. Az $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_k$ sor abszolút konvergens, ha a $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ sor is konvergens.

7. Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_k$ sor konvergens, és a $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ sor divergens, akkor az $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_k$ sor feltételesen konvergens.

Gyakorlatok

1. Adja meg az alábbi sorok első öt tagját, ha általános tagja:

$$1) a_n = \frac{2}{n}; \quad 2) a_n = \frac{3}{2n+2}; \quad 3) a_n = \frac{1}{n^2}; \quad 4) a_n = \frac{1}{n!};$$

$$5) a_n = \frac{1}{7^n}; \quad 6) a_n = \frac{5}{n+5^n}; \quad 7) a_n = \frac{2n}{n^2+4}; \quad 8) a_n = \frac{(-1)^n}{\sin \pi n + \cos \pi n} !$$

2. Írja fel a következő sorok általános tagját:

$$1) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots; \quad 2) \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots; \quad 3) \frac{1}{5 \cdot 11} + \frac{1}{7 \cdot 13} + \frac{1}{9 \cdot 15} + \dots;$$

- 4) $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$; 5) $\frac{1}{7} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^5} + \dots$; 6) $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 6} + \dots$;
 7) $\cos 1 + \cos 2 + \cos 3 + \dots$; 8) $-1 + 2 - 3 + 4 + \dots$; 9) $3 - \frac{1}{3} + 9 - \frac{1}{9} + 27 - \frac{1}{27} + \dots$!
3. Konvergens-e az alábbi sorok;
- 1) $3 + 1 + \frac{5}{9} + \frac{6}{16} + \frac{7}{25} + \dots$; 2) $1 + e + e^2 + e^3 + \dots$; 3.) $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \dots$;
 4) $a_n = \frac{2n+1}{n+5}$; 5) $a_n = \left(\frac{1}{7}\right)^{-n}$; 6) $a_n = \frac{4^n + 9^n}{36^n}$; 7) $a_n = 4 \cdot (0,6)^n$!
4. Határozza meg S_5 , ha
- 1) $a_n = 7$; 2) $a_n = n$; 3) $a_n = \frac{1}{n}$; 4) $a_n = n^2$;
 5) $a_n = n^2 - 3n$; 6) $a_n = 3^{n-1}$; 7) $a_n = n^{n-1}$; 8) $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$!
5. Határozza meg S_{100} , ha
- 1) $a_n = n$; 2) $a_n = 5^n$; 3) $a_n = 5^{n-100}$; 4) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$;
 5) $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$; 6) $a_n = \frac{1}{n^2 + 3n + 2}$; 7) $a_n = \frac{n}{2^n}$!
6. Vizsgálja az alábbi sorok konvergenciáját a szükséges feltétel segítségével!
- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{10n+1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{11}{11n+11}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sqrt{n}}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2}$;
 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n^2+2}}{9n^2-4}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+4}{3n-4}\right)^n$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{5n+4}\right)^{\frac{n}{2}}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{25^n + 20^n}{10^n}$;
 9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\pi} \sin \frac{\pi}{n}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 2^n}{10^n}$!
7. Az összehasonlító kritérium segítségével vizsgálja az alábbi sorok konvergenciáját:
- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{10n+5}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2+6}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n+1}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3n}}$;
 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+n^3}}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$;
 9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 5^n - 4}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^3}$!
8. A hányados kritérium segítségével vizsgálja az alábbi sorok konvergenciáját:
- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n \cdot (n+2)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+3)!}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{3^n \cdot n!}$;
 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (2n)^2}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n+1)}{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n^2}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8 \cdot 15 \cdot \dots \cdot (7n+1)}{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n^3}$;

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n \cdot (2n+1)}; \quad 9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n)!}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!}; \quad 11) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \sin \frac{\pi}{2n};$$

$$12) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{2}^n}!$$

9. A gyök kritérium segítségével vizsgálja az alábbi sorok konvergenciáját:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n}{6n-1} \right)^{2n}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n;$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n^2+6n-3}{7n^2-2n+1} \right)^n; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+9n-7}{n^2-2n} \right)^n; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-1} \right)^{n^2} \frac{1}{5^n};$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n-5} \right)^{n^2} \frac{1}{7^n}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n; \quad 9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln^n(n+2)}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \ln^n \left(\frac{5n+1}{5n-1} \right)!$$

10. A Cauchy-féle integrál kritérium segítségével vizsgálja az alábbi sorok konvergenciáját:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{4n^2+4n+5}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^4+9}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\ln(n+3)}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^4(n+1)};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}; \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2} \right)^2; \quad 9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}};$$

$$10) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{n^2-4}!$$

11. Vizsgálja az alábbi sorok konvergenciáját, abszolút vagy feltételes konvergenciáját is:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 7^n}; \quad 4) 3 - \frac{5}{2} + \frac{7}{3} - \frac{9}{4} + \dots;$$

$$5) \frac{1}{9} - \frac{1}{25} + \frac{1}{49} - \dots; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}; \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)!}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{2n^2+1};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{3^n}; \quad 10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cos \frac{\pi}{n}; \quad 11) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 5^n n!}{(2n+2)!}; \quad 12) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)!!}{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-1)}!$$

12. Vizsgálja az alábbi sorok konvergenciáját:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n!}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n!}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+5}}; \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n}{(2n+1)^2};$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \cdot \ln \ln n}; \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^3}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n^3}{2^n}; \quad 9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+5} - \sqrt{n^2-5}}{2n};$$

$$10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{\sqrt[3]{n^7} \sqrt{n^4+1}}; \quad 11) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{e^{2n}}; \quad 12) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{3n-7} \right)^n; \quad 13) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{n^3};$$

$$; \quad 14) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}; \quad 15) \sum_{n=1}^{\infty} n^{10} e^{-2n};$$

$$16) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1}; \quad 17) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n; \quad 18) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!}; \quad 19) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}!$$

13. Számítsa ki a következő sorok összegét:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 - 3n - 2}$; 2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 5n + 6}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{\pi}{4}$;
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos^n 30^\circ$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n + 2^n}{14^n}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1} + 3^{n-1}}{15^n}$;
- 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{5^n} \right)$; 8) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{7^n} + (-1)^n \frac{1}{4^n} \right)$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\left[\frac{n}{3} \right]} \frac{1}{3^n}$;
- 10) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 + (-1)^{k-1}}{2} \frac{1}{10^k} + \frac{1 + (-1)^k}{2} \frac{1}{k(k+1)} \right)$; 11) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n-1})$;
- 12) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$; 13) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$;
- 14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$; 15) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$; 16) $\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots$;
- 17) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}} \right)$; 18) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{2}$;
- 19) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$; 20) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{(2n+1)n}{(n+1)(2n-1)}$!

11. Többváltozós függvények

Halmazok Descartes-szorzata: A, B nemüres halmazok esetén az $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

Kétváltozós valós függvény: egy $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$

- $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists z \in \mathbb{R} : f(x, y) = z\}$
- $R_f = \{z \in \mathbb{R} \mid \exists (x, y) \in D_f : f(x, y) = z\}$

Kétváltozós függvények szemléltetése: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény egy felületet határoz meg, melyet metszetekkel és színtvonalakkal lehet szemléltetni

- x-tengellyel párhuzamos metszet: $f(x, y_0), (x, y_0) \in D_f$
- y-tengellyel párhuzamos metszet: $f(x_0, y), (x_0, y) \in D_f$
- c-hez tart. színtvonal: $c \in R_f, N_c := \{(x, y) \in D_f \mid f(x, y) = c\}$

Kétváltozós függvények határértéke

- **környezet:** $(a, b) \in \mathbb{R}^2, \varepsilon > 0, K_\varepsilon(a, b) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 < \varepsilon^2\}$ az (a, b) pont ε sugarú környezete
- **torlódási pont:** $A \subset \mathbb{R}^2, (a, b) \in \mathbb{R}^2$ az A halmaz torlódási pontja, ha $\forall \varepsilon > 0$
 $K_\varepsilon(a, b) \cap A \setminus \{(a, b)\} \neq \emptyset$,
 $A' := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid (a, b) \text{ torl. pontja } A \text{ -nak}\}$ a torlódási pontok halmaza
- **konvergencia:** az $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ -beli sorozat konvergens, ha x_n és y_n valós sorozatok konvergensek. Legyen $\lim x_n = \alpha$ és $\lim y_n = \beta$, ekkor $\lim (x_n, y_n) = (\alpha, \beta)$ a sorozat határértéke
- **átviteli elv:** $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (a, b) \in D_f$. Az f függvénynek az (a, b) pontban van határértéke és $\lim_{(a,b)} f(x, y) = A \in \mathbb{R}$ ha $\forall (x_n, y_n) \in D_f, (x_n, y_n) \neq (a, b)$ megengedett sorozatra, amelyre $(x_n, y_n) \rightarrow (a, b)$ teljesül, hogy $f(x_n, y_n) \rightarrow A$

Kétváltozós függvények differenciálhatósága

- **belső pont:** $A \subset \mathbb{R}^2$ halmaznak az $(a, b) \in A$ belső pontja, ha $\exists \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(a, b) \subset A$
- **parciális deriválhatóság:** $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (a, b) \in D_f$ belső pontja D_f -nek, akkor az f függvény x-szerint parciálisan deriválható az (a, b) pontban, ha az $f(x, b)$ metszet függvény deriválható az a pontban és ekkor az $f'_x(a, b) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x, b) - f(a, b)}{x}$, x-szerinti parciális derivált az (a, b) pontban
 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (a, b) \in D_f$ belső pontja D_f -nek, akkor az f függvény y-szerint parciálisan deriválható az (a, b) pontban, ha az $f(a, y)$ metszet fv deriválható az a pontban és ekkor az $f'_y(a, b) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(a, y+b) - f(a, b)}{y}$, y-szerinti parciális derivált az (a, b) pontban

- **parciális deriváltak:** Ha $f : R^2 \rightarrow R$, $A \subset D_f$ parciálisan deriválható $\forall (x, y) \in A$ pontban, akkor értelmezhetjük a parciális derivált függvényeket: $(x, y) \rightarrow f'_x(x, y)$,
 $(x, y) \rightarrow f'_y(x, y)$
- **magasabb rendű parciális deriváltak:** Ha $f : R^2 \rightarrow R$, $A \subset D_f$ és $\forall (x, y) \in A$ pontban léteznek az $f'_x(x, y)$ és $f'_y(x, y)$ függvények x és y szerinti parc. deriváltjai, akkor azokat másodrendű parciális deriváltaknak hívjuk, és jelölésük: $f''_{xx/xy/yx/yy}(x, y)$
- **teljes differenciálhatóság:** $f : R^2 \rightarrow R$ az $(a, b) \in D_f$ belső pontjában differenciálható, ha $\exists f'_x(a, b)$, $f'_y(a, b)$ parciális deriváltak és

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x, y) - f(a, b) - f'_x(a, b)(x - a) - f'_y(a, b)(y - b)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}},$$
 ekkor a függvény (a, b) pontbeli deriváltja $f'(a, b) = (f'_x(a, b), f'_y(a, b)) \in R^2$
- **gradiens:** $f : R^2 \rightarrow R$ differenciálható függvény deriváltját gradiensnek is nevezik és $\text{grad } f(a, b) = f'(a, b)$
- **tétel teljes differenciálhatóságról:** $f : R^2 \rightarrow R$ függvény esetén, ha $(a, b) \in D_f$ belső pontja és $f'_x(x, y)$ és $f'_y(x, y)$ léteznek $K_\varepsilon(a, b)$ környezet minden pontjában és folytonosak (a, b) -ben akkor f differenciálható (a, b) pontban.
- **vegyes parciális deriváltak megegyezése:** $f : R^2 \rightarrow R$ kétszer differenciálható egy $(a, b) \in D_f$ belső pontban, akkor $f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b)$

Szélsőérték számítás

- **lokális max.:** $f : R^2 \rightarrow R$ $(a, b) \in D_f$ lok. maxhelye függvénynek, ha $\exists \varepsilon > 0$:
 $f(x, y) \leq f(a, b) \quad \forall (x, y) \in K_\varepsilon(a, b)$
- **globális max.:** $f : R^2 \rightarrow R$ $(a, b) \in D_f$ glob maxhelye függvénynek, ha $f(x, y) \leq f(a, b)$
 $\forall (x, y) \in D_f$
- **szélsőérték szükséges feltétele**
 - T: ha az $f : R^2 \rightarrow R$ függvénynek lok. szélsőértéke van az $(a, b) \in D_f$ pontban és f differenciálható (a, b) -ben, akkor $f'(a, b) = (0, 0)$, vagyis a parciális deriváltak értéke (a, b) pontban 0, azaz $f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0$
 - D: ha az $f : R^2 \rightarrow R$ fv differenciálható az (a, b) pontban és $f'(a, b) = (0, 0)$, akkor az (a, b) pontot stacionárius pontnak nevezzük
- **szélsőérték elégséges feltétele:** legyen $f : R^2 \rightarrow R$ kétszer differenciálható $(a, b) \in D_f$ belső pontjában. Legyen $D(a, b) = f''_{xx}(a, b) \cdot f''_{yy}(a, b) - (f''_{xy}(a, b))^2$. Ha (a, b) stac pont, akkor
 - $D(a, b) > 0$ esetén (a, b) lok szélsőértékhely. $f''_{xx}(a, b) < 0$ esetén lok. max, ha $f''_{xx}(a, b) > 0$ esetén lok. min.
 - $D(a, b) < 0$ nem lok. szélsőérték

- $D(a, b) = 0$ további vizsgálat szükséges.

Gyakorlatok

Írja fel a P_0 ponthoz tartozó x illetve y változó szerinti szintvonalfüggvényeket!

$$f(x; y) = 2x^4 + 4xy^3 + 8y, \quad P_0(1; 2)$$

2. Képezzük az $f(x; y) = 7x^3 + 8y^2 + 5x^2y^4 + 8y$ függvény első és másodrendű parciális deriváltjait! Számítsa ki $f'_x(3; 2)$ értékét!

3. Számolja ki az alábbi parciális deriváltakat!

$$f'_x(x; y) = ? \quad f'_{xy}(x; y) = ?$$

a) $f(x; y) = e^{x^2+y^2} \cdot \ln y;$

b) $f(x; y) = y \cdot \ln(x^2 + y^2)!$

4. Adja meg az $f(x; y) = y^2 \cdot \sqrt{x^4 + 2xy}$ függvény elsőrendű x változó szerinti parciális deriváltját!

5. Határozza meg az alábbi függvény lokális szélsőérték helyeit (a jellegükkel együtt) valamint nyeregpontjait (amennyiben léteznek)!

a) $f(x; y) = \frac{y^4}{4} + x^2 + 8xy - 9;$

b) $f(x; y) = x^2 - 6y^2 + 2xy^2 + 4xy - 6x - 12y + 23;$

c) $f(x; y) = \frac{9}{x} + \frac{3}{y} + xy;$

d) $f(x; y) = y^3 - 4y^2 - 4x^2 + 4xy + 1;$

e) $f(x; y) = xy - 2 \ln x - \ln y + 2x + 1;$

f) $f(x; y) = 2y^3 + x^2y - 3y^2 + x^2 - 4!$

12. Kettős és többes integrálok

1. Kettős integrálok alkalmazása:

- Területszámítás: Ha $f(x, y) = 1$, akkor a $\int_R 1 \, dx \, dy$ kifejezés éppen az R tartomány területét adja.
- Térfogat meghatározása: Ha $f(x, y) \geq 0$, akkor a függvény és az xOy -sík által határolt test térfogata: $\int_R f(x, y) \, dx \, dy$.
- Tömeg: Ha $f(x, y)$ egy adott síkbeli tartomány sűrűségfüggvénye, akkor a tömeg: $m = \int_R f(x, y) \, dx \, dy$.

2. Hármass integrálok alkalmazása:

- Térfogat számítása: $\iiint_V 1 \, dV = V$, ahol V egy térbeli tartomány.
- Tömeg számítása: Ha $f(x, y, z)$ a sűrűségfüggvény, akkor $m = \iiint_V f(x, y, z) \, dV$!

3. Koordináta-transzformáció:

Bizonyos esetekben célszerű polár-, henger- vagy gömbi koordinátákra áttérni, különösen kör- vagy gömbalakú tartomány esetén, mert egyszerűbbé teszik az integrál kiszámítását.

A gyakorlatban a megoldás során:

- Először meg kell határozni az integrálási tartományt.
- Ezután fel kell írni a belső és külső integrál határait.
- Majd el kell végezni az integrálást megfelelő sorrendben.

Gyakorlatok

1. Számítsa ki az $f(x, y) = x + y$ függvény kettős integrálját az $[0, 1] \times [0, 1]$ tartományon!
2. Határozza meg az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvény integrálját a $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ tartományon!
3. Számítsa ki az $f(x, y) = xy$ integrált az $x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$ tartományon!
4. Számítsa ki az $f(x, y) = e^{x+y}$ függvény integrálját a négyzeten: $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$!
5. Határozza meg az $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$ integrált a $[0, \pi] \times [0, \pi/2]$ tartományon!
6. Határozza meg a $f(x, y) = x^2y^3$ integrálját az $[0, 2] \times [0, 1]$ tartományon!
7. Számítsa ki az $f(x, y) = y/(1 + x^2 + y^2)$ integrált az egységgörön!
8. Határozza meg az $f(x, y) = x + 2y$ integrálját a háromszögön, melynek csúcsai: $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$!

9. Számítsa ki a $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$ integrált a kör alakú tartományon: $x^2 + y^2 \leq 1$!
10. Számítsa ki a $f(x, y) = x^3 + y^3$ integrált az $[0, 1] \times [0, 1]$ tartományon!
11. Számítsa ki a $f(x, y, z) = x + y + z$ hármas integrált az egységkockán!
12. Határozza meg az $f(x, y, z) = xyz$ integrált a $0 \leq x, y, z \leq 1$ tartományon!
13. Számítsa ki a $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$ integrált az egységkockán!
14. Számítsa ki a $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ integrált a kockán: $0 \leq x, y, z \leq 2$!
15. Számítsa ki az $f(x, y, z) = \sin(x)\cos(y)\exp(z)$ integrált a kockán: $0 \leq x, y, z \leq \pi$!
16. Határozza meg a térfogatot az $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ függvény és az xOy -sík között!
17. Számítsa ki a $f(x, y) = \cos(xy)$ integrált a négyzeten: $0 \leq x, y \leq 1$!
18. Határozza meg a $f(x, y) = x^2y - y^3$ integrált a háromszögön: $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$!

13. Görbementi integrálok

Görbementi integrál skalárfüggvényre:

Ha $f(x, y)$ egy skalárfüggvény, és C egy sima, parametrizálható görbe, akkor a görbementi integrál kiszámítása a következőképpen történik:

$$\int_C f(x, y) ds,$$

ahol ds a görbe íve menti differenciálszakasz. A paraméteres alak $x(t), y(t), a \leq t \leq b$ segítségével $ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$.

Alkalmazása:

- Ívhossz kiszámítása: ha $f(x, y) = 1$, akkor $\int_C 1 ds$ a görbe hossza.
- Tömeg kiszámítása, ha a sűrűség $f(x, y)$: $m = \int_C f(x, y) ds$.

Alkalmazásai:

- Munka: ha egy test mozog egy erőterben, a munkát a görbementi integrál adja meg.
- Anyagmennyiség egy csővezeték mentén.
- Potenciálfüggvények vizsgálata: konzervatív mezők felismerése.

A gyakorlati lépések:

- A görbe parametrizálása (általában t intervallumban).
- A deriváltak kiszámítása $(x'(t), y'(t))$.
- Az integrálási képlet behelyettesítése.
- Az integrál kiszámítása a megadott határok között.

Gyakorlatok

1. Számítsa ki az $f(x, y) = x^2 + y^2$ görbementi integrált az egységgörbén $(x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq \pi/2)$ ds szerint!
2. Határozza meg a görbe hosszát: $x = t^2, y = t^3, 0 \leq t \leq 1$!
3. Számítsa ki a $f(x, y) = x$ integrált a vonalon, amely a $(0,0)$ ponttól az $(1,1)$ pontig tart egyenesen!
4. Számítsa ki az $f(x, y) = xy$ görbementi integrált a körív mentén: $x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq \pi$!
5. Számítsa ki a görbe hosszát: $x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$!

6. Határozza meg az $f(x, y) = e^{x^2 + y^2}$ görbementi integrált a negyedkörön: $x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq \pi/2$!
7. Számítsa ki az $f(x, y) = x + y$ görbementi integrált az $x = t, y = \ln t, 1 \leq t \leq e$ görbén!
8. Határozza meg a görbe hosszát: $x = t, y = 1/t, 1 \leq t \leq 2$!
9. Számítsa ki az $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ integrált a görbén: $x = t, y = 1 - t, 0 \leq t \leq 1$!
10. Határozza meg az $f(x, y) = \sin(xy)$ görbementi integrált az íven: $x = t, y = \sin t, 0 \leq t \leq \pi$!
11. Számítsa ki az $f(x, y) = y^2$ görbementi integrált a parabolaív mentén: $x = t, y = t^2, 0 \leq t \leq 1$!
12. Számítsa ki a görbe hosszát: $x = e^t, y = \ln t, 1 \leq t \leq 2$!
13. Határozza meg az $f(x, y) = x^2 y$ görbementi integrált: $x = t, y = t^2, 0 \leq t \leq 2$!
14. Számítsa ki az $f(x, y) = x^2 + y^2$ görbementi integrált az $(1, 0) \rightarrow (0, 1)$ íven, amely a körív mentén halad!
15. Számítsa ki az $f(x, y) = xy + x$ görbementi integrált az $x = \sin t, y = \cos t, 0 \leq t \leq \pi/2$ görbén!

Irodalomjegyzék

1. Жалдак М.І., Мігілін Г.О., Деканов С.Й. Математичний аналіз / – Київ: НПУ ім. М.П. Драгоманова, – 2007.
2. Rimán János Matematikai analízis I. kötet / – Eger, – 1998.
3. Rimán János Matematikai analízis feladatgyűjtemény I. kötet / – Eger, – 2002.
4. Kulin Judit, Pákh György Matematikai analízis feladatokban / Beregszász: PoliPrint Kft, – 2007.
5. Lajkó Károly Analízis / Debrecen: Matematikai és Informatikai Intézet, – 2000.
6. Csernyák László Analízis / Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó, – 2006.
7. Györfi Jenő A matematikai analízis elemei / Kolozsvár: Scientia Kiadó, – 2005.
8. Tóth Zoltán Analízis Budapest: Századvég Kiadó, – 2007.

Посібник з математичного аналізу для інформатиків призначений для студентів I курсу Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці спеціальності А 4.09 Середня освіта (Інформатика) денної та заочної форми навчання з метою організації практичної роботи з курсу "Математичний аналіз".

Кожна тема посібника умовно поділена на дві частини: короткий теоретичний матеріал та завдання для практичних занять з курсу "Математичний аналіз".

Матеріал призначений для використання як навчально-методичний посібник з дисципліни "Математичний аналіз".

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики
(протокол № 10 від «23» червня 2025 року)

Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості вищої освіти
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол №7 від 26 серпня 2025 року)

Рекомендовано до видання у електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол №8 від 28 серпня 2025 року)

Підготовлено до видання у електронній формі (PDF) кафедрою математики та інформатики з
Видавничим відділом Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II