ЗАКАРПАТСЬКИЙ УГОРСЬКИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ФЕРЕНЦА РАКОЦІ II
II. RÁKÓCZI FERENC KÁRPÁTALJAI MAGYAR FŐISKOLA

Кафедра математики та інформатики
Matematika és Informatika Tanszék

«МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ»
(МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДЛЯ САМОСТІЙНИХ РОБІТ)

(для студентів 1-го курсу спеціальності А4.09 Середня освіта (Інформатика)

MATEMATIKAI ANALÍZIS

(Módszertani utmutató önállói munkákhoz)

Перший (бакалаврський) / Alapképzés (BA)
(ступінь вищої освіти /a felsőoktatás szintje)

A Освіта / A Oktatás
(галузь знань / képzési ág)

" Інформатика"
"Informatika"
(освітня програма / képzési program)

Берегове / Beregszász
2025 р. / 2025

Посібник з математичного аналізу для інформатиків призначений для студентів І курсу Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці спеціальності А 4.09 Середня освіта (Інформатика) денної та заочної форми навчання з метою організації самостійної роботи з курсу "Математичний аналіз".

Кожна тема посібника містить теоретичні питання та практичні завдання з курсу "Математичний аналіз".

Матеріал призначений для використання як навчально-методичний посібник з дисципліни "Математичний аналіз ".

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики
(протокол № 10 від «23» червня 2025 року)

Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості вищої освіти
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол №7 від 26 серпня 2025 року)

Рекомендовано до видання у електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

(протокол №8 від 28 серпня 2025 року)

Підготовлено до видання у електронній формі (PDF) кафедрою математики та інформатики з Видавничим відділом Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Укладач:

СТОЙКА МИРОСЛАВ ВІКТОРОВИЧ – доцент кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Рецензенти:

БОРТОШ МАРІЯ ЮЛІЇВНА – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри та диференціальних рівнянь ДВНЗ «УжНУ»;

МЕСАРОШ ЛІВІА ВАСИЛІВНА– кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики та інформатики ЗУІ.

Відповідальний за випуск:

Олександр ДОБОШ – начальник Видавничого відділу ЗУІ ім. Ф.Ракоці II

За зміст посібника відповідальність несуть розробники.

Видавництво: Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II (адреса: пл. Кошута 6, м. Берегове, 90202. Електронна пошта: foiskola@kmf.uz.ua)

© Мирослав Стойка, 2025

© Кафедра математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II, 2025

A Matematikai analízia a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola, I. éves, informatika szakos, nappali és levelezős hallgatóinak készült, a Matematikai analízis c. tantárgy alaposabb tanulmányozásának és elsajátításának megkönnyítése céljából.

Ez a jegyzet elsősorban informatika szakos hallgatók számára készült, de hasznos lehet mindazok számára, akik bármely más szakon tanulnak matematikát.

A jegyzet minden témája két részre van osztva: rövid elméleti kérdéseket és gyakorlati feladatokat tartalmaz.

Az oktatási folyamatban történő felhasználását jóváhagyta
a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Matematika és Informatika Tanszéke
(2025. június 23, 10. számú jegyzőkönyv).

Megjelentetésre javasolta a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Minőségbiztosítási Tanácsa
(2025. augustzus 26, 7. számú jegyzőkönyv).

Elektronikus formában (PDF fájlformátumban) történő kiadásra javasolta
a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Tudományos Tanácsa
(2025. augustzus 28, 8. számú jegyzőkönyv).

Kiadásra előkészítette a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Matematika és Informatika Tanszéke és Kiadói Részlege.

Szerkesztő:

SZTOJKA MIROSZLÁV – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének docense

Szakmai lektorok:

BARTOS MÁRIA – fizika és matematika tudományok kandidátusa, docens, az Ungvári Nemzeti Egyetem Algebra és Diferenciál Egyenletek Tanszékének docense;

MÉSZÁROS LÍVIA – fizika és matematika tudományok kandidátusa, II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének docense.

A kiadásért felel:

DOBOS Sándor – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Kiadói Részlegének vezetője

A tartalomért kizárólag a jegyzet szerkesztője felel.

Kiadó: a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola (cím: 90 202, Beregszász, Kossuth tér 6. E-mail: foiskola@kmf.uz.ua)

© Sztojka Miroszláv, 2025
© A II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszéke, 2025

Tartalomjegyzék

1. Elemi függvények és grafikonjaik. Értelmezési tartomány 5
2. Számsorozatok és függvények határértéke 11
3. A függvények folytonossága 21
4. A deriváltfüggvény 25
5. Derivált alkalmazása 38
6. Függvényvizsgálat 45
7. Határozatlan integrál 48
8. Határozott integrál 58
9. Az integrál alkalmazása 59
10. Numerikus sorok 63
11. Többváltozós függvények 67
12. Kettős és többes integrálok 68
13. Görbementi integrálok 69
Irodalomjegyzék 70

1. Elemi függvények és grafikonjaik. Értelmezési tartomány

Kérdések:

1. Mit nevezünk elemi függvénynek?
2. Hogyan határozzuk meg egy függvény értelmezési tartományát?
3. Mi a különbség az értelmezési tartomány és az értékkészlet között?
4. Milyen típusú elemi függvényeket ismerünk?
5. Mi az abszolútérték-függvény értelmezési tartománya és grafikonjának jellemzői?
6. Milyen hatással van a függvény grafikonjára, ha a függvényt eltoljuk vízszintesen vagy függőlegesen?
7. Mi a négyzetgyökfüggvény értelmezési tartománya, és hogyan ábrázoljuk a grafikonját?
8. Hogyan határozzuk meg egy törtfüggvény értelmezési tartományát?
9. Milyen összefüggés van a függvények szimmetriája és grafikonjuk alakja között?
10. Milyen lépésekből áll egy függvény grafikonjának vázlatos megrajzolása?

Gyakorlatok

I. Határozza meg az alábbi függvények értelmezési tartományát:

1. a) $y = \frac{x^2 - x + 2}{2x^2 + x + 5}$; b) $y = \sqrt{2 - x^2} + \sqrt{x + 1}$.

   c) $y = e^{\frac{25 \sin x}{x+5}}$!

2. a) $y = \frac{7x - 4}{3x^2 - 27}$; b) $y = \frac{3}{\sqrt{x-5}} - \frac{\sqrt{x+3}}{3}$;

   c) $y = ln|3x + 4|$!

3. a) $y = \frac{5x^3 - x + 9}{3x - 2}$; b) $y = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 - 9}} + \frac{5}{x - 4}$;

   c) $y = sin\sqrt{\frac{7}{x + \pi}}$!

4. a) $y = \frac{17}{3x^2 - 7x + 4}$; b) $y = \frac{\sqrt[3]{x^3 + 1}}{(x+3)(x-3)}$;

c) $y = arccos(3x-6)$!

5. a) $y = \dfrac{77x^3-11}{5x^4-9x^2+4}$; b) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x^4-16}$;

c) $y = cos\dfrac{5}{|x|+11}$!

6. a) $y = \dfrac{9}{x^3+x^2-5x-125}$; b) $y = \dfrac{\sqrt{x+3}}{x^2+5x}$;

c) $y = tg\left(7x+\dfrac{\pi}{6}\right)$!

7. a) $y = \dfrac{5-x}{9+4x-13x^2}$; b) $y = \sqrt{3x^2-27}+\dfrac{1}{3-x}$;

c) $y = sec\left(\dfrac{x}{5}+\dfrac{\pi}{2}\right)$!

8. a) $y = 3-\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{2x^2-8}$; b) $y = \sqrt{\dfrac{x-5}{3-x}}$;

c) $y = lg(x^2-25)$!

9. a) $y = \dfrac{7}{7-x^2}+\dfrac{5}{|x|-2}$; b) $y = \dfrac{2x^2-8}{x\sqrt{x-2}}$;

c) $y = cosec\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$!

10. a) $y = \dfrac{3}{(x-7)(x^2+2)}$; b) $y = \dfrac{\sqrt[4]{13-x}}{\sqrt{2x}}$;

c) $y = arcsin\dfrac{2x+5}{3}$!

11. a) $y = \dfrac{4x^2-9x+5}{12x-4}+\dfrac{3}{|x|+3}$; b) $y = \dfrac{x^3-8}{\sqrt[3]{x-1}}$;

c) $y = ctg\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)$!

12. a) $y = \dfrac{44x-4}{33x-3}+\dfrac{3}{|x|+3}$; b) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x-2}-\dfrac{x-2}{\sqrt{x}}$;

c) $y = log_x(x+2)$!

13. a) $y=\frac{5}{x-5}+\frac{4}{3x^2-75}$; b) $y=\frac{15\sqrt{x-1}+4}{3-\sqrt{x}}$;

c) $y=arctg\sqrt{x}$!

14. a) $y=\frac{13}{x^2+4}\cdot\frac{x}{(x+2)^2}$; b) $y=\frac{2}{\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4}$;

c) $y=\sqrt{7^{3x}-1}$!

15. a) $y=\frac{8x-1}{5x^2-9}$; b) $y=\sqrt{|x|-5}$;

c) $y=\frac{4}{lg\,4x}$!

16. a) $y=\frac{x^2+2x+1}{x^3+1}$; b) $y=\frac{\sqrt{x^2-36}}{\sqrt[3]{x^2+6x}}$;

c) $y=arcsin\left(x^2+1\right)$!

17. a) $y=\frac{7}{x^2+9}-\frac{3}{x^2-3}$; b) $y=\sqrt{\frac{7x}{2-x}}$;

c) $y=arcctg\frac{1}{\sqrt{x}}$!

18. a) $y=\frac{19}{2x^2-3x+1}$; b) $y=\sqrt{12-x-11x^2}$;

c) $y=\frac{\sin x}{3|x|+2}$!

19. a) $y=\frac{4x+2}{2x^2-x-1}$; b) $y=\frac{17}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{3x-4}$;

c) $y=\frac{5x+3}{cos\,3x}$!

20. a) $y=\frac{5+9x}{7x}-\frac{1}{x-7}$; b) $y=\frac{\sqrt{5-x^2}}{|x|-\sqrt{5}}$;

c) $y=2^x tg5x$!

21. a) $\frac{3x^2-75}{x^2+9}$; b) $y=\frac{\sqrt{5-x^2}}{|x|-\sqrt{5}}$;

c) $y=\frac{cos\,5x}{e^{3x}}$!

22. a) $\frac{8x}{12-x}\cdot\frac{x}{|x|-12}$; b) $y=\sqrt{\frac{x^2-3x}{x+2}}$;

c) $y=\frac{2}{x}ctg\frac{x}{2}$!

23. a) $y=\frac{15-x}{x^4-5x^2+4}$; b) $y=\frac{\sqrt{2x-7}}{\sqrt[3]{x^3-64}}$;

c) $y=5^{lg\frac{5}{|x|}}$!

24. a) $\frac{3x}{9-x^2}+\frac{x^2}{x^3+8}$; b) $y=\frac{\sqrt{2-3x}}{x\sqrt{x+5}}$;

c) $y=\frac{5e^{\frac{1}{x}}}{cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$!

25. a) $y=\frac{5x+5}{x^3+1}$; b) $y=\frac{\sqrt{9-4x^2}}{\sqrt{2x^2-3x+1}}$;

c) $y=\frac{arctg\sqrt{x}}{arcsinx}$!

26. a) $y=\frac{7}{x^2-2}-\frac{2}{3x^2+9}$; b) $y=\frac{\sqrt{x^2-64}}{x+7}$;

c) $y=arccos\sqrt{4x-3}$!

27. a) $y=\frac{x+2}{x-2x^2}$; b) $y=\frac{28}{\sqrt{|x|-3}}+\sqrt{x^2-5}$;

c) $y=log_2(2x-5)+\frac{2}{x-5}$!

28. a) $y=\frac{4}{2|x|-8}$; b) $y=\sqrt{\frac{x-13}{12-2x}}$;

c) $y=lg\frac{x^2-5x+6}{x^2+x+1}$!

29. a) $y=\frac{5x^2-4x-1}{3x^2+10x-13}$; b) $y=\frac{\sqrt{17-x}+\sqrt{17+x}}{x\sqrt{16-x^2}}$;

c) $y=5^{\frac{1}{x-3}}arcsin\frac{x}{3}$!

30. a) $y=\dfrac{4x+\dfrac{2}{x}}{3-\dfrac{5}{x}}$; b) $y=\sqrt{\dfrac{x^2(x-5)}{x^2-25}}$;

c) $\sqrt{lg\,x^2-4}$!

II. Ábrázolja az alábbi függvényeket:

1. a) $y=|2x-1|$; b) $y=-\dfrac{4}{4-x}$; c) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+3}$!

2. a) $y=3x^2-5x+2$; b) $y=\sqrt{x-1}-3$; c) $y=log_3|x+2|$!

3. a) $y=2|x|+4$; b) $y=\dfrac{5-x}{x-3}$; c) $y=2\left|sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right|$!

4. a) $|y|=x-2$; b) $y=\sqrt{2x}-3$; c) $y=3^{|x|-1}-2$!

5. a) $|y|=|x|+2$; b) $y=-\sqrt{x}+5$; c) $y=\left|log_{\frac{1}{2}}x\right|-3$!

6. a) $y=|3x-2|$; b) $y=\dfrac{6}{2-x}$; c) $y=2tg\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$!

7. a) $y=\dfrac{1}{2}|x|+2$; b) $y=3x^2+6x-1$; c) $y=4^{-x}-2$!

8. a) $|y|+|x|=4$; b) $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$; c) $y=\left|lg|x|\right|$!

9. a) $y=|3-x|$; b) $y=2x^2-4x-3$; c) $y=cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$!

10. a) $y=10-|x|$; b) $y=\dfrac{5}{x^2+1}$; c) $y=\left|tg\dfrac{x}{2}\right|$!

11. a) $y=\dfrac{|x|}{2}+1$; b) $y=x^2-2|x|+1$; c) $y=-2^{x-3}$!

12. a) $y=-|7x-5|$; b) $y=3-\sqrt{x+2}$; c) $y=log_2|x-5|$!

13. a) $y=3-2|x|$; b) $y=\dfrac{5x-3}{5x}$; c) $y=|ctgx|+2$!

14. a) $y=-(2+|x|)$; b) $y=4x^2+4x-8$; c) $y=1-3^{|x|}$!

15. a) $y=-|x+3|$; b) $y=-\sqrt{2x-4}$; c) $y=2\sin x-3$!

16. a) $y=|3x-5|$; b) $y=\frac{4x-1}{4x+1}$; c) $y=|\ln x|-2$!

17. a) $y=3|x|-1$; b) $y=x^2+6x+9$; c) $y=\frac{1}{2}|\sin x|-2$!

18. a) $|y|=x+2$; b) $y=\left|\sqrt{x}-2\right|$; c) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x-2$!

19. a) $|y|=3-|x|$; b) $y=5-\sqrt{x}$; c) $y=-|\lg x|+1$!

20. a) $y=2+|x|$; b) $y=\left|\frac{8}{x-2}\right|$; c) $y=-|\cos x|$!

21. a) $y=|x-2|+2$; b) $y=3-2x-x^2$; c) $y=1-2^{x-2}$!

22. a) $y=5-|x|$; b) $y=\frac{3x-1}{3x+2}$; c) $y=-|\log_2 x|$!

23. a) $y=|2x-4|$; b) $y=3-\sqrt{x}$; c) $y=2+\sin|2x|$!

24. a) $|y|+|x|=5$; b) $y=x^2-4|x|+1$; c) $y=\arcsin x+\frac{\pi}{2}$!

25. a) $y=-|x+1|+3$; b) $y=\frac{4}{|x|}-2$; c) $y=\arccos x-\pi$!

26. a) $y=3-|x+1|$; b) $y=\frac{4x+3}{x+1}$; c) $y=3^{-|x|}+2$!

27. a) $y=|3-x|+4$; b) $y=\sqrt{x+2}-2$; c) $y=\log_{\frac{1}{2}}|x|$!

28. a) $y=-|x|+2$; b) $y=2-6x-x^2$; c) $y=|\operatorname{arctg} x|$!

29. a) $y=|x-1|+3$; b) $y=\left|4-x^2\right|$; c) $y=2\operatorname{arcctg} x$!

30. a) $y=|5|x|-7|$; b) $y=-\left|x^2-5\right|$; c) $y=2^{|x|+1}+3$!

2. Számsorozatok és függvények határértéke

Kérdések:

1. Mit nevezünk számsorozatnak?
2. Mit jelent egy sorozat határértéke?
3. Mi a különbség konvergens és divergens sorozat között?
4. Mit jelent az, hogy egy függvény határértéke létezik egy adott pontban?
5. Hogyan jelöljük egy sorozat vagy függvény határértékét?
6. Milyen módszerekkel lehet meghatározni egy sorozat határértékét?
7. Mit jelent a baloldali és jobboldali határérték fogalma?
8. Mi a különbség a sorozatok és a függvények határértékének meghatározása között?
9. Milyen tulajdonságai vannak a határértékkel rendelkező sorozatoknak?
10. Mi az a határozatlansági alak, és hogyan kezeljük az ilyen eseteket függvények határértékének meghatározásakor?

Gyakorlatok

Határozza meg az alábbi határértékeket:

1. a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2-5x+4}{2-4x+9x^2}$;

   b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3-3x^2+5}{7x^2-20}$;

   c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-9}{2x^2-5}$;

   d) $\lim\limits_{x\to2} \frac{x^2-4x+4}{x^3-8}$;

   e) $\lim\limits_{x\to3} \frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$;

   f) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-cos8x}{3x^2}$;

   g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$;

   h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{5x+4}\right)^{x+1}$;

   i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}\right)$!

2. a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{7-5x^3}{4x^3-9x+7}$;

   b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^4+5x^2-7}{4-x^3}$;

   c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-x+9}{3-x^5}$;

   d) $\lim\limits_{x\to-3} \frac{2x^2+11x+15}{3x^2+5x-12}$;

e) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{tg4x}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{5x+4}\right)^{x+1}$;

i) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{2}{x^2-4}-\dfrac{1}{x+2}\right)!$

3. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-4x^3+1}{7x-8x^5}$;

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4x^7-3x^2}{3x^6-5}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+7}{3x^3+5}$;

d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{6+x-x^2}{x^3-27}$;

e) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{6+x-x^2}{x^3-27}$;

f) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{\frac{5x^2}{3}}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{3x+1}\right)^{x+2}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-3}\right)!$

4. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-5x+1}{2x^2-4}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9-5x^3}{2x-4}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{25x^2-16}{x^3-x^2+x-1}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$;

e) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{2\sin x}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{x-5}\right)^{1-x}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x-5}{2x+9}\right)^{3x}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+2}\right)!$

5. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^3-4x+7}{x^3-8}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-2x^2+5}{4x-2}$;

c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{11x-8}{3x^2+x-8}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-x^2+x+1}{x^4-1}$;

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{5x}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4-x}{1-x}\right)^{\frac{x}{2}}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{3x+4}\right)^{x+3}$;

i) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{2}{x^2-9}\right)$!

6. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+7}{9-x^3}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{15-4x+x^3}{2-x}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{9x^5-3x^2+4}$;

d) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{12+x-x^2}{x^3+27}$;

e) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{12+x-x^2}{x^3+27}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsin5x^4}{sin3x}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{-5x}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+8}{x-2}\right)^{x+4}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{2x^2-1}\right)$!

7. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7-2x^5}{4-4x+6x^5}$;

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3x^3-2x+1}{x^2-4x+4}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x-3}{x^3-27}$;

d) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\frac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$;

e) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$;

f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-x}{3-x}\right)^{x+2}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2x-3}\right)^{-x}$;

i) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{3}{x^2+x-2}+\frac{x}{x+2}\right)$!

8. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-2x+10x^2}{7-2x-4x^2}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7-x^4-x^5}{x^4-2x+3}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5-7x+x^2}{9x^3-3x^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$;

e) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$;

f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-sinx}{\pi-2x}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5+x}{x-3}\right)^{\frac{x}{4}}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{2x+2}\right)^{x+2}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x-3}-\sqrt[3]{x+1}\right)$!

9. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x^3-4x^2+1}{3x-5x^3}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{2x+2}\right)^{x+2}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^2-3x+1}{3x^3-2x+3}$;

d) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$;

e) $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$;

f) $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg2x-sin2x}{x^2}$;

g) $\lim\limits_{x\to0}(1+sin\,x)^{ctgx}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3-5x}{1-4x}\right)^{\frac{x}{3}}$;

i) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{5}{x-1}-\frac{3}{x^2-1}\right)$!

10.a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-3x^3+5}{7x^4-2x^2+1}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-x^5}{3-x^3}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-5}{x^3+x^2-1}$;

d) $\lim\limits_{x\to3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$;

e) $\lim\limits_{x\to-5}\frac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+122}}{x^2+8x+15}$;

f) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-cos^2x}{xtgx}$;

g) $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{3}{x}}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{4x-5}\right)^{5x}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{3+x}\right)$!

11.a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-3x^2+5}{7-x^2-5x^3}$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3+2x+x^3}{3x^2-x+4}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7-x}{2+x-x^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2+x-6}$;

e) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$;

f) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{tgx}-\frac{1}{sin\,x}\right)$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+4}\right)^{2x-3}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-3}{x+4}\right)^{x+3}$;

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$!

12. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7-3x^3}{2x^3-5x+1}$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^5-x^3+2}{3x^2-5}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5-x-x^2}{3x^3-9}$;

d) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7}x}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin^2 3x-isn^2 x}{x^2}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x-3}\right)^{x+1}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3-x}{5-3x}\right)^{2x}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-2}\right)$!

13. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x^2-x+1}{3x-9x^2+1}$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^4-5x+1}{x^2-4x}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9-x}{x^3-8}$;

d) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2+x-20}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin\,7x}{5tg2x}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4-x}{2-x}\right)^{\frac{x^2}{2}}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-7}{10x+5}\right)^{x+3}$;

i) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\frac{5}{x-5}-\frac{1}{x^2-25}\right)$!

14. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^7-3x^5+9}{4-x-14x^7}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^6-x^4+x^2}{x^2-4}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-27}{x^3+64}$;

d) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{4x^2+11x-3}{x^2+2x-3}$;

e) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos\,5x}{2x^2}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+5x}{5x-3}\right)^{\frac{2x}{3}}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x-1}{5x+2}\right)^{x+1}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x-1}\right)$!

15.a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x-4x^2+x^5}{3x^5-4}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-4x^2-2}{x^2-2x+1}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9-x}{x^2+4x-5}$;

d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}$;

e) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{2x^2}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0}(1+tgx)^{\cos ecx}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5-x}{4-3x}\right)^{2x}$;

i) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{5}{x-1}-\dfrac{4}{x^2-1}\right)$!

16. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9-x^4}{5x^2-x^4+7}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{12}-3x^3+9}{3x^5-x^6}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-x^2}{7-5x^{10}}$;

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{8x^3-64}{3x^6-6x^5}$;

e) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{8x^3-64}{3x^6-6x^5}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg2x}{tg5x}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+5}\right)^{3x-2}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{x+8}\right)^{5x}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)$!

17. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^3-5x^2+11}{7-2x-3x^3}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9-x^5}{4x^4+x-9}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{5x^3+x^2-9}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$;

e) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-10+x}$;

f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin 2x}{\pi-4x}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7-x}{4-x}\right)^{2x}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-9}{5x+4}\right)^{x-2}$;

i) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{4x}{4-x^2}\right)$!

18. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-x^2+9x}{7x^2-4}$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^5-x^3+5}{2x^2+9}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-4}{x^3+5x}$;

d) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{9x^2+17x-2}{x^2+2x}$;

e) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$;

f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{cos4x-cos^3 4x}{3x^2}$;

g) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(2tgx-1\right)^{tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x-3}{5-x}\right)^{3x}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x}\right)$!

19. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-9x+4}{7-x^3}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x^5-7x}{5x^4-3x}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x-9}{4x^2+x-2}$;

d) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{2x^2-9x+10}$;

e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{5x^2}$;

f) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{sin2x}-\dfrac{1}{tg2x}\right)$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{\frac{x}{2}}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-x}{3-4x}\right)^{x+1}$;

i) $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{3}{x^2-1}\right)$!

20. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14x^2-5x+1}{9-x^2}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7-5x-x^3}{x^2-9x+1}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-2}{5x^2-9}$;

d) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2+5x-42}{x^2-5x+6}$;

e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+4}-2}$;

f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg3x-sin3x}{2x^2}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5-x}{9-x}\right)^{3x}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x}{3x-1}\right)^{2x+1}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x+4}-\sqrt[3]{x}\right)$!

21. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x^2-1}{5x-3x^2-x^3}$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^5-x^3-2}{3+x^4}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+x+2}{x^3-4}$;

d) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2-x-30}{x^3+125}$;

e) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-\cos^2 2x}{x^2}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{ctgx}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{3x-1}\right)^{\frac{x}{4}}$;

i) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{x}{x-5}-\dfrac{5}{x^2-25}\right)$!

22. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+x^5-3}{9x^5-x+4}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-9}{x+3}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2}{3-x+x^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+3x-28}{x^3-64}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sqrt{6-x}-\sqrt{6+x}}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg5x}{\sin 3x}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-1}\right)^{\frac{3x}{2}}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-4x}{2-x}\right)^{2x}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\left(\sqrt{x}-\sqrt{x^2+5}\right)\right)$!

23. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2-3x+x^3}{3x^2-5x^3+1}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7-x-x^4}{x^3-2}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-9}{5x^3+7}$;

d) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{27x^3-1}{9x^2-1}$;

e) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{3x+4}-4}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{x\,arctgx}$;

g) $\lim\limits_{x\to -\pi/4}(2+tgx)^{\frac{1}{x+\pi/4}}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-5}{6x+1}\right)^{x-1}$;

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3}{x}-\dfrac{3}{x^2-x}\right)$!

24. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x+5}{7-4x^3}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-5x}{7-x}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{15x-2}{x^3+x^2+9}$;

d) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5x^2+5x-10}{3x^2+11x+10}$;

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+3}-2}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos 6x}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2-3x}{4-3x}\right)^{5x}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-2}{x+3}\right)^{\frac{x}{4}}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\sqrt{x^2+2}\right)$!

25. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{18x^3-x+1}{3-5x^3}$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{9x^7-x^5}{x^6-9x}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+7}{7x^3+4}$;

d) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{3x^2+x-10}{x^2-4}$;

e) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{3x}-3}{\sqrt{6}-\sqrt{2x}}$;

f) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 4x-\cos 2x}{5x^2}$;

g) $\lim\limits_{x\to2}(3-x)^{\frac{5}{x-2}}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2-x}{3-5x}\right)^{7x}$;

i) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$!

26. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{11x^2-9x+1}{2x^2-3x-1}$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3-x^5}{x^2-3}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7-x}{x^2+5x-6}$;

d) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x+2x^2}{4x^3-5x^2+x}$;

e) $\lim\limits_{x\to2}\frac{4-\sqrt{8x}}{4-x^2}$;

f) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin x}{tg^3 3x}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-2}{5x+3}\right)^{\frac{3x}{2}}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{8x-1}{3x-2}\right)^{\frac{x}{3}}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{5x}-\sqrt{x+5}\right)$!

27. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x^3-8x+3}{4-3x^3}$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{7x^3-2}{x^2+4x}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2}{x^3+3}$;

d) $\lim\limits_{x\to6}\frac{3x^2-20x+12}{2x^2-11x-6}$;

e) $\lim\limits_{x\to-4}\frac{4-\sqrt{20+x}}{64+x^3}$;

f) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x+\sin 5x}{3x}$;

g) $\lim\limits_{x\to0}(2-\cos x)^{\frac{1}{x}}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{2x-5}\right)^{7x}$;

i) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\frac{7}{x-5}-\frac{5}{x^2-25}\right)$!

28. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x^2+x-1}{x^3-x^2+1}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+5}{x+5}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5-x}{3+x^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to -6}\frac{216+x^3}{x^2+2x-24}$;

e) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{8+x}-3}{3x^2-3}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 2x}{3arctg4x}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{\frac{7x}{2}}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{8+5x}{x-2}\right)^{x-3}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x}-\sqrt{5+x}\right)$!

29. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^4-x^2-1}{2x^4-x^3+x}$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^5-3x+2}{x^4+x-1}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9-x^2}{5+x^3}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-5x+2}{x^2-1}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2-x}{\sqrt[4]{x+4}-\sqrt{2}}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 3x+\sin x}$;

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^{\frac{5x-2}{3}}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{2x+4}\right)^{3x}$;

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^2}\right)$!

30. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x^5-4x+2}{7-x-x^5}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{x+2}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7-x}{7-x+x^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-3x+2}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\sqrt{3x}-\sqrt{5x}}$;

f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{ctgx}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7x-1}{2x+3}\right)^{\frac{x}{2}}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sqrt{x^2+6}-\sqrt{x^2-1}\right)$!

3. A függvények folytonossága

Kérdések:

1. Mit jelent az, hogy egy függvény folytonos egy adott pontban?
2. Milyen feltételek szükségesek egy függvény folytonosságához egy pontban?
3. Hogyan definiáljuk a bal- és jobboldali határértéket?
4. Mikor mondjuk, hogy egy függvény megszakítás nélkül folytonos egy intervallumon?
5. Milyen típusú szakadási helyeket ismerünk?
6. Mi a különbség az eltávolítható(megszüntethető) és az ugrásszerű(nem megszüntethető) szakadási hely között?
7. Milyen szerepe van a határértéknek a folytonosság vizsgálatában?
8. Milyen példákon keresztül lehet jól szemléltetni a folytonosság fogalmát?
9. Hogyan lehet ellenőrizni, hogy egy darabokban definiált függvény folytonos-e?
10. Milyen gyakorlati jelentősége van a függvények folytonosságának az analízisben?

Gyakorlatok

1. Állapítsa meg, folytonosak-e az alábbi függvények és készítsen vázlatos ábrát!

1.1. $f(x)=\begin{cases} x+3, & x\le 0, \\ 1, & 0<x\le 2, \\ x^2-2, & x>2. \end{cases}$ 1.2. $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ \sin x, & 0\le x<\pi, \\ 3, & x\ge \pi. \end{cases}$

1.3. $f(x)=\begin{cases} 1-x, & x<-1, \\ x^2+1, & -1\le x\le 2, \\ 2x, & x>2. \end{cases}$ 1.4. $f(x)=\begin{cases} 1, & x\le 0, \\ 2^x, & 0<x\le 2, \\ x+3, & x>2. \end{cases}$

1.5. $f(x)=\begin{cases} 2-x, & x\le -2, \\ x^3, & -2<x\le 1, \\ 2, & x>1. \end{cases}$ 1.6. $f(x)=\begin{cases} 3x+4, & x\le -1, \\ x^2-2, & -1<x<2, \\ x, & x\ge 2. \end{cases}$

1.7. $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 1,\\ (x-2)^2, & 1<x\le 3,\\ 6-x, & x>3. \end{cases}$ 1.8. $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<1,\\ x^2+2, & 1\le x\le 2,\\ -2x, & x>2. \end{cases}$

1.9. $f(x)=\begin{cases} x^3, & x<-1,\\ x-1, & -1\le x\le 3,\\ 5-x, & x>3. \end{cases}$ 1.10. $f(x)=\begin{cases} x, & x<-2,\\ 1-x, & -2\le x\le 1,\\ x^3-1, & x>1. \end{cases}$

1.11. $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le 0,\\ -x^2+3, & 0<x<1,\\ 3x-1, & x\ge 1. \end{cases}$ 1.12. $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2,\\ x^2-4, & -2<x\le 3,\\ 2x, & x>3. \end{cases}$

1.13. $f(x)=\begin{cases} -2, & x<0,\\ \cos x, & 0\le x\le \pi,\\ 1-x, & x>\pi. \end{cases}$ 1.14. $f(x)=\begin{cases} 3, & x<-1,\\ 1-2x, & -1\le x\le 1,\\ \ln x, & x>1. \end{cases}$

1.15. $f(x)=\begin{cases} -2x & x\le 0,\\ x^3, & 0<x\le 2,\\ x+3, & x>2. \end{cases}$ 1.16. $f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1,\\ x^2+2, & -1\le x<1,\\ 4x, & x\ge 1. \end{cases}$

1.17. $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 0,\\ (x+1)^2, & 0<x\le 2,\\ 4-x, & x>2. \end{cases}$ 1.18. $f(x)=\begin{cases} x-2, & x\le -1,\\ x^2-4, & -1<x\le 0,\\ 5-x, & x>0. \end{cases}$

1.19. $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0,\\ (x-1)^2, & 0<x<2,\\ x-3, & x\ge 2. \end{cases}$ 1.20. $f(x)=\begin{cases} -3(x+1), & x\le -1,\\ (x+1)^3, & -1<x<0,\\ 2x, & x\ge 0. \end{cases}$

1.21. $f(x)=\begin{cases} 2x^2, & x\le 0,\\ -x, & 0<x\le 2,\\ x+1, & x>2. \end{cases}$ 1.22. $f(x)=\begin{cases} 2x, & x\le 1,\\ x^2+1, & 1<x\le 3,\\ x+2, & x>2. \end{cases}$

1.23. $f(x)=\begin{cases} x-3, & x<0,\\ x^2-3, & 0\le x\le x2,\\ x+3, & x>2. \end{cases}$ 1.24. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x}, & x\le 0,\\ 0, & 0<x\le 3,\\ x-3, & x>3. \end{cases}$

1.25. $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0,\\ 2x^2, & 0<x\le 1,\\ 3+x, & x>1. \end{cases}$ 1.26. $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x<0,\\ 2x, & 0\le x\le 3,\\ 0, & x>3. \end{cases}$

1.27. $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi,\\ 2, & x\ge\pi.\end{cases}$ 1.28. $f(x)=\begin{cases}x-2, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x<2,\\ 4(x-1), & x\ge 2.\end{cases}$

1.29. $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ x^2-1, & 0\le x<2,\\ -x, & x\ge 2.\end{cases}$ 1.30. $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\le 0,\\ 1-x^2, & 0<x\le 2,\\ 2x, & x>2.\end{cases}$

2. Állapítsa meg, folytonosak-e az alábbi függvények a megadott pontokban!

2.1. $f(x)=8^{\frac{2}{x-2}}-1;\ x_1=2,\ x_2=3.$

2.2. $f(x)=\dfrac{2x}{x-3};\ x_1=3,\ x_2=5.$

2.3. $f(x)=5^{\frac{2}{x-3}}+1;\ x_1=2,\ x_2=3.$

2.4. $f(x)=\dfrac{3x}{x^2-1};\ x_1=1,\ x_2=2.$

2.5. $f(x)=\dfrac{7x}{x^2-4};\ x_1=2,\ x_2=-2,\ x_3=3.$

2.6. $f(x)=2^{\frac{3}{x+2}}+1;\ x_1=-2,\ x_2=-1.$

2.7. $f(x)=4^{\frac{5}{x-2}}+2;\ x_1=2,\ x_2=3.$

2.8. $f(x)=3^{\frac{3}{x+1}}-2;\ x_1=-1,\ x_2=0.$

2.9. $f(x)=5^{\frac{4}{x+1}}-1;\ x_1=-1,\ x_2=0.$

2.10. $f(x)=\dfrac{x-3}{x+2};\ x_1=-2,\ x_2=3.$

2.11. $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2};\ x_1=2,\ x_2=3.$

2.12. $f(x)=\dfrac{x-3}{x+5};\ x_1=-5,\ x_2=-1.$

2.13. $f(x)=3^{\frac{2}{1-x}+1};\ x_1=1,\ x_2=2.$

2.14. $f(x)=4^{\frac{3}{3-x}};\ x_1=-3,\ x_2=0.$

2.15. $f(x)=6^{\frac{3}{x-4}}-2;\ x_1=4,\ x_2=5.$

2.16. $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1};\ x_1=-1,\ x_2=1.$

2.17. $f(x)=2^{\frac{1}{x-3}}+3;\ x_1=3,\ x_2=4.$

2.18. $f(x)=5^{\frac{2}{2-x}-1};\ x_1=2,\ x_2=0.$

2.19. $f(x)=\dfrac{x+7}{x-1};\ x_1=1,\ x_2=3.$

2.20. $f(x)=\dfrac{x-5}{x+3};\ x_1=-3,\ x_2=-1.$

2.21. $f(x)=3^{\frac{1}{2-x}};\ x_1=2,\ x_2=3.$

2.22. $f(x)=9^{\frac{1}{5-x}};\ x_1=5,\ x_2=6.$

2.23. $f(x)=2^{\frac{3}{x-5}};\ x_1=5,\ x_2=6.$

2.24. $f(x)=5^{\frac{1}{x-4}}-2;\ x_1=3,\ x_2=4.$

2.25. $f(x)=6^{\frac{1}{x-3}}+1;\ x_1=3,\ x_2=4.$

2.26. $f(x)=7^{\frac{1}{5-x}}+1;\ x_1=4,\ x_2=5.$

2.27. $f(x)=\dfrac{x-3}{x+4};\ x_1=-5,\ x_2=-4.$

2.28. $f(x)=\dfrac{x+5}{x-2};\ x_1=3,\ x_2=2.$

2.29. $f(x)=5^{\frac{2}{x-1}+3};\ x_1=1,\ x_2=2.$

2.30. $f(x)=2^{\frac{5}{1-x}};\ x_1=0,\ x_2=1.$

4. A deriváltfüggvény

Kérdések:

1. Mit nevezünk egy függvény deriváltjának?
2. Hogyan értelmezzük a derivált geometriai szempontból?
3. Mi a kapcsolat a derivált és az érintő meredeksége között?
4. Hogyan számítjuk ki egy függvény első deriváltját?
5. Milyen szabályokat ismersz a deriválás során (pl. összeg, szorzat, hányados, láncszabály)?
6. Mit jelent az, hogy egy függvény differenciálható?
7. Milyen összefüggés van a folytonosság és a differenciálhatóság között?
8. Hogyan határozható meg egy függvény deriváltja a határérték definíció segítségével?
9. Milyen típusú függvényeknél nem létezik derivált valamely pontban?
10. Hogyan alkalmazható a derivált a mozgás leírásában (pl. sebesség, gyorsulás)?

Gyakorlatok

Deriválja az alábbi függvényeket:

1.

a) $y = 3\sqrt{x} + \frac{7}{x} - 4x^3 + \frac{2}{x^4};$ b) $y = \sqrt[3]{3x^4 + 3x - 2} + \frac{3}{(x-2)^2};$

c) $y = cos^5 3x \cdot sin\, 4x^5;$ d) $y = 4(x-2)^7 \cdot ln(x^2 - x + 2);$

e) $y = (x-3)^6 \cdot sh^2 3x;$ f) $y = \frac{e^{arccos^2 x}}{\sqrt{x+5}};$

g) $y = \frac{7arctg(2x+1)}{(x-4)^2};$ j) $y = \sqrt{\frac{x-5}{x+5} log_3(x - 2x^2)};$

k) $y = (th3x)^{arcsin\, x};$ l) $y = \frac{\sqrt{x+5}(x-3)^4}{(x+2)^3};$

m) $sin\, y = xy^2 + 5;$ n) $\begin{cases} x = 6t^2 - 4, \\ y = 3t^5 ! \end{cases}$

2.

a) $y = \frac{7}{x^5} - \frac{3}{x} + 5\sqrt[4]{x^3} - 2x^2;$ b) $y = \sqrt[4]{(x-5)^3} - \frac{2}{3x^2 + x - 4};$

c) $y = sin^2 2x \cdot tg(5x+2)^3;$ d) $y = 2^{-x} \cdot arctg^2 5x;$

e) $y = ch^3(2x+5)\cdot\sqrt{3x-1};$ f) $y = \dfrac{\sqrt{1+x-x^2}}{e^x};$

g) $y = \dfrac{5lg(3x^2-1)}{(x-3)^3};$ h) $y = \sqrt[3]{\dfrac{3x+1}{3x-1}}\cdot lg(4x+7);$

i) $y = (cos(x+2))^{\ln x};$ j) $y = \dfrac{(x+3)^5(x-2)^3}{\sqrt[5]{(x+7)^2}};$

k) $x^3 + y^3 = 5x;$ l) $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln t\,! \end{cases}$

3.

a) $y = 5x^7 - \dfrac{2}{x^5} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{2}{x};$ b) $y = \dfrac{7}{(2x^2-3x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2};$

c) $y = ctg^4 7x \cdot arcsin\, 8x^2;$ d) $y = 2^{\cos x}\cdot arcctg^4 x;$

e) $y = th^5 2x \cdot ln^2 2x;$ f) $y = \dfrac{2e^{-2x}}{\sqrt{x^2-3x+2}};$

g) $y = \dfrac{5arctg2x}{(2x-1)^2};$ h) $y = \sqrt[4]{\dfrac{7x-2}{7x+2}}\cdot cos(3x-5);$

i) $y = (shx)^{\sqrt{x}};$ j) $y = \dfrac{(x-4)^2\sqrt{x-5}}{(3x+1)^6};$

k) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{7};$ l) $\begin{cases} x = \ln^2 t, \\ y = t + \ln t\,! \end{cases}$

4.

a) $y = 3\sqrt[3]{x} + \dfrac{7}{x^2} - \dfrac{8}{x} + 9x^4;$ b) $y = \dfrac{8}{(x-4)^3} + \sqrt[5]{7-2x-x^2};$

c) $y = tg\, 7x^3 \cdot arccos^2 3x;$ d) $y = ln(2x-5)\cdot ctg\, 3x^2;$

e) $y = cth^4(7x-1)\cdot(x-2)^4;$ f) $y = \dfrac{(3x+1)^2}{4e^{-x^2}};$

g) $y = \dfrac{ln(7x+5)}{(3-x)^5};$ h) $y = \sqrt[5]{\dfrac{5x+1}{5x-1}}\cdot ln(3x-4);$

i) $y = (ln(x+2))^{\cos\sqrt{x}};$ j) $y = \dfrac{\sqrt[3]{2x+1}(x-5)^2}{(2x+3)^5};$

k) $y^2 = \dfrac{x-y}{x+y}$;

l) $\begin{cases} x = te^t, \\ y = \dfrac{t}{e^t}! \end{cases}$

5.

a) $y = \dfrac{7}{x^2} - \dfrac{4}{x} + \sqrt[4]{x^3} - 5x^6$;

b) $y = \sqrt[6]{(3-x)^5} - \dfrac{8}{(x^2-3x+2)^3}$;

c) $y = arcctg^4(7x-3)\cdot \sin 2x^3$;

d) $y = e^{tgx}\cdot \cos^4 x$;

e) $y = e^{-3x^2}\cdot chx^3$;

f) $y = \dfrac{e^{3x}}{(3+5x)^2}$;

g) $y = \dfrac{2\log_3(3x-1)}{(x-7)^4}$;

h) $y = \sqrt[6]{\dfrac{2-x}{2+x}}\cdot \cos(3x-5)$;

i) $y = (\log_2 3x)^{cthx}$;

j) $y = \dfrac{(9x-1)^6(x-7)^5}{\sqrt[3]{(3x-1)^6}}$;

k) $\cos y = x^3 y + 6$;

l) $\begin{cases} x = e^{-3t}, \\ y = e^{8t}! \end{cases}$

6.

a) $y = 5x^3 - \dfrac{8}{x^2} + 6\sqrt{x} - \dfrac{1}{x}$;

b) $y = \dfrac{9}{7-x+2x^2} - \sqrt[3]{(x+5)^2}$;

c) $y = \sin^8 3x\cdot \cos^3 4x^2$;

d) $y = 3(x-1)^5\cdot \log_3 2x$;

e) $y = (4x-2)^5\cdot sh^6 2x^3$;

f) $y = \dfrac{(3x-2)^3}{3e^{4x}}$;

g) $y = \dfrac{arcsin(x+1)}{(x-2)^3}$;

h) $y = \sqrt[7]{\dfrac{x-9}{x+9}}\cdot arctg\sqrt{x+1}$;

i) $y = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\cos^2 x}$;

j) $y = \dfrac{\sqrt[5]{4x-2}}{(3x+1)^6(x-2)^5}$;

k) $ctg^2(x+y) = 2x$;

l) $\begin{cases} x = \sqrt[3]{(t-1)^2}, \\ y = \sqrt{t-1}! \end{cases}$

7.

a) $y = 2\sqrt{x^3} - \dfrac{4}{x^2} + \sqrt[5]{x^2} + \dfrac{7}{x}$;

b) $y = \sqrt[4]{(7-2x-x^2)^3} - \dfrac{4}{(x-3)^5}$;

c) $y = tg\sqrt{x}\cdot \arcsin^2 5x$;

d) $y = \sqrt{e^{x+2}}\cdot \arcsin\sqrt{x}$;

e) $y = lg^2(x+3)\cdot cth^3 2x;$ f) $y = \dfrac{\sqrt{5x^2 - x + 2}}{e^{x^3}};$

g) $y = \dfrac{3log_5(2x+4)}{(x-2)^2};$ h) $y = \sqrt[8]{\dfrac{4x-3}{4x+3}}\cdot ln(5x-1);$

i) $y = \left(\sqrt[3]{x^2}\right)^{arcsin\sqrt{x}};$ j) $y = \dfrac{\sqrt[8]{2x+5}}{(7x-2)^6(x-4)^3};$

k) $x^2y^2 + x = 5y;$ l) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1}, \\ y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2 ! \end{cases}$

8.

a) $y = 8x^2 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{9}{x} - \dfrac{2}{x^2};$ b) $y = \sqrt[3]{(9-x)^2} - \dfrac{2}{4x^2 - x + 5};$

c) $y = cos^5 7x\cdot arcsin\, 2x^3;$ d) $y = e^{-2x}\cdot arctg^3 4x;$

e) $y = tg^4(x-2)\cdot ln^2 2x;$ f) $y = \dfrac{e^{sin\, x}}{cos 2x};$

g) $y = \dfrac{3arcsin\sqrt{x}}{(x+2)^6};$ h) $y = \sqrt[9]{\dfrac{x-9}{x+9}}\cdot sin(2x-5);$

i) $y = (ln 2x)^{sh3x};$ j) $y = \dfrac{(3x-4)^9(x-1)^4}{\sqrt[7]{(3x-1)^6}};$

k) $x^4 + x^2y^2 + y = 4;$ l) $\begin{cases} x = 5\sin^3 t, \\ y = 3\cos^3 t ! \end{cases}$

9.

a) $y = 4\sqrt{x^5} + \dfrac{10}{x^3} - \dfrac{8}{x} + 4x^5;$ b) $y = \sqrt[7]{(2-x)^3} + \dfrac{4}{\left(3 - x + x^2\right)^2};$

c) $y = arctg^4(2x+1)\cdot cos\, 4x^3;$ d) $y = ln(x+4)\cdot arcctg^2 3x;$

e) $y = arcsin^2 7x\cdot sh^6 x;$ f) $y = \dfrac{cos 5x}{e^{tg5x}};$

g) $y = y = \dfrac{4ln^2(x+2)}{(x+2)^3};$ h) $y = \sqrt{\dfrac{4-x}{4+x}}\cdot log_2\left(3x^2 - 4\right);$

i) $y = (ch3x)^{\frac{1}{x}};$ j) $y = \dfrac{\sqrt[6]{(3x+4)^5}}{(x-5)^3(x+3)^2};$

k) $y^2 = x + ln\frac{y}{x}$;

l) $\begin{cases} x = \dfrac{\ln t}{t}, \\ y = t^2 \ln t \end{cases}$!

10.

a) $y = 12\sqrt[3]{x^2} - \frac{7}{x^2} + 4x - \frac{1}{x^3}$;

b) $y = \frac{7}{(5-x)^5} + \sqrt[4]{2 - 3x + 4x^2}$;

c) $y = arccos\, 8x^3 \cdot sin^3 3x$;

d) $y = 5^{x^2} \cdot sin(5x^2 - 3)$;

e) $y = arctg\sqrt{x} \cdot ch^3 3x$;

f) $y = \frac{e^{sh\,2x}}{x^2 - 4}$;

g) $y = \frac{ln(7x-3)}{(x+1)^5}$;

h) $y = \sqrt[3]{\frac{5x-9}{5x+9}} \cdot sin(4-x)$;

i) $y = (lg(8x+1))^{tg\,5x}$;

j) $y = \frac{(4x-1)^7 (3x+1)^2}{\sqrt[5]{(x+7)^4}}$;

k) $xy^2 - y^3 = 4x - 5$;

l) $\begin{cases} x = \arccos t, \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$!

11.

a) $y = \frac{12}{\sqrt{x}} - \frac{4}{x^2} + 5x^4 - \frac{9}{x}$;

b) $y = \frac{8}{(3x^2 - x + 5)^3} - \sqrt[5]{(x-1)^3}$;

c) $y = arccos\sqrt{x+5} \cdot sin^3 2x$;

d) $y = 7(5-x)^5\, log_2 4x$;

e) $y = th^2(x+2) \cdot cos(2x+3)^3$;

f) $y = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 1}}{e^{-cos\,2x}}$;

g) $y = \frac{4 log_4(2x+3)}{(x-1)^5}$;

h) $y = \sqrt[4]{\frac{7x-1}{7x+1}} \cdot ln(3x^5 - 1)$;

i) $y = (cth2x)^{\sqrt{x+1}}$;

j) $y = \frac{\sqrt[4]{5x+1}}{(x-3)^5 (x+2)^4}$;

k) $xy - 6 = cos\, y$;

l) $\begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \cos^2 t \end{cases}$!

12.

a) $y = 4\sqrt[4]{x^5} - \frac{1}{\sqrt{x}} + 2x^3 - \frac{3}{x^3}$;

b) $y = \sqrt[6]{(x-4)^5} - \frac{2}{(7x - x^2)^3}$;

c) $y = arcctg^3 2x \cdot cos(3x+1)$;

d) $y = arctg^4 7x \cdot ln(3x^2 - 4x)$;

e) $y = cth^3(3x-1)\cdot tg(2x)^3;$ f) $y = \dfrac{cos5x}{e^{tg5x}};$

g) $y = \dfrac{3lg(4x+7)}{(2x-1)^2};$ h) $y = \sqrt[5]{\dfrac{x+3}{x-3}}\cdot cos(2x^2-5);$

i) $y = \left(ln\dfrac{1}{x}\right)^{x^2};$ j) $y = \dfrac{(2x+1)^9(3x-2)^8}{\sqrt[5]{(x-4)^3}};$

k) $3y = 7 + xy^3;$ l) $\begin{cases} x = e^{3t}, \\ y = e^{-3t} \end{cases}!$

13.

a) $y = 2x^5 - \sqrt[5]{x^4} + \dfrac{8}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x^3};$ b) $y = \dfrac{9}{(6-x)^2} - \sqrt[4]{3x^2-4x+5};$

c) $y = \sqrt{arcsin\,x}\cdot tg^3(2x+3);$ d) $y = 7^{tg3x}\cdot cos^2 3x;$

e) $y = e^{shx}\cdot ln(7x^2+5x-1);$ f) $y = \dfrac{\sqrt{(x-2)^3}}{e^{3x^2}};$

g) $y = \dfrac{2ln(3x^2-4)}{(x-5)^3};$ h) $y = \sqrt[6]{\dfrac{x-1}{x+1}}\cdot arcsin\sqrt{x};$

i) $y = (log_3(2x+1))^{tg5x};$ j) $y = \dfrac{(9x+4)^{12}(3x-1)^3}{\sqrt[7]{(x-7)^6}};$

k) $tgy = 4y - 5x;$ l) $\begin{cases} x = 3(t-\sin t), \\ y = 3(1-\cos t) \end{cases}!$

14.

a) $y = 7\sqrt[7]{x^5} - 4x^3 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2};$ b) $y = \dfrac{7}{(5-x^3)^2} + \sqrt[3]{x^2-x+1};$

c) $y = tg^2(9x+1)\cdot sin\,7x^3;$ d) $y = ln^6 \sin x\cdot cos^2 x;$

e) $y = 5^{thx}\cdot e^{cthx};$ f) $y = \dfrac{e^{thx}}{(2x+3)^2};$

g) $y = \dfrac{6arccos(x-3)}{(x-2)^2};$ h) $y = \sqrt[7]{\dfrac{3x-2}{3x+2}}\cdot arctg\sqrt{x+1};$

i) $y = (tgx)^{th2x};$ j) $y = \dfrac{\sqrt[8]{2x+7}}{(x-6)^6(x+3)^2};$

k) $y = 7x - ctgy;$ l) $\begin{cases} x = 3(\sin t - t\cos t), \\ y = 3(\cos t + t\sin t)! \end{cases}$

15.

a) $y = \frac{1}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x^3} + 12x^3 - \frac{4}{x};$ b) $y = \sqrt{(7-x)^3} - \frac{2}{(3x^2 - x - 1)^2};$

c) $y = ctg^5 2x \cdot arcsin^4 3x^2;$ d) $y = lg^2(2x+3) \cdot sin\, 5x^2;$

e) $y = log_2 shx \cdot arcsin\sqrt{x};$ f) $y = \frac{e^{-2x}}{\sqrt{4x+3}};$

g) $y = \frac{lg(x^2-4)}{(x-2)^5};$ h) $y = \sqrt[8]{\frac{5-x}{5+x}} \cdot ln(2x^3 - 3);$

i) $y = (x^2+1)^{\sqrt{x}};$ j) $y = \frac{(x-3)^3(x+5)^7}{\sqrt[9]{(x-4)^8}};$

k) $sin^2(3x + y^2) = 5;$ l) $\begin{cases} x = arctgx, \\ y = \ln(1+t^2)! \end{cases}$

16.

a) $y = 2\sqrt[4]{x^3} + \frac{7}{x^2} - \frac{8}{x} + 3x^2;$ b) $y = \sqrt[4]{(x-7)^3} - \frac{9}{(4 - x - x^2)^3};$

c) $y = arctg\sqrt{x+2} \cdot tg^4 7x^2;$ d) $y = arcsin\sqrt{x+2} \cdot e^{2x};$

e) $y = arccos\, 5x \cdot ch^2 3x;$ f) $y = \frac{e^{sin^2 x}}{\sqrt{2x^2 - 3}};$

g) $y = \frac{arcsin\sqrt{x-2}}{(x-3)^4};$ h) $y = \sqrt[9]{\frac{7+x}{7-x}} \cdot log_4(x-2);$

i) $y = (sh2x)^{log_2 3x};$ j) $y = \frac{\sqrt[10]{(x+8)^3}}{(x-2)^4(4-x)^6};$

k) $e^y = 4x - 7y;$ l) $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1-t^2}\,! \end{cases}$

17.

a) $y = 2\sqrt{x^3} - \frac{4}{x^2} + 7x^5 - \frac{3}{\sqrt{x}};$ b) $y = \frac{11}{3x^2 - 2x - 9} - \sqrt[5]{(x-8)^2};$

c) $y = cos(2x+5) \cdot \sqrt{tg3x^2};$ d) $y = 3^{-x^2} tg^3 2x;$

e) $y = 4(3x-1)^2 cth^3 x;$ f) $y = \dfrac{5e^{x^2}}{(7-x)^3};$

g) $y = \dfrac{3log_5(x^2-3)}{(x-1)^3};$ h) $y = \sqrt{\dfrac{3x-7}{3x+7} \cdot sin(3x^2+5)};$

i) $y = (arctg\,2x)^{sh3x};$ j) $y = \dfrac{(x-1)^2(3x+2)^5}{\sqrt[3]{(x-1)^2}};$

k) $y^2 + x^2 = sin\, y;$ l) $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 4\sin t\,! \end{cases}$

18.

a) $y = 9\sqrt[3]{x^5} + \dfrac{5}{x^2} - 7x^3 + \dfrac{8}{x};$ b) $y = \sqrt[3]{(9+x-x^2)^2} - \dfrac{5}{(x+5)^5};$

c) $y = ctg\,5x^4 \cdot sin^3 3x;$ d) $y = 2^{x^2-4} \cdot arcsin^2 \sqrt{x};$

e) $y = (7-x)^3 \cdot sh^5 2x;$ f) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x+3}}{e^{-3x}};$

g) $y = \dfrac{sin(5x+1)}{(x-4)^6};$ h) $y = \sqrt[3]{\dfrac{2x+4}{2x-4}} \cdot cos(7-x^2);$

i) $y = (ch2x)^{3x};$ j) $y = \dfrac{\sqrt[4]{(x+4)^3}}{(2x-3)^9(x+1)^7};$

k) $sin\, y = 7x + 3y;$ l) $x = \begin{cases} x = 5\cos^2 t, \\ y = 3\sin^2 t\,! \end{cases}$

19.

a) $y = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{2}{x^3} - 3x^4 + \dfrac{1}{x};$ b) $y = \sqrt[6]{(x^2-3x+2)} - \dfrac{8}{(x+5)^3};$

c) $y = arcsin\sqrt{x} \cdot ctg^3 2x;$ d) $y = 5^{cos^2 x} arctg^3 x;$

e) $y = 7^{ch2x}\, ln\, 2x;$ f) $y = \dfrac{2e^{tg3x}}{(3x-1)^2};$

g) $y = \dfrac{3log_2(x+3)}{tg3x};$ h) $y = \sqrt[4]{\dfrac{x+3}{x-3}} \cdot log_3(2x+9);$

i) $y = \left(cth\sqrt{x}\right)^{cos(x+5)};$ j) $y = \dfrac{(7x-1)^2(x+9)^5}{\sqrt[5]{(x-1)^4}};$

k) $y = e^{y} + 4x;$ l) $\begin{cases} x = e^{t}\cos t, \\ y = e^{t}\sin t\,! \end{cases}$

20.

a) $y = 7\sqrt[5]{x^{3}} + \frac{4}{x} - \frac{9}{x^{2}} + 8x^{2};$ b) $y = \frac{7}{\left(x^{2} - x + 1\right)^{3}} - \sqrt[5]{(4-x)^{3}};$

c) $y = \sqrt{tg\,7x^{2}} \cdot cos\,2x^{3};$ d) $y = sin^{5}\left(3x^{2} - 1\right) \cdot cos\,3x^{2};$

e) $y = arctg\sqrt{x} \cdot th^{5}(x+1);$ f) $y = \frac{ln^{2}(2x+1)}{x^{2} + x + 3};$

g) $y = \frac{tg(2x-5)}{ln(2x-1)};$ h) $y = \sqrt[5]{\frac{5x-1}{5x+1}} \cdot lg\left(4x^{2} - 3\right);$

i) $y = (sh5x)^{arctg\,2x};$ j) $y = \frac{\sqrt[6]{(x-1)^{5}}}{(x+2)^{6}(x-3)^{8}};$

k) $ln\,y = \frac{y}{x} - 7;$ l) $\begin{cases} x = t^{4}, \\ y = \ln t\,! \end{cases}$

21.

a) $y = \sqrt[6]{x^{5}} - 6x^{2} + \frac{3}{x^{3}} - \frac{2}{x};$ b) $y = \sqrt[9]{(x-3)^{2}} + \frac{2}{\left(x - 3x^{2}\right)^{7}};$

c) $y = tg^{5}(3x-1) \cdot ctg\,7x^{2};$ d) $y = log_{2}(5x+1) \cdot sin^{4}\,3x^{5};$

e) $y = arctg^{6}\,3x \cdot sh(2x+3);$ f) $y = \frac{e^{4x^{2}}}{ln^{2}\,x};$

g) $y = \frac{2(x-3)^{3}}{ln^{2}\,2x};$ h) $y = \sqrt[6]{\frac{6-x}{6+x}} \cdot arccos(2x-1);$

i) $y = (lg\,7x)^{x^{3}};$ j) $y = \frac{(x+1)^{5}(x-1)^{4}}{\sqrt[7]{(x-3)^{6}}};$

k) $tgy = 3x + 5y;$ l) $\begin{cases} x = 4t + 2t^{2}, \\ y = 5t^{3} - 3t^{2}\,! \end{cases}$

22.

a) $y = \frac{10}{x^{2}} - 8\sqrt[4]{x^{3}} + \frac{3}{x} - 9x;$ b) $y = \sqrt[3]{2x^{2} - x + 5} + \frac{3}{(2-x)^{5}};$

c) $y = sin^{4}\,5x \cdot arcsin\sqrt{8x};$ d) $y = cos^{4}(4x-2) \cdot e^{x^{3}};$

e) $y=(4x-3)^5 sh(4x-1);$ f) $y=\dfrac{\sqrt{7-x-2x^2}}{e^{-2x}};$

g) $y=\dfrac{7\ln(x^2-1)}{\sin^2(x+1)};$ h) $y=\sqrt[7]{\dfrac{x+2}{x-2}}\cdot tg(5x^2-3);$

i) $y=\left(\sqrt{x+3}\right)^{\arcsin 5x};$ j) $y=\dfrac{\sqrt[8]{(x+5)^3}}{(3x-2)^3(x+3)^9};$

k) $xy=ctgy;$ l) $\begin{cases} x=\dfrac{\ln t}{t}, \\ y=t\ln t\,! \end{cases}$

23.

a) $y=4\sqrt{x}-\dfrac{7}{x^5}+\dfrac{4}{x}-8x^9;$ b) $y=\dfrac{7}{(x-5)^6}-\sqrt[7]{x^2-3x+4};$

c) $y=(7x-4)^5 \arcsin\sqrt{x};$ d) $y=\cos^3(5x-7)\cdot \lg 3x^2;$

e) $y=e^{th^2 x}ch^3 x;$ f) $y=\dfrac{e^{tg3x}}{(x+1)^2};$

g) $y=\dfrac{tg(3x+1)}{4\ln^2(x-3)};$ h) $y=\sqrt[8]{\dfrac{9-x}{9+x}}\cdot \ln(3x^5-4);$

i) $y=(arctg3x)^{shx};$ j) $y=\dfrac{(x-3)^4(x+9)^7}{\sqrt[9]{(x-5)^5}};$

k) $y^2-x=\cos y;$ l) $\begin{cases} x=\dfrac{2t}{1+t^3}, \\ y=\dfrac{t^2}{1+t^2}\,! \end{cases}$

24.

a) $y=7\sqrt[7]{x^5}+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{7}{x}+9x^3;$ b) $y=\dfrac{1}{(3-x-2x^2)^3}-\sqrt[3]{(x-2)^2};$

c) $y=arctg^3 8x\cdot \cos 2x^4;$ d) $y=5^{-x^3}\sin^2 3x^3;$

e) $y=2^{cth3x}sh^2 x;$ f) $y=\dfrac{e^{chx}}{2x-4};$

g) $y=\dfrac{\ln^2(x+2)}{(x-5)^5};$ h) $y=\sqrt[9]{\dfrac{2x+7}{2x-7}}\cdot \cos(3x^2-4);$

i) $y=\left(th\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x+3}}$;

j) $y=\frac{\sqrt{x-7}}{(x+1)^9(x-1)}$;

k) $3x+\sin y=5y$;

l) $\begin{cases} x=\sqrt{t^2-1}, \\ y=\frac{t+1}{\sqrt{t^2-1}}! \end{cases}$

25.

a) $y=12\sqrt[3]{x^2}-\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{5}{x}-3x^5$;

b) $y=\sqrt[9]{(7-x)^7}+\frac{6}{(3x^2-11x)^5}$;

c) $y=\sqrt{\arccos 3x}\cdot\sin^5 2x$;

d) $y=arctg^2\sqrt{x}\cdot\cos(1+x)^2$;

e) $y=\arcsin\sqrt{x}\cdot sh^4\sqrt{x}$;

f) $y=\frac{e^{-ctg\,2x}}{\cos^2 2x}$;

g) $y=\frac{5\ln(7x+2)}{\cos^2(7x-1)}$;

h) $y=\sqrt{\frac{5x+3}{5x-3}}\cdot\log_5(7-x^2)$;

i) $y=(\ln(7x+4))^{tgx}$;

j) $y=\frac{(x-8)^{10}(x+3)^7}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$;

k) $y^4=25x-4$;

l) $\begin{cases} x=e^{-2t}, \\ y=e^{6t}! \end{cases}$

26.

a) $y=15\sqrt[5]{x}+7x^3-\frac{8}{x^3}+\frac{4}{x}$;

b) $y=\sqrt{2x^2-4x+5}-\frac{9}{(4-x)^5}$;

c) $y=\arcsin^4 5x\cdot tg(3x+4)$;

d) $y=\log_5 3x^5\cdot\sin^3 4x$;

e) $y=\arccos^3 x\cdot ch^2 x$;

f) $y=\frac{\sqrt{7x-1}}{e^{\sin 5x}}$;

g) $y=\frac{4\cos^3(x-3)}{\ln^2(x-3)}$;

h) $y=\sqrt[3]{\frac{x+10}{x-10}}\cdot\arcsin 3x$;

i) $y=(lg(8x+3))^{chx}$;

j) $y=\frac{\sqrt[4]{(x+7)^3}}{(2x+3)^3(x-1)^5}$;

k) $arcctgy=4x+5y$;

l) $\begin{cases} x=\sqrt{t}, \\ y=\sqrt[5]{t}! \end{cases}$

27.

a) $y=\frac{3}{\sqrt[6]{x^5}}-4x^5+\frac{3}{x^2}-\frac{9}{x};$ b) $y=\frac{4}{\left(3x^2-x+3\right)^2}-\sqrt[5]{(x-2)^3};$

c) $y=\sqrt{arctgx}\cdot sin^5 2x^3;$ d) $y=3(1-x)^4 ln^3 2x;$

e) $y=arcctg\frac{1}{x}\cdot th^2 x;$ f) $y=\frac{e^{5x}}{\sqrt[3]{5x-2}};$

g) $y=\frac{ln^2 2x}{(x-2)^3};$ h) $y=\sqrt[4]{\frac{2x+3}{2x-3}}\cdot arccos(2x-1);$

i) $y=(cos 5x)^{shx};$ j) $y=\frac{(x+5)^4(x-1)^2}{\sqrt[5]{(x-4)^3}};$

k) $y=log_2 x+2y;$ l) $\begin{cases} x=6\cos^3 t, \\ y=2\sin^3 t\,! \end{cases}$

28.

a) $y=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}-5x^3;$ b) $y=\frac{7}{(3x-4)^2}+\sqrt{9-x-2x^2};$

c) $y=\sqrt{arctgx}\cdot sin^5 2x^3;$ d) $y=12x^2 arcsin^3\sqrt{x};$

e) $y=cth^5 3x\cdot arcsin^4 2x;$ f) $y=\frac{\sqrt{5x^2-3x+1}}{e^{x^2+3}};$

g) $y=\frac{9arcsin\sqrt{x}}{ln\sqrt{x}};$ h) $y=\sqrt[5]{\frac{4x-1}{4x+1}}\cdot tg(4x-1);$

i) $y=\left(\sqrt{3x+2}\right)^{arctg\sqrt{x}};$ j) $y=\frac{\sqrt[6]{(x-6)^5}}{(x-4)^3(x+7)^4};$

k) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=sin y;$ l) $\begin{cases} x=\frac{1}{t+2}, \\ y=\frac{t}{(t+2)^2}\,! \end{cases}$

29.

a) $y=\frac{12}{x^3}-\frac{2}{x}+\frac{7}{x^7}-\sqrt[8]{x^5};$ b) $y=\sqrt[4]{\left(x^2-x+1\right)^3}-\frac{1}{(2x-3)^2};$

c) $y=sin\sqrt[5]{x}\cdot arctg 2x^3;$ d) $y=e^{sin 3x}cos^3 3x;$

e) $y=2(7-x)^3 ch^2(2x+1);$ f) $y=\frac{e^{-sin x}}{(x+4)^2};$

g) $y=\frac{log_5\left(2x^3-1\right)}{\left(x-2\right)^5};$ h) $y=\sqrt[6]{\frac{10x-1}{10x+1}}\cdot ln\left(2x^3-5\right);$

i) $y=\left(log_2\left(3x+5\right)\right)^{\frac{2}{x}};$ j) $y=\frac{\left(7x-1\right)^{10}\left(x+2\right)^7}{\sqrt[7]{\left(x-3\right)^6}};$

k) $y^3=8xy+7;$ l) $\begin{cases}x=\left(2t+5\right)\sin t,\\ y=4t^2\ !\end{cases}$

30.

a) $y=15x^2-\frac{8}{x}+\frac{4}{x^3}+3x^6;$ b) $y=\frac{4}{7x^2-2x+5}-\sqrt[3]{\left(x-2\right)^2};$

c) $y=ctg^5\left(2x+3\right)\cdot arcsin\sqrt{x};$ d) $y=ln^4\left(2x+1\right)\cdot cos\left(2x+1\right)^2;$

e) $y=e^{th^2x}ch\sqrt{x+1};$ f) $y=\frac{ctg5x}{e^{x^3}};$

g) $y=\frac{4ln5x}{\left(x+4\right)^3};$ h) $y=\sqrt[7]{\frac{3x+4}{3x-4}}\cdot log_4\left(5x-2\right);$

i) $y=\left(cth5x\right)^{\sqrt{x+1}};$ j) $y=\frac{\sqrt[8]{\left(x-5\right)^7}}{\left(x+1\right)^5\left(x-1\right)^4};$

k) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{7}=cos\,y;$ l) $\begin{cases}x=3\cos^2 t,\\ y=2\sin^2 t\ !\end{cases}$

5. Derivált alkalmazása

Kérdések:

1. Hogyan használható a derivált a függvény monotonitásának vizsgálatára?
2. Mit jelent az, hogy egy függvény lokális minimum- vagy maximumhelye van?
3. Hogyan találjuk meg egy függvény szélsőértékeit a derivált segítségével?
4. Mi a kapcsolat a második derivált és a függvény görbülete között?
5. Hogyan határozhatjuk meg a konvexitást és konkávitást a második derivált segítségével?
6. Mit jelent az inflexiós pont, és hogyan található meg a deriváltak alapján?
7. Hogyan alkalmazható a derivált a függvény grafikonjának vázlatos ábrázolására?
8. Hogyan használható a derivált gazdasági problémákban, például profitmaximalizálásra?
9. Milyen szerepe van a deriváltnak fizikai mennyiségek, például sebesség vagy gyorsulás meghatározásában?
10. Hogyan alkalmazható a derivált optimalizálási feladatok megoldására?

Gyakorlatok

1. Határozza meg az alábbi függvények monotonitásának intervallumait:

1.1. a) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 14$; b) $y = 2x^2 - \ln x$;

b) $y = 2\sqrt{3}\sin x - 3x \ \ (0 \le x \le 2\pi)$!

1.2. a) $y = (x-2)^4 (2x+1)^3$; b) $y = xe^x$;

c) $y = 2x + \cos x$!

1.3. a) $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$; b) $y = ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$;

c) $y = 2\sin x + \cos 2x, \quad (0 \le x \le 2\pi)$!

1.4. a) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$; b) $y = \dfrac{x^2}{e^x}$;

c) $y = x + 3tgx$!

1.5. a) $y=(x-3)^5(3x-1)^2$; b) $y=x^2+\ln x$;

c) $y=\sin x-\cos x,\quad (-\pi\le x\le 0)$!

1.6. a) $y=\dfrac{10}{4x^3-9x^2+6x}$; b) $y=x-\ln(1+x^2)$;

c) $y=3x+3\cos x$!

1.7. a) $y=3x^3-4^2$; b) $y=xe^{-x}$;

c) $y=ctgx-x$!

1.8. a) $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$; b) $y=\dfrac{\ln x}{x}$;

c) $y=tgx+2x$!

1.9. a) $y=\dfrac{4x-x^2-4}{x}$; b) $y=e^{\frac{1}{5+x}}$;

c) $y=\sqrt{3}x-2\sin x,\quad (0\le x\le 2\pi)$!

1.10. a) $y=\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$; b) $y=x+\dfrac{\ln x}{x}$;

c) $y=5tgx+1$!

1.11. a) $y=\dfrac{x}{9-x}$; b) $y=x^2-2\ln x$;

c) $y=3ctgx-5$!

1.12. a) $y=3x^4-2x^3-6x^2+6x$; b) $y=-\ln\dfrac{1+x}{1-x}$;

c) $y=2x+\cos x$!

1.13. a) $y=\dfrac{(x-2)^3}{x+1}$; b) $y=\ln(x^2+1)$;

c) $y=3tgx+7$!

1.14. a) $y=\dfrac{x^3}{x^2-x+1}$; b) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

c) $y=2\cos x-2\sin x,\quad (-\pi\le x\le 0)$!

1.15. a) $y=x^5-5x^4+5x^3+1$; b) $y=x^2e^{\frac{1}{x}}$;

c) $y=1+tg^2x,\quad \left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$!

1.16. a) $y=\dfrac{x^2+6}{x^2+1}$; b) $y=\sqrt{x}\,ln\,x$;

c) $y=sin\,2x+2\,cos\,x,\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$!

1.17. a) $y=\sqrt[3]{\left(x^2-a^2\right)^2}$; b) $y=ln\left(x^2+1\right)-x$;

c) $y=arctgx+x$!

1.18. a) $y=\sqrt{2x-x^2}$; b) $y=ae^{px}+be^{-px}$;

c) $y=x-arcctgx$!

1.19. a) $y=\dfrac{x^2-x-1}{x^2-2x}$; b) $y=x\,ln\,x$;

c) $y=3\,sin\,x-3\,cos\,x,\ \left(-\pi\le x\le 0\right)$!

1.20. a) $y=x\sqrt{ax-x^2}\ \ (a>0)$; b) $y=e^{\sqrt{x^2-1}}$;

c) $y=3arctgx+x^3$!

1.21. a) $y=\dfrac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$; b) $y=\dfrac{1}{ln\left(x^4+4x^3+30\right)}$;

c) $y=cos\,2x-sin^2\,x,\ \left(0\le x\le 2\pi\right)$!

1.22. a) $y=\dfrac{4\sqrt{3}}{9x\sqrt{1-x}}$; b) $y=x-ln\left(1+x\right)$;

c) $y=x\,sin\,x+cos\,x,\ \left(0\le x\le 2\pi\right)$!

1.23. a) $y=\left(x-5^2\right)\sqrt[3]{\left(x+1\right)^2}$; b) $y=\dfrac{-3}{x}+e^x$;

c) $y=\sec x+5,\ \left(0\le x\le 2\pi,\ x\ne\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$!

1.24. a) $y=\left(2x-3\right)^3\left(x+5\right)^5$; b) $y=\dfrac{1}{x}+e^{-x}$;

c) $y=\sec x+\cos ec\,x,\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2},\ x\ne 0\right)$!

1.25. a) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$; b) $y=ln\left(1+x\right)-x$;

c) $y=2+5tgx$!

1.26. a) $y = \dfrac{x+3}{(x+3)^2}$; b) $y = e^x - \dfrac{2}{x}$;

c) $y = 7ctgx - 2$!

1.27. a) $y = \dfrac{x^3+4}{x^2}$; b) $y = \dfrac{e^{2x}+1}{e^x}$;

c) $y = arcsin\, x + x^3$!

1.28. a) $y = \dfrac{x^2}{(x+2)^2}$; b) $y = x + ln(x^2-4)$;

c) $y = arccos\, x - x^3$!

1.29. a) $y = \dfrac{x^4}{x^3-1}$; b) $y = -x\, ln^2\, x$;

c) $y = 3x - \cos x$!

1.30. a) $y = (x+1)\sqrt[3]{x^2}$; b) $y = (x+1)e^{2x}$;

c) $y = sin\, 2x - 5x$!

2. Határozza meg az alábbi függvények szélsőértékhelyeit:

2.1. a) $y = \dfrac{4\sqrt{3}}{9x\sqrt{1-x}}$; b) $y = 2e^{3x} + 3e^{-2x}$!

2.2. a) $y = 3x^2 - 2x^3$; b) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{ln\, x}$!

2.3. a) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$; b) $y = x\, sin\, x + cos\, x - \dfrac{1}{4}x^2$;

$\left(-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}\right)$!

2.4. a) $y = x^4 - 2x^2 + 5$; b) $y = 2x^2 - ln\, x$!

2.5. a) $y = \sqrt[3]{(x^2-4)^2}$; b) $y = e^{\frac{x^2}{4-x}}$!

2.6. a) $y = \dfrac{x-1}{(x+1)^2}$; b) $y = x + 2\, sin\, x$;

$(0 \le x \le 2\pi)$!

2.7. a) $y = \dfrac{x^2}{4x^2-1}$; b) $y = x^3 e^{\frac{-x^2}{2}}$!

2.8. a) $y=\dfrac{4x-x^2-4}{x}$; b) $y=x-2arctgx$!

2.9. a) $y=4x^3-6x^2-24x+9$; b) $y=\dfrac{e^{2x}}{e^x-1}$!

2.10. a) $y=\dfrac{(x-2)^2}{x+1}$; b) $y=x+2\cos x$;

$(0\le x\le 2\pi)$!

2.11. a) $y=x^4+2x^2-8x-5$; b) $y=\dfrac{\ln x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$!

2.12. a) $y=(x+1)\sqrt[3]{x}$; b) $y=\dfrac{x^2}{\ln x}$!

2.13. a) $y=x^5-5x^4+5x^3+1$; b) $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}$!

2.14. a) $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$; b) $y=\ln(1+x^2)-x$!

2.15. a) $y=\dfrac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$; b) $y=e^{2x}(x-1)$!

2.16. a) $y=\dfrac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$; b) $y=e^{-x}(x^2-3)$!

2.17. a) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$; b) $y=\sin 2x-x$!

2.18. a) $y=2x^3+3x^2-12x-5$; b) $y=2arctgx+\dfrac{5}{2(1+x^2)}$!

2.19. a) $y=x^2(x-12)^2$; b) $y=2\cos\dfrac{x}{2}+3\cos\dfrac{x}{3}$!

2.20. a) $y=\dfrac{(x-2)(8-x)}{x^2}$; b) $y=chx$!

2.21. a) $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$; b) $y=\dfrac{e^x}{x}$!

2.22. a) $y=\dfrac{16}{x(4-x^2)}$; b) $y=x\ln^2 x$!

2.23. a) $y=\dfrac{x^2}{x^2+3}$; b) $y=2xe^x$!

2.24. a) $y = \frac{4}{\sqrt{x^2+8}}$; b) $y = x - arctgx$!

2.25. a) $y = x(x-1)^2(x-2)^2$; b) $y = x - ln(1+x)$!

2.26. a) $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}$; b) $y = x\,ln\,x$!

2.27. a) $y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$; b) $y = x^2 e^{-x}$!

2.28. a) $y = (1+x^2)(2-x)$; b) $y = 2^{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$!

2.29. a) $y = \frac{x}{x-2}$; b) $y = 2\,sin\,2x + sin\,4x$!

2.30.a) $y = (x-3)\sqrt{x}$; b) $y = \frac{ln\,x}{x}$!

3. Határozza meg az alábbi függvények szélsőértékhelyeit a második derivált segítségével:

3.1. $y = x + \frac{4}{x}$; 3.2. $y = x + \sqrt{1-x}$;

3.3. $y = \frac{x^2}{e^x}$; 3.4. $y = ch2x$;

3.5. $y = \frac{x}{ln\,x}$; 3.6. $y = \frac{e^{-x}}{x}$;

3.7. $y = ln(1+x^2)$; 3.8. $y = x^4(12\,ln\,x - 7)$;

3.9. $y = (x+2)^6 + 2x + 2$; 3.10. $y = e^{arctgx} - arctgx$;

3.11. $y = x^2 - arcsin\,x$; 3.12. $y = \frac{ln\,x}{x}$;

3.13. $y = \frac{a}{x} ln \frac{x}{2} (a > 0)$; 3.14. $y = -\sqrt{x-5}$;

3.15. $y = \frac{9}{x} + x$; 3.16. $y = \frac{x^2}{3-x^2}$;

3.17. $y = x^2 + \frac{2}{x}$; 3.18. $y = x^3 - 3x^2 + 5$;

3.19. $y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$; 3.20. $y = x^3(x-2)^2$;

3.21. $y = e^{-x^2}$; 3.22. $y = xe^x$;

3.23. $y = x^4 - 2x^2 - 4$;

3.24. $y = ln\cos x$;

3.25. $y = ln\sin x$;

3.26. $y = \frac{\ln x}{x^2}$;

3.27. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$;

3.28. $y = e^{\sin x}$ $(0 \le x \le 2\pi)$;

3.29. $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$;

3.30. $y = \frac{e^x}{x+1}$!

6. Függvényvizsgálat

Kérdések:

1. Mit értünk függvényvizsgálat alatt?
2. Mely lépésekből áll egy függvény teljes körű vizsgálata?
3. Hogyan határozzuk meg a függvény értelmezési tartományát?
4. Mi a zérushely, és hogyan találjuk meg egy függvény esetén?
5. Hogyan vizsgálható a függvény szimmetriája?
6. Milyen szerepe van az első deriváltnak a monotonitás vizsgálatában?
7. Hogyan állapítható meg egy függvény lokális szélsőértéke?
8. Milyen információt ad a második derivált a függvény görbületéről?
9. Mit jelentenek a konvex és konkáv intervallumok?
10. Hogyan rajzoljuk meg a függvény grafikonját a vizsgálati eredmények alapján?

Gyakorlatok

Végezze el a teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényeknél és ábrázolja azokat!

1. a) $y=\frac{2(x+1)^2}{x-2}$; b) $y=e^{2x-x^2}$.

2. a) $y=\frac{2+x}{(x+1)^2}$; b) $y=x+ln\left(x^2-4\right)$.

3. a) $y=\frac{(1-x)^3}{(x-2)^2}$; b) $y=x\,ln^2 x$.

4. a) $y=\frac{x^2}{(x+3)^2}$; b) $y=\frac{4e^{x^2}-1}{e^{x^2}}$.

5. a) $y=\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2$; b) $y=x^2e^{-x^2/2}$.

6. a) $y=\frac{x^3}{9-x^3}$; b) $y=xe^{1/x}$.

7. a) $y=\frac{4x}{4+x^2}$; b) $y=ln\left(9-x^2\right)$.

8. a) $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$; b) $y=xe^x$.

9. a) $y=\dfrac{2x^2+4x+2}{2-x}$; b) $y=x^2e^{1/x}$.

10. a) $y=\left(x^2-1\right)^3$; b) $y=(x+2)e^{1-x}$.

11. a) $y=32x^2\left(x^2-1\right)^3$; b) $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

12. a) $y=\dfrac{1}{x}+4x^2$; b) $y=(x+1)e^{2x}$.

13. a) $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$; b) $y=\ln\left(x^2-2x+6\right)$.

14. a) $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$; b) $y=\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

15. a) $y\left(x^3+8\right)=x^4$; b) $y=x^3e^{x+1}$.

16. a) $y(x-1)(x-2)(x-3)=1$; b) $y=x\sin x$.

17. a) $y=\sqrt[3]{x^2}-x$; b) $y=x+\sin x$.

18. a) $(y-x)x^4+8=0$; b) $y=\ln\cos x$.

19. a) $y=\dfrac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$; b) $y=x-\ln\left(1+x^2\right)$.

20. a) $xy=\left(x^2-1\right)(x-2)$; b) $y=1-\ln^3 x$.

21. a) $y(x-1)=x^3$; b) $y=(x-1)e^{4x+2}$.

22. a) $y=\dfrac{x^5}{x^4-1}$; b) $y=-x\ln^2 x$.

23. a) $y=\dfrac{x^2+4}{x^2+1}$; b) $y=x^2-2\ln x$.

24. a) $y=\dfrac{x^2-x-1}{x^2-2x}$; b) $y=e^{1/(2-x)}$.

25. a) $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}$; b) $y=-\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

26. a) $y=\dfrac{6x}{4-x^2}$; b) $y=\dfrac{1}{e^x-1}$.

27. a) $y = \dfrac{x^2 + 2 - 3x}{x+1}$; b) $y = \dfrac{e^x}{x}$.

28. a) $y = \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$; b) $y = x - 2arctgx$.

29. a) $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$; b) $y = \dfrac{arcsinx}{\sqrt{1-x^2}}$.

30. a) $y = \sqrt{8+x} - \sqrt{8-x}$; b) $y = \ln x - arctgx$.

7. Határozatlan integrál

Kérdések:

1. Mit értünk határozatlan integrál alatt?
2. Hogyan kapcsolódik az integrálás a deriváláshoz?
3. Mi az integrálás alapszabálya (visszaderiválás szabálya)?
4. Mit jelent az integrálási állandó, és miért szükséges?
5. Milyen módszerekkel lehet határozatlan integrálokat kiszámítani?
6. Hogyan alkalmazzuk a lineáris tagok integrálási szabályát?
7. Milyen függvényekre alkalmazható a helyettesítéses integrálás?
8. Mikor célszerű részleges integrálást alkalmazni?
9. Milyen alapvető integrálási formulákat kell ismerni?
10. Hogyan lehet ellenőrizni az integrálás helyességét deriválással?

Gyakorlatok

Adja meg az alábbi határozatlan integrálokat:

1. a) $\int\left(3x^2+4\sqrt{x^5}-\frac{5}{x}\right)dx;$ b) $\int\sqrt[3]{(5x-4)}dx;$

c) $\int cos(4x-7)dx;$ d) $\int\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}dx;$

e) $\int\frac{ln^2(x+1)}{x+1}dx;$ f) $\int\frac{cos\,2x}{sin\,2x+3}dx;$

g) $\int\frac{\sqrt{tgx}}{cos^2 x}dx;$ h) $\int\frac{\sqrt[4]{arcsin\,x}}{\sqrt{1-x^2}}dx;$

i) $\int xe^{2-x^2}dx;$ j) $\int\frac{x+2}{3x^2+4}dx\,!$

2. a) $\int\frac{\sqrt[4]{x}-3x^3+5}{x^2}dx;$ b) $\int\sqrt[5]{4-3x}dx;$

c) $\int sin(10x-7)dx;$ d) $\int x^2\sqrt{x^3+9}dx;$

e) $\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{ln(x+2)}};$ f) $\int sin\,3x\,cos^3\,3xdx;$

g) $\int \frac{dx}{sin^2 x \cdot \sqrt[3]{ctg^2 x}};$

h) $\int \frac{dx}{(1+x^2)arctg^3 x};$

i) $\int \frac{x}{e^{x^2+4}} dx;$

j) $\int \frac{x-4}{\sqrt{2-9x^2}} dx!$

3. a) $\int \left(\sqrt[7]{x} + \frac{1}{x^3} + 6x^4 \right) dx;$

b) $\int \sqrt[3]{10x+9} dx;$

c) $\int cos(7x+5) dx;$

d) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}} dx;$

e) $\int \frac{\sqrt[3]{ln(2x+1)}}{2x+1} dx;$

f) $\int \frac{cos\, 2x}{4 - sin\, 2x} dx;$

g) $\int \frac{\sqrt[5]{tg^3 x}}{cos^2 x} dx;$

h) $\int \frac{\sqrt[3]{arcctgx}}{1+x^2} dx;$

i) $\int x^2 e^{3-2x^3} dx;$

j) $\int \frac{x-4}{25x^2+1} dx!$

4. a) $\int \frac{\sqrt[3]{x} + 3x^2 - 4}{\sqrt{x}} dx;$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5x+1}};$

c) $\int cos(11x+2) dx;$

d) $\int \frac{x}{2x^2+3} dx;$

e) $\int \frac{\sqrt{ln^5(3x-2)}}{3x-2} dx;$

f) $\int \frac{cos\, 4x}{2\, sin^2\, 4x} dx;$

g) $\int \frac{\sqrt{ctg^9\, 3x}}{sin^2\, 3x} dx;$

h) $\int \frac{(arccos 2x)^7}{\sqrt{1-4x^2}} dx;$

i) $\int \frac{x}{e^{4x^2+1}} dx;$

j) $\int \frac{x+5}{\sqrt{4-25x^2}} dx!$

5. a) $\int \left(\sqrt[5]{x^2} - \frac{1}{x} + 5x^4 \right) dx;$

b) $\int \sqrt[10]{11-5x} dx;$

c) $\int sin\left(\frac{1}{3}x - 2 \right) dx;$

d) $\int x^2 (x^3+3)^4 dx;$

e) $\int \frac{1 + ln(x-1)}{x-1} dx;$

f) $\int \sqrt{cos^3\, 5x} \cdot sin\, 5x dx;$

g) $\int \frac{tg^4(x+1)}{cos^2(x+1)} dx;$

h) $\int \frac{(arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx;$

i) $\int x^2 e^{5x^3-2}dx;$ j) $\int \frac{2x+7}{1+9x^2}dx!$

6. a) $\int \frac{\sqrt{x^7}-4+5x^2}{x^3}dx;$ b) $\int \frac{dx}{12x+4};$

c) $\int cos(20x-11)dx;$ d) $\int \frac{x}{(x^2+3)^4}dx;$

e) $\int \frac{dx}{(x+3)ln^5(x+3)};$ f) $\int \frac{cos\,7x}{\sqrt[3]{sin\,7x}}dx;$

g) $\int \frac{ctg^7\,5x}{sin^2\,5x}dx;$ h) $\int \frac{4arctgx-x}{1+x^2}dx;$

i) $\int xe^{3-2x^2}dx;$ j) $\int \frac{x-9}{\sqrt{4-36x^2}}dx!$

7. a) $\int\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^2}-6x^3\right)dx;$ b) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{7x+3}};$

c) $\int sin(5x+7)dx;$ d) $\int x\sqrt[3]{x^2+8}dx;$

e) $\int \frac{\sqrt[3]{ln^7(3x+2)}}{3x+2}dx;$ f) $\int (4+cos\,5x)^2\,sin\,5xdx;$

g) $\int \frac{dx}{cos^2\,7x\sqrt{tg7x}};$ h) $\int \frac{arccos^7\,3x-1}{\sqrt{1-9x^2}}dx;$

i) $\int \frac{x^2}{e^{x^3-4}}dx;$ j) $\int \frac{x+1}{2+3x^2}dx!$

8. a) $\int\left(\sqrt[7]{x^3}+\frac{4}{x^2}-3x^5\right)dx;$ b) $\int\sqrt[7]{4-9x}dx;$

c) $\int cos\left(\frac{x}{5}+2\right)dx;$ d) $\int \frac{x}{\sqrt{5+x^2}}dx;$

e) $\int \frac{dx}{(x+5)ln^4(x+5)};$ f) $\int \sqrt{sin^3\,2x}\cdot cos\,2xdx;$

g) $\int \frac{\sqrt[5]{ctg^2(x+3)}}{sin^2(x+3)}dx;$ h) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,arcsin^5\,x};$

i) $\int x^4 e^{3-x^5}dx;$ j) $\int \frac{3x+2}{\sqrt{2-4x^2}}dx!$

9. a) $\int \frac{\sqrt{x}+2-3x^2}{\sqrt[3]{x}}dx;$ b) $\int \frac{dx}{5x+8};$

c) $\int sin(8x+7)dx;$ d) $\int \frac{x}{1+25x^4}dx;$

e) $\int \frac{ln^3(x-4)}{(x-4)}dx;$ f) $\int \frac{sin\,6x}{cos\,6x+4}dx;$

g) $\int \frac{\sqrt[4]{tg^3\,5x}}{cos^2\,5x}dx;$ h) $\int \frac{\sqrt[3]{arctg^2 x}}{1+x^2}dx;$

i) $\int x^2 e^{9-2x^3}dx;$ j) $\int \frac{2x+5}{1+4x^2}dx!$

10. a) $\int\left(\sqrt[5]{x^9}-\frac{5}{x^2}+4x^3\right)dx;$ b) $\int\sqrt[5]{9x-3}dx;$

c) $\int cos(4x-9)dx;$ d) $\int x\sqrt[4]{3+x^2}dx;$

e) $\int \frac{\sqrt[8]{ln^3(2x+3)}}{2x+3}dx;$ f) $\int(sin\,4x+5)^3\,cos\,4xdx;$

g) $\int \frac{\sqrt[5]{ctg^3\,2x}}{sin^2\,2x}dx;$ h) $\int \frac{8x-arctg2x}{1+4x^2}dx;$

i) $\int \frac{x}{e^{3x^2+5}}dx;$ j) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{1-4x^2}}dx!$

11. a) $\int\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}+\sqrt[4]{x}\right)dx;$ b) $\int\sqrt[3]{5-6x}dx;$

c) $\int sin(1-2x)dx;$ d) $\int\sqrt[3]{x^3-8}\cdot x^2dx;$

e) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+ln(x+1)}};$ f) $\int \frac{cos\,3x}{1+4\,sin\,3x}dx;$

g) $\int \frac{dx}{cos^2 x\cdot tg^7 x};$ h) $\int \frac{(arccos x)^4-1}{\sqrt{1-x^2}}dx;$

i) $\int x^3 e^{5x^4-3}dx;$ j) $\int \frac{x-4}{9+x^2}dx!$

12. a) $\int\left(\sqrt[6]{x}+\frac{3}{x^4}-5x^2\right)dx;$ b) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-7x}};$

c) $\int cos(4-3x)dx;$ d) $\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{1+x^3}}dx;$

e) $\int \frac{x^2+ln\,x^2}{x}dx;$ f) $\int \frac{sin\,5x}{\sqrt{2+cos\,5x}}dx;$

g) $\int \frac{dx}{sin^2\,3x\cdot\sqrt[3]{ctg^2\,3x}};$ h) $\int \frac{arcsin^4\,3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx;$

i) $\int xe^{5-3x^2}dx;$ j) $\int \frac{5+x}{\sqrt{4-9x^2}}dx!$

13. a) $\int\left(\sqrt{x^7}-\frac{4}{x}+3x^6\right)dx;$ b) $\int \frac{dx}{2-5x};$

c) $\int sin(5x+8)dx;$ d) $\int x\sqrt[4]{3-x^2}\,dx;$

e) $\int \frac{ln^6(4x+1)}{4x+1}dx;$ f) $\int \sqrt{2+4\,sin\,x}\,cos\,xdx;$

g) $\int \frac{dx}{cos^2\,x\sqrt{1+tgx}};$ h) $\int \frac{2+(arccos3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}dx;$

i) $\int xe^{2-x^2}dx;$ j) $\int \frac{5x-2}{x^2+4}dx!$

14. a) $\int \frac{\left(2-\sqrt[3]{x}\right)^2}{x^3}dx;$ b) $\int \frac{dx}{(3x-7)^{10}};$

c) $\int cos\left(3-\frac{x}{2}\right)dx;$ d) $\int 2^{x^2}\cdot xdx;$

e) $\int \frac{dx}{(x+7)\sqrt[3]{ln^2(x+1)}};$ f) $\int \frac{cos\,4x}{\sqrt[3]{sin^2\,4x}}dx;$

g) $\int \frac{ctg^5\,4x}{sin^2\,4x}dx;$ h) $\int \frac{arctg^4\,3x}{1+9x^2}dx;$

i) $\int \frac{x^2}{e^{3x^3-2}}dx;$ j) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx!$

15. a) $\int \frac{\left(\sqrt[5]{x^2}+1\right)^2}{\sqrt{x}}dx;$ b $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x}};$

c) $\int sin(2x+5)dx;$ d) $\int \frac{x^2}{x^6+9}dx;$

e) $\int \frac{\sqrt{ln^5(3x+1)}}{3x+1}dx;$ f) $\int \frac{sin\,6x}{3+2cos\,6x}dx;$

g) $\int \frac{\sqrt[7]{tg3x}}{cos^2\,3x}dx;$ h) $\int \frac{3-\sqrt{arcsin2x}}{\sqrt{1-4x^2}}dx;$

i) $\int x^3 e^{5-x^4}dx;$ j) $\int \frac{3x-1}{x^2+9}dx.!$

16. a) $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}dx;$ b) $\int \sqrt[4]{5x+7}dx;$

c) $\int cos(3x-5)dx;$ d) $\int \frac{x}{\sqrt{3-x^4}}dx;$

e) $\int \frac{ln^6(5x+2)}{5x+2}dx;$ f) $\int \frac{sin\,2x}{4+3cos\,2x}dx;$

g) $\int \frac{dx}{sin^2\,4x\sqrt{ctg4x}};$ h) $\int \frac{(arcctg2x)^3}{1+4x^2}dx;$

i) $\int \frac{x}{e^{2x^2+3}}dx;$ j) $\int \frac{4x+3}{\sqrt{1-4x^2}}dx!$

17. a) $\int \frac{x^3+2x-3}{\sqrt[4]{x}}dx;$ b) $\int (2x+1)^{15}dx;$

c) $\int sin(3-2x)dx;$ d) $\int \frac{x^4}{\sqrt{3+x^5}}dx;$

e) $\int \frac{dx}{(x-1)ln^3(x-1)};$ f) $\int \frac{2\,sin\,x}{3+cos^2\,x}dx;$

g) $\int \frac{1+2tg^3x}{cos^2\,x}dx;$ h) $\int \frac{2+arcsin^4\,x}{\sqrt{1-x^2}}dx;$

i) $\int e^{-x^3+1}\cdot x^2dx;$ j) $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-4x^2}}dx!$

18. a) $\int \left(\sqrt[5]{x^3}-\frac{3}{x}+2x^4\right)dx;$ b) $\int (14x-3)^{1/4}dx;$

c) $\int cos(9x+4)dx;$ d) $\int \frac{x^2}{x^6+4}dx;$

e) $\int \frac{dx}{(x+3)\sqrt[4]{ln(x+3)}};$ f) $\int \frac{cos\,2x}{\sqrt{3+sin\,2x}}dx;$

g) $\int \frac{dx}{sin^2 x(1+ctgx)}$;

h) $\int \frac{dx}{(1+4x^2)arctg^3 2x}$;

i) $\int \frac{x^3}{e^{-x^4+5}} dx$;

j) $\int \frac{2-3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx$!

19. a) $\int \left(x^6 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} \right) dx$;

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$;

c) $\int sin(4x+5)dx$;

d) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-4x^8}} dx$;

e) $\int \frac{2+ln(5x-3)}{5x-3} dx$;

f) $\int 3 sin\, 4x(2+cos\, 4x)^3 dx$;

g) $\int \frac{\sqrt[3]{tg^2 7x}}{cos^2 7x} dx$;

h) $\int \frac{\sqrt{arccos 3x}}{\sqrt{1-9x^2}} dx$;

i) $\int xe^{\frac{x^2}{3}+2} dx$;

j) $\int \frac{2x+7}{1+4x^2} dx$!

20. a) $\int \frac{\sqrt[4]{x} - 2x + 4}{x^3} dx$;

b) $\int \frac{dx}{(13x-2)^3}$;

c) $\int cos(3x-5)dx$;

d) $\int x^3 \sqrt[7]{2+x^4} dx$;

e) $\int \frac{\sqrt[5]{ln(2x+7)}}{2x+7} dx$;

f) $\int \sqrt[5]{1-sin\, 3x}\, cos\, 3x dx$;

g) $\int \frac{ctg^{10} 2x}{sin^2 2x} dx$;

h) $\int \frac{(arcctg5x)^7}{1+25x^2} dx$;

i) $\int x^2 e^{2-4x^3} dx$;

j) $\int \frac{8-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx$!

21. a) $\int \left(x^5 - \frac{7}{x} + \sqrt[6]{x} \right) dx$;

b) $\int \sqrt{8-3x} dx$;

c) $\int sin(4x+7)dx$;

d) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{5+3x}}$;

e) $\int \frac{dx}{(x-7)\sqrt{ln(x-7)}}$;

f) $\int sin 2x \cdot cos^5 2x dx$;

g) $\int \frac{4+3tg^3 8x}{cos^2 8x} dx$;

h) $\int \frac{\sqrt{arccos 2x}}{\sqrt{1-4x^2}} dx$;

i) $\int xe^{3-5x^2}dx;$ j) $\int \frac{3+x}{4+25x^2}dx!$

22. a) $\int \frac{\left(1-\sqrt[3]{x}\right)^2}{\sqrt[4]{x}}dx;$ b) $\int \frac{dx}{(4x-3)^5};$

c) $\int cos\left(\frac{x}{4}+3\right)dx;$ d) $\int x^2\sqrt{1-x^3}dx;$

e) $\int \frac{ln^4(x+8)}{x+8}dx;$ f) $\int cos\,4x\sqrt[3]{2+sin\,4x}dx;$

g) $\int \frac{\sqrt[7]{ctg^5 2x}}{sin^2 2x}dx;$ h) $\int \frac{dx}{\left(1+9x^2\right)\sqrt[4]{arctg3x}};$

i) $\int \frac{x}{e^{x^2+7}}dx;$ j) $\int \frac{3x+5}{\sqrt{9-x^2}}dx!$

23. a) $\int \frac{\sqrt[3]{x}-6x+5}{\sqrt{x}}dx;$ b) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{7+4x}};$

c) $\int sin\left(3-\frac{x}{2}\right)dx;$ d) $\int x^5\left(2+3x^6\right)^7dx;$

e) $\int \frac{\sqrt[4]{ln(x-3)}dx}{(x-3)};$ f) $\int \frac{sin5x}{6+3cos5x}dx;$

g) $\int \frac{dx}{cos^2 3x\sqrt{4+tg3x}};$ h) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}\,arcsin^4 2x};$

i) $\int x^3e^{8x^4+5}dx;$ j) $\int \frac{53x}{41x^2-2}dx!$

24. a) $\int\left(3x^4+\frac{6}{x}-\sqrt[7]{x^2}\right)dx;$ b) $\int \sqrt[6]{1-2x}dx;$

c) $\int cos\left(5+\frac{x}{3}\right)dx;$ d) $\int \frac{x^4}{\sqrt{8+x^5}}dx;$

e) $\int \frac{dx}{(3x+2)\,ln^8(3x+2)};$ f) $\int \frac{\cos 7x}{\sqrt[3]{7-\sin 7x}}dx;$

g) $\int \frac{dx}{sin^2 4x ctg^3 4x};$ h) $\int \frac{\sqrt{arctg\frac{x}{3}}}{\left(9+x^2\right)}dx;$

i) $\int \frac{x^4}{e^{x^5-3}}dx;$ j) $\int \frac{5x+7}{\sqrt{1-4x^2}}dx!$

25.a) $\int\left(\sqrt[8]{x^3}+\frac{6}{x}-\frac{3}{x^4}\right)dx;$ b) $\int\frac{dx}{5x+8};$

c) $\int sin\left(\frac{x}{5}-2\right)dx;$ d) $\int\frac{x^2}{3+x^3}dx;$

e) $\int\frac{dx}{(5x+6)\,ln^7(5x+6)};$ f) $\int\frac{sin5x}{cos^7 5x}dx;$

g) $\int\frac{4-tg^3 2x}{cos^2 2x}dx;$ h) $\int\frac{\sqrt[5]{arcsin4x}}{\sqrt{1-16x^2}}dx;$

i) $\int x^4 e^{2x^5-3}dx;$ j) $\int\frac{6x+7}{3+4x^2}dx!$

26. a) $\int\frac{\left(4+\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt[3]{x}}dx;$ b) $\int(9-4x)^6dx;$

c) $\int cos(4x+7)dx;$ d) $\int\frac{5x}{4+8x^2}dx;$

e) $\int\frac{ln^4(7x+9)}{7x+9}dx;$ f) $\int\frac{\cos3x}{5+2\,sin3x}dx;$

g) $\int\frac{\left(ctg4x\right)^7}{sin^2 4x}dx;$ h) $\int\frac{\sqrt[5]{arctg4x}}{1+16x^2}dx;$

i) $\int x^2 e^{9-4x^3}dx;$ j) $\int\frac{2x+5}{\sqrt{1-9x^2}}dx!$

27. a) $\int\frac{5\sqrt{x}+3x-2}{\sqrt[4]{x}}dx;$ b) $\int\frac{dx}{(3x+7)^4};$

c) $\int sin(9-2x)dx;$ d) $\int\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx;$

e) $\int\frac{ln^6(x+7)}{x+7}dx;$ f) $\int\frac{\sin5x}{4-\cos5x}dx;$

g) $\int\frac{\sqrt[3]{tg^2 4x}}{cos^2 4x}dx;$ h) $\int\frac{(arcsin3x)^7}{\sqrt{1-9x^2}}dx;$

i) $\int\frac{x^3}{e^{6-3x^4}}dx;$ j) $\int\frac{\sin6x}{8-\cos3x}dx!$

28. a) $\int\left(\sqrt[7]{x^3}-\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x}\right)dx;$ b) $\int\sqrt[6]{4x+1}dx;$

c) $\int cos(3-5x)dx;$

d) $\int x^2\sqrt[4]{5x^3+2}dx;$

e) $\int \frac{dx}{(3x+4)\sqrt[3]{ln(3x+4)}}$

f) $\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{5+sin\,2x}}dx;$

g) $\int \frac{dx}{sin^2 3x \cdot ctg^5 3x};$

h) $\int \frac{(arctg5x)^3}{1+25x^2}dx;$

i) $\int \frac{x}{e^{7-x^2}}dx;$

j) $\int \frac{\sin 21x}{42-\cos 51x}dx\,!$

29. a) $\int \frac{\sqrt{x}+4x-3}{\sqrt[5]{x}}dx;$

b) $\int \frac{dx}{7x+9};$

c) $\int sin(3x+4)dx;$

d) $\int x^3(5x^4+3)^2dx;$

e) $\int \frac{\sqrt[3]{ln^2(5x-2)}}{5x-2}dx;$

f) $\int sin\,x(5+cos\,x)^7dx;$

g) $\int \frac{dx}{cos^2 x(1+tgx)};$

h) $\int \frac{(arccos\,3x)^4}{\sqrt{1-9x^2}}dx;$

i) $\int x^3 e^{3x^4+5}dx;$

j) $\int \frac{5x}{4x^2-2}dx\,!$

30. a) $\int\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\frac{4}{x}-3x^2\right)dx;$

b) $\int(4x+1)^8dx;$

c) $\int cos(11x-3)dx;$

d) $\int \frac{x^2}{(2x^3-4)^5}dx;$

e) $\int \frac{\sqrt{ln(11x+2)}}{(11x+2)}dx;$

f) $\int \frac{\cos 3x}{5+9\,sin\,3x}dx;$

g) $\int \frac{\sqrt{ctg^2 2x}}{sin^2 2x}dx;$

h) $\int \frac{\sqrt[3]{arctg9x}}{1+81x^2}dx;$

i) $\int \frac{x^2}{e^{8x^3-1}}dx;$

j) $\int \frac{3x}{25x^2-2}dx\,!$

8. Határozott integrál

Kérdések:

1. Mit értünk határozott integrál alatt?
2. Mi a különbség a határozott és a határozatlan integrál között?
3. Hogyan számítható ki egy függvény határozott integrálja a [a, b] intervallumon?
4. Mi az alapvető összefüggés a határozott integrál és a primitív függvény között?
5. Mit jelent a Newton–Leibniz-tétel az integrálszámításban?
6. Milyen geometriai jelentése van a határozott integrálnak?
7. Milyen esetekben lehet negatív egy határozott integrál értéke?
8. Hogyan változik az integrál értéke, ha felcseréljük az alsó és felső határokat?
9. Mi a szerepe az integrálási határoknak a számítás során?
10. Hogyan lehet több részből álló függvény határozott integrálját kiszámítani?

Gyakorlatok

I. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

1) $\int_0^2 (2x+6)^3\,dx$; 2) $\int_2^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; 3) $\int_2^4 \left(\sqrt{x}-5x\right)dx$;

4) $\int_3^9 \sqrt[3]{x-1}dx$; 5) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} sin\,2\,xdx$; 6) $\int_1^{25} \frac{dx}{\sqrt{x}+3x}$;

7) $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; 8) $\int_1^e \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$, 9) $\int_2^3 \frac{dx}{2x^3+3x+5}$;

10) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+3x-10}$; 11) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$; 12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx$;

13) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$; 14) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin 2x dx$; 15) $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$;

16) $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$; 17) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$; 18) $\int_0^1 xe^{-x}dx$;

19) $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$; 20) $\int_1^2 e^x\left(1-e^x\right)^4 dx$; 21) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x^3}}\cdot 9^{\frac{1}{\sqrt{x}}}dx$!

9. Az integrál alkalmazása

Kérdések:

1. Milyen gyakorlati problémák oldhatók meg az integrálszámítással?
2. Hogyan számítható ki a síkidom területe határozott integrál segítségével?
3. Hogyan határozható meg a forgástest térfogata integrálással?
4. Milyen összefüggés van az integrál és a görbe alatti terület között?
5. Hogyan használjuk az integrált egy változóval megadott fizikai mennyiségek, például út, munka vagy töltés kiszámítására?
6. Milyen módszerekkel határozható meg a görbület hossza integrál segítségével?
7. Mikor alkalmazzuk a szakaszonként definiált függvények integrálását a gyakorlatban?
8. Milyen szerepet játszik az integrál az átlagérték kiszámításában?
9. Hogyan számítható ki egy síkidom súlypontja integrálszámítással?
10. Milyen esetekben alkalmazható az integrál a közgazdaságtanban, fizikában vagy más tudományágakban?

Gyakorlatok

1. Határozza meg az $f(x)=x^2-2x+11$ függvény grafikonja és az x tengely által közbezárt terület mérőszámát a $[0;2]$. intervallumban!
2. Határozza meg az $f(x)=\frac{1}{3}x^2-1\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$ függvény grafikonja és az x tengely által közbezárt terület mérőszámát a $[1;3]$ intervallumban!
3. Határozza meg az $f(x)=x^2-6x+9$ függvény grafikonja és az x tengely által közbezárt terület mérőszámát a $[1;4]$ intervallumban!
4. Határozza meg az $f(x)=x^2+8x+16$ függvény grafikonja és az x tengely által közbezárt terület mérőszámát a $[-5;-1]$. intervallumban!
5. Határozza meg az $f(x)=2\sqrt{x}+2$ függvény grafikonja, az $x = 1$ és $x = 4$, valamint az $y = 0$ egyenesekkel határolt síkidom területét!
6. Határozza meg az $f(x)=\sqrt{x+6}+3$ függvény grafikonja, az $x = -5$ és $x = -2$, valamint az $y = 0$ egyenesekkel határolt síkidom területét!
7. Határozza meg az $f(x)=\frac{4}{2x-6}$ függvény grafikonja, az $x = 5$ és $x = 7$, valamint az $y = 0$ egyenesekkel határolt síkidom területét!
8. Határozza meg az $f(x)=-\frac{8}{x+3}$ függvény grafikonja, az $x = -7$ és $x = -5$, valamint az $y = 0$ egyenesekkel határolt síkidom területét!
9. Határozza meg az $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{3+x^3}}$ függvény grafikonja, az $x = -1$ és $x = 1$, valamint az $y = 0$ egyenesekkel határolt síkidom területét!

10. Határozza meg az $f(x)=\ln x$ függvény grafikonja, az $x = e$ és $x = e^2$, valamint az $y = 0$ egyenesekkel határolt síkidom területét!
11. Határozza meg az $|y|=|\log_5 x|$ görbe, az $x = 0{,}2$ és $x = 5$ egyenesekkel határolt síkidom területét!
12. Határozza meg az $|y|=\sqrt{x-4}$ görbe, az $x = 5$ és $x = 9$ egyenesekkel határolt síkidom területét!
13. Határozza meg az $f(x)=\cos x$ függvény grafikonja, az $x = -\frac{\pi}{2}$ és $x = \frac{\pi}{2}$, valamint az $y = 0$ egyenesekkel határolt síkidom területét!
14. Határozza meg az $f(x)=tgx$ függvény grafikonja, az $x = \frac{\pi}{4}$ és az $y = 0$ egyenesekkel határolt síkidom területét!
15. Határozza meg az alábbi függvények grafikonjai által határolt terület mérőszámát:
    1. $f(x)=9-x^2;\ \ g(x)=0$;
    2. $f(x)=-x^2-6x+7;\ \ g(x)=0$;
    3. $f(x)=x^2-6x;\ \ g(x)=0$;
    4. $f(x)=2x^2-9x+10;\ \ g(x)=0$;
    5. $f(x)=x^2+2x;\ \ g(x)=x+2$;
    6. $f(x)=x^2-4x+4;\ \ g(x)=4-x$;
    7. $f(x)=2-x+\frac{x^2}{4};\ \ g(x)=-\frac{x^2}{2}+2x+3$;
    8. $f(x)=\frac{x^2}{3};\ \ g(x)=-\frac{2}{3}x^2+4;$
    9. $f(x)=x^2;\ \ g(x)=\frac{x^2}{4};\ h(x)=4$;
    10. $f(x)=x^3;\ \ g(x)=\frac{x^2}{2};\ h(x)=8$;
    11. $f(x)=x^3;\ \ g(x)=2x;\ h(x)=x$;
    12. $f(x)=\sqrt{x-2};\ \ g(x)=\sqrt{4-x};\ h(x)=0$;
    13. $f(x)=5^x;\ \ g(x)=5^{-x};\ h(x)=25$;
    14. $f(x)=\frac{27}{x^2+9};\ \ g(x)=\frac{1}{6}x^2$;
    15. $f(x)=\ln(x+2);\ \ g(x)=2\ln x$!
16. Határozza meg a (2;0) és (9;3) pontokon átmenő, az abszcissza tengely és az $f(x)=\sqrt{x}$ függvény grafikonja által bezárt terület mérőszámát!
17. Határozza meg a (0;4) és (1;2) pontokon átmenő, az abszcissza tengely és az $f(x)=2x^3$ függvény grafikonja által bezárt terület mérőszámát!
18. Számítsa ki annak a területnek a nagyságát, melyet az $f(x)=x^2-4x+5$ függvény grafikonja és annak a $P(0;5)$ és $M(5;10)$ pontjába húzott érintői határolnak!
19. Számítsa ki annak a területnek a nagyságát, melyet az $f(x)=-x^2+4x-3$ függvény grafikonja és annak a $P(0;-3)$ és $M(3;0)$ pontjába húzott érintői határolnak!

20. Határozza meg az alábbi paraméteres megadású függvények grafikonjai által határolt terület mérőszámát:
    1. $x = 2(t - \sin t),\ \ y = 2(1 - \cos t),\ \ t \in [0;\pi], y = 0$;
    2. $x = 3\sin t,\ \ y = 3\cos t,\ \ t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$;
    3. $x = 4\sin t,\ \ y = 2\cos t,\ \ t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], y = 0$;
    4. $x = t^2,\ \ y = t^3,\ \ t = 1; t = 3, y = 0$;
    5. $x = 3\sin^3 t,\ \ y = 3\cos^3 t,\ \ t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], y = 0$!
21. Határozza meg az alábbi polárkoordinátákkal megadott függvények grafikonjai által határolt terület mérőszámát:
    1. $\rho = 4(1 + \cos\varphi)$ (kardioid);
    2. $\rho = 5\sin 2\varphi$ (négylevelű rozetta);
    3. $\rho = 5\sin 3\varphi$ (háromlevelű rozetta);
    4. $\rho = 5\varphi,\ \varphi_1 = 2\pi; \varphi_2 = 4\pi$; (arkhimédészi spirális);
    5. $\rho = 3(1 + \cos\varphi)$ és $\rho = 3\cos\varphi$!
22. Határozza meg az $x^2 + 10x + y^2 + 6y + 30 = 0$ egyenlettel megadott síkidom területének mérőszámát!
23. Határozza meg az $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$ egyenlettel megadott síkidom területének mérőszámát!
24. Határozza meg az $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 4\left(x^2 - y^2\right)$ egyenlettel megadott síkidom területének mérőszámát!
25. Határozza meg $H_1 \cap H_2$ halmaz koordináta síkon ábrázolt képének területét, ha $H_1 = \left\{(x;y) \middle| x^2 - 8x + y^2 + 7 \le 0\right\}$ és $H_2 = \left\{(x;y) \middle| x^2 + y^2 + 8y + 7 \le 0\right\}$!
26. Határozza meg az *a* mely értéke mellett lesz az $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ grafikonja és az $x = a$, $x = -a$ és $y = 0$ egyenletű egyenesekkel határolt terület 2 egység!
27. Határozza meg a *p* értékét úgy, hogy az $x = p$ egyenes az $f(x) = \frac{1}{x^2}$ függvény grafikonja az $x = 1$, $x = 2$ és az $y = 0$ egyenletű egyenesekkel határolt síkidomot két egyenlő területű részre ossza!
28. Milyen arányban osztja az $y^2 = 2x$ parabola az $x^2 + y^2 \le 8$ körlap területét?
29. Határozza meg az $f(x) = e^{-2x+5}$ függvény grafikonja és az y = 0 egyenessel határolt területet, ha $x \in [0;+\infty)$!
30. Határozza meg az $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ függvény grafikonja és az y = 0 egyenessel határolt területet, ha $x \in (-\infty;\infty)$!
31. Határozza meg az $f(x) = \frac{1}{x^2} + 2$ függvény grafikonja és vízszintes aszimptotójával határolt területet, ha $x \in (-\infty;-1]$!

32. Határozza meg az $f(x)=\frac{3}{x}+\frac{x}{3}$ függvény grafikonja és ferde aszimptotójával határolt területet, ha $x\in[3;\infty)$!
33. Forgassa az *f*(*x*) függvény grafikonját az abszcissza tengely körül a megadott intervallumban és számítsa ki az így keletkező forgástest térfogatát:
    1. $f(x)=\sin x,\ x[0;\pi]$;
    2. $f(x)=\frac{5}{x},\ x[1;5]$;
    3. $f(x)=x^2-6x+12\ \ x[0;4]$;
    4. $f(x)=|x|,\ x[-2;2]$;
    5. $f(x)=10x-x^2$;
    6. $f(x)=\sqrt{x+1}+1,\ x\in[0;3]$;
    7. $f(x)=chx,[0;\ln 2]$;
    8. $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}},[1;e^3]$!
34. Forgassa az *f*(*x*) és $g(x)$ függvények grafikonjai által határolt síkidomot az abszcissza tengely körül és számítsa ki az így keletkező forgástest térfogatát:
    1. $f(x)=x^2$ és $g(x)=\sqrt{x}$;
    2. $f(x)=x^2$ és $g(x)=-x^2+2$;
    3. $f(x)=x^2,\ g(x)=2-x$;
    4. $f(x)=x^2,\ g(x)=2-x,\ h(x)=0$;
    5. $f(x)=x^2-6x+9;\ g(x)=9+x$;
    6. $f(x)=2^x,\ g(x)=4^x,\ x=1$;
    7. $f(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2};\ g=\frac{1}{x}$;
    8. $f(x)=tgx,\ g(x)=ctgx,\ x=\frac{\pi}{6}$!
35. Forgassa az *f*(*x*) és $g(x)$ függvények grafikonjai által határolt síkidomot az abszcissza és az ordináta tengely körül is és számítsa ki az így keletkező forgástestek térfogatának mérőszámát:
    1. $f(x)=x^2;\ g(x)=2-x;\ x=0$;
    2. $f(x)=\sin;\ g(x)=0{,}5$;
    3. $f(x)=x^3$ és $g(x)=\sqrt{x}$;
    4. $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+2,\ g(x)=2$!

10. Numerikus sorok

Kérdések:

1. Mi a numerikus sor fogalma?
2. Milyen feltétel teljesülése esetén konvergens egy numerikus sor?
3. Mit jelent az, hogy egy sor divergál?
4. Mi a különbség a sor és a sor részösszegei között?
5. Ismertesd a geometriai sor összegképletét és alkalmazási feltételeit!
6. Mikor konvergens egy harmonikus sor?
7. Milyen konvergenciavizsgálati módszereket ismersz?
8. Mi a Leibniz-teszt, és milyen sorokra alkalmazható?
9. Mi a különbség az abszolút és a feltételes konvergencia között?
10. Mire használhatóak a numerikus sorok a gyakorlatban (pl. közelítések, függvények ábrázolása)?

Gyakorlatok

1. Adja meg az alábbi sorok első öt tagját, ha általános tagja:

   1) $a_n = \frac{2}{n}$; 2) $a_n = \frac{3}{2n+2}$; 3) $a_n = \frac{1}{n^2}$; 4) $a_n = \frac{1}{n!}$;

   5) $a_n = \frac{1}{7^n}$; 6) $a_n = \frac{5}{n+5^n}$; 7) $a_n = \frac{2n}{n^2+4}$; 8) $a_n = \frac{(-1)^n}{\sin \pi n + \cos \pi n}$!

2. Írja fel a következő sorok általános tagját:

   1) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ..$; 2) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + ..$; 3) $\frac{1}{5\cdot 11} + \frac{1}{7\cdot 13} + \frac{1}{9\cdot 15} + ..$;

   4) $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + ...$; 5) $\frac{1}{7} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^5} + ..$; 6) $\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 4} + \frac{3}{4\cdot 5} + \frac{4}{5\cdot 6} + ...$;

   7) $\cos 1 + \cos 2 + \cos 3.... ;$ 8) $-1+2-3+4+...;$ 9) $3 - \frac{1}{3} + 9 - \frac{1}{9} + 27 - \frac{1}{27} + ...$!

3. Konvergensek-e az alábbi sorok;

   1) $3+1+\frac{5}{9}+\frac{6}{16}+\frac{7}{25}+...;$ 2) $1+e+e^2+e^3+....;$ 3.) $1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+...;$

   4) $a_n = \frac{2n+1}{n+5}$; 5) $a_n = \left(\frac{1}{7}\right)^{-n}$; 6) $a_n = \frac{4^n+9^n}{36^n}$; 7) $a_n = 4\cdot(0{,}6)^n$!

4. Határozza meg S_5, ha

   1) $a_n = 7$; 2) $a_n = n$; 3) $a_n = \frac{1}{n}$; 4) $a_n = n^2$;

   5) $a_n = n^2 - 3n$; 6) $a_n = 3^{n-1}$; 7) $a_n = n^{n-1}$; 8) $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$!

5. Határozza meg S_{100}, ha

1) $a_n = n$; 2) $a_n = 5^n$; 3) $a_n = 5^{n-100}$; 4) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$;

5) $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$; 6) $a_n = \frac{1}{n^2+3n+2}$; 7) $a_n = \frac{n}{2^n}$!

6. Vizsgálja az alábbi sorok konvergenciáját a szükséges feltétel segítségével!

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{10n+1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{11}{11n+11}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n^2+2}}{9n^2-4}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+4}{3n-4}\right)^n$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{5n+4}\right)^{\frac{n}{2}}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{25^n + 20^n}{10^n}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\pi} \sin\frac{\pi}{n}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 2^n}{10^n}$!

7. Az összehasonlító kritérium segítségével vizsgálja az alábbi sorok konvergenciáját:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{10n+5}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2+6}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n+1}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3n}}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+n^3}}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\cdot 5^n - 4}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^3}$!

8. A hányados kritérium segítségével vizsgálja az alábbi sorok konvergenciáját:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n \cdot (n+2)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+3)!}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{3^n \cdot n!}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^2 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot (2n)^2}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 9\cdot \ldots \cdot (4n+1)}{1\cdot 4\cdot \ldots \cdot n^2}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\cdot 15\cdot \ldots \cdot (7n+1)}{1\cdot 4\cdot \ldots \cdot n^3}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n \cdot (2n+1)}$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n)!!}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$; 11) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \sin\frac{\pi}{2n}$;

12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{2}^n}$!

9. A gyök kritérium segítségével vizsgálja az alábbi sorok konvergenciáját:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n}{6n-1}\right)^{2n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n^2+6n-3}{7n^2-2n+1}\right)^n$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+9n-7}{n^2-2n}\right)^n$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{n^2} \frac{1}{5^n}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n-5}\right)^{n^2} \frac{1}{7^n}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln^n(n+2)}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n \left(\frac{5n+1}{5n-1}\right)^n$!

10. A Cauchy-féle integrál kritérium segítségével vizsgálja az alábbi sorok konvergenciáját:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{4n^2+4n+5}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^4+9}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\ln(n+3)}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^4(n+1)}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n}}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^7}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}$;

10) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n}{n^2-4}$!

11. Vizsgálja az alábbi sorok konvergenciáját, abszolút vagy feltételes konvergenciáját is:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 7^n}$; 4) $3-\frac{5}{2}+\frac{7}{3}-\frac{9}{4}+\ldots$;

5) $\frac{1}{9}-\frac{1}{25}+\frac{1}{49}-\ldots$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)!}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{2n^2+1}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi n}{3^n}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cos\frac{\pi}{n}$, 11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 5^n n!}{(2n+2)!!}$; 12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)!!}{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$!

12. Vizsgálja az alábbi sorok konvergenciáját:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n!}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2n!}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+5}}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n}{(2n+1)^2}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\cdot\ln\ln n}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^3}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n^3}{2^n}$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+5}-\sqrt{n^2-5}}{2n}$;

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{\sqrt[3]{n^7}\sqrt{n^4+1}}$; 11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{e^{2n}}$; 12) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{3n-7}\right)^n$; 13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{n^3}$

; 14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$; 15) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{10}e^{-2n}$;

16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n+1}$; 17) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$; 18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n!}$; 19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3^n}$!

13. Számítsa ki a következő sorok összegét:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2-3n-2}$; 2) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-5n+6}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\frac{\pi}{4}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos^n 30°$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n+2^n}{14^n}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n+1}+3^{n-1}}{15^n}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{5^n}\right)$; 8) $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{7^n}+(-1)^n\frac{1}{4^n}\right)$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{n}{3}\right]}\frac{1}{3^n}$;

10) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1+(-1)^{k-1}}{2}\frac{1}{10^k}+\frac{1+(-1)^k}{2}\frac{1}{k(k+1)}\right)$; 11) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}\right)$;

12) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$; 13) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$;

14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$; 15) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots$; 16) $\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}+\ldots$;

17) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}\right)$; 18) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}$;

19) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$; 20) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{(2n+1)n}{(n+1)(2n-1)}$!

11. Többváltozós függvények

Kérdések:

1. Mit értünk többváltozós függvény alatt?
2. Hogyan határozható meg egy kéttényezős függvény értelmezési tartománya?
3. Mit jelent a többváltozós függvény határértéke?
4. Mi a parciális derivált fogalma?
5. Hogyan számítjuk ki egy többváltozós függvény elsőrendű parciális deriváltjait?
6. Mit jelent a többváltozós függvény folytonossága?
7. Mik a szükséges feltételei egy többváltozós függvény differenciálhatóságának?
8. Mi a gradiens vektor, és milyen információt hordoz?
9. Hogyan alkalmazzuk a Lagrange-féle módszert szélsőérték-keresésre feltétellel?
10. Mikor van lokális minimuma, maximuma vagy nyeregpontja egy kéttényezős függvénynek?

Gyakorlatok

1. Írja fel a P_0 ponthoz tartozó x illetve y változó szerinti szintvonalfüggvényeket!

$$f\,(x;\,y) = 2x^4 + 4xy^3 + 8y, \qquad P_0(1;\,2)$$

2. Képezzük az $f\,(x;\,y) = 7x^3 + 8y^2 + 5x^2y^4 + 8y$ függvény első és másodrendű parciális deriváltjait!Számítsa ki $f_x'(3;\,2)$ értékét!

3. Számolja ki az alábbi parciális deriváltakat!

$$f_x'(x;\,y) = ?\ f_{xy}'\,(x;\,y) = ?$$

a) $f\,(x;\,y) = e^{x^2+y^2} \cdot ln\,y$;

b) $f\,(x;\,y) = y \cdot \ln\,(x^2 + y^2)$!

4. Adja meg az $f\,(x;\,y) = y^2 \cdot \sqrt{x^4 + 2xy}$ függvény elsőrendű x változó szerinti parciális deriváltját!

5. Határozza meg az alábbi függvény lokális szélsőértékhelyeit (a jellegükkel együtt) valamint nyeregpontjait (amennyiben léteznek)!

a) $f\,(x;\,y) = \frac{y^4}{4} + x^2 + 8xy - 9$;

b) $f\,(x;\,y) = x^2 - 6y^2 + 2xy^2 + 4xy - 6x - 12y + 23$;

c) $f\,(x;\,y) = \frac{9}{x} + \frac{3}{y} + xy$;

d) $f\,(x;\,y) = y^3 - 4y^2 - 4x^2 + 4xy + 1$;

e) $f\,(x;\,y) = xy - 2\,ln\,x - ln\,y + 2x + 1$;

f) $f(x;\,y) = 2y^3 + x^2y - 3y^2 + x^2 - 4$!

12. Kettős és többes integrálok

Kérdések:

1. Mit értünk kettős integrál alatt?
2. Hogyan számítjuk ki a kettős integrált derékszögű koordinátarendszerben?
3. Mikor használunk polárkoordinátákat a kettős integrál számításához?
4. Hogyan értelmezzük a kettős integrált geometriailag?
5. Mi a kapcsolat a kettős integrál és a tartomány területe között?
6. Hogyan történik a tartomány szerinti integrálási sorrend megváltoztatása?
7. Mit értünk hármas (többes) integrál alatt?
8. Hogyan számítjuk ki a hármas integrált térbeli testek esetén?
9. Mikor alkalmazunk henger- vagy gömbkoordinátákat a többes integrál számításához?
10. Milyen fizikai mennyiségek számíthatók ki többes integrálokkal (például tömeg, térfogat)?

Gyakorlatok

1. Számítsa ki az $f(x,y) = x + y$ függvény kettős integrálját az $[0,1] \times [0,1]$ tartományon!
2. Határozza meg az $f(x,y) = x^2 + y^2$ függvény integrálját a $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ tartományon!
3. Számítsa ki az $f(x,y) = xy$ integrált az $x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$ tartományon!
4. Számítsa ki az $f(x,y) = e^{x+y}$ függvény integrálját a négyzeten: $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$!
5. Határozza meg az $f(x,y) = sin(x)cos(y)$ integrált a $[0,\pi] \times [0,\pi/2]$ tartományon!
6. Határozza meg a $f(x,y) = x^2y^3$ integrálját az $[0,2] \times [0,1]$ tartományon!
7. Számítsa ki az $f(x,y) = y/(1 + x^2 + y^2)$ integrált az egységkörön!
8. Határozza meg az $f(x,y) = x + 2y$ integrálját a háromszögön, melynek csúcsai: $(0,0), (1,0), (1,1)$!
9. Számítsa ki a $f(x,y) = ln(1 + x^2 + y^2)$ integrált a kör alakú tartományon: $x^2 + y^2 \leq 1$!
10. Számítsa ki a $f(x,y) = x^3 + y^3$ integrált az $[0,1] \times [0,1]$ tartományon!
11. Számítsa ki a $f(x,y,z) = x + y + z$ hármas integrált az egységkockán!
12. Határozza meg az $f(x,y,z) = xyz$ integrált a $0 \leq x,y,z \leq 1$ tartományon!
13. Számítsa ki a $f(x,y,z) = e^{x+y+z}$ integrált az egységkockán!
14. Számítsa ki a $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ integrált a kockán: $0 \leq x,y,z \leq 2$!
15. Számítsa ki az $f(x,y,z) = sin(x)cos(y)exp(z)$ integrált a kockán: $0 \leq x,y,z \leq \pi$!
16. Határozza meg a térfogatot az $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ függvény és az xOy-sík között!
17. Számítsa ki a $f(x,y) = cos(xy)$ integrált a négyzeten: $0 \leq x,y \leq 1$!
18. Határozza meg a $f(x,y) = x^2y - y^3$ integrált a háromszögön: $(0,0), (1,0), (1,1)$!

13. Görbementi integrálok

Kérdések:

1. Mit nevezünk görbementi integrálnak?
2. Hogyan definiáljuk a görbementi integrált skalárfüggvényre?
3. Mi a különbség a görbementi integrál és a többszörös integrál között?
4. Hogyan számítjuk ki egy görbementi integrált paraméteres alak esetén?
5. Mi az ívhossz kiszámításának kapcsolata a görbementi integrállal?

Gyakorlatok

1. Számítsa ki az $f(x,y) = x^2 + y^2$ görbementi integrált az egységkör ívén ($x = cos\, t, y = sin\, t, 0 \leq t \leq \pi/2$) ds szerint!

2. Határozza meg a görbe hosszát: $x = t^2, y = t^3, 0 \leq t \leq 1$!

3. Számítsa ki a $f(x,y) = x$ integrált a vonalon, amely a $(0,0)$ ponttól az $(1,1)$ pontig tart egyenesen!

4. Számítsa ki az $f(x,y) = xy$ görbementi integrált a körív mentén: $x = cos\, t, y = sin\, t, 0 \leq t \leq \pi$!

5. Számítsa ki a görbe hosszát: $x = cos\, t, y = sin\, t, 0 \leq t \leq 2\pi$!

6. Határozza meg az $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ görbementi integrált a negyedkörön: $x = cos\, t, y = sin\, t, 0 \leq t \leq \pi/2$!

7. Számítsa ki az $f(x,y) = x + y$ görbementi integrált az $x = t, y = ln\, t, 1 \leq t \leq e$ görbén!

8. Határozza meg a görbe hosszát: $x = t, y = 1/t, 1 \leq t \leq 2$!

9. Számítsa ki az $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ integrált a görbén: $x = t, y = 1 - t, 0 \leq t \leq 1$!

10. Határozza meg az $f(x,y) = sin(xy)$ görbementi integrált az íven: $x = t, y = sin\, t, 0 \leq t \leq \pi$!

11. Számítsa ki az $f(x,y) = y^2$ görbementi integrált a parabolaív mentén: $x = t, y = t^2, 0 \leq t \leq 1$!

12. Számítsa ki a görbe hosszát: $x = e^t, y = ln\, t, 1 \leq t \leq 2$!

13. Határozza meg az $f(x,y) = x^2y$ görbementi integrált: $x = t, y = t^2, 0 \leq t \leq 2$!

14. Számítsa ki az $f(x,y) = x^2 + y^2$ görbementi integrált az $(1,0) \rightarrow (0,1)$ íven, amely a körív mentén halad!

15. Számítsa ki az $f(x,y) = xy + x$ görbementi integrált az $x = sin\, t, y = cos\, t, 0 \leq t \leq \pi/2$ görbén!

Irodalomjegyzék

1. *Жалдак М.І., Мігілін Г.О., Деканов С.Й.* Математичний аналіз / – Київ: НПУ ім. М.П. Драгоманова, – 2007.
2. *Rimán János* Matematikai analízis I. kötet / – Eger, – 1998.
3. *Rimán János* Matematikai analízis feladatgyüjtemény I. kötet / – Eger, – 2002.
4. *Kulin Judit, Pákh György* Matematikai analízis feladatokban / Beregszász: PoliPrint Kft, – 2007.
5. *Lajkó Károly* Analízis / Debrecen: Matematikai és Informatikai Intézet, – 2000.
6. *Csernyák László* Analízis / Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó, – 2006.
7. *Györfi Jenő* A matematikai analízis elemei / Kolozsvár: Scientia Kiadó, – 2005.
8. *Tóth Zoltán* Analízis Budapest: Századvég Kiadó, – 2007.

Посібник з математичного аналізу для інформатиків призначений для студентів І курсу Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці спеціальності А 4.09 Середня освіта (Інформатика) денної та заочної форми навчання з метою організації самостійної роботи з курсу "Математичний аналіз".

Кожна тема посібника містить теоретичні питання та практичні завдання з курсу "Математичний аналіз".

Матеріал призначений для використання як навчально-методичний посібник з дисципліни "Математичний аналіз ".

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики
(протокол № 10 від «23» червня 2025 року)

Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості вищої освіти
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол №7 від 26 серпня 2025 року)

Рекомендовано до видання у електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

(протокол №8 від 28 серпня 2025 року)

Підготовлено до видання у електронній формі (PDF) кафедрою математики та інформатики з Видавничим відділом Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II