

Кафедра математика та інформатика

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

МЕТОДИЧНІ ПОРАДИ ТА ЗАВДАННЯ
до контрольних робіт
для здобувачів вищої освіти
заочної форми навчання

Перший (бакалаврський)
(ступінь вищої освіти)

А Освіта/Педагогіка / A Oktatás/Pedagógia

A4.09 Середня освіта (Інформатика) / A4.09 Középiskolai oktatás
(Informatika)

Інформатика
(освітня програма)

Informatika
(Képzési program)



Методичні поради та завдання до контрольних робіт з навчальної дисципліни «Теорія ймовірностей і математична статистика» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня заочної форми навчання, галузь знань: А Освіта/Педагогіка, А4.09 Середня освіта (Інформатика)б освітня програма: «Інформатика» / Укладач: Кучінка К.Й. Берегове: Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II, 2025. 33 с.

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II
(протокол № 10 від «23 » червня 2025 року)

Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості освіти
Закарпатського угорського інституту ім. Ф.Ракоці II
(протокол № 10 від «23 » червня 2025 року)

Рекомендовано до видання в електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту ім. Ф.Ракоці II
(протокол № 8 від «28» серпня 2025 року)

Укладач:

Каталін Кучінка – кандидат фіз.-мат. наук, доцент, завідувач кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського інституту ім. Ференца Ракоці II

Рецензенти:

Ганна Сливка-Тилищак – доктор фіз.-мат. наук, завідувач кафедри теорії ймовірностей та математичної статистики УжНУ

Адам Доровці – доктор філософії, старший викладач кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського інституту ім. Ференца Ракоці II

повідальні за випуск:

Каталін КУЧІНКА – завідувач кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II, доцент, кандидат фізико-математичних наук

Олександр ДОБОШ – начальник Видавничого відділу ЗУІ ім. Ф.Ракоці II

За зміст методичних вказівок відповідальність несе розробник.

Видавництво: Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II (адреса: пл. Кошута 6, м. Берегове, 90202. Електронна пошта: foiskola@kmf.uz.ua)

© Каталін Кучінка, 2025

© Кафедра математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II, 2025

Módszertani ajánlások és feladatok a „Valószínűesszámitás és matematikai statisztika” tantárgyhoz kapcsolódó ellenőrző dolgozatokhoz, a felsőoktatás első (alapképzési) szintjének levelező tagozatos hallgatói számára, tudományterület: 01 Neveléstudomány, 014.09 Középfokú oktatás (Informatika), képzési program: „Informatika” / Összeállította: Kucsinka K. J. – Beregszász: II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola, 2025. – 33 p.

Az oktatási folyamatban történő felhasználását jóváhagyta a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszéke
(2025.06.23. , 10. számú jegyzőkönyv).

Megjelentetésre javasolta a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Oktatási és Módszertani Tanácsa
(2025. augusztus 26., 7. számú jegyzőkönyv).

Elektronikus formában (PDF fájlformátumban) történő kiadásra javasolta a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Tudományos Tanácsa
(2025. augusztus 28., 8. számú jegyzőkönyv).

Kiadásra előkészítette a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszéke, valamint Kiadói Részlege.

A módszertani útmutató kidolgozója:

KUCSINKA Katalin – PhD, a fizikai és matematikai tudományok kandidátusa, docens, a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének tanszékvezetője és docense

Szakmai lektorok:

Slyvka-Tylyshchak Ganna – fizika-matematika tudományok doktora, a Valószínűesszámitás és Matematikai Statisztika Tanszék vezetője, Ungvári Nemzeti Egyetem

Daróci Ádám – PhD, a Matematika és Informatika Tanszék vezető tanára, II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

A kiadásért felelnek:

KUCSINKA Katalin – PhD, a fizikai és matematikai tudományok kandidátusa, a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének tanszékvezetője és docense

DOBOS Sándor – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Kiadói Részlegének vezetője

A segédlet tartalmáért kizárólag a módszertani útmutató kidolgozója felel.

Kiadó: II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola (cím: 90 202, Beregszász, Kossuth tér 6. E-mail: foiskola@kmf.uz.ua)

© Kucsinka Katalin, 2025

© A II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszéke, 2025

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	4
2. A tantárgy leírása	5
3. Példa változat megoldásokkal	6
4. Feladatok	15
1. változat	15
2. változat	16
3. változat	17
4. változat	18
5. változat	19
6. változat	20
7. változat	21
8. változat	22
9. változat	23
10. változat	24
11. változat	25
12. változat	26
13. változat	27
14. változat	28
15. változat	29
Hivatkozások	31

1. Bevezetés

A jelen gyűjtemény a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Informatika szakos, másodéves levelező tagozatos hallgatói számára készült. Célja, hogy segítse a hallgatókat az önálló tanulásban, valamint rendszerezett formában biztosítson gyakorlási lehetőséget a valószínűség-számítás és a matematikai statisztika alapvető fogalmainak, módszereinek elsajátításához. A levelező képzés sajátossága, hogy az órák száma korlátozott, így a tananyag mélyebb megértését és a feladatmegoldási készségek fejlesztését jelentős mértékben az otthoni, önálló munkavégzés biztosítja.

A gyűjteményben megtalálhatók önálló munka feladatsorok változatai, amelyek lehetőséget nyújtanak a hallgatóknak arra, hogy a különböző típusú feladatokon keresztül gyakorolják a tanult elmélet alkalmazását. Az egyes változatok azonos nehézségi szinten mozognak, de eltérő szövegkörnyezetben és adatokkal jelennek meg, így biztosítják a változatos felkészülést, elkerülve az egyszerű mechanikus ismétlést.

A kötet végén helyet kapott egy példaváltozat megoldásokkal együtt, amely útmutatóként szolgál a feladatmegoldási folyamat helyes lépéseinek megértéséhez, valamint segít az önellenőrzésben. Reményeink szerint ez a gyűjtemény nemcsak a vizsgákra való felkészüléshez nyújt hasznos támogatást, hanem hozzájárul ahhoz is, hogy a hallgatók magabiztosan alkalmazzák a valószínűség-számítás és a statisztika módszereit a jövőbeni tanulmányaikban és szakmai pályafutásuk során.

2. A tantárgy leírása

A tantárgy általános ismertetése A Valószínűség számítás és matematikai statisztika tárgy BSc szintű képzéshez készült képzési terület: «01 Oktatás/Pedagógia» képzési szakirány 014 Közepiskolai oktatás (Informatika) programhoz. A tantárgy célja, hogy megismertesse a hallgatót a valószínűség számítás és statisztika alapvető fogalmaival és eredményeivel. Tegye képessé arra, hogy önállóan gondolkodva tudjon feladatokat megoldani, olyanokat, melyek illeszkednek az előadás anyagához. A félév során a hallgató alkalmazhatja azokat az ismereteket, megoldási módszereket, amelyeket a tantárgy tanulása közben elsajátított. A kurzus során a hallgató által elsajátítandó általános és szakmai kompetenciákkal ill. a program eredményeivel a tantárgy syllabusában lehet megismerkedni. Szakmai kompetenciák :

Képes a tudományos ismeretszerzési módszerek alkalmazására az oktatási folyamatban; Matematikai módszerek és modellek alkalmazásának képessége az oktatásban/pedagógiában; képes különböző összetettségű problémák megoldására az iskolai informatikában.

A program eredményei :

atanulók nyelvi, beszédbeli és kulturális tapasztalatainak felhasználása, akik az ukrainai őshonos népekhez vagy nemzeti kisebbségekhez tartozó tanulók, az ukrainai az oktatás megszerzésének folyamatában; folyékonyan kommunikáljon az állam- és idegen nyelveken, amikor a következő témákról beszélget. szakmai kérdések megvitatása a pedagógia, a matematika és az informatika területén; a tanulók matematikai és informatikai ismereteinek kialakítása a korszerű tudományos eredményekre alapozva; tudományos ismeretszerzési módszerek alkalmazása a pedagógiai tevékenységben, megfigyelni elemezni, hipotéziseket megfogalmazni, adatokat gyűjteni, kísérleteket végezni, elemezni és értelmezzék az eredményeket, készítsenek modelleket és határozzák meg azok hatékonyságát; a matematika és az informatika főbb részterületeinek ismeretének bemutatása.

3. Példa válatozat megoldásokkal

1. változat

1. Egy gazdálkodás szakra járó főiskolásnak 3 nehéz tantárgyból kell vizsgát tennie: matematikából, statisztikából, közgazdaságtanból. M esemény: matematikából sikeres vizsgát tett, S esemény: statisztikából sikeres vizsgát tett, K esemény: közgazdaságtanból sikeres vizsgát tett. Fejezze ki M, S, K eseményekkel és az esemény algebrai műveletekkel:
 - (a) Csak egy tárgyból tett sikeres vizsgát
 - (b) Legalább egy tárgyból sikeres vizsgát tett.
2. Öt házaspár foglal helyet egy padon. Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a házastársak egymás mellett akarnak ülni, de sem két nő, sem két férfi nem ülhet egymás mellé?
3. A 32 lapos magyar kártyából hányféleképpen lehet kiválasztani nyolc lapot úgy, hogy legalább egy zöld legyen a kiválasztott lapok között?
4. 2p) Egy cukrászda egy 9 fős társaság érkezik. 3dobos tortát, 2 túrós rétest és 4 somlói galuskát rendelnek. A pincér kihozza a süteményeket, de sajnos elfelejtette, hogy ki melyiket rendelte, így véletlenszerűen teszi le őket a vendégek elé. Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindenki a megfelelő sü
5. (3p) András és Betti megbeszélnek, hogy munka után találkoznak. Mindkettejüknek egymástól függetlenül véletlenszerűen, egyenletes eloszlás szerint ér véget a munkaideje 5 óra és fél 6 között. Mennyi a valószínűsége, hogy az előbb jövőnek nem kell 15 percnél többet várnia a másikra?
6. (3p) Egy biztosító három irodájában autóbiztosítással rendelkező ügyfelek száma 100, 150 és 250, közülük rendre 70a) Egy ügyfelet véletlenszerűen kiválasztva mekkora valószínűséggel újítja meg a biztosítást? b) Ha egy ügyfél megújítja a biztosítását mekkora valószínűséggel tartozik az első irodához?
7. (1p) Egy focilabdát találmányra nekirúgnak egy háznak, amely fala 10 m hosszú és 5 m magas (egyenletes eloszlást feltételezünk). A házban két 2 m x 1,5 m-es ablak van. Mennyi a valószínűsége, hogy ablakot talál el a labda?
8. (3p) Egydobozban 20 hibás és 15 hibátlan mobiltelefon van. Visszatevéssel kihúzzunk közülük 12-t. a) Határozzuk meg a kihúzott hibás mobiltelefonok számának eloszlását b) Határozzuk meg a kihúzott hibás mobiltelefonok számának várható értékét! c) Mi a valószínűsége annak, hogy a kihúzott hibás mobiltelefonok száma kevesebb, mint a várható érték?
9. (3p) A tapasztalat azt mutatja, hogy óránként átlagosan ötször csörög a telefon egy irodában. (A telefoncsörgések száma Poisson-eloszlást követ.) Mekkora annak a valószínűsége, hogy (a) egy óra alatt egyszer sem csörög a telefon? (b) fél óra alatt háromszor csörög a telefon? (c) 10 perc alatt legalább egyszer csörög a telefon?
10. (3p) Egy orvosi műszer élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Annak a valószínűsége, hogy legalább 3 évig működik: 0,9. Mekkora annak a valószínűsége, hogy 4 éven belül meghibásodik?

11. (2p) A hallgatók valószínűségszámítás vizsgán szerzett pontszáma jó közelítéssel normális eloszlású valószínűségi változó, 7,5 pont szórással. A hallgatók 2,28 %-a ér el 40-nél magasabb pontszámot. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott hallgató 60 pontnál kevesebbet ér el?
12. (4p) Az Ezzé idd teát 200gr – os dobozokban árulják, a csomagológép szórása 4gr. A Fogyasztóvédelmi Felügyelőség lemérte 11 véletlenszerűen kiválasztott teásdoboz tömegét, melyekre az alábbi értékek adódtak: 196, 202, 201, 203, 198, 204, 197, 203, 190, 191, 197 Hipotéziseidet pontosan megfogalmazva és feltételezve, hogy a teásdobozok tömege normális eloszlást követ, dönts 95 % os szinten, hogy az átlagos töltőtömeg tényleg 200gr, avagy kevesebb annál
13. A Mindent Tudás Egyeteme másodéves közgazdász hallgatói két zárthelyi dolgozatot írtak statisztikából. Az alábbi táblázat tíz véletlenszerűen kiválasztott hallgató eredményeit tartalmazza (pont):

Hallgató	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
I.	57	63	67	82	45	65	53	32	51	27
II.	53	62	63	80	46	64	44	28	50	29

Feltételezve, hogy a két dolgozat pontszámainak *különbsége* normális eloszlású, dönts 90%-os szinten, van-e különbség a két dolgozat nehézségi foka között!

14. Egy vállalkozás 10 véletlenszerűen kiválasztott dolgozójára vonatkozó adatok:

X	5	1	12	20	3	15	1	30	25	40
Y	72	64	84	90	68	90	62	105	100	110

ahol X = az adott munkahelyen eltöltött évek száma, Y = havi nettó kereset (ezer hrn). Írja fel a lineáris regresszió-egyenletet (Y X -re)!

Megoldások

3.1. Feladat. Egy gazdálkodás szakra járó főiskolásnak 3 nehéz tantárgyból kell vizsgát tennie: matematikából, statisztikából, közgazdaságtanból. M esemény: matematikából sikeres vizsgát tett, S esemény: statisztikából sikeres vizsgát tett, K esemény: közgazdaságtanból sikeres vizsgát tett. Fejezze ki M , S , K eseményekkel és az esemény algebrai műveletekkel:

1. Csak egy tárgyból tett sikeres vizsgát
2. Legalább egy tárgyból sikeres vizsgát tett.

Megoldás Egy gazdálkodás szakra járó főiskolásnak három nehéz tantárgyból kell vizsgát tennie: matematikából, statisztikából, közgazdaságtanból. Jelölések: M – matematikából sikeres vizsga, S – statisztikából sikeres vizsga, K – közgazdaságtanból sikeres vizsga.

Az ellentett eseményt felülvonással jelöljük: $\bar{A}$. Az unió jele $\cup$, a metszet jele $\cap$.

1. Csak egy tárgyból tett sikeres vizsgát

$$(M \cap \bar{S} \cap \bar{K}) \cup (\bar{M} \cap S \cap \bar{K}) \cup (\bar{M} \cap \bar{S} \cap K).$$

Szóban: sikeres vizsga *csak* matematikából, vagy *csak* statisztikából, vagy *csak* közgazdaságtanból.

2. Legalább egy tárgyból sikeres vizsgát tett

$$M \cup S \cup K.$$

Ekvivalens alak (De Morgan-azonosság felhasználásával):

$$\overline{M \cap S \cap K}.$$

3.2. Feladat. Öt házaspár foglal helyet egy padon. Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a házastársak egymás mellett akarnak ülni, de sem két nő, sem két férfi nem ülhet egymás mellé?

Megoldás Tekintsük a házaspárokat *blokkoknak*. Öt blokkot kell sorba rendeznünk:

$$5! = 120 \text{ féleképpen.}$$

Minden blokkban kétféleképpen ülhetnek le: először a férj, majd a feleség, vagy fordítva. Ez blokkonként 2 lehetőség:

$$2^5 = 32.$$

Azonban nem minden elrendezés felel meg a feltételnek, miszerint nem ülhet két férfi és nem ülhet két nő egymás mellé. Ehhez a teljes padsorban *váltakozniuk* kell a nemeknek. Egy adott pársorrend esetén pontosan két váltakozó minta létezik (férfi–nő–férfi–nő–... , illetve nő–férfi–nő–férfi–...).

Ezért minden pársorrendhez 2 érvényes nemi elrendezés tartozik, tehát az összes lehetséges ülésrend:

$$5! \cdot 2 = 240.$$

3.3. Feladat. Egyszerre dobunk 6 szabályos kockával. Mi a valószínűsége annak, hogy legalább két dobókockán azonos pontszám lesz felül?

Megoldás Komplementer esemény: mind a hat kocka különböző számot mutat. Ez pontosan $6! = 720$ kedvező eset. Az összes lehetséges eset: $6^6 = 46656$.

Ezért a keresett valószínűség:

$$P = 1 - \frac{6!}{6^6} = 1 - \frac{720}{46656}.$$

3.4. Feladat. Egy cukrászdába 9 fős társaság érkezik. 3 dobostortát, 2 túrós rétest és 4 somlói galuskát rendelnek. A pincér véletlenszerűen osztja szét a süteményeket. Mennyi a valószínűsége, hogy mindenki a megfelelő süteményt kapja?

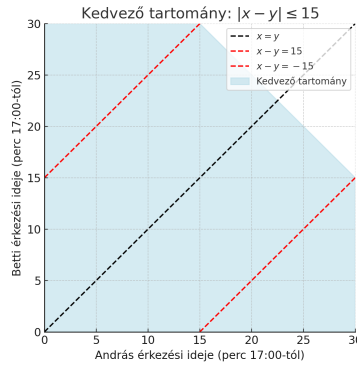
Megoldás Az összes kiosztási lehetőség ismétléses permutációval számoljuk:

$$\frac{n!}{k_1! k_2! k_3!} = \frac{9!}{3! 2! 4!}.$$

A kedvező esetek száma: 1 (mindenki pontosan a sajátját kapja). Ezért:

$$P = \frac{1}{\frac{9!}{3! 2! 4!}}.$$

3.5. Feladat. András és Betti munkaideje egymástól függetlenül, egyenletesen oszlik el 17:00 és 17:30 között. Mennyi a valószínűsége, hogy az előbb érkezőnek legfeljebb 15 percet kell várnia?



1. ábra. 3.5 feladat

Megoldás Az eseményt a $[0, 30] \times [0, 30]$ négyzet reprezentálja, ahol a koordináták András és Betti érkezési ideje. Feltétel: $|x - y| \leq 15$. Lásd 1. ábra.

A teljes négyzet területe: 900. A kedvező terület: $900 - 225 = 675$.

Ezért a valószínűség:

$$P = \frac{675}{900} = \frac{3}{4}.$$

3.6. Feladat. Egy biztosító három irodájában autóbiztosítással rendelkező ügyfelek száma 100, 150 és 250, közülük rendre 70%, 60% és 55% a következő évre megújítja biztosítását.

1. Egy ügyfelet véletlenszerűen kiválasztva mekkora valószínűséggel újítja meg a biztosítást?
2. Ha egy ügyfél megújítja a biztosítását, mekkora valószínűséggel tartozik az első irodához?

Megoldás Jelölések a teljes valószínűség tételéhez: legyenek B_1, B_2, B_3 az események $B_1 =$ „az ügyfél az 1. irodához tartozik”, $B_2 =$ „az ügyfél a 2. irodához tartozik”, $B_3 =$ „az ügyfél a 3. irodához tartozik”,

és legyen $U =$ „az ügyfél megújítja a biztosítást”. A három esemény teljes eseményrendszert alkot: $B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ ($i \neq j$).

A B_i események valószínűségei, rendre:

$$P(B_1) = \frac{100}{500} = \frac{1}{5}, P(B_2) = \frac{150}{500} = \frac{3}{10}, P(B_3) = \frac{250}{500} = \frac{1}{2}.$$

Feltételes valószínűségek:

$$P(U | B_1) = 0.70, \quad P(U | B_2) = 0.60, \quad P(U | B_3) = 0.55.$$

a) Teljes valószínűség tétele:

$$P(U) = \sum_{i=1}^3 P(U | B_i) P(B_i) = 0.70 \cdot \frac{1}{5} + 0.60 \cdot \frac{3}{10} + 0.55 \cdot \frac{1}{2} = \frac{119}{200} = 0.595.$$

b) Bayes-tétel az első irodára:

$$P(B_1 | U) = \frac{P(U | B_1) P(B_1)}{P(U)} = \frac{0.70 \cdot \frac{1}{5}}{\frac{119}{200}} = \frac{28}{119} \approx 0.2353.$$

3.7. Feladat. Egy focilabdát találomra nekirúgnak egy háznak, amely fala 10 m hosszú és 5 m magas (egyenletes eloszlást feltételezünk). A házon két $2\text{ m} \times 1,5\text{ m}$ -es ablak van. Mennyi a valószínűsége, hogy ablakot talál el a labda?

Megoldás Jelölje H a fal teljes területét, W_1 és W_2 az ablakok területét, valamint

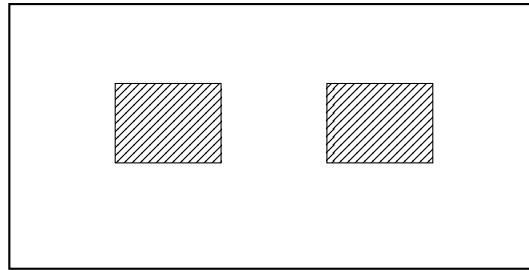
$$A = \text{„ablakot talál a labda”} = W_1 \cup W_2.$$

Geometriai valószínűségnél $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(H)}$, ahol $\mu(\cdot)$ a területet jelöli. Számolva:

$$\mu(H) = 10 \cdot 5 = 50, \quad \mu(W_1) = \mu(W_2) = 2 \cdot 1,5 = 3, \quad \mu(A) = \mu(W_1) + \mu(W_2) = 6.$$

Ezért

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(H)} = \frac{6}{50} = \frac{3}{25} = 0,12$$



2. ábra. A fal (10×5) és a két ablak ($2 \times 1,5$). A mintázott téglalapok az ablakok.

3.8. Feladat. Egy dobozban 20 hibás és 15 hibátlan mobiltelefon van. Visszatevéssel kihúzzunk közülük 12-t.

1. Határozzuk meg a kihúzott hibás mobiltelefonok számának eloszlását!
2. Határozzuk meg a kihúzott hibás mobiltelefonok számának várható értékét!
3. Mi a valószínűsége annak, hogy a kihúzott hibás mobiltelefonok száma kevesebb, mint a várható érték?

Megoldás Jelölje ξ a kihúzott hibás mobiltelefonok számát a 12 húzásban. A húzások függetlenek és azonos valószínűségűek (visszatevés miatt), továbbá

$$p := P(\text{hibás}) = \frac{20}{20 + 15} = \frac{4}{7}, \quad 1 - p = \frac{3}{7}.$$

- Mivel 12 független kísérletben az egyes húzásokon a „hibás” esemény valószínűsége p , ezért

$$\xi \sim \text{Bin}\left(n = 12, p = \frac{4}{7}\right), \quad P(\xi = k) = \binom{12}{k} \left(\frac{4}{7}\right)^k \left(\frac{3}{7}\right)^{12-k} \quad (k = 0, 1, \dots, 12).$$

- A binomiális várható értéke:

$$M(\xi) = np = 12 \cdot \frac{4}{7} = \frac{48}{7} \approx 6,857.$$

- „Kevesebb, mint a várható érték” $\Rightarrow$ mivel X egész értékű és $M(\xi) \approx 6,857$, ezért

$$P(\xi < M(\xi)) = P(\xi \leq 6) = \sum_{k=0}^6 \binom{12}{k} \left(\frac{4}{7}\right)^k \left(\frac{3}{7}\right)^{12-k} \approx 0,4127.$$

3.9. Feladat. A tapasztalat azt mutatja, hogy óránként átlagosan ötször csörög a telefon egy irodában. (A telefoncsörgések száma Poisson-eloszlást követ.) Mekkora annak a valószínűsége, hogy

1. egy óra alatt egyszer sem csörög a telefon?
2. fél óra alatt háromszor csörög a telefon?
3. 10 perc alatt legalább egyszer csörög a telefon?

Megoldás Tegyük fel, hogy a telefoncsörgés Poisson-folyamat $\lambda = 5$ (átlag/óra) paraméterrel. A várható értéket $M(\cdot)$ -el jelöljük, az ismeretlen valószínűségi változókat ξ és η , ζ -val.

1. Egy óra alatt egyszer sem: $M(\xi) = 5$

$$P(\xi = 0) = e^{-5} \frac{5^0}{0!} = e^{-5} \approx 0.00674.$$

2. Fél óra alatt háromszor: $M(\eta) = 5 \cdot 0,5$

$$P(\eta = 3) = e^{-2.5} \frac{2.5^3}{3!} \approx 0.21376.$$

3. 10 perc alatt legalább egyszer: $M(\zeta) = 5 \cdot \frac{10}{60}$

$$P(\zeta \geq 1) = 1 - P(\zeta = 0) = 1 - e^{-\frac{5}{6}} \cdot \frac{5^0}{0!} \approx 0.5654.$$

3.10. Feladat. Egy orvosi műszer élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Annak a valószínűsége, hogy legalább 3 évig működik: 0,9. Mekkora annak a valószínűsége, hogy 4 éven belül meghibásodik?

Megoldás Jelölje ξ a műszer élettartását (évben), és tegyük fel, hogy $\xi \sim \text{Exp}(\lambda)$. Exponenciális eloszlásnál a : $P(\xi < t) = 1 - e^{-\lambda t}$ ($t \geq 0$), továbbá a várható érték jelölése: $M(\xi) = \frac{1}{\lambda}$.

A megadott adatból:

$$P(\xi \geq 3) = e^{-3\lambda} = 0.9 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{3} \ln(0.9).$$

A keresett valószínűség:

$$P(\xi \leq 4) = 1 - P(\xi > 4) = 1 - e^{-4\lambda} = 1 - \exp\left(-4 \cdot \left(-\frac{1}{3} \ln(0.9)\right)\right) = 1 - 0.9^{\frac{4}{3}}.$$

Számszerűen:

$$P(\xi \leq 4) = 1 - 0.9^{\frac{4}{3}} \approx 1 - 0.8690 \approx 0.131.$$

Megjegyzés: a jelölés szerint $M(\xi) = \frac{1}{\lambda} = \frac{3}{-\ln(0.9)}$.

3.11. Feladat. A hallgatók valószínűségszámítás vizsgán szerzett pontszáma jó közelítéssel normális eloszlású, szórása $\sigma = 7,5$. A hallgatók 2,28%-a ér el 40-nél magasabb pontszámot. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott hallgató 60 pontnál kevesebbet ér el?

Megoldás Jelölje ξ a pontszámot, $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, ahol $\sigma = 7,5$ és $M(\xi) = \mu$. Legyen $Z = \frac{\xi - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye.
A feltétel:

$$P(\xi > 40) = 0,0228 \iff P\left(Z > \frac{40 - \mu}{7,5}\right) = 0,0228.$$

Mivel $1 - \Phi(2,00) = 0,0228$, ezért

$$\frac{40 - \mu}{7,5} = 2,00 \implies \mu = 40 - 2 \cdot 7,5 = 25.$$

A keresett valószínűség:

$$P(\xi < 60) = \Phi\left(\frac{60 - \mu}{7,5}\right) = \Phi\left(\frac{60 - 25}{7,5}\right) = \Phi(4,666\bar{6}) \approx 0,9999985.$$

$$\boxed{P(\xi < 60) \approx 0,999998 \text{ (kb. } 99,99985\%)}$$

3.12. Feladat. Az Ezt idd teát 200 g-os dobozokban árulják, a csomagológép szórása $\sigma = 4$ g. A Fogyasztóvédelmi Felügyelőség $n = 11$ véletlenszerűen kiválasztott dobozt mért:

196, 202, 201, 203, 198, 204, 197, 203, 190, 191, 197.

Feltételezve, hogy a töltőtömeg normális eloszlású és σ ismert, u-próbával dönts 95%-os szinten, hogy az átlagos töltőtömeg tényleg 200 g, avagy kevesebb annál!

Megoldás Jelölje ξ egy doboz töltőtömegét, $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, ahol $\sigma = 4$. A várható értéket $M(\xi) = \mu$ jelöli. A minta: $\xi_1, \dots, \xi_{11}$, mintaátlag $\bar{\xi}$.

Hipotézisek (egyoldali u-próba):

$$H_0 : \mu = 200$$

$$H_1 : \mu < 200.$$

Mintaátlag:

$$\bar{\xi} = \frac{196 + 202 + 201 + 203 + 198 + 204 + 197 + 203 + 190 + 191 + 197}{11} = \frac{2182}{11} \approx 198,36.$$

Próbastatisztika (u-próba, σ ismert):

$$\hat{u} = \frac{\bar{\xi} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{198,36 - 200}{4/\sqrt{11}} \approx \frac{-1,64}{1,206} \approx -1,36.$$

Kritikus tartomány ($\alpha = 0,05$, **bal oldali próba**):

$$C = (-\infty, \Phi^{-1}(0.05)) = (-\infty, -1.645).$$

Mivel $\hat{u} \approx -1,36 > -1.645$, *nem esik* a kritikus tartományba, ezért *nem utasítjuk el* H_0 -t 5% szinten. (P-érték $\approx \Phi(-1.36) \approx 0.087$.)

Következtetés: 95%-os szinten nincs elegendő bizonyíték arra, hogy az átlagos töltőtömeg 200 g-nál *kevesebb* lenne.

„latex

3.13. Feladat. A Mindent Tudás Egyeteme másodéves közgazdász hallgatói két zárthelyi dolgozatot írtak statisztikából. Az alábbi táblázat tíz véletlenszerűen kiválasztott hallgató eredményeit tartalmazza (pont):

Hallgató	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
I.	57	63	67	82	45	65	53	32	51	27
II.	53	62	63	80	46	64	44	28	50	29

Feltételezve, hogy a két dolgozat pontszámainak különbsége normális eloszlású, dönts 90%-os szinten, van-e különbség a két dolgozat nehézségi foka között!

Megoldás Jelölje ξ_i az i -edik hallgató I. dolgozatának, és η_i a II. dolgozatának pontszámát ($i = 1, \dots, 10$). Vizsgáljuk a páronkénti különbséget

$$D_i = \xi_i - \eta_i, \quad i = 1, \dots, 10.$$

A várható értéket $M(\cdot)$ -al jelöljük. A hipotézisek (kétoldali t -próba páros mintára):

$$H_0 : M(D) = 0$$

$$H_1 : M(D) \neq 0,$$

ahol $M(D)$ a különbségek várható értéke.

A különbségek a megadott adatokból:

$$(4, 1, 4, 2, -1, 1, 9, 4, 1, -2).$$

Mintaátlag és szórás:

$$\bar{D} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} D_i = 2,3, \quad S_D = \sqrt{\frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (D_i - \bar{D})^2} \approx 3,129.$$

Próbastatisztika ($n = 10$):

$$\hat{t} = \frac{\bar{D} - 0}{S_D / \sqrt{n}} = \frac{2,3}{3,129 / \sqrt{10}} \approx 2,325, \quad \text{szabadságfok } \nu = 9.$$

Kritikus érték 90%-os szinten (kétoldali próba):

$$t_{0,95;9} \approx 1,833.$$

Mivel $|\hat{t}| = 2,325 > 1,833$, elutasítjuk H_0 -t 10% szinten.

Következtetés: 90%-os szinten kimutatható különbség van a két dolgozat nehézségi foka között. Mivel $\bar{D} > 0$ (az I. dolgozat pontjai átlagosan magasabbak), a II. dolgozat *nehezebbnek* tekinthető.

(Megjegyzés: a 90%-os konfidenciaintervallum $M(D)$ -re

$$\bar{D} \pm t_{0,95;9} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}} = 2,3 \pm 1,833 \cdot 0,989 \approx [0,49, 4,11],$$

ami nem tartalmazza a 0-t.)

3.14. Feladat. Egy vállalkozás 10 véletlenszerűen kiválasztott dolgozójára vonatkozó adatok:

X	5	1	12	20	3	15	1	30	25	40
Y	72	64	84	90	68	90	62	105	100	110

ahol X = az adott munkahelyen eltöltött évek száma, Y = havi nettó kereset (ezer hrn). Írja fel a lineáris regresszió-egyenletet (Y X -re)!

Megoldás A jegyzet szerinti jelöléssel a legkisebb négyzetek módszerével a regresszió-egyenlet

$$\hat{Y} = a + bX, \quad b = \frac{S_{XY}}{S_{XX}}, \quad a = \bar{Y} - b\bar{X},$$

ahol

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \quad S_{XX} = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad S_{XY} = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}).$$

A mintára ($n = 10$) számolva:

$$\bar{X} = 15.2, \quad \bar{Y} = 84.5, \quad S_{XX} = 1619.6, \quad S_{XY} = 2054.0.$$

Ezért

$$b = \frac{2054.0}{1619.6} \approx 1.268, \quad a = 84.5 - 1.268 \cdot 15.2 \approx 65.223.$$

$$\hat{Y} = 65.223 + 1.268 X \quad (\text{ezer hrn}).$$

4. Feladatok

1. változat

1. (2p) Egy informatikus hallgatónak három programozási vizsgát kell letennie: C-ből, Pythonból és Java-ból. M: sikeres vizsga C-ből, P: sikeres vizsga Pythonból, J: sikeres vizsga Java-ból.
Fejezze ki M, P, J eseményekkel: a) pontosan egy tárgyból volt sikeres vizsgája, b) legalább egy tárgyból sikeres vizsgája volt.
2. (2p) Hat baráti pár moziba megy, és egy sorban ülnek le. A párok egymás mellett akarnak ülni, de sem két nő, sem két férfi nem ülhet egymás mellé. Hányféleképpen történhet ez?
3. (3p) Egy 36 lapos francia kártyacsomagból választunk ki 9 lapot. Hányféleképpen lehet ezt megtenni úgy, hogy legalább egy pikk legyen a kiválasztott lapok között?
4. (3p) Egyszerre dobunk 7 szabályos kockával. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább kettőn ugyanaz a szám lesz felül?
5. (2p) Egy étteremben egy 10 fős társaság érkezik. 4 pizzát, 3 spagettit és 3 salátát rendeltek. A pincér véletlenszerűen osztja ki az ételeket. Mennyi a valószínűsége, hogy mindenki a megfelelő ételt kapja?
6. (3p) Dóri és Gergő megbeszélik, hogy reggel 7 és 7:30 között találkoznak a buszmegállóban. Mindkettőjük érkezése független, egyenletes eloszlású ebben az intervallumban. Mennyi a valószínűsége, hogy a korábban érkező legfeljebb 10 percet vár a másikra?
7. (3p) Három bankfiókban a hitelkártya-tulajdonosok száma rendre 120, 180 és 200. Az ügyfelek közül 65%, 55% és 60% hosszabbítja meg a kártyáját. a) Véletlenszerűen választott ügyfél mekkora valószínűséggel hosszabbítja meg a kártyát? b) Ha egy ügyfél hosszabbított, mekkora valószínűséggel tartozik az első bankfiókhoz?
8. (1p) Egy teniszlabdát véletlenszerűen feldobnak egy 12 m széles és 6 m magas falnak. A falon két 1,5 m × 1,5 m-es ablak van. Mennyi a valószínűsége, hogy a labda az ablakot találja el?
9. (3p) Egy raktárban 18 hibás és 22 hibátlan izzó van. Visszatevéssel kiválasztunk közülük 15-öt. a) Mi a hibás izzók számának eloszlása? b) Mennyi ennek várható értéke? c) Mennyi a valószínűsége, hogy a hibás izzók száma kisebb, mint a várható érték?
10. (3p) Egy ügyfélszolgálati központban óránként átlagosan 8 hívás fut be. (A hívások száma Poisson-eloszlást követ.) Mennyi a valószínűsége, hogy a) egy órában nem érkezik hívás, b) fél óra alatt pontosan 5 hívás érkezik, c) 15 perc alatt legalább 1 hívás érkezik?
11. (3p) Egy LED-lámpa élettartama exponenciális eloszlást követ. Annak a valószínűsége, hogy legalább 4000 órát működik, 0,85. Mennyi a valószínűsége, hogy 5000 órán belül tönkremegy?
12. (2p) Egy angol nyelvvizsga pontszámai normális eloszlásúak, szórásuk 6 pont. A vizsgázók 1,5%-a ér el 80 pontnál többet. Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott vizsgázó 60 pont alatt teljesít?

13. (4p) Egy kávé csomagológép 250 g-os csomagokat készít, szórása 5 g. 12 dobozt mérték le, eredmények: 245, 249, 247, 252, 254, 243, 250, 248, 246, 251, 249, 247. Hipotézis-vizsgálattal, 95%-os szinten döntse el, hogy az átlagos töltőtömeg valóban 250 g, vagy kisebb!
14. (4p) Egy egyetemi csoport két statisztika ZH-t írt. 8 véletlenszerűen kiválasztott hallgató pontszámai: ZH1: 18, 22, 20, 25, 24, 21, 19, 23 ZH2: 20, 24, 19, 27, 22, 20, 18, 21 Feltételezve, hogy a különbség normális eloszlású, döntsön 90%-os szinten, van-e különbség a két ZH nehézsége között!

2. változat

1. (2p) Egy mérnökhallgatónak három szakmai tárgyból kell vizsgát tennie: mechanikából, elektronikából, és anyagtudományból. M: sikeres vizsga mechanikából, E: sikeres vizsga elektronikából, A: sikeres vizsga anyagtudományból.
Írja fel eseményalgebrai formában: a) pontosan egy tárgyból tett sikeres vizsgát, b) legalább egy tárgyból sikeres vizsgát tett.
2. (2p) Négy házaspár kirándulni megy, és egy hosszú padon ülnek le. A párok egymás mellett akarnak ülni, de két nő vagy két férfi nem kerülhet egymás mellé. Hányféleképpen ülhetnek le?
3. (3p) Egy 40 lapos spanyol kártyából választunk ki 10 lapot. Hányféleképpen lehet ez úgy, hogy legalább egy kupa legyen köztük?
4. (3p) Egyszerre dobunk 5 szabályos kockával. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább kettőn ugyanazt a számot látjuk?
5. (2p) Egy 8 fős társaság egy cukrászdában 3 tiramisut, 2 somlót és 3 gyümölcstortát rendel. A pincér véletlenszerűen osztja ki a desszerteket. Mennyi a valószínűsége, hogy mindenki a sajátját kapja?
6. (3p) Kata és Péter reggel 8 és 8:45 között találkoznak a pályaudvaron. Érkezésük egyenletes és független. Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb 12 percet kell várniuk egymásra?
7. (3p) Egy biztosító három részlegének ügyfélszáma 200, 250 és 300. A szerződések meghosszabbításának aránya 70%, 65% és 50%. a) Véletlenszerű ügyfél mekkora valószínűséggel hosszabbít? b) Ha hosszabbít, mekkora eséllyel tartozik az első részleghez?
8. (1p) Egy focipálya lelátója 15 m széles és 8 m magas. Két $2\text{ m} \times 2\text{ m}$ -es reklámtábla van rajta. Mennyi a valószínűsége, hogy egy labda a reklámtáblát találja el?
9. (3p) Egy raktárban 25 hibás és 20 hibátlan rádió van. Visszatevéssel kiválasztunk 10-et.
a) Mi a hibás rádiók számának eloszlása? b) Mennyi ennek várható értéke? c) Mennyi a valószínűsége, hogy a hibás rádiók száma kisebb, mint a várható érték?
10. (3p) Egy hírportál óránként átlagosan 12 új hozzászólást kap. (Poisson-eloszlás.) Mennyi a valószínűsége, hogy a) egy órában nem érkezik hozzászólás, b) fél órában pontosan 7 érkezik, c) 10 percben legalább 1 érkezik?

11. (3p) Egy akkumulátor élettartama exponenciális eloszlású. Annak a valószínűsége, hogy legalább 2 évig bírja, 0,8. Mennyi a valószínűsége, hogy 3 évnél előbb tönkremegy?
12. (2p) Egy matematika verseny pontszámai normális eloszlásúak, szórásuk 5 pont. A diákok 2%-a ér el 90 pontnál többet. Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerű diák 70 pont alatt teljesít?
13. (4p) Egy vaj csomagológép 500 g-os csomagokat készít, szórása 6 g. 10 csomagot mértek le: 492, 498, 505, 501, 497, 495, 503, 499, 494, 502. Hipotézisvizsgálattal, 95%-on döntse el, hogy az átlagos töltőtömeg valóban 500 g-e, vagy kisebb!
14. (4p) Egy gimnáziumban két dolgozatot írtak. 9 véletlenszerű tanuló pontszámai: ZH1: 14, 16, 18, 20, 15, 19, 17, 18, 16 ZH2: 15, 14, 20, 19, 18, 20, 16, 21, 15 Feltételezve normális eloszlást, döntsön 90%-on, van-e különbség a két dolgozat nehézsége között!

3. változat

1. (2p) Egy sportmenedzsernek három játékosal kell szerződést kötnie: focista, kosaras, kézilabdás. F: szerződés a focistával, K: szerződés a kosarassal, H: szerződés a kézilabdással.
Adja meg eseményalgebrai alakban: a) pontosan egy szerződés jött létre, b) legalább egy szerződés jött létre.
2. (2p) Öt zenészpár fellépésre készül, és egy sorban ülnek. A párok egymás mellett ülnek, de sem két férfi, sem két nő nem ülhet egymás mellett. Hányféleképpen ülhetnek le?
3. (3p) Egy 32 lapos magyar kártyából választunk ki 7 lapot. Hányféleképpen lehet ez úgy, hogy legyen benne legalább egy makk?
4. (3p) Egyszerre dobunk 8 szabályos kockával. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább két kockán ugyanazt a számot látjuk?
5. (2p) Egy 12 fős társaság egy étteremben 5 levest, 4 főételt és 3 desszertet rendel. A pincér véletlenszerűen teszi le az ételleket. Mennyi a valószínűsége, hogy mindenki a megfelelőt kapja?
6. (3p) Anna és László este 6 és 6:30 között találkoznak a parkban. Érkezésük független, egyenletes. Mennyi a valószínűsége, hogy az előbb érkező legfeljebb 8 percet vár a másíkra?
7. (3p) Egy cég három részlegének dolgozói száma 150, 200 és 250. A következő évi szerződés-hosszabbítási arányok: 75%, 65%, 50%. a) Véletlenül választott dolgozó mekkora valószínűséggel hosszabbít? b) Ha hosszabbít, mekkora eséllyel az első részlegből való?
8. (1p) Egy színház homlokzata 20 m széles és 10 m magas. Két 3 m × 2 m-es ablak van rajta. Mennyi a valószínűsége, hogy egy feldobott kavics az ablakot találja el?
9. (3p) Egy gyárban 30 hibás és 20 hibátlan laptop van. Visszatevéssel kiválasztunk 12-t. a) Mi a hibás laptopok számának eloszlása? b) Mennyi ennek várható értéke? c) Mennyi a valószínűsége, hogy a hibás laptopok száma kisebb, mint a várható érték?

10. (3p) Egy városban átlagosan 6 baleset történik hetente. (Poisson-eloszlás.) Mennyi a valószínűsége, hogy a) egy héten nem történik baleset, b) fél hét alatt pontosan 4 történik, c) egy napon legalább egy történik?
11. (3p) Egy biztosíték élettartama exponenciális eloszlást követ. Annak valószínűsége, hogy legalább 1000 órát bír, 0,92. Mennyi a valószínűsége, hogy 1500 órán belül kiég?
12. (2p) Egy biológia teszt pontszámai normális eloszlásúak, szórásuk 4 pont. A diákok 2,5%-a ér el 50 pont felett. Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenül választott diák 35 pont alatt teljesít?
13. (4p) Egy rizs csomagológép 1 kg-os zacskókat készít, szórása 7 g. 9 zacskót mértek le: 1002, 998, 1005, 995, 1003, 996, 1001, 999, 1004. Hipotézisvizsgálattal, 95%-on döntse el, hogy az átlagos tömeg valóban 1000 g-e, vagy kisebb!
14. (4p) Egy középiskolában két matematika ZH eredményei a következők 7 tanulótlól: ZH1: 10, 14, 15, 12, 13, 16, 11 ZH2: 12, 15, 14, 13, 14, 17, 12 Feltételezve normális eloszlást, döntsön 90%-on, van-e különbség a két ZH között!

4. változat

1. (2p) Egy logisztikus cég három szállítási tenderen indul: városi (+V), országúti (+O) és nemzetközi (+N). V: a városi tendert elnyerték, O: az országútít elnyerték, N: a nemzetközit elnyerték. Írja fel eseményalgebrai alakban: a) pontosan egy tendert nyernek el; b) legalább egy tendert elnyernek.
2. (2p) Négy „mentőcsapat” mindegyike két főből áll (mentőorvos–mentőápoló páros), és egy keskeny csónakba kell egysorban beszállniuk. A párok tagjai egymás mellett ülnek, és nem kerülhet két orvos vagy két ápoló egymás mellé. Hányféleképpen ülhetnek be?
3. (3p) Egy gyűjtögetős kártyakészlet 52 lapból áll, négy frakcióval (minden frakció 13 lapos). Válasszunk 13 lapot. Hányféleképpen tehetjük ezt úgy, hogy legyen köztük legalább egy „Mechanikus” frakciójú lap?
4. (3p) Egy online játékban egyszerre 6 kockadobás dönt a támadásról. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább két kockán azonos szám jelenik meg?
5. (2p) Egy konferencia regisztráción 9 résztvevőnek kiosztanak badge-csomagokat: 2 VIP-csomag, 4 standard és 3 diák. A csomagokat véletlenszerűen osztják ki. Mennyi a valószínűsége, hogy mindenki a saját típusát kapja?
6. (3p) Két önvezető taxi érkezik egy megrendeléshez. Mindkettő érkezési ideje független és egyenletes eloszlású 7:30 és 8:00 között. Mennyi a valószínűsége, hogy a korábban érkező legfeljebb 5 percet vár a másikra?
7. (3p) Három streaming-platfromon az aktív előfizetők száma 180, 220 és 250; közülük 60%, 55% és 70% hosszabbít a következő hónapra. a) Véletlenszerűen választott előfizető mekkora valószínűséggel hosszabbít? b) Ha valaki hosszabbított, mekkora valószínűséggel tartozik az első platformhoz?
8. (1p) Egy érintőkijelző 8 m × 6 m-es „falon” prototípusként működik. Két nagy „vészgomb” 2 m × 1 m-es téglalap. A felhasználó találmra egy pontot érint a képernyőn (egyenletes eloszlás). Mennyi a valószínűsége, hogy valamelyik vészgombot találja el?

9. (3p) Egy minőségellenőrzési szimulációban 12 hibás és 18 hibátlan szenzor-modul található. Visszatevéssel 15-öt választunk. a) Mi a kihúzott hibás modulok számának eloszlása? b) Mennyi a várható érték? c) Mennyi a valószínűsége, hogy a hibások száma kisebb, mint a várható érték?
10. (3p) Egy helpdesk-rendszerben óránként átlagosan 4 hibajegy érkezik (Poisson). Mennyi a valószínűsége, hogy a) egy órában nem érkezik jegy; b) fél óra alatt pontosan 3 érkezik; c) 20 perc alatt legalább egy érkezik?
11. (3p) Egy drónmotor élettartama exponenciális eloszlást követ. Annak valószínűsége, hogy legalább 5 évig működik, 0,88. Mennyi a valószínűsége, hogy 6 éven belül tönkremegy?
12. (2p) Egy futóverseny részdőínek pontszámai (skálázott pontok) normális eloszlást követnek, szórásuk 8 pont. A futók 3%-a ér el 95 pontnál magasabbat. Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerű futó 70 pont alatt teljesít?
13. (4p) Egy 1 kg-os kávébab-szortírozó csomagológép szórása 6 g. 10 minta tömeg (g): 998, 1001, 1005, 994, 1003, 999, 997, 1000, 1002, 996. Hipotézisvizsgálattal, 95%-os szinten döntse el, hogy az átlagos tömeg tényleg 1000 g, vagy kisebb!
14. (4p) Egy új alvásmonitor applikációt teszteltek 8 személynél; az „elalvási idő” (perc) a légzésvezetés funkció bekapcsolása előtt/után: Előtte: 28, 35, 31, 30, 33, 29, 32, 34 Utána: 24, 31, 28, 27, 30, 27, 29, 31 Feltételezve, hogy a különbségek normálisak, 90%-os szinten vizsgálja meg, csökkenti-e a funkció az elalvási időt!

5. változat

1. (2p) Három fejlesztési mérföldkő: backend (B), frontend (F), adatbázis (A). B: kész a backend, F: kész a frontend, A: kész az adatbázis. Adja meg eseményalgebrai alakban: a) pontosan egy komponens készült el; b) legalább egy komponens elkészült.
2. (2p) Hat kétfős robot-legénység száll be egysorban egy úrkabinba. Minden páros tagjai egymás mellett ülnek, és nem ülhet egymás mellé két „R” típusú vagy két „S” típusú robot. Hány lehetséges ülésrend van?
3. (3p) Egy 36 kártyából álló fantasy pakliból 8-at választunk; a pakli négy „elemre” oszlik azonos méretben. Hányféleképpen választhatunk úgy, hogy legyen köztük legalább egy „Föld” elemű lap?
4. (3p) Egy dobókocka-minijátékban 9 kockát gurítanak egyszerre. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább két kocka ugyanazt az értéket mutatja?
5. (2p) Egy laborban 11 kísérleti alannak készítendő háromféle mérőkészlet: 4 EEG, 5 EKG és 2 SPO2 kit. A csomagokat véletlenszerűen osztják ki. Mennyi a valószínűsége, hogy mindenki a számára előkészített típust kapja?
6. (3p) Két városi buszjárat indulási ideje független és egyenletes 16:00–16:45 között. Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb 12 percet kell várni az egyik megérkezése után a másikkra?

7. (3p) Egy mobilapp három régióban 100, 200 és 300 aktív felhasználóval fut; közülük 50%, 65% és 55% marad aktív a következő hónapban. a) Véletlen felhasználó mekkora valószínűséggel marad aktív? b) Ha aktív marad, mekkora eséllyel a legkisebb régióból való?
8. (1p) Egy óriás reklámfelület $12\text{ m} \times 8\text{ m}$, rajta két $2\text{ m} \times 1,5\text{ m}$ -es kattintható zóna. A kurzor egyenletesen „landol” a felületen. Mennyi a valószínűsége, hogy kattintható zónát ér?
9. (3p) Egy raktárban 20 hibás és 30 hibátlan router található. Visszatevéssel 20-at választunk. a) Mi a hibás routerek számának eloszlása? b) Mennyi a várható értéke? c) Mennyi a valószínűsége, hogy kevesebb hibás kerül a mintába, mint a várható érték?
10. (3p) Egy forgalomfigyelő rendszer óránként átlagosan 10 riasztást generál (Poisson). Mennyi a valószínűsége, hogy a) egy órában egy sem; b) fél óra alatt pontosan 6; c) 5 perc alatt legalább 1 riasztás történik?
11. (3p) Egy ipari szivattyú élettartama exponenciális. Annak valószínűsége, hogy legalább 7 évig működik, 0,9. Mennyi a valószínűsége, hogy 8 éven belül meghibásodik?
12. (2p) Szállítási teljesítmény pontszámai normális eloszlásúak, szórásuk 5 pont. A járművek 2,5%-a ér el 85 pontnál többet. Mennyi a valószínűsége, hogy véletlenszerűen választott jármű 65 pont alatt teljesít?
13. (4p) Egy 200 g-os fűszerkeverék-csomagoló gép szórása 3 g. 11 minta (g): 196, 202, 201, 198, 197, 203, 199, 200, 201, 195, 198. Hipotézisvizsgálattal, 95%-on döntsön, hogy az átlagos tömeg 200 g, vagy kevesebb!
14. (4p) Két különböző vérnyomásmérő mandzsetta „A” és „B” összehasonlítása 10 személy-nél (Hgmm): A: 120, 118, 122, 125, 121, 119, 124, 123, 117, 120 B: 121, 119, 124, 126, 120, 118, 123, 122, 118, 121 Feltételezve normális különbségeket, 90%-on vizsgálja meg, eltérnek-e a mérések!

6. változat

1. (2p) Egy startup három funkció bevezetésén dolgozik: chat (C), ajánló (A), analitika (N). C: a chat elkészült; A: az ajánló elkészült; N: az analitika elkészült. Adja meg eseményalgebrai alakban: a) pontosan egy funkció készül el; b) legalább egy funkció elkészül.
2. (2p) Öt expedíciós páros (vezető–navigátor) egy keskeny függőhídon, egysorban kel át. Párban maradnak, és nem kerülhet egymás mellé két vezető vagy két navigátor. Hány lehetséges sorrend?
3. (3p) Egy 32 tokenből álló kollekciónak (négy szín, egyenlő megoszlás) 9-et választunk. Hányféleképpen lehet úgy, hogy legalább egy piros legyen köztük?
4. (3p) Egy szimulációban 7 dobókockát gurítanak egyszerre. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább két kocka azonos értéket mutat?
5. (2p) Egy 10 fős hackathon-csapatnak kiosztanak 5 laptopot, 3 táblagépet és 2 fejhallgatót (előre eldöntött igények szerint). A csomagokat véletlenül osztják ki. Mennyi a valószínűsége, hogy mindenki a számára kijelölt típust kapja?

6. (3p) Két kerékpáros érkezése független, egyenletes 9:00–9:30 között a találkozópontra. Mennyi a valószínűsége, hogy a korábban érkező legfeljebb 6 percet vár a másokra?
7. (3p) Egy könyvklub három fiókjában 150, 200 és 300 aktív tag van; 55%, 70%, 65% hosszabbítja meg tagságát. a) Véletlenül választott tag mekkora valószínűséggel hosszabbít? b) Ha hosszabbított, mekkora eséllyel tartozik az első fiókhoz?
8. (1p) Egy digitális rajztábla $15\text{ m} \times 5\text{ m}$ munkaterületű. Két $2\text{ m} \times 2\text{ m}$ -es „eszközpanel” található rajta. Egy érintés pozíciója egyenletes. Mennyi a valószínűsége, hogy eszköz-panelre esik?
9. (3p) Egy boltban 15 hibás és 25 hibátlan okoskarkötő van. Visszatevéssel 15-öt választunk. a) Mi a hibás darabok számának eloszlása? b) Mennyi a várható érték? c) Mennyi a valószínűsége, hogy a hibás darabok száma a várható érték alatt marad?
10. (3p) Egy pályaudvari szenzor óránként átlagosan 7 eseményt regisztrál (Poisson). Mennyi a valószínűsége, hogy a) egy órában egy sem, b) fél órában pontosan 5, c) 10 percben legalább 1 esemény történik?
11. (3p) Egy kültéri LED-panel élettartama exponenciális. Annak valószínűsége, hogy legalább 4 évig működik, 0,87. Mennyi a valószínűsége, hogy 5 éven belül meghibásodik?
12. (2p) Egy kémiai tisztasági pontszám normális eloszlású, szórása 6 pont. A minták 1,8%-a 75 pont fölött van. Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlen minta 55 pont alatt lesz?
13. (4p) Egy 100 g-os csokoládé-szeletelő gép szórása 4 g. 10 minta (g): 98, 101, 97, 102, 99, 103, 95, 100, 99, 98. Döntse el 95%-on, hogy az átlagos tömeg valóban 100 g-e, vagy kisebb!
14. (4p) Két edzésprotokoll futóidőre gyakorolt hatása 9 sportolónál (perc): A: 15, 14, 16, 15, 13, 14, 15, 16, 14 B: 14, 13, 15, 14, 12, 13, 14, 15, 13 Feltételezve normális különbségeket, 90%-on vizsgálja meg, eltér-e a hatás!

7. változat

1. (2p) Egy kutató három különböző pályázaton indul: hazai (H), EU-s (E), és magánalapítványi (M). Adja meg eseményalgebrai alakban: a) pontosan egy pályázatot nyer el, b) legalább egy pályázatot elnyer.
2. (2p) Öt sakkozó páros (mester–tanítvány) ül egysorban. A párok együtt maradnak, de sem két mester, sem két tanítvány nem ülhet egymás mellett. Hányféleképpen rendezhetők?
3. (3p) Egy gyűjteményben 40 kártya van, 10–10 darab négy különböző állatfajtából. Választunk 10 lapot. Hányféleképpen lehet ez úgy, hogy legyen köztük legalább egy „oroszlán” kártya?
4. (3p) Egy szerepjátékban egyszerre 8 dobókockával támadnak. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább két kocka ugyanazt a számot mutatja?
5. (2p) Egy könyvtárban 10 olvasónak előre ki vannak készítve könyvcsomagok: 3 regény-csomag, 4 verseskötet-csomag, 3 szakkönyv-csomag. A könyvtáros véletlenül kiosztja őket. Mennyi a valószínűsége, hogy mindenki a saját csomagját kapja?

6. (3p) Két hajó érkezése független, egyenletes eloszlású reggel 6:00–6:45 között a kikötőbe. Mennyi a valószínűsége, hogy a korábban érkező legfeljebb 10 percet vár?
7. (3p) Három könyvesboltban a törzsvásárlók száma 200, 180 és 220. Újra regisztrál 55%, 60% és 50%. a) Véletlenül választott törzsvásárló mekkora valószínűséggel regisztrál újra? b) Ha regisztrált, mekkora eséllyel az első boltból való?
8. (1p) Egy reptéri kijelző $20\text{ m} \times 10\text{ m}$, rajta két $3\text{ m} \times 2\text{ m}$ -es reklámszöveg. Egy érintés egyenletes. Mennyi a valószínűsége, hogy reklámszövegét talál?
9. (3p) Egy raktárban 25 hibás és 25 hibátlan headset van. Visszatevéssel 12-t választunk. a) Mi a hibás darabok számának eloszlása? b) Mennyi a várható érték? c) Mennyi a valószínűsége, hogy kevesebb hibás kerül bele, mint a várható érték?
10. (3p) Egy internetes fórumon óránként átlagosan 5 új téma indul (Poisson). Mennyi a valószínűsége, hogy a) egy órában nem indul új téma, b) fél óra alatt pontosan 4 indul, c) 10 percen belül legalább 1 indul?
11. (3p) Egy lítium-elem élettartama exponenciális. Annak valószínűsége, hogy legalább 3 évig tart, 0,92. Mennyi a valószínűsége, hogy 4 éven belül lemerül?
12. (2p) Egy énekverseny pontszámai normális eloszlásúak, szórásuk 7 pont. A versenyzők 2%-a ér el 95 pont felett. Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlen énekes 70 pont alatt teljesít?
13. (4p) Egy 500 g-os sajt-csomagoló gép szórása 5 g. 10 csomag (g): 492, 498, 505, 501, 497, 495, 503, 499, 494, 502. Hipotézisvizsgálattal, 95%-on döntsön, hogy az átlag tényleg 500 g, vagy kevesebb!
14. (4p) Egy városi kerékpárszerviz két fajta pumpát tesztl 9 gumira. A pumpálási idő (másodperc): Pumpa A: 45, 48, 50, 47, 49, 46, 51, 48, 47 Pumpa B: 44, 46, 49, 46, 48, 45, 50, 47, 46 Feltételezve normális eloszlást, 90%-on vizsgálja meg, különbözik-e a két pumpa teljesítménye!

8. változat

1. (2p) Egy informatikus három modult fejleszt: felhasználói felület (F), adatbiztonság (B), hálózat (H). Írja fel eseményalgebrai alakban: a) pontosan egy modul készül el, b) legalább egy modul elkészül.
2. (2p) Négy kutatópáros (professzor–PhD) előadást tart, és egymás mellett ülnek. Nem kerülhet egymás mellé két professzor vagy két PhD. Hányféle elrendezés lehetséges?
3. (3p) Egy 52 kártyából álló pakliban 13–13 zene műfajkártya van. Válasszunk 13-at. Hányféleképpen lehet úgy, hogy legyen köztük legalább egy „jazz”?
4. (3p) Egy kaszinójátékban 6 kockát dobnak. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább kettő ugyanazt az értéket mutatja?
5. (2p) Egy 8 fős kiállításra 3 festménycsomag, 2 szoborcsomag, 3 fotócsomag készül. A szervező véletlenszerűen osztja ki. Mennyi a valószínűsége, hogy mindenki a sajátját kapja?

6. (3p) Két vonat érkezése független és egyenletes 14:00–14:30 között. Mennyi a valószínűsége, hogy az előbb érkező legfeljebb 7 percet vár?
7. (3p) Három webshopban a vevők száma 120, 250 és 200; közülük 70%, 60% és 55% újra rendel. a) Véletlenül választott vásárló mekkora valószínűséggel rendel újra? b) Ha újrarendel, mekkora eséllyel az elsőből?
8. (1p) Egy LED-fal $15\text{ m} \times 8\text{ m}$, rajta két $2\text{ m} \times 2\text{ m}$ panel. Egy pont kiválasztása egyenletes. Mennyi a valószínűsége, hogy panelre esik?
9. (3p) Egy raktárban 18 hibás és 22 hibátlan okostelefon van. Visszatevéssel 15-öt választunk. a) Mi a hibás darabok számának eloszlása? b) Mennyi a várható érték? c) Mennyi a valószínűsége, hogy kevesebb hibás lesz, mint a várható érték?
10. (3p) Egy ügyfélszolgálati központ óránként átlagosan 8 kérdést kap (Poisson). Mennyi a valószínűsége, hogy a) egy órában nulla, b) fél óra alatt 5, c) 15 perc alatt legalább 1 kérdés érkezik?
11. (3p) Egy napelem-panel élettartama exponenciális. Annak valószínűsége, hogy legalább 10 évig működik, 0,85. Mennyi a valószínűsége, hogy 12 éven belül meghibásodik?
12. (2p) Egy történelemteszt pontszámai normális eloszlásúak, szórásuk 6 pont. A diákok 2,3%-a ér el 90 pont fölött. Mennyi a valószínűsége, hogy egy diák 65 alatt teljesít?
13. (4p) Egy 1 kg-os lisztcsomagológép szórása 7 g. 9 minta: 1002, 998, 1005, 995, 1003, 996, 1001, 999, 1004. Hipotézisvizsgálattal, 95%-on döntsön, hogy az átlag 1000 g-e, vagy kisebb!
14. (4p) Két mobilapp értesítési sebességét hasonlították össze 7 telefonon (ms): App A: 200, 210, 190, 205, 215, 198, 207 App B: 195, 205, 188, 200, 210, 195, 203 90%-os szinten vizsgálja, van-e különbség az értesítési sebességben!

9. változat

1. (2p) Egy élelmiszerbolt három új terméket vezet be: pékáru (P), tejtermék (T), zöldség (Z). Adja meg eseményalgebrai alakban: a) pontosan egy termék sikeres, b) legalább egy sikeres.
2. (2p) Öt úrhajós páros (pilóta–mérnök) sorban ül. A párok együtt maradnak, de sem két pilóta, sem két mérnök nem ülhet egymás mellett. Hányféleképpen?
3. (3p) Egy 32 kártyából álló oktatókártya-pakliból 7-et választunk. Hányféleképpen, ha legalább egy „matek” kártya benne legyen?
4. (3p) Egy szimulációban 5 kockát dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább kettő ugyanazt mutatja?
5. (2p) Egy színház 12 jegyet ad el: 5 első sor, 4 második sor, 3 erkély. A jegyek kiosztása véletlen. Mennyi a valószínűsége, hogy mindenki a helyére kerül?
6. (3p) Két barlangi bűvár indulása független, egyenletes 10:00–10:30 között. Mennyi a valószínűsége, hogy az előbb induló legfeljebb 8 percet vár?

7. (3p) Három szoftvercég ügyfeleinek száma 150, 200, 250. Új szerződés 65%, 55%, 60%.
a) Véletlen ügyfél mekkora eséllyel hosszabbít? b) Ha hosszabbít, mekkora eséllyel az első cégnél?
8. (1p) Egy játszótéri fal $10\text{ m} \times 5\text{ m}$, rajta két $2\text{ m} \times 1,5\text{ m}$ mászóablak. Mennyi a valószínűsége, hogy a feldobott labda az ablakot találja?
9. (3p) Egy raktárban 30 hibás és 20 hibátlan fülhallgató van. Visszatevéssel 12-t választunk.
a) Mi az eloszlás? b) Mennyi a várható érték? c) Mennyi a valószínűsége, hogy kevesebb hibás kerül bele, mint a várható?
10. (3p) Egy hívásközpont óránként átlagosan 6 hívást fogad (Poisson). Mennyi a valószínűsége, hogy a) egy órában nulla, b) fél órában pontosan 4, c) 20 perc alatt legalább 1?
11. (3p) Egy mosógép élettartama exponenciális. Annak valószínűsége, hogy legalább 8 évig bírja, 0,9. Mennyi a valószínűsége, hogy 9 éven belül elromlik?
12. (2p) Egy biológia teszt normális eloszlású, szórás 4 pont. A diákok 2,5%-a ér el 50 felett. Mennyi a valószínűsége, hogy egy diák 35 alatt teljesít?
13. (4p) Egy 1 kg-os rizscsomagoló szórása 7 g. 9 minta: 1002, 998, 1005, 995, 1003, 996, 1001, 999, 1004. Döntsön 95%-on, hogy 1000 g-e, vagy kevesebb!
14. (4p) Két sportcipő márka ütéscsillapítását tesztelték 7 futónál (érték): Márka A: 20, 22, 21, 23, 24, 22, 21 Márka B: 21, 23, 22, 24, 25, 23, 22 90%-on vizsgálja meg, van-e különbség a két cipő között!

10. változat

1. (2p) Egy civil szervezet három programra pályázik: környezetvédelmi (K), oktatási (O), egészségügyi (E). K: nyer a környezetvédelmi pályázaton, O: nyer az oktatásin, E: nyer az egészségügyin. Írja fel eseményalgebrai alakban: a) pontosan egy nyertes pályázat; b) legalább egy nyertes pályázat.
2. (2p) Négy zsonglőrpár (balkezes–jobbkezes) lép színpadra egysorban. A párok együtt maradnak, és nem kerülhet egymás mellé két balkezes vagy két jobbkezes. Hányféle ülésrend lehetséges?
3. (3p) Egy 52 lapos tematikus pakliból (4 témakör $\times$ 13 lap) 13 lapot választunk. Hányféleképpen, ha legalább egy „Tudomány” lap szerepeljen?
4. (3p) Egy társasjátékban 6 kockával dobnak egyszerre. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább két kocka azonos értéket mutat?
5. (2p) Egy kiállításra 9 önkéntesnek kiosztanak belépőkategóriákat: 3 „kurátori”, 3 „alkotói”, 3 „látogatói”. Véletlenszerű kiosztás mellett mennyi a valószínűsége, hogy mindenki a számára kijelölt kategóriát kapja?
6. (3p) Két futár érkezése független és egyenletes 17:00–17:30 között. Mennyi a valószínűsége, hogy a hamarabb érkező legfeljebb 9 percet vár a másikra?

7. (3p) Három online újság előfizetőinek száma 100, 150 és 280; megújítási arányuk 72%, 58%, 54%. a) Véletlenszerűen választott előfizető mekkora valószínűséggel hosszabbít? b) Ha valaki hosszabbított, mekkora eséllyel tartozik az első újsághoz?
8. (1p) Egy interaktív múzeumfal $10\text{ m} \times 5\text{ m}$; két $2,5\text{ m} \times 1\text{ m}$ -es interaktív csík fut rajta. Egy érintés helye egyenletes. Mennyi a valószínűsége, hogy valamelyik csíkot éri az érintés?
9. (3p) Egy készletben 14 hibás és 21 hibátlan mikrofonbetét van. Visszatevéssel 12-t választunk. a) Mi a hibás betétek számának eloszlása? b) Mennyi a várható értéke? c) Mennyi a valószínűsége, hogy a hibások száma a várható érték alatt marad?
10. (3p) Egy városi információs vonal óránként átlagosan 5 hívást kap (Poisson). Mennyi a valószínűsége, hogy a) egy órában egy sem, b) fél órában pontosan 4, c) 15 perc alatt legalább 1 hívás érkezik?
11. (3p) Egy levegőminőség-szenzor élettartama exponenciális. $P(\text{legalább } 3 \text{ évig működik})=0,9$. Mennyi annak valószínűsége, hogy 4 éven belül meghibásodik?
12. (2p) Egy informatika vizsga pontszámai normális eloszlásúak, szórásuk 7,5 pont. A hallgatók 2,28%-a ér el 90 pontnál többet. Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlen hallgató 70 pont alatt teljesít?
13. (4p) Egy 250 g-os müzliszelet-csomagoló gép szórása 5 g. 12 minta (g): 245, 249, 247, 252, 254, 243, 250, 248, 246, 251, 249, 247. Döntsen 95%-on: az átlagos tömeg valóban 250 g, vagy kisebb?
14. (4p) Két különböző hőmérő (A,B) pontosságát hasonlították össze 8 mérési ponton ($^{\circ}\text{C}$): A: 21,0, 19,8, 20,5, 22,1, 21,4, 20,2, 21,0, 20,7 B: 21,4, 20,1, 20,9, 22,5, 21,7, 20,5, 21,2, 20,9 Feltételezve normális különbségeket, 90%-on vizsgálja meg, eltér-e a két eszköz átlagos mérése!

11. változat

1. (2p) Egy gyártó három minősítést céloz: ISO (I), környezet (K), munkavédelem (M). Írja fel: a) pontosan egy minősítést szereznek meg; b) legalább egy minősítést megszereznek.
2. (2p) Öt fotós-pár (fotós-asszisztens) egysorban ül. A párok együtt maradnak, és nem ülhet egymás mellé két fotós vagy két asszisztens. Hányféle sorrend?
3. (3p) Egy 40 lapos madártematikájú pakliból (4 faj $\times$ 10 lap) 10 lapot választunk. Hányféleképpen, ha legalább egy „sas” legyen köztük?
4. (3p) Egyszerre 7 kockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább két kocka azonos értéket mutat?
5. (2p) Egy labor 8 kutatónak kioszt protokollcsomagokat: 2 PCR, 2 Western, 4 ELISA. Véletlenszerű kiosztásnál mennyi a valószínűsége, hogy mindenki a sajátját kapja?
6. (3p) Két villamos menetrendje független és egyenletes 8:00–8:45 között. Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb 12 percet kell várni az egyik után a másikra?

7. (3p) Három pénzügyi tanácsadó irodában 120, 180, 200 ügyfél van; a megtartási arány 65%, 55%, 60%. a) Véletlen ügyfél mekkora valószínűséggel marad? b) Ha marad, mekkora eséllyel az első irodából való?
8. (1p) Egy sportcsarnok LED-táblája $15\text{ m} \times 9\text{ m}$; két $3\text{ m} \times 1,5\text{ m}$ -es eredménykijelző van rajta. Egy labda találati pontja egyenletes. Mennyi a valószínűsége, hogy kijelzőt talál?
9. (3p) Egy készletben 16 hibás és 24 hibátlan processzor van. Visszatevéssel 20 mintát választunk. a) Mi az eloszlás? b) Mennyi a várható érték? c) Mennyi a valószínűsége, hogy a hibások száma kisebb a vártnál?
10. (3p) Egy helpdesk óránként átlag 12 ticketet kap (Poisson). Mennyi a valószínűsége, hogy a) egy órában 0, b) fél órában 7, c) 10 percben legalább 1 ticket érkezik?
11. (3p) Egy szivattyúcsapágy élettartása exponenciális. $P(\geq 2\text{ év})=0,8$. Mekkora a valószínűsége, hogy 3 éven belül tönkremegy?
12. (2p) Egy kémia vizsga pontszámai normális eloszlásúak, szórás 6. A hallgatók 1,5%-a ér el 85 pont fölött. Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlen hallgató 60 alatt teljesít?
13. (4p) Egy 500 g-os vajcsomagoló gép szórása 6 g. 10 minta: 492, 498, 505, 501, 497, 495, 503, 499, 494, 502. Döntsön 95%-on: az átlag 500 g-e, vagy kevesebb?
14. (4p) Két vércukormérő (A,B) összevetése 9 személynél (mmol/L): A: 5,6, 6,1, 5,9, 6,4, 5,8, 6,0, 6,2, 5,7, 6,1 B: 5,8, 6,3, 6,0, 6,6, 5,9, 6,2, 6,3, 5,8, 6,2 90%-on vizsgálja: eltér-e az átlagos mérés?

12. változat

1. (2p) Egy könyvkiadó három műfajban ad ki új sorozatot: krimi (K), sci-fi (S), ismeretterjesztő (I). Írja fel: a) pontosan egy műfaj sikeres, b) legalább egy műfaj sikeres.
2. (2p) Hat túravezető–segéd páros sorban áll a rajtnál. A párok együtt maradnak, és nem állhat egymás mellé két túravezető vagy két segéd. Hányféle sorrend?
3. (3p) Egy 36 lapos történelmi kártyapakliból 9-et választunk. Hányféleképpen, ha legalább egy „Róma” lap legyen köztük?
4. (3p) Egyszerre 8 kockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább két kocka azonos értéket mutat?
5. (2p) Egy 10 fős kutatócsoportnak kiosztanak prototípusokat: 4 szenzor, 3 aktuátor, 3 vezérlő. Véletlen kiosztás esetén mennyi a valószínűsége a teljes „találatnak”?
6. (3p) Két futó érkezése független és egyenletes 6:00–6:30 között. Mennyi a valószínűsége, hogy az előbb érkező legfeljebb 6 percet vár?
7. (3p) Három könyvtári fiók aktív tagjai: 150, 200, 300; megújítási arány: 55%, 70%, 65%. a) Véletlen tag mekkora valószínűséggel hosszabbít? b) Ha hosszabbít, mekkora eséllyel az első fiókból való?
8. (1p) Egy digitális térkép $20\text{ m} \times 10\text{ m}$, két $3\text{ m} \times 2\text{ m}$ -es „nagyítás” gombbal. Egy kattintás helye egyenletes. Mennyi a valószínűsége, hogy valamelyik gombot találja?

9. (3p) Egy dobozban 22 hibás és 18 hibátlan mikrochip van. Visszatevéssel 15-öt választunk. a) Mi az eloszlás? b) Mennyi a várható érték? c) Mennyi a valószínűsége, hogy a hibások száma kisebb, mint a várható?
10. (3p) Egy ügyfélszolgálat óránként átlag 9 jegyet kap (Poisson). Mennyi a valószínűsége, hogy a) egy órában 0, b) fél órában 5, c) 10 percen legalább 1 jegy érkezik?
11. (3p) Egy router élettartása exponenciális. $P(\geq 20\,000 \text{ üzemóra})=0,85$. Mekkora a valószínűsége, hogy 25 000 órán belül meghibásodik?
12. (2p) Egy felvételi pontszám normális eloszlású, szórás 5. A jelentkezők 2%-a ér el 95 pont fölött. Mennyi a valószínűsége, hogy valaki 70 alatt teljesít?
13. (4p) Egy 1 kg-os cukorcsomagoló szórása 6 g. 10 minta: 998, 1001, 1005, 994, 1003, 999, 997, 1000, 1002, 996. 95%-on döntsön: az átlag 1000 g-e, vagy kisebb?
14. (4p) Két algoritmus futási idejét mérték 10 azonos inputon (ms): Alg. A: 102, 98, 105, 101, 99, 100, 103, 97, 104, 100 Alg. B: 100, 96, 102, 99, 98, 98, 101, 95, 102, 98 Feltételezve normális különbségeket, 90%-on vizsgálja, gyorsabb-e a B!

13. változat

1. (2p) Egy sportegyesület három támogatási forrásra pályázik: városi (V), országos (O), nemzetközi (N). Adja meg: a) pontosan egy forrást nyernek el; b) legalább egy forrást elnyernek.
2. (2p) Négy tudós–technikus páros ül egysorban. A párok együtt ülnek, és nem ülhet egymás mellé két tudós vagy két technikus. Hányféle elrendezés?
3. (3p) Egy 32 lapos növénykártya-pakliból 8 lapot választunk. Hányféleképpen, ha legalább egy „tölgy” legyen köztük?
4. (3p) Egyszerre 9 kockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább két kocka azonos értéket mutat?
5. (2p) Egy 11 fős brigádnak kiosztanak munkacsomagokat: 5 villanyszerelés, 4 festés, 2 burkolás. Véletlenszerű kiosztásnál mennyi a valószínűsége a teljes egyezésnek?
6. (3p) Két helyközi busz érkezése független és egyenletes 12:00–12:40 között. Mennyi a valószínűsége, hogy a korábban érkező legfeljebb 8 percet vár?
7. (3p) Három biztosító ügyfélszáma 100, 150, 250; megújítási arány 70%, 60%, 55%. a) Véletlen ügyfél mekkora valószínűséggel hosszabbít? b) Ha hosszabbított, mekkora eséllyel az első biztosítónál van?
8. (1p) Egy vetítővászon 12 m × 6 m, két 2 m × 1,5 m-es feliratablakkal. Egy dobott jelölő-pont egyenletes. Mennyi a valószínűsége, hogy feliratablakba esik?
9. (3p) Egy raktárban 19 hibás és 31 hibátlan okoskarkötő van. Visszatevéssel 20-at választunk. a) Mi az eloszlás? b) Mennyi a várható érték? c) Mennyi a valószínűsége, hogy kevesebb hibás kerül be, mint a várható?

10. (3p) Egy forgalomszámláló szenzor óránként átlag 7 eseményt regisztrál (Poisson). Mennyi a valószínűsége, hogy a) egy órában 0, b) fél órában 5, c) 10 percen legalább 1 esemény történik?
11. (3p) Egy laborpipa élettartása exponenciális. $P(\geq 4000 \text{ ciklus}) = 0,92$. Mekkora a valószínűsége, hogy 5000 cikluson belül meghibásodik?
12. (2p) Egy versenyfeladat pontszámai normális eloszlásúak, szórás 4. A versenyzők 2,5%-a 50 pont fölött van. Mennyi a valószínűsége, hogy valaki 35 alatt teljesít?
13. (4p) Egy 200 g-os teafilter-csomagoló gép szórása 4 g. 11 minta: 196, 202, 201, 203, 198, 204, 197, 203, 190, 191, 197. 95%-on döntsön, hogy az átlag 200 g-e, vagy kevesebb!
14. (4p) Két pulzusmérő pánt (A,B) összevetése 10 futónál, átlagolt pulzus (bpm): A: 152, 148, 155, 150, 151, 149, 153, 147, 154, 150 B: 150, 147, 153, 149, 150, 148, 151, 146, 152, 149 90%-on vizsgálja: csökkenti-e a B az átlagos mért pulzust?

14. változat

1. (2p) Egy startup három piacra lép: hazai (H), regionális (R), tengerentúli (T). Írja fel eseményalgebrával: a) pontosan egy piacra sikerül belépni; b) legalább egy piacra sikerül belépni.
2. (2p) Öt régész–rajzoló páros egysorban jegyzetel. A párok együtt maradnak, de sem két régész, sem két rajzoló nem ülhet egymás mellett. Hány ülésrend?
3. (3p) Egy 52 lapos művészeti pakliból 13 lapot választunk. Hányféleképpen, ha legyen köztük legalább egy „szobrászat” lap?
4. (3p) Egy feladványban 6 kockát dobunk egyszerre. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább két kocka azonos értéket mutat?
5. (2p) Egy 12 fős workshopon 5 „adatvizualizáció”, 4 „ML”, 3 „ETL” munkacsomag vár kiosztásra. Véletlenszerű kiosztás mellett mennyi az esélye a teljes egyezésnek?
6. (3p) Két komp érkezése független és egyenletes 10:30–11:00 között. Mennyi a valószínűsége, hogy a korábban érkező legfeljebb 7 percet vár?
7. (3p) Három streaming-szolgáltatónál 120, 180, 260 előfizető van; megújítás 68%, 57%, 53%. a) Véletlen előfizető mekkora valószínűséggel újít? b) Ha újított, mekkora eséllyel első szolgáltatótól?
8. (1p) Egy interaktív tanulótábla $18 \text{ m} \times 9 \text{ m}$, két $3 \text{ m} \times 2 \text{ m}$ -es „tipp” zónával. Egy érintés egyenletes. Mekkora a valószínűsége, hogy tipp zónát talál?
9. (3p) Egy készletben 24 hibás és 26 hibátlan mikrodrón van. Visszatevéssel 15-öt választunk. a) Mi az eloszlás? b) Mennyi a várható érték? c) Mennyi a valószínűsége, hogy a hibások száma a várható alatt marad?
10. (3p) Egy városi infrastruktúra-monitor óránként átlag 6 riasztást ad (Poisson). Mennyi a valószínűsége, hogy a) egy órában 0, b) fél órában 4, c) 20 percen legalább 1 riasztás érkezik?

11. (3p) Egy ipari ventilátor élettartása exponenciális. $P(\geq 50\,000 \text{ üzemóra})=0,87$. Mekkora a valószínűsége, hogy 60 000 órán belül meghibásodik?
12. (2p) Egy nyelvvizsga pontszámai normálisak, szórás 6. A vizsgázók 1,8%-a ér el 80 felett. Mennyi a valószínűsége, hogy valaki 55 alatt teljesít?
13. (4p) Egy 100 g-os fűszersó-csomagoló gép szórása 4 g. 10 minta: 98, 101, 97, 102, 99, 103, 95, 100, 99, 98. 95%-on döntse el, hogy az átlag 100 g-e, vagy kevesebb!
14. (4p) Két navigációs app útvonaltervezési ideje 8 azonos útvonalon (perc): App A: 12,0, 11,5, 12,3, 11,8, 12,1, 11,7, 12,2, 11,9 App B: 11,7, 11,2, 11,9, 11,6, 11,8, 11,4, 12,0, 11,7 90%-on vizsgálja, gyorsabb-e a B átlagosan!

15. változat

1. (2p) Egy filmfesztivál három kategóriában nevez: dokumentum (D), rövidfilm (R), nagyjátékfilm (N). Írja fel: a) pontosan egy kategóriában jut tovább; b) legalább egy kategóriában továbbjut.
2. (2p) Öt DJ–technikus páros egysorban áll fellépésre. A párok együtt maradnak, és nem állhat egymás mellé két DJ vagy két technikus. Hány sorrend?
3. (3p) Egy 52 lapos „városok” pakliból 13-at választunk. Hányféleképpen, ha legalább egy „Tokió” lap legyen köztük?
4. (3p) Egy rejtvényben 8 kockát dobunk egyszerre. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább két kocka azonos értéket mutat?
5. (2p) Egy 10 fős alkotótábor résztvevőinek kiosztanak készletcsomagokat: 3 grafit, 4 akril, 3 akvarell. Véletlen kiosztás mellett mennyi a valószínűsége a teljes egyezésnek?
6. (3p) Két túracapat érkezése független és egyenletes 7:00–7:30 között a hágóhoz. Mennyi a valószínűsége, hogy a hamarabb érkező legfeljebb 10 percet vár?
7. (3p) Három online tanfolyamplatform aktív hallgatói: 100, 180, 250; megújítás 62%, 59%, 56%. a) Véletlenül választott hallgató mekkora valószínűséggel hosszabbít? b) Ha hosszabbít, mekkora eséllyel tartozik az első platformhoz?
8. (1p) Egy okosfal 14 m × 7 m, rajta két 2 m × 1,5 m-es „vezérlő” panel. Egy érintés egyenletes. Mennyi a valószínűsége, hogy panelre esik?
9. (3p) Egy készletben 21 hibás és 29 hibátlan VR-kontroller van. Visszatevéssel 20-at választunk. a) Mi az eloszlás? b) Mennyi a várható értéke? c) Mennyi a valószínűsége, hogy a hibások száma kevesebb, mint a várható?
10. (3p) Egy mentéskezelő rendszer óránként átlag 11 eseményt naplóz (Poisson). Mennyi a valószínűsége, hogy a) egy órában 0, b) fél órában 6, c) 5 percen belül legalább 1 esemény történik?
11. (3p) Egy SSD-meghajtó élettartása exponenciális. $P(\geq 6 \text{ év})=0,9$. Mekkora a valószínűsége, hogy 7 éven belül meghibásodik?

12. (2p) Egy matematika felmérés pontszámai normális eloszlásúak, szórás 5. A diákok 2%-a 95 fölött teljesít. Mennyi a valószínűsége, hogy egy diák 70 alatt teljesít?
13. (4p) Egy 1 kg-os kávécsomagoló gép szórása 7 g. 9 minta: 1002, 998, 1005, 995, 1003, 996, 1001, 999, 1004. 95%-on döntsön: az átlag 1000 g-e, vagy kisebb?
14. (4p) Két vérnyomáscsökkentő program hatását vizsgálták 8 betegnél; szisztolés érték (Hgmm) a program előtt/után: Előtte: 150, 160, 155, 148, 162, 157, 151, 159 Utána: 144, 154, 150, 146, 158, 153, 149, 155 Tegyen párosított próbát 90%-on: csökken-e az átlagos érték?

Hivatkozások

Hivatkozások

1. FAZEKAS ISTVÁN Valószínűségszámítás / – [Debrecen](#). : [Kossuth Egyetemi Kiadó](#), 2005
2. Denkinger Géza Valószínűségszámítás : [egyetemi tankönyv]/ [Budapest](#) : [Nemz. Tankvk.](#), 1997.
3. Fazekas István Valószínűségszámítás és statisztika / [Debrecen](#). : [Egyetemi Kiadó](#), 2007.
4. Kucsinka Katalin Valószínűségszámítás és matematika statisztika / Beregszász , 2024,
5. Tómacs Tibor Matematikai statisztika/ Eger, 2025
6. Tómacs Tibor Matematikai statisztika gyakorlatok/ Eger, 2021
7. Vetier András Valószínűségszámítás 1. rész / A. Veiter // Typotex., 2021.
8. Карташов М. В. Ймовірність, процеси, статистика / Київ Видавничо-поліграфічний центр 'Київський університет, 2008.
9. Соловко Я.Т., Остафійчук П.Г., Гарпуль О.З., Войтик С.А. Теорія ймовірностей та математична статистика (конспект лекцій + тести) : навчальний посібник. Вид. 2-ге, допов. / Я.Т.Соловко, П.Г.Остафійчук, О.З.Гарпуль, С.А.Войтик. – Івано-Франківськ: Репозитарій / ЗВО «Університет Короля Данила», 2021. – 150 с.
10. Слюсарчук П.В. Теорії ймовірностей та математична статистика. /Ужгород – 2004

Виробничо-практичне видання

« ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА »
МЕТОДИЧНІ ПОРАДИ ТА ЗАВДАННЯ
до контрольних робіт
для здобувачів вищої освіти
заочної форми навчання

2025 р.

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II
(протокол № 10 від «23» червня 2025 року)

Розглянуто та рекомендовано Навчально-методичною радою
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол № 7 від «26» серпня 2025 року)

Рекомендовано до видання в електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол № 8 від «28» серпня 2025 року)

Підготовлено до видання в електронній формі (PDF) кафедрою математики та інформатики
спільно з Видавничим відділом Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(35 с., угорською мовою)

Укладач:

Каталін Кучінка – кандидат фіз.-мат. наук, доцент, завідувач кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського інституту ім. Ференца Ракоці II

Рецензенти:

Ганна Сливка-Тилищак – доктор фіз.-мат. наук, завідувач кафедри теорії ймовірностей та математичної статистики УжНУ

Адам Доровці – доктор філософії, старший викладач кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського інституту ім. Ференца Ракоці II

Відповідальні за випуск:

Каталін КУЧІНКА – завідувач кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II, доцент, кандидат фізико-математичних наук

Олександр ДОБОШ – начальник Видавничого відділу ЗУІ ім. Ф.Ракоці II

За зміст методичних вказівок відповідальність несуть розробники.

Видавництво: Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II (адреса: пл. Кошута 6, м. Берегове, 90202. Електронна пошта: foiskola@kmf.uz.ua) *Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції Серія ДК ____ від ____ 2025 року*

Розмір сторінок методичних вказівок: A4 (210x297мм)