

Кафедра математика та інформатика

Valószínűségyszámítás I. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І.

Előadás jegyzet
az első modulhoz

Курс лекцій
І. Модуль

Перший (бакалаврський)
(ступінь вищої освіти)

A Освіта/Педагогіка / A Oktatás/Pedagógia

A4.09 Середня освіта (Інформатика) / A4.09 Középiskolai oktatás
(Informatika)

Інформатика
(освітня програма)

Informatika
(Képzési program)



Берегове – 2025

Курс лекції «Теорія ймовірностей I.» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня, галузь знань: А Освіта/Педагогіка, А4.09 Середня освіта (Інформатика)б освітня програма: «Інформатика» / Укладач: Кучінка К.Й. Берегове: Закарпатський угорський університет ім. Ференца Ракоці II, 2025. 30 с.

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри обліку і аудиту ЗУЕ ім. Ф. Ракоці II
(протокол № 4 від «28» листопад 2025 року червня 2025 року)

Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості освіти
ЗУЕ ім. Ф.Ракоці II
(протокол № 12 від «16» грудня 2025 року)

Рекомендовано до видання в електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради ЗУЕ ім. Ф.Ракоці II
(протокол № 12 від «17» грудня 2025 року)

Укладач:

Каталін Кучінка – кандидат фіз.-мат. наук, доцент, завідувач кафедри математики та інформатики ЗУЕ ім. Ференца Ракоці II

Рецензенти:

Дердь Надь– канд. фіз.-мат. наук, завідувач кафедри природничі науки Токайський університет

Адам Доровці– доктор філософії, доцент кафедри математики та інформатики ЗУЕ ім. Ференца Ракоці II

повідальні за випуск:

Мирослав СТОЙКА – завідувач кафедри математики та інформатики ЗУЕ імені Ференца Ракоці II, доцент, кандидат фізико-математичних наук

Олександр ДОБОШ – начальник Видавничого відділу ЗУЕ ім. Ф.Ракоці II

За зміст методичних вказівок відповідальність несе розробник.

Видавництво: ЗУЕ імені Ференца Ракоці II (адреса: пл. Кошута 6, м. Берегове, 90202.
Електронна пошта: foiskola@kmf.uz.ua)

© Каталін Кучінка, 2025
© Кафедра математики та інформатики ЗУЕ ім. Ф.Ракоці II, 2025

„Valószínűségszámítás I.” jegyzet, a felsőoktatás első (alapképzési) szintjének levelező tagozatos hallgatói számára, tudományterület: 01 Neveléstudomány, 014.09 Középfokú oktatás (Informatika), képzési program: „Informatika” / Összeállította: Kucsinka K. J. – Beregszász: II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Egyetem, 2025. – 30 old.

Az oktatási folyamatban történő felhasználását jóváhagyta a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Egyetem Matematika és Informatika Tanszéke
(2025. . számú jegyzőkönyv).

Megjelentetésre javasolta a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Egyetem
Oktatási és Módszertani Tanácsa
(2025. _____, ____ . számú jegyzőkönyv).

Elektronikus formában (PDF fájlformátumban) történő kiadásra javasolta
a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Egyetem Tudományos Tanácsa
(2025. -----., ---. számú jegyzőkönyv).

Kiadásra előkészítette a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Egyetem
Matematika és Informatika Tanszéke, valamint Kiadói Részlege.

A módszertani útmutató kidolgozója:

KUCSINKA Katalin – PhD, a fizikai és matematikai tudományok kandidátusa, docens, a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Egyetem Matematika és Informatika Tanszékének tanszékvezetője és docense

Szakmai lektorok:

Nagy György – fizika-matematika tudományok kandidátusa, a Természettudományok Tanszék vezetője, Tokaj-Hegyalja Egyetem

Daróci Ádám – PhD, a Matematika és Informatika Tanszék vezető tanára, II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

A kiadásért felelnek:

SZTOJKA Mirosláv – PhD, a fizikai és matematikai tudományok kandidátusa, docens, a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Egyetem Matematika és Informatika Tanszékének tanszékvezetője és docense

DOBOS Sándor – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Egyetem Kiadói Részlegének vezetője

A segédlet tartalmáért kizárólag a módszertani útmutató kidolgozója felel.

Kiadó: II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Egyetem (cím: 90 202, Beregszász, Kossuth tér 6. E-mail: foiskola@kmf.uz.ua)

© Kucsinka Katalin, 2025

© A II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Egyetem Matematika és Informatika Tanszéke, 2025

Tartalomjegyzék

Bevezető	5
1 Véletlen kísérletek és események	8
1.1 Műveletek eseményekkel	8
1.2 Műveleti tulajdonságok és bizonyítások	9
Önellenőrző kérdések	10
2 Kolmogorov-féle valószínűségi mező	11
2.1 Eseményalgebrák (σ -algebrák)	11
2.2 Kolmogorov-féle valószínűségi mező	11
2.3 Valószínűségszámítási alaptételek és bizonyításaik	11
2.4 A valószínűség folytonossága	12
Önellenőrző kérdések	14
3 Klasszikus és geometriai valószínűségi mezők	14
3.1 Klasszikus valószínűségi mező	14
3.2 Geometriai valószínűség	15
Önellenőrző kérdések	16
4 Feltételes valószínűség	16
4.1 A feltételes valószínűség	16
4.2 A szorzási szabály (Szorzástétel)	17
4.3 A teljes valószínűség tétele	18
4.4 Bayes-tétele	19
Önellenőrző kérdések	20
5 Események függetlensége. Borel-Cantelli lemma	20
5.1 Események függetlensége	20
5.2 Borel-Cantelli lemma	21
Önellenőrző kérdések	22
6 Bernoulli-féle kísérlet sorozat	22
6.1 Bernoulli-féle kísérletsorozat és a képlet	22
6.2 Hányszor következik be az A esemény a legnagyobb valószínűséggel?	23
Önellenőrző kérdések	23
7 A Moivre-Laplace lokális határeloszlás tétele	24
Önellenőrző kérdések	25
Fogalomtár	27
Felhasznált irodalom	29

Bevezető

Jelen oktatási segédanyag a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Egyetem (II. RFKME) „A Oktatás” képzési terület, A4.09 Középfokú oktatás (Informatika) szakos hallgatói számára készült. A jegyzet elsődleges célja, hogy átfogó és strukturált útmutatást nyújtson a „Valószínűségszámítás és matematikai statisztika” tantárgy elsajátításához, különös tekintettel az első, „Véletlen események” elnevezésű modulra. A kiadvány hiánypótló jelleggel bír, amennyiben a magyar tan nyelvű felsőoktatásban részt vevő kárpátaljai informatikus hallgatók speciális igényeit és előtanulmányait tartja szem előtt.

A valószínűségszámítás a modern matematika és az informatika egyik legdinamikusabban fejlődő területe. Az itt tárgyalt ismeretek elengedhetetlenek a sztochasztikus folyamatok megértéséhez, amelyek a számítástudomány számos területén – az algoritmuselmélettől az adatbányászaton át a mesterséges intelligenciáig – kulcsszerepet játszanak. A kurzus és a hozzá tartozó jegyzet célja, hogy a leendő szakembereket olyan mélységben ismertesse meg a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika alapjaival, amely elegendő a szakirodalom önálló tanulmányozásához és a valószínűségi feladatok önálló megoldásához.

A jegyzet felépítése szervesen illeszkedik a tantárgyi program (szillabusz) követelményrendszeréhez. A tananyag a valószínűség fogalmának axiomatikus megalapozásától indulva tárgyalja a véletlen eseményeket, az eseményalgebra műveleteit, valamint a kombinatorika releváns elemeit. Kiemelt figyelmet fordítunk a klasszikus és geometriai valószínűségi mezőkre, a feltételes valószínűség, valamint a teljes valószínűség tételének tárgyalására.

A tantárgy teljesítése és a jegyzet feldolgozása során a hallgatók az alábbi, a képzési programban rögzített kompetenciák elsajátítását és fejlesztését valósítják meg:

Általános kompetenciák:

- **ÁK2:** A hallgató elsajátítja a tantárgyi terület és a szakmai tevékenység mélyreható ismeretét és megértését, különös tekintettel a sztochasztikus folyamatok matematikai alapjaira.
- **ÁK 3:** Képessé válik az államnyelven történő szóbeli és írásbeli kommunikációra, valamint az idegen nyelvű szakmai kommunikációra a szakterületen belül, elsajátítva a valószínűségszámítás terminológiáját.
- **ÁK 5:** Kialakul a képesség az autonóm cselekvésre és a megalapozott döntéshozatalra a szakmai tevékenység során. A hallgató felelősséget vállal a feladatok végrehajtásáért, és etikusan, a hatályos jogszabályok figyelembevételével jár el.

Szakmai (speciális) kompetenciák:

- **SzK10:** A hallgató képessé válik a modern informatika tudományos tényeinek, koncepcióinak, elméleteinek és módszereinek alkalmazására az informatika oktatási gyakorlatában.
- **SzK11:** Elsajátítja az információs modellezés módszereit; képessé válik információs modellek megvalósítására infokommunikációs eszközökkel, számítógépes kísérletek elvégzésére, valamint az eredmények értelmezésére, elemzésére és általánosítására.
- **SzK 12:** Képesség a feladatmegoldó algoritmusok fejlesztésének és kutatásának korszerű módszereinek alkalmazására objektumok és folyamatok modellezésében, valamint ezen algoritmusok implementálására modern programozási nyelveken.
- **SzK 15:** Képessé válik az iskolai informatika tananyagához kapcsolódó, különböző nehézségi szintű feladatok megoldására, a megoldások hatékonyságának elemzésére és értékelésére, valamint a megfelelő készségek kialakítására a tanulóknál.

A szakmai felkészültség elmélyítését az alábbi program-specifikus tanulási eredmények garantálják:

Program tanulási eredmények (PRN):

- **TE2:** Demonstrálja a tanulók államnyelven történő oktatásának képességét; fejleszti a tanulók kommunikációs készségeit a tantárgy és az integrált oktatás eszközeivel.
- **TE8:** Megalapozott szakmai véleményeket generál a szakterületen mind a szakemberek, mind a szélesebb közönség számára államnyelven és idegen nyelven.
- **TE 9:** Professzionális tevékenysége során alkalmazza a korszerű információs és kommunikációs, valamint digitális technológiákat.
- **TE 10:** Demonstrálja a tudományos információk keresésének korszerű technológiáinak ismeretét önképzés céljából, és alkalmazza azokat szakmai tevékenységében.
- **TE 11:** Csapatmunkára való készséget mutat, képes alkalmazkodni és cselekedni új helyzetekben, biztosítva az esélyegyenlőséget a szakmai tevékenység során.
- **TE 13:** Ismeri a szakmai tevékenységre vonatkozó jogi szabályozást, és döntéseit az emberi jogok tiszteletben tartásával hozza meg.
- **TE 14:** Meghatározza az informatika szakterületi struktúráját, helyét a tudományok rendszerében, és elmagyarázza az informatikai technológiák fejlődési perspektíváit és társadalmi jelentőségét.
- **TE 15:** Ismeri és érti az információs technológiák fizikai, logikai és matematikai alapjait; elmagyarázza és alkalmazza az adatok kódolási eljárásait.

- **TE 18:** Meghatározza és alkalmazza az algoritmusok fejlesztésének és kutatásának módszereit.
- **TE 21:** Információs modelleket hoz létre, azokat infokommunikációs eszközökkel megvalósítja, kutatást végez, az eredményeket értelmezi és általánosítja.
- **TE 22:** Képes algoritmusokat implementálni programozási nyelveken, kiválasztani a megfelelő technológiákat, és megoldani különböző szintű iskolai informatika feladatokat.
- **TE 23:** Érti és megvalósítja az informatika oktatásának korszerű módszertanait és oktatástechnológiai eljárásait a kerettantervi követelmények teljesítése érdekében.

A jegyzet módszertana támogatja a fenti eredmények elérését. Az elméleti részek (tételek, bizonyítások) a logikus gondolkodást és a matematikai alapokat (TE15) erősítik. A gyakorlati példák és az önálló feladatok megoldása a modellezési (SzK11, TE21) és algoritmus-elemzési (SzK12, TE18) kompetenciákat hivatott fejleszteni.

Különösen fontos hangsúlyozni, hogy a jegyzet nem helyettesíti az előadásokon való részvételt, hanem kiegészíti azt. A szillabuszban meghatározott követelmények szerint az elméleti tudás mellett a gyakorlati alkalmazás képessége is elvárás, amelyet a szemináriumi munka és az egyéni feladatmegoldás mélyít el. A jegyzetben található levezetések és magyarázatok segítik a hallgatókat abban, hogy a vizsgaidőszakban esedékes szóbeli vizsgára felkészüljenek.

Bízunk benne, hogy jelen összeállítás hatékonyan segíti a hallgatókat a valószínűségszámítás világában való eligazodásban, és stabil alapot biztosít számukra jövőbeli pedagógiai és informatikai pályafutásukhoz.

1 Véletlen kísérletek és események

1. Véletlen kísérletek és események alapjai

A valószínűségszámítás alapvető tárgya a véletlen jelenség (vagy véletlen kísérlet).

Definíció: Véletlen jelenségnek nevezzük azt, aminek a kimenetelét a figyelembe vett feltételek nem határozzák meg egyértelműen. Ezzel szemben a determinisztikus jelenségeknél a feltételek egyértelműen meghatározzák a bekövetkezést.

Tömegjelenségek: Ha egy véletlen jelenség sokszor ismétlődik azonos vagy közel azonos körülmények között, véletlen tömegjelenségről beszélünk (pl. radioaktív bomlás vagy szerencsejátékok).

Eseménytér és események:

- A kísérlet lehetséges kimeneteleit elemi eseményeknek nevezzük (jelölésük gyakran ω). Ezek jellemzője, hogy csak egyféleképpen következhetnek be.
- Az összes elemi esemény halmazát eseménytérnek (Ω) nevezzük.
- Az eseményeket halmazokkal azonosítjuk: az események az eseménytér részhalmazai ($A \subseteq \Omega$).

Két kitüntetett esemény létezik:

- **Biztos esemény:** Mindig bekövetkezik, jele Ω (az alaphalmaz).
- **Lehetetlen esemény:** Soha nem következik be, jele $\emptyset$ (üres halmaz).

1.1 Műveletek eseményekkel

Mivel az eseményeket halmazokként kezeljük, a köztük értelmezett műveletek megfelelnek a halmazelméleti és logikai műveleteknek.

- **Összeg (Unió):** $A + B$ (vagy $A \cup B$). Akkor következik be, ha A vagy B , vagy mindkettő bekövetkezik (azaz legalább az egyikük).
- **Szorzat (Metszet):** $A \cdot B$ (vagy $A \cap B$, AB). Akkor következik be, ha A és B is bekövetkezik.
- **Ellentett (Komplementer):** $\bar{A}$. Akkor következik be, ha A nem következik be.
- **Különbség:** $A - B$ (vagy $A \setminus B$). Akkor következik be, ha A bekövetkezik, de B nem.

Kizáró események: Két esemény, A és B kizárja egymást (diszjunktak), ha egyszerre nem következhetnek be, azaz szorzatuk a lehetetlen esemény:

$$A \cdot B = \emptyset \quad (1)$$

1.2 Műveleti tulajdonságok és bizonyítások

Az események közötti műveletekre érvényesek a halmazalgebra szabályai. Az alábbiakban néhány fontos tulajdonságot és azok bizonyítását ismertetem a források alapján.

A) Elemi esemény és tetszőleges esemény szorzata

Állítás: Ha A egy elemi esemény és B tetszőleges esemény, akkor a szorzatuk vagy maga az A esemény, vagy a lehetetlen esemény.

Bizonyítás: Mivel A és B események, a szorzatuk (AB) része A -nak ($AB \subseteq A$). Mivel A elemi esemény, definíció szerint nincsenek valódi részhalmazai (csak önmaga és az üres halmaz). Ezért AB csak A vagy $\emptyset$ lehet. Ha A eleme B -nek (azaz A bekövetkezése maga után vonja B -t), akkor $AB = A$, ellenkező esetben $AB = \emptyset$.

B) Az összeg felbontása kizáró eseményekre

Gyakran szükséges események összegét páronként kizáró események összegére bontani.

Állítás: Tetszőleges A és B eseményre $A + B = A + \overline{A}B$, ahol a jobb oldalon álló tagok kizárják egymást.

Bizonyítás: A halmazelméleti definíciók alapján:

- Az $A + B$ (unió) azon elemi eseményeket tartalmazza, amelyek benne vannak A -ban vagy B -ben.
- Az $\overline{A}B$ (azaz $B - A$) esemény azon elemeket tartalmazza, amelyek B -ben benne vannak, de A -ban nincsenek.
- Ha A -hoz hozzáadjuk azokat, amelyek csak B -ben vannak ($\overline{A}B$), megkapjuk az uniót.
- Belátható, hogy A és $\overline{A}B$ diszjunktak, hiszen $A \cdot (\overline{A}B) = (A \cdot \overline{A}) \cdot B = \emptyset \cdot B = \emptyset$.

Tehát az egyenlőség fennáll és a tagok kizáróak.

C) Disztributivitás a kivonásra nézve

Állítás: A szorzás disztributív a kivonásra nézve, azaz $A(B - C) = AB - AC$.

Bizonyítás (Halmazelméleti úton): A bizonyítás a halmazelméleti azonosságokon alapul.

- Bal oldal: $A(B - C) = A(B \cdot \overline{C}) = A \cdot B \cdot \overline{C}$. Ez azt jelenti, hogy az esemény akkor következik be, ha A és B bekövetkezik, de C nem.
- Jobb oldal: $AB - AC = (A \cdot B) - (A \cdot C) = (A \cdot B) \cdot \overline{(A \cdot C)}$.

A De Morgan-szabályt alkalmazva a jobb oldalra:

$$(A \cdot B) \cdot (\overline{A \cdot C}) = (A \cdot B \cdot \overline{A}) + (A \cdot B \cdot \overline{C})$$

Mivel $A \cdot \bar{A} = \emptyset$, az első tag kiesik:

$$\emptyset \cdot B + A \cdot B \cdot \bar{C} = \emptyset + A \cdot B \cdot \bar{C} = A \cdot B \cdot \bar{C}$$

A két oldal megegyezik, az állítást igazoltuk.

D) De Morgan-azonosságok

Ezek az azonosságok alapvetőek az eseményekkel való számolásban.

Állítás: $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$ és $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$.

Magyarázat/Bizonyítás logikai úton:

- Az első állítás $\overline{(A + B)}$ azt jelenti, hogy nem következik be sem A , sem B . Ez egyenértékű azzal, hogy A sem következik be ($\bar{A}$) és B sem következik be ($\bar{B}$), azaz $\bar{A} \cdot \bar{B}$.
- A második állítás $\overline{(A \cdot B)}$ azt jelenti, hogy nem igaz, hogy mindkettő bekövetkezik. Ez akkor teljesül, ha legalább az egyik nem következik be, azaz vagy A nem történik meg ($\bar{A}$), vagy B nem történik meg ($\bar{B}$), ami éppen $\bar{A} + \bar{B}$.

Összefoglaló műveleti tulajdonságok

A források alapján az eseményalgebra legfontosabb, bizonyítás nélkül is gyakran felhasznált tulajdonságai:

- **Idempotencia:** $A + A = A$, $A \cdot A = A$.
- **Kommutativitás:** $A + B = B + A$, $A \cdot B = B \cdot A$.
- **Asszociativitás:** $A + (B + C) = (A + B) + C$.
- **Disztributivitás:** $A(B + C) = AB + AC$.

Önellenőrző kérdések

Válaszoljon az alábbi kérdésekre a fejezet anyaga alapján:

1. Mi a különbség a véletlen jelenség és a determinisztikus jelenség között?
2. Definiálja a biztos eseményt és a lehetetlen eseményt, és adja meg a jelölésüket!
3. Mikor mondjuk két eseményről, hogy kizárják egymást? Írja fel ezt matematikai jelöléssel is!
4. Fogalmazza meg a De Morgan-azonosságokat eseményekre vonatkozóan!
5. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges A és B eseményre $A + B = A + \bar{A}B$!

2 Kolmogorov-féle valószínűségi mező

2.1 Eseményalgebrák (σ -algebrák)

A valószínűségszámítás matematikai alapjait halmazelméleti struktúrák alkotják. Legyen Ω egy nem üres halmaz, amelyet eseménytérnek nevezünk (az elemi események halmaza). Az események az Ω bizonyos részhalmazai, amelyek egy $\mathcal{A}$ (vagy $\mathcal{F}$) jelű rendszerbe tartoznak.

Definíció: Az Ω részhalmazainak $\mathcal{A}$ rendszerét σ -algebrának (eseményalgebrának) nevezzük, ha teljesülnek az alábbiak:

- A biztos esemény eleme a rendszernek: $\Omega \in \mathcal{A}$.
- Zárt a komplementerképzésre: Ha $A \in \mathcal{A}$, akkor az ellentettje, $\bar{A} \in \mathcal{A}$.
- Zárt a megszámlálható unióra: Ha $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ eseménysorozat, akkor az összegük, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Ebből a definícióból levezethető, hogy a σ -algebra zárt a megszámlálható metszetre is (a de Morgan-azonosságok miatt), és tartalmazza a lehetetlen eseményt ($\emptyset$).

2.2 Kolmogorov-féle valószínűségi mező

A valószínűségszámítás axiomatikus felépítését A. N. Kolmogorov dolgozta ki. Az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ hármast Kolmogorov-féle valószínűségi mezőnek nevezzük, ha:

- Ω az eseménytér.
- $\mathcal{A}$ az események σ -algebrája.
- $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{R}$ egy valószínűségi mérték (függvény), amelyre teljesülnek az alábbi axiómák:

(P1) **Nemnegativitás:** Minden $A \in \mathcal{A}$ esetén $P(A) \geq 0$.

(P2) **Normáltság:** $P(\Omega) = 1$.

(P3) **σ -additivitás (Megszámlálható additivitás):** Ha $A_1, A_2, \dots$ páronként kizáró események (azaz $A_i A_j = \emptyset$, ha $i \neq j$), akkor:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

2.3 Valószínűségszámítási alaptételek és bizonyításaik

Az axiómákból közvetlenül levezethetők a legfontosabb tulajdonságok.

A) A lehetetlen esemény valószínűsége

Tétel: $P(\emptyset) = 0$.

Bizonyítás: A σ -additivitás axiómájában válasszuk az $A_1 = \Omega$ és $A_i = \emptyset$ ($i \geq 2$) eseményeket. Ezek páronként kizáróak. Ekkor $\sum A_i = \Omega$. Az axióma alapján: $P(\Omega) = P(\Omega) + \sum P(\emptyset)$. Mivel $P(\Omega) = 1$, ebből következik, hogy a nemnegatív tagok összege csak akkor lehet véges és változatlan, ha $P(\emptyset) = 0$.

B) Véges additivitás

Tétel: Ha A és B egymást kizáró események, akkor $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Bizonyítás: Ez a σ -additivitás speciális esete, ha a sorozat további tagjait üres halmaznak választjuk ($A_3 = A_4 = \dots = \emptyset$), és felhasználjuk, hogy $P(\emptyset) = 0$.

C) Komplementer (ellentett) esemény

Tétel: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Bizonyítás: Mivel A és $\bar{A}$ kizárják egymást és összegük Ω , a véges additivitás és a normáltság miatt: $P(A) + P(\bar{A}) = P(A + \bar{A}) = P(\Omega) = 1$. Ebből átrendezéssel adódik az állítás.

D) Monotonitás

Tétel: Ha $B \subseteq A$, akkor $P(B) \leq P(A)$.

Bizonyítás: Az A esemény felbontható $A = B + (A \setminus B)$ diszjunkt részekre. Az additivitás miatt $P(A) = P(B) + P(A \setminus B)$. Mivel $P(A \setminus B) \geq 0$, ezért $P(A) \geq P(B)$.

2.4 A valószínűség folytonossága

Tétel A valószínűség folytonos.

A egy ekvivalencia-tételt fogunk bizonyítani, amely megmutatja, hogy a véges additivitás feltételezése mellett a σ -additivitás egyenértékű a folytonossági tulajdonságokkal. A bizonyítás láncolatosszerű: $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 1)$.

A tétel állításai (ekvivalens feltételek):

- σ -additivitás:** Ha A_n páronként diszjunktak, akkor $P(\cup A_n) = \sum P(A_n)$.
- Folytonosság növekvő sorozatra:** Ha $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ (növekvő sorozat), akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)$.
- Folytonosság csökkenő sorozatra:** Ha $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ (csökkenő sorozat), akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\cap_{n=1}^{\infty} A_n)$.
- Folytonosság az üres halmazban ("a nullában"):** Ha $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ és $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$.

A bizonyítás lépései a forrás alapján:

1. lépés: 1) $\Rightarrow$ 2) (A σ -additivitásból következik a növekvő folytonosság)

Legyen $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ egy növekvő eseménysorozat. Jelölje $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Képezzünk diszjunkt eseményeket a következőképpen: Legyen $B_1 = A_1$, és $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ minden $n = 2, 3, \dots$ esetén. Ekkor a B_n események páronként kizáróak, és az uniójuk megegyezik az eredeti sorozat uniójával: $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = A$. Továbbá az első n darab B uniója éppen A_n : $\bigcup_{k=1}^n B_k = A_n$. A σ -additivitás (1-es pont) miatt:

$$P(A) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(B_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P(B_k)$$

Mivel $\sum_{k=1}^n P(B_k) = P(\bigcup_{k=1}^n B_k) = P(A_n)$ (a véges additivitás miatt), ezért:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

2. lépés: 2) $\Rightarrow$ 3) (A növekvő folytonosságból következik a csökkenő)

Legyen $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ csökkenő sorozat. Ekkor a komplementereik sorozata, $\overline{A_n}$, növekvő sorozatot alkot ($\overline{A_n} \subset \overline{A_{n+1}}$). Alkalmazzuk a 2) pontot a komplementerekre:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\overline{A_n}) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}\right)$$

A de Morgan-szabályok alapján az unió komplementere a metszet, így $\bigcup \overline{A_n} = \overline{\bigcap A_n}$. Felhasználva, hogy $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - P(A_n)) = 1 - P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

Az egyenletet rendezve kapjuk: $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\bigcap A_n)$.

3. lépés: 3) $\Rightarrow$ 4) (A csökkenő folytonosságból következik a nullában való folytonosság)

Ez a lépés a 3-as pont speciális esete. Ha a csökkenő sorozat metszete az üres halmaz ($\bigcap A_n = \emptyset$), akkor a 3) pont szerint:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\emptyset)$$

Mivel $P(\emptyset) = 0$, ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$.

4. lépés: 4) $\Rightarrow$ 1) (A nullában való folytonosságból következik a σ -additivitás)

Legyenek $A_1, A_2, \dots$ páronként kizáró események, és legyen $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Defináljuk a maradéktagot (a sorozat "farkát"):

$$C_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k = A \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k$$

A C_n sorozat csökkenő ($C_n \supset C_{n+1}$), és a közös részük üres ($\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$). A 4) feltétel szerint ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} P(C_n) = 0$. A véges additivitás miatt felírhatjuk az A valószínűségét:

$$P(A) = P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k \cup C_n\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k) + P(C_n)$$

Vegyük mindkét oldal határértékét $n \rightarrow \infty$ esetén. Mivel $P(A)$ konstans és $\lim_{n \rightarrow \infty} P(C_n) = 0$:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P(A_k) + 0 = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

Ezzel visszajutottunk az 1) ponthoz, igazolva a σ -additivitást. Fejezet végi kérdések

Önellenőrző kérdések

Válaszoljon az alábbi kérdésekre a fejezet anyaga alapján:

1. Mi a σ -algebra definíciója? Sorolja fel a három tulajdonságát!
2. Ismertesse a Kolmogorov-féle valószínűségi mező axiómáit (P1, P2, P3)!
3. Bizonyítsa be az axiómák alapján, hogy a lehetetlen esemény valószínűsége 0!
4. Mit mond ki a monotonitás tétele?
5. Fogalmazza meg a valószínűség folytonossági tételét növekvő eseménysorozatra!

3 Klasszikus és geometriai valószínűségi mezők

3.1 Klasszikus valószínűségi mező

A klasszikus valószínűségi modell olyan kísérletek leírására alkalmazható, ahol a lehetséges kimenetek (elemi események) száma véges, és nincs okunk feltételezni, hogy bármelyik kimenetel valószínűbb lenne a másiknál (azaz az elemi események „egyenlően valószínűek”).

Bizonyítás a $P(A) = m/n$ képletre

Egy A esemény valószínűsége a kedvező kimenetek (m) és az összes lehetséges kimenetel (n) hányadosa:

Feltételek: Tekintsünk egy kísérletet, amelynek véges számú, n darab elemi eseménye (kimenetele) van. Jelölje az eseményteret $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$.

Egyenlő valószínűség: Mivel a klasszikus modellben az elemi események egyformán valószínűek, mindegyikhez ugyanazt a p valószínűséget rendeljük:

$$P(\omega_i) = p$$

Normálás: Tudjuk, hogy az összes elemi esemény valószínűségének összege 1 (mivel az egyikük biztosan bekövetkezik). Ezért:

$$\sum_{i=1}^n P(\omega_i) = 1 \implies \sum_{i=1}^n p = 1$$

Mivel az összeg n darab p tagból áll:

$$n \cdot p = 1 \implies p = \frac{1}{n}$$

Tehát minden egyes elemi esemény valószínűsége $1/n$.

Az A esemény valószínűsége: Legyen A egy tetszőleges esemény, amely m darab elemi eseményből áll (ezek a „kedvező” esetek). Jelölje ezt: $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_m}\}$.

Összegzés: A valószínűség additivitása miatt az A esemény valószínűsége az őt alkotó elemi események valószínűségének összege:

$$P(A) = \sum_{k=1}^m P(\omega_{i_k}) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{n}$$

Mivel az összegben m darab tag szerepel:

$$P(A) = m \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$$

Következtetés: A klasszikus definíció szerint egy A esemény valószínűsége a kedvező esetek számának (m) és az összes lehetséges, egyenlően valószínű eset számának (n) hányadosa. (Más forrásokban ezt gyakran k/n vagy k/N alakban jelölik).

3.2 Geometriai valószínűség

A geometriai valószínűséget akkor használjuk, ha a kísérlet lehetséges kimeneteinek száma végtelen (nem megszámlálható), és a kimenetek egy folytonos tartományt (pl. egyenest, síkidomot vagy térbeli testet) alkotnak.

- **Definíció:** Legyen az eseménytér Ω az $\mathbb{R}^n$ egy véges mértékű (hosszúságú, területű vagy térfogatú) tartománya. A kísérlet során véletlenszerűen választunk egy pontot ebből a tartományból. Feltételezzük, hogy annak a valószínűsége, hogy a pont az Ω egy A résztartományába esik, nem a tartomány elhelyezkedésétől, hanem csak a mértékétől függ, és azzal arányos.

- **Képlet:** Ha $m(\Omega)$ jelöli az egész eseménytér mértékét (pl. területét), és $m(A)$ a kedvező tartomány mértékét, akkor:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

ahol m a Lebesgue-mérték (hossz, terület, térfogat) jelöli.

- **Példa:** A „találkozási probléma” (két személy érkezése egy adott időintervallumban) tipikus példa, amely geometriai valószínűséggel oldható meg úgy, hogy az eseményteret egy négyzetnek tekintjük a síkon, a kedvező eseményeket pedig a négyzeten belüli sáv területének.

Önellenőrző kérdések

Válaszoljon az alábbi kérdésekre a fejezet anyaga alapján:

1. Mi a klasszikus valószínűségi mező alapvető feltétele az elemi eseményekre vonatkozóan?
2. Vezesse le a klasszikus valószínűség $P(A) = m/n$ képletét!
3. Mi a különbség a klasszikus és a geometriai valószínűségi modell alkalmazási feltételei között?
4. Írja fel a geometriai valószínűség kiszámításának képletét és magyarázza a jelöléseket!
5. Mondjon példát olyan problémára, amely geometriai valószínűséggel oldható meg!

4 Feltételes valószínűség

4.1 A feltételes valószínűség

Definíció: Ha A és B két esemény és $P(B) > 0$, akkor az A esemény B -re vonatkozó feltételes valószínűségét a következőképpen definiáljuk:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

ahol $P(AB)$ az A és B együttes bekövetkezésének (szorzatának) a valószínűsége.

Szemléletes jelentés és indoklás: A fogalom bevezetése a relatív gyakoriságok viselkedésén alapul. Ha egy kísérletet n -szer elvégzünk, és a B esemény k_B alkalommal következik be, míg az A és B egyszerre k_{AB} alkalommal, akkor a B bekövetkezései közül az A relatív gyakorisága k_{AB}/k_B . Ezt átalakítva:

$$\frac{k_{AB}}{k_B} = \frac{k_{AB}/n}{k_B/n} \approx \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Ez indokolja a fenti definíciót. A feltételes valószínűség lényegében az eseménytérnek a B eseményre való „leszűkítését” jelenti.

Tétel (Feltételes valószínűségi mező): Rögzített B esemény esetén ($P(B) > 0$), a $P(\cdot|B)$ feltételes valószínűség rendelkezik a valószínűség összes tulajdonságával (Kolmogorov-axiómák), azaz $P(B|B) = 1$, nemnegatív, és σ -additív.

4.2 A szorzási szabály (Szorzástétel)

A feltételes valószínűség definíciójából közvetlenül adódik a szorzási szabály, amely lehetővé teszi két vagy több esemény együttes bekövetkezésének kiszámítását.

Két eseményre: Ha $P(A) > 0$ és $P(B) > 0$, akkor:

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

Ez a tétel azt fejezi ki, hogy az együttes bekövetkezés valószínűsége egyenlő az egyik esemény valószínűségének és a másik esemény (az elsőre vonatkozó) feltételes valószínűségének szorzatával.

Általánosítás n eseményre (Általános szorzási szabály): Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_n$ olyan események, amelyekre $P(A_1 A_2 \dots A_{n-1}) > 0$. Ekkor:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \dots A_{n-1})$$

Bizonyítás

A) Két eseményre vonatkozó szabály bizonyítása: A bizonyítás közvetlenül a definícióból következik.

- Induljunk ki a feltételes valószínűség definíciójából: $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$.
- Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $P(B)$ -vel (feltéve, hogy $P(B) > 0$).
- Kapjuk: $P(AB) = P(A|B)P(B)$.
- Hasonlóan, $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ alapján $P(AB) = P(B|A)P(A)$.

B) Az általános (n eseményre vonatkozó) szabály bizonyítása: A bizonyítás a definíció ismételt alkalmazásával (vagy teljes indukcióval) történik. Írjuk fel a jobb oldalt a feltételes valószínűségek definícióit behelyettesítve:

$$P(A_1) \cdot \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_1)} \cdot \frac{P(A_1 A_2 A_3)}{P(A_1 A_2)} \cdot \dots \cdot \frac{P(A_1 \dots A_n)}{P(A_1 \dots A_{n-1})}$$

A feltételek miatt a nevezők nem nullák. A szorzatban a közbülső tagok egyszerűsítik egymást (teleszkopikus szorzat):

- $P(A_1)$ kiesik az első tört nevezőjével.
- $P(A_1 A_2)$ kiesik a második tört nevezőjével, és így tovább.

- Végül csak a legutolsó számláló marad meg: $P(A_1 A_2 \dots A_n)$. Ezzel az azonosságot igazoltuk.

Alkalmazási példa (Húzás visszatevés nélkül): Ha egy urnából golyókat húzunk visszatevés nélkül, a szorzási szabály segítségével számolhatjuk ki a valószínűségeket. Például, ha 32 lapos kártyából húzunk, annak valószínűsége, hogy a piros 10-es és a piros 7-es egy kézbe kerül (például az első játékoshoz, aki 12 lapot kap), a szorzási szabály és a kombinatorika segítségével is levezethető.

4.3 A teljes valószínűség tétele

Előfeltétel: Teljes eseményrendszer. Egy $H = \{B_1, B_2, \dots\}$ (vagy $H_1, H_2, \dots$) eseményrendszer teljes eseményrendszernek nevezünk, ha az események páronként kizárják egymást (azaz $B_i \cap B_j = \emptyset$, ha $i \neq j$), és összegük a biztos esemény ($\sum B_i = \Omega$). A gyakorlatban a B_i eseményeket gyakran hipotéziseknek is nevezik.

Tétel: Legyen $B_1, B_2, \dots$ egy pozitív valószínűségű eseményekből álló teljes eseményrendszer (azaz $P(B_i) > 0$). Ekkor tetszőleges A esemény valószínűsége kiszámítható az alábbi képlettel:

$$P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i)$$

(Véges esetben az összegzés n -ig tart, megszámlálhatóan végtelen esetben a végtelenig).

Bizonyítás

- **Felbontás:** Mivel a $\{B_i\}$ rendszer teljes, azaz $\sum B_i = \Omega$, az A eseményt felírhatjuk a biztos eseménnyel való metszeteként:

$$A = A \cdot \Omega = A \cdot \left(\sum_i B_i \right) = \sum_i (A \cdot B_i)$$

Ez azt jelenti, hogy az A esemény felbontható a B_i eseményekkel alkotott szorzataira (metszeteire).

- **Additivitás:** Mivel a B_i események páronként kizárják egymást ($B_i B_j = \emptyset$), ezért az $A \cdot B_i$ események is páronként kizáróak. A valószínűség σ -additivitási axiómája (vagy véges esetben a véges additivitás) miatt az összeg valószínűsége a valószínűségek összege:

$$P(A) = P\left(\sum_i AB_i\right) = \sum_i P(AB_i)$$

- **Szorzási szabály:** A feltételes valószínűség definíciójából

$$P(A|B) = P(AB)/P(B)$$

átrendezéssel kapjuk a szorzási szabályt: $P(AB_i) = P(A|B_i)P(B_i)$. Ezt behelyettesítve a fenti összegbe megkapjuk a tételt:

$$P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i)$$

4.4 Bayes-tétele

Ez a tétel lehetővé teszi, hogy egy esemény (A) bekövetkezése után felülvizsgáljuk a teljes eseményrendszer tagjainak (B_i hipotézisek) valószínűségét (ezt nevezzük aposzteriori valószínűségnek).

Tétel: Legyen $B_1, B_2, \dots$ egy teljes eseményrendszer pozitív valószínűségekkel, és legyen A egy olyan esemény, amelyre $P(A) > 0$. Ekkor bármely i indexre:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_j P(A|B_j)P(B_j)}$$

Bizonyítás

- **Definíció:** Induljunk ki a feltételes valószínűség definíciójából a $P(B_i|A)$ -ra vonatkozóan:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i A)}{P(A)}$$

(A forrásokban a metszetet gyakran egymás mellé írással jelölik: $P(B_i A)$ vagy $P(AB_i)$).

- **Számláló átalakítása:** A szorzási szabályt alkalmazva a számlálóra

$$P(AB_i) = P(A|B_i)P(B_i)$$

, az egyenlet így alakul:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}$$

- **Nevező kifejtése:** A nevezőben szereplő $P(A)$ valószínűséget a teljes valószínűség tételével fejtjük ki ($P(A) = \sum_j P(A|B_j)P(B_j)$). Ezt behelyettesítve a nevezőbe megkapjuk a Bayes-formulát:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_j P(A|B_j)P(B_j)}$$

Önellenőrző kérdések

Válaszoljon az alábbi kérdésekre a fejezet anyaga alapján:

1. Definiálja a feltételes valószínűséget!
2. Írja fel a szorzási szabályt két eseményre!
3. Mit nevezünk teljes eseményrendszernek?
4. Mondja ki a teljes valószínűség tételét!
5. Írja fel a Bayes-tételt és magyarázza meg, mire használjuk!

5 Események függetlensége. Borel-Cantelli lemma

A valószínűségi számításban a függetlenség azt a szemléletes tartalmat ragadja meg, hogy az egyik esemény bekövetkezése nem befolyásolja a másik esemény bekövetkezésének esélyét.

5.1 Események függetlensége

Két esemény függetlensége

Két esemény, A és B függetlenségének szemléletes megközelítése a feltételes valószínűségekre alapul: A akkor független B -től, ha $P(A|B) = P(A)$ (feltéve, hogy $P(B) > 0$). Mivel ez a definíció nem szimmetrikus és nem kezeli a 0 valószínűségű eseményeket, a szakirodalom a szorzási szabályt tekinti a formális definíciónak.

Definíció: Az A és B eseményeket függetlennek nevezzük, ha:

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

ahol AB az események együttes bekövetkezését (metszetét) jelöli.

Magyarázat és tulajdonságok:

- **Szemléletes jelentés:** Ha az egyik esemény bekövetkezéseiről információt szerzünk, az nem változtatja meg a másik esemény valószínűségét. Például, ha egy kockával 6-ost dobunk, az nem befolyásolja egy tőle függetlenül feldobott érme fej vagy írás eredményét.
- **Szélsőséges esetek:** Egy A esemény akkor és csak akkor független bármely más eseménytől, ha $P(A) = 0$ vagy $P(A) = 1$.
- **Kapcsolat a kizárással:** Ha A és B pozitív valószínűségű események és kizárják egymást (azaz $AB = \emptyset$), akkor nem lehetnek függetlenek, hiszen $P(AB) = 0$, míg $P(A)P(B) > 0$. A függetlenség és a kizáróság tehát különböző fogalmak.

Több esemény függetlensége

Több esemény esetén megkülönböztetjük a páronkénti és a teljes (vagy együttes) függetlenséget.

- **Páronkénti függetlenség:** Az $A_1, A_2, \dots$ eseményeket páronként függetlennek nevezzük, ha közülük bármely két különböző esemény független, azaz $P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j)$ minden $i \neq j$ esetén.
- **Teljes (együttes) függetlenség:** Az $A_1, \dots, A_n$ eseményeket teljesen függetlennek nevezzük, ha közülük akárhány különböző eseményt kiválasztva, azok szorzatának valószínűsége megegyezik a valószínűségek szorzatával. Formálisan, bármely k darab ($2 \leq k \leq n$) indexre:

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$$

Fontos különbség: A páronkénti függetlenségből nem következik a teljes függetlenség. Lehetséges, hogy három esemény páronként független ($P(AB) = P(A)P(B)$, stb.), de együttesen már nem azok (pl. $P(ABC) \neq P(A)P(B)P(C)$).

Végtelen eseményrendszerek: Egy tetszőleges (akár végtelen) eseményrendszert akkor nevezünk függetlennek, ha annak bármely véges részrendszere teljesen független.

5.2 Borel-Cantelli lemma

A Borel-Cantelli lemma a valószínűségszámítás egyik legfontosabb eredménye, amely végtelen sok esemény bekövetkezésének valószínűségéről szól. A tétel két állításból áll.

Lemma (Borel-Cantelli)

a) rész (Konvergencia eset): Legyen $A_1, A_2, \dots$ események tetszőleges sorozata. Ha az események valószínűségeinek összege véges, azaz

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty,$$

akkor 1 a valószínűsége annak, hogy az A_n események közül csak véges sok következik be (azaz 0 a valószínűsége, hogy végtelen sok következik be).

b) rész (Divergencia eset - függetlenséggel): Legyenek az $A_1, A_2, \dots$ események függetlenek. Ha a valószínűségeik összege végtelen, azaz

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty,$$

akkor 1 a valószínűsége annak, hogy az A_n események közül végtelen sok bekövetkezik.

Magyarázat:

- Az a) rész azt mondja ki, hogy ha az események "ritkák" (a valószínűségeik összege konvergens), akkor "hosszú távon" biztosan nem fognak újra és újra megtörténni; egy idő után már nem következnek be. Ez az állítás nem követeli meg a függetlenséget.
- A b) rész azt állítja, hogy ha az eseményeknek van egy minimális "sűrűsége" (a sor divergens) és egymástól függetlenek, akkor biztosan végtelen sokszor be fognak következni. Itt a függetlenség feltétele kritikus.

Önellenőrző kérdések

Válaszoljon az alábbi kérdésekre a fejezet anyaga alapján:

1. Definíció szerint mikor nevezünk két eseményt függetlennek?
2. Lehet-e két egymást kizáró, pozitív valószínűségű esemény független? Indokolja!
3. Következik-e a páronkénti függetlenségből a teljes függetlenség?
4. Mit állít a Borel-Cantelli lemma a) része (konvergencia eset)?
5. Melyik esetben szükséges a függetlenség feltétele a Borel-Cantelli lemmánál?

6 Bernoulli-féle kísérlet sorozat

6.1 Bernoulli-féle kísérletsorozat és a képlet

A kísérletsorozat lényege: Tekintsünk egy kísérletet, amelyben egy A esemény p valószínűséggel következik be (ahol $0 < p < 1$). Ismételjük meg ezt a kísérletet n -szer egymástól függetlenül. Ezt nevezzük véges Bernoulli-féle kísérletsorozatnak. Ebben a kísérletsorozatban az A esemény bekövetkezéseinek számát gyakran ξ -vel jelöljük, amely egy binomiális eloszlású valószínűségi változó.

A valószínűség kiszámítása: Annak a valószínűsége, hogy az n kísérletből az A esemény pontosan k -szor következik be (jelölje ezt P_k vagy $P(\xi = k)$), az alábbi képlettel számítható ki:

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

ahol $k = 0, 1, \dots, n$.

A képlet magyarázata: A képlet felépítése a következő gondolatmeneten alapul:

- **Egy konkrét sorozat valószínűsége:** Ha egy konkrét kimenetelsorozatot tekintünk, amelyben k darab "sikeres" (A bekövetkezett) és $n - k$ darab "sikertelen" (az A ellentettje következett be) kísérlet van, akkor – a függetlenség miatt – ezek valószínűségei összeszorozódnak. Így egyetlen ilyen konkrét sorozat valószínűsége: $p^k (1 - p)^{n-k}$.

- **A sorozatok száma:** Az n kísérlet során a k darab sikeres esemény többféle sorrendben is előfordulhat. Annak a száma, ahogyan az n kísérletből kiválaszthatjuk azt a k -t, ahol az A esemény bekövetkezett, a binomiális együtthatóval adható meg: $\binom{n}{k}$.
- **Összegzés:** Mivel ezek a sorozatok egymást kizáró események, a teljes valószínűséget a lehetséges esetek számának és egy eset valószínűségének a szorzata adja.

6.2 Hányszor következik be az A esemény a legnagyobb valószínűséggel?

Azt a k értéket, amelynél a $P(\xi = k)$ valószínűség a legnagyobb, az eloszlás móduszának nevezzük. A valószínűségek növekednek, amíg k el nem ér egy bizonyos értéket, utána pedig csökkennek.

A **legvalószínűbb bekövetkezések száma** (k) az alábbi egyenlőtlenség alapján határozható meg:

$$(n+1)p - 1 < k \leq (n+1)p$$

A maximális valószínűségű kimenetel(ek)re két eset lehetséges:

- **Egyetlen legvalószínűbb érték:** Ha $(n+1)p$ nem egész szám, akkor a legvalószínűbb bekövetkezések száma egyértelmű.
- **Két legvalószínűbb érték:** Ha $(n+1)p$ egész szám, akkor két olyan érték is van, amelynek a valószínűsége egyenlő és maximális. Ezek az értékek:

$$k_1 = (n+1)p - 1$$

$$k_2 = (n+1)p$$

Tehát az A esemény leggyakrabban az $(n+1)p$ érték egészrészének megfelelő alkalommal következik be.

Önellenőrző kérdések

Válaszoljon az alábbi kérdésekre a fejezet anyaga alapján:

1. Mi a Bernoulli-féle kísérletsorozat definíciója?
2. Írja fel a binomiális eloszlás képletét, és magyarázza meg a benne szereplő tagokat!
3. Mit nevezünk egy valószínűségi eloszlás móduszának ebben a kontextusban?
4. Milyen egyenlőtlenséggel határozható meg a legvalószínűbb bekövetkezések száma?
5. Mikor van két legvalószínűbb értéke a bekövetkezések számának?

7 A Moivre-Laplace lokális határeloszlás tétele

Tétel: Tekintsünk n számú független kísérletet (Bernoulli-kísérletsorozat), ahol egy A esemény bekövetkezésének valószínűsége minden kísérletben p ($0 < p < 1$), a be nem következése pedig $q = 1 - p$. Jelölje $P_n(k)$ annak a valószínűségét, hogy az esemény pontosan k -szor következik be.

Ha $n \rightarrow \infty$, akkor azokra a k értékekre, amelyekre az $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ mennyiség egy korlátos $[a, b]$ intervallumban marad, egyenletesen teljesül a következő közelítés:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Röviden jelölve a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényével ($\phi(x)$):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{npq} \cdot P_n(k)}{\phi(x)} = 1$$

ahol $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

Bizonyítás

A bizonyítás a Bernoulli-képletből indul ki, és a faktoriálisok közelítésére a Stirling-formulát használja.

A Bernoulli-képlet és a Stirling-formula. Induljunk ki a Bernoulli-képletből:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

Nagy n és k esetén alkalmazzuk a Stirling-formulát ($n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$):

$$P_n(k) \approx \frac{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}}{\sqrt{2\pi k} k^k e^{-k} \sqrt{2\pi(n-k)} (n-k)^{n-k} e^{-(n-k)}} p^k q^{n-k}$$

Az e^{-n} és $e^{-k} e^{-(n-k)}$ tagok kiesnek. Rendezés után:

$$P_n(k) \approx \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}$$

Vezessük be az x változót a standardizáláshoz:

$$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \implies k = np + x\sqrt{npq}$$

Ebből kifejezhető $n-k$ is:

$$n-k = n - (np + x\sqrt{npq}) = n(1-p) - x\sqrt{npq} = nq - x\sqrt{npq}$$

Helyettesítsük ezeket a gyök alatti kifejezésbe:

$$\sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot \sqrt{\frac{np \cdot nq}{k(n-k)}} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}$$

(Mivel $n \rightarrow \infty$ esetén a k/np és $(n-k)/nq$ hányadosok 1-hez tartanak).

A kifejezés exponenciális részének vizsgálatához vegyük a logaritmusát a $\left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}$ szorzatnak. Jelölje ezt A :

$$\ln A = -k \ln \left(\frac{k}{np} \right) - (n-k) \ln \left(\frac{n-k}{nq} \right)$$

Behelyettesítve a k és $n-k$ kifejezéseit:

$$\frac{k}{np} = 1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}, \quad \frac{n-k}{nq} = 1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}$$

Használjuk a Taylor-sorfejtést ($\ln(1+u) \approx u - \frac{u^2}{2} + O(u^3)$):

$$\ln \left(\frac{k}{np} \right) \approx x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{x^2 q}{2np}$$

$$\ln \left(\frac{n-k}{nq} \right) \approx -x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{x^2 p}{2nq}$$

Helyettesítsük vissza ezeket az $\ln A$ kifejezésbe:

$$\ln A \approx -(np + x\sqrt{npq}) \left(x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{x^2 q}{2np} \right) - (nq - x\sqrt{npq}) \left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{x^2 p}{2nq} \right)$$

A szorzások elvégzése és a tagok egyszerűsítése után (a magasabb rendű tagok $O(1/\sqrt{n})$ nagyságrendűek és 0-hoz tartanak) a következőt kapjuk:

$$\ln A \approx -\frac{x^2}{2}$$

Visszatérve az eredeti kifejezéshez ($A = e^{\ln A}$):

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \phi(x)$$

Ezzel a tétel bizonyítást nyert.

Jelentősége

Ez a tétel biztosítja, hogy nagy kísérletszám esetén a binomiális eloszlás valószínűségei (a hisztogram) nagyon jól közelíthetők a normális eloszlás haranggörbéjével (sűrűségfüggvényével).

Önellenőrző kérdések

Válaszoljon az alábbi kérdésekre a fejezet anyaga alapján:

1. Milyen típusú kísérletsorozatra vonatkozik a tétel, és milyen feltételeknek kell teljesülniük a p valószínűségre?
2. Mi a definíciója az x változónak a tételben szereplő közelítés során?
3. Melyik matematikai formulát használjuk a bizonyítás során a faktoriálisok közelítésére nagy n és k esetén?
4. Mi történik a $P_n(k)$ és a normális eloszlás sűrűségfüggvényének kapcsolatával, ha n tart a végtelenhez?
5. Gyakorlati szempontból miért jelentős ez a tétel a binomiális eloszlás és a normális eloszlás kapcsolatában?

Fogalomtár

Aposzteriori valószínűség Az esemény bekövetkezése utáni, a Bayes-tétel segítségével felülvizsgált valószínűség. Jelölése általában $P(B_i|A)$.

Apriori valószínűség Az esemény bekövetkezése előtti, előzetes ismereteken alapuló valószínűség. Jelölése általában $P(B_i)$.

Axióma Olyan alapvető állítás, amelyet bizonyítás nélkül igaznak fogadunk el, és amelyre egy elmélet épül. (Lásd: Kolmogorov-axiómák).

Bayes-tétel Tétel, amely megadja, hogyan változik egy hipotézis valószínűsége új információk (egy esemény bekövetkezése) fényében. Kapcsolatot teremt a $P(B|A)$ és $P(A|B)$ között.

Bernoulli-kísérlet Olyan véletlen kísérlet, amelynek pontosan két lehetséges kimenetele van: "siker" (A) és "kudarcc" ($\bar{A}$), rögzített valószínűségekkel.

Bernoulli-sorozat Ugyanazon Bernoulli-kísérlet n -szeri, egymástól független végrehajtása.

Binomiális eloszlás Diszkrét valószínűségi eloszlás, amely megadja a sikeres kimenetek számának valószínűségét n független Bernoulli-kísérlet során.

Biztos esemény (Ω) Olyan esemény, amely a kísérlet minden végrehajtásakor szükségszerűen bekövetkezik. Valószínűsége 1.

Borel-Cantelli lemma Tétel, amely végtelen sok esemény bekövetkezésének valószínűségéről szól. Két része van: konvergencia (véges sokszor következik be) és divergencia (végtelen sokszor következik be).

De Morgan-azonosságok Halmazelméleti és logikai összefüggések, melyek az unió és a metszet komplementerét írják le: $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$ és $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$.

Determinisztikus jelenség Olyan jelenség, amelynél a körülmények egyértelműen meghatározzák a kimenetelt (nincs véletlen).

Diszjunkt halmazok Olyan halmazok (események), amelyeknek nincs közös elemük, metszetük az üres halmaz. Lásd: Kizáró események.

Disztributivitás A műveletek közötti széttagolhatóság tulajdonsága. Pl. $A(B + C) = AB + AC$.

Elemi esemény (ω) A kísérlet lehetséges, tovább nem bontható kimenetele. Csak egyféleképpen következhet be.

Ellentett esemény (Komplementer) Az $\bar{A}$ esemény, amely pontosan akkor következik be, ha A nem következik be.

Eloszlásfüggvény Függvény, amely megadja annak a valószínűségét, hogy egy valószínűségi változó értéke kisebb, mint egy adott x szám.

Esemény (A) Az elemi események halmazának egy részhalmaza ($A \subseteq \Omega$), amelyről állítható, hogy bekövetkezett vagy nem.

Eseményalgebra (σ -algebra) Az eseménytér részhalmazainak olyan rendszere, amely zárt a komplementerképzésre és a megszámlálható unióra.

Eseménytér (Ω) A véletlen kísérlet összes lehetséges elemi eseményének halmaza.

Feltételes valószínűség Egy esemény bekövetkezésének valószínűsége, feltéve, hogy egy másik esemény már bekövetkezett. Jele: $P(A|B)$.

Folytonos valószínűségi változó Olyan valószínűségi változó, amely egy adott intervallumon belül bármilyen értéket felvehet (pl. idő, hossz).

Független események Két esemény független, ha az egyik bekövetkezése nem befolyásolja a másik valószínűségét. Formálisan: $P(AB) = P(A)P(B)$.

Geometriai valószínűség Olyan valószínűségi modell, ahol az eseménytér egy folytonos tartomány, és a valószínűség arányos a részhalmaz mértékével (hossz, terület, térfogat).

Hipotézis A teljes eseményrendszer elemei a Bayes-tételben ($B_1, B_2, \dots$), amelyek közül pontosan egy igaz.

Hisztogram Gyakorisági eloszlás grafikus ábrázolása oszlopdiagram formájában.

Kísérlet Egy folyamat vagy cselekvés megfigyelése, amelynek kimenetele bizonytalan (véletlen kísérlet).

Kizáró események Olyan események, amelyek egyszerre nem következhetnek be ($AB = \emptyset$).

Klasszikus valószínűségi mező Olyan modell, ahol az eseménytér véges számú elemi eseményből áll, és ezek mindegyike egyenlően valószínű.

Kolmogorov-féle valószínűségi mező A valószínűségszámítás axiomatikus modellje, amelyet az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ hármas alkot.

Lehetetlen esemény ($\emptyset$) Olyan esemény, amely soha nem következhet be. Valószínűsége 0.

Legvalószínűbb érték (Módusz) A binomiális eloszlásnál az a k érték, amelyre a $P(\xi = k)$ valószínűség maximális.

Metszet (Szorzat esemény) Az $A \cdot B$ esemény, amely akkor következik be, ha A és B is bekövetkezik.

Moivre-Laplace tétel Határeloszlás tétel, amely kimondja, hogy nagy kísérlet-szám esetén a binomiális eloszlás a normális eloszlással közelíthető.

Monotonitás A valószínűség azon tulajdonsága, hogy ha $A \subseteq B$, akkor $P(A) \leq P(B)$.

Nagy számok törvénye (Implikált) Elv, amely szerint a kísérletek számának növelésével a relatív gyakoriság a valódi valószínűséghez tart.

Nemnegativitás Kolmogorov egyik axiómája: minden esemény valószínűsége nagyobb vagy egyenlő, mint 0.

Normális eloszlás A legfontosabb folytonos valószínűségi eloszlás, "harang-görbe" alakú sűrűségfüggvénnyel.

Normáltság Kolmogorov egyik axiómája: a biztos esemény valószínűsége 1.

Páronkénti függetlenség Események egy halmazára igaz, ha bármely két kiválasztott esemény független egymástól. (Nem implikálja a teljes függetlenséget).

Relatív gyakoriság Egy esemény bekövetkezésének száma osztva a kísérletek számával (k/n).

Standard normális eloszlás Olyan normális eloszlás, amelynek várható értéke 0 és szórása 1. Sűrűségfüggvénye $\phi(x)$.

Standardizálás Egy valószínűségi változó transzformációja $Z = (X - \mu)/\sigma$ alakra, hogy standard normális eloszlású legyen.

Stirling-formula A faktoriális közelítésére szolgáló képlet nagy számok esetén ($n! \approx \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$).

Sűrűségfüggvény Folytonos valószínűségi változók eloszlását leíró függvény, amelynek görbéje alatti területe adja a valószínűséget.

Sigma-additivitás (σ -additivitás) A valószínűség tulajdonsága: megszámlálhatóan végtelen sok, páronként kizáró esemény összegének valószínűsége az események valószínűségének összege.

Szorzási szabály Két esemény együttes bekövetkezésének valószínűsége: $P(AB) = P(A)P(B|A)$.

Teljes eseményrendszer Események olyan rendszere, amelynek elemei páronként kizáróak, és összegük a biztos esemény.

Teljes függetlenség Események egy halmazára igaz, ha bármely részhalmazukra teljesül a szorzási tulajdonság.

Teljes valószínűség tétele Módszer egy esemény valószínűségének kiszámítására egy teljes eseményrendszer segítségével.

Unió (Összeg esemény) Az $A + B$ esemény, amely akkor következik be, ha A vagy B (vagy mindkettő) bekövetkezik.

Valószínűség (P) Egy esemény bekövetkezési esélyét kifejező számérték 0 és 1 között.

Valószínűségi változó (ξ) Függvény, amely az elemi eseményekhez számértékeket rendel.

Véletlen jelenség Olyan folyamat, amelynek kimenetele előre nem jósolható meg pontosan, de statisztikai törvényszerűségeket követ.

Hivatkozások

- [1] Fazekas István: *Valószínűségszámítás*, Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen, 2005.
- [2] Denkinger Géza: *Valószínűségszámítás: [egyetemi tankönyv]*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997.

- [3] Fazekas István: *Valószínűségszámítás és statisztika*, Egyetemi Kiadó, Debrecen, 2007.
- [4] Kucsinka Katalin: *Valószínűségszámítás és matematika statisztika*, Beregszász, 2024.
- [5] Tómacs Tibor: *Matematikai statisztika*, Eger, 2025.
- [6] Tómacs Tibor: *Matematikai statisztika gyakorlatok*, Eger, 2021.
- [7] Vetier András: *Valószínűségszámítás 1. rész*, Typotex, 2021.
- [8] Карташов М. В.: *Ймовірність, процеси, статистика*, Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», Київ, 2008.
- [9] Соловко Я.Т., Остафійчук П.Г., Гарпуль О.З., Войтик С.А.: *Теорія ймовірностей та математична статистика (конспект лекцій + тести): навчальний посібник. Вид. 2-ге, допов.*, Репозитарій / ЗВО «Університет Короля Данила», Івано-Франківськ, 2021. – 150 с.
- [10] Слюсарчук П.В.: *Теорії ймовірностей та математична статистика*, Ужгород, 2004.

Виробничо-практичне видання

« ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ I.»

Курс лекції

I. модуль

2025 р.

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики ЗУЕ ім. Ф.Ракоці II
(протокол № від «» 2025 року)

Розглянуто та рекомендовано Навчально-методичною радою
ЗУЕ ім. Ференца Ракоці II
(протокол № від « » 2025 року)

Рекомендовано до видання в електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради ЗУЕ імені Ференца Ракоці II
(протокол № від « » _____ 2025 року)

Підготовлено до видання в електронній формі (PDF) кафедрою математики та інформатики
спільно з Видавничим відділом ЗУЕ імені Ференца Ракоці II (30 с., угорською мовою)

Укладач:

Каталін Кучінка – кандидат фіз.-мат. наук, доцент, завідувач кафедри математики та інформатики ЗУЕ ім. Ференца Ракоці II

Рецензенти:

Дердь Надь – канд. фіз.-мат. наук, завідувач кафедри природничі науки Токайський університет

Адам Доровці – доктор філософії, доцент кафедри математики та інформатики ЗУЕ ім. Ференца Ракоці II

повідальні за випуск:

Мирослав СТОЙКА – завідувач кафедри математики та інформатики ЗУЕ імені Ференца Ракоці II, доцент, кандидат фізико-математичних наук

Олександр ДОБОШ – начальник Видавничого відділу ЗУЕ ім. Ф.Ракоці II

За зміст методичних вказівок відповідальність несе розробник.

Видавництво: ЗУЕ імені Ференца Ракоці II (адреса: пл. Кошута 6, м. Берегове, 90202.
Електронна пошта: foiskola@kmf.uz.ua) Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції Серія ДК ____ від ____ 2025 року

Розмір сторінок методичних вказівок: A4 (210x297мм)