

Кафедра математики та інформатики
Matematika és Informatika Tanszék

«КОМПЛЕКСНИЙ АНАЛІЗ»
(МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ)

(для студентів 3-го курсу спеціальності 4.04 Середня освіта (Математика))

KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN

(Módszertani utmutató dolgozatokhoz)

Перший (бакалаврський) / Alapképzés (BA)
(ступінь вищої освіти / a felsőoktatás szintje)

Освіта / Oktatás
(галузь знань / képzési ág)

"Математика"
"Matematika"
(освітня програма / képzési program)



Берегове / Beregszász
2025 р. / 2025

Посібник з комплексного аналізу призначений для студентів III курсу Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці спеціальності 4.04 Середня освіта (Математика) заочної форми навчання з метою організації контрольних робіт з курсу "Комплексний аналіз".

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики
(протокол № 10 від «23» червня 2025 року)

Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості вищої освіти
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол №7 від 26 серпня 2025 року)

Рекомендовано до видання у електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол №8 від 28 серпня 2025 року)

Підготовлено до видання у електронній формі (PDF) кафедрою математики та інформатики з
Видавничим відділом Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Укладач:

СТОЙКА МИРОСЛАВ ВІКТОРОВИЧ – доцент кафедри математики та інформатики
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Рецензенти:

МЕСАРОШ ЛІВІА ВАСИЛІВНА – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри
математики та інформатики ЗУІ;

БОРТОШ МАРІЯ ЮЛІЇВНА – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри
та диференціальних рівнянь ДВНЗ «УжНУ»

Відповідальний за випуск:

Олександр ДОБОШ – начальник Видавничого відділу ЗУІ ім. Ф.Ракоці II

За зміст посібника відповідальність несуть розробники.

Видавництво: Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II (адреса: пл.
Кошута 6, м. Берегове, 90202. Електронна пошта: foiskola@kmf.uz.ua)

© Мирослав Стойка, 2025

© Кафедра математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II, 2025

A komplex függvénytan a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola, III. éves, matematika szakos, nappali és levelezős hallgatóinak készült, a Komplex analízis c. tantárgy alaposabb tanulmányozásának és elsajátításának megkönnyítése céljából.

Az oktatási folyamatban történő felhasználását jóváhagyta

a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Matematika és Informatika Tanszéke

(2025. június 23, 10. számú jegyzőkönyv).

Megjelenítésre javasolta a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Minőségbiztosítási Tanácsa

(2025. augusztus 26, 7. számú jegyzőkönyv).

Elektronikus formában (PDF fájlformátumban) történő kiadásra javasolta

a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Tudományos Tanácsa

(2025. augusztus 28, 8. számú jegyzőkönyv).

Kiadásra előkészítette a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Matematika és Informatika Tanszéke és Kiadói Részlege.

Szerkesztő:

SZTOJKA MIROSLÁV – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének docense

Szakmai lektorok:

MÉSZÁROS LÍVIA – fizika és matematika tudományok kandidátusa, docens, a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének docense

BARTOS MÁRIA – fizika és matematika tudományok kandidátusa, docens, az Ungvári Nemzeti Egyetem Algebra és Diferenciál Egyenletek Tanszékének docense

A kiadásért felel:

DOBOS Sándor – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Kiadói Részlegének vezetője

A tartalomért kizárólag a jegyzet szerkesztője felel.

Kiadó: a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola (cím: 90 202, Beregszász, Kossuth tér 6. E-mail: foiskola@kmf.uz.ua)

© Sztojka Mirosláv, 2025

© A II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Matematika és Informatika Tanszéke, 2025

Tartalom

Példaváltozat megoldása.....	5
1. változat	24
2. változat	26
3. változat	28
4. változat	30
5. változat	32
6. változat	34
7. változat	36
8. változat	38
9. változat	40
10. változat	42
11. változat	44
12. változat	46
13. változat	48
14. változat	50
15. változat	52
16. változat	54
17. változat	56
18. változat	58
19. változat	60
20. változat	62
21. változat	64
22. változat	66
23. változat	68
24. változat	70
25. változat	72
26. változat	74
27. változat	76
28. változat	78
29. változat	80
30. változat	82
Irodalom.....	84

Példaváltozat megoldása

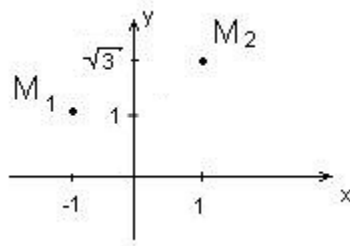
1. feladat.

1) Határozza meg a $z_1 = -1 + i$ és $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

2) Keresse meg: a). $\bar{z}_1 \cdot z_2^2$; b). $\frac{z_2}{z_1}$; c). $\sqrt[3]{z_1}$!

Megoldás.

1) Ábrázoljuk a komplex síkon a komplex számokat. A $z_1 = -1 + i$ számnak az $M_1(-1; 1)$ pont felel meg, míg a $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ -nek az $M_2(1; \sqrt{3})$ pont.



Az abszolútérték és argumentum meghatározásához a következő képleteket használjuk:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ és } \varphi = \arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & \text{ha } x > 0, \\ \arctg \frac{y}{x} + \pi, & \text{ha } x < 0, y > 0, \\ \arctg \frac{y}{x} - \pi, & \text{ha } x < 0, y < 0. \end{cases}$$

Kapjuk:

$$r_1 = |z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \varphi_1 = \arg z_1 = \arctg \frac{-1}{1} + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4},$$

$$r_2 = |z_2| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2, \quad \varphi_2 = \arg z_2 = \arctg \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}.$$

Ahhoz, hogy áttérjünk a komplex szám algebrai alakjától annak trigonometriai és exponenciális alakjához a következő képleteket:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \text{ és } z = re^{i\varphi}.$$

Így kapjuk:

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right),$$

$$z_1 = \sqrt{2} e^{i \frac{3\pi}{4}},$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right),$$

$$z_1 = 2 e^{i \frac{\pi}{3}}.$$

$$2) \text{ a) } \bar{z}_1 \cdot z_2^2 = (-1-i) \cdot (1+\sqrt{3}i)^2 = (-1-i) \cdot (1^2 + 2\sqrt{3}i + (\sqrt{3}i)^2) = (-1-i) \cdot (1+2\sqrt{3}i-3) =$$

$$= (-1-i) \cdot (2\sqrt{3}i-2) = -2\sqrt{3}i + 2 - 2\sqrt{3}i^2 + 2i = -2\sqrt{3}i + 2 + 2\sqrt{3} + 2i =$$

$$= (2+2\sqrt{3}) + (2-2\sqrt{3})i;$$

$$\text{b) } \frac{z_2}{z_1} = \frac{1+\sqrt{3}i}{-1+i} = \frac{(1+\sqrt{3}i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{-1-i-\sqrt{3}i-\sqrt{3}i^2}{(-1)^2-i^2} = \frac{-1-i-\sqrt{3}i+\sqrt{3}}{1+1} =$$

$$= \frac{-1+\sqrt{3}-(1+\sqrt{3})i}{2} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}i;$$

c) Használjuk a következő képletet

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, (n-1).$$

$$\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{-1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} \right)$$

$$\text{ha } k=0: \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{3\pi/4}{3} + i \sin \frac{3\pi/4}{3} \right) = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt[6]{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right);$$

$$\text{ha } k=1: \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{3\pi/4 + 2\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi/4 + 2\pi}{3} \right) = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right);$$

$$\text{ha } k=2: \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{3\pi/4 + 4\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi/4 + 4\pi}{3} \right) = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right) =$$

$$= \sqrt[6]{2} \left(\cos \left(-\frac{5\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{12} \right) \right).$$

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

$$\text{a) } f(z) = \cos z, \quad z_0 = \frac{\pi}{3} + 3i;$$

$$\text{b) } f(z) = \operatorname{Arctgz}, z_0 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}!$$

Megoldás.

$$\text{a) } \cos\left(\frac{\pi}{3} + 3i\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos 3i - \sin\frac{\pi}{3}\sin 3i = \frac{1}{2}\operatorname{ch}3 - i\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sh}3;$$

$$\text{b) A meghatározás szerint } \operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i-z}{i+z}.$$

$$\frac{i-z}{i+z} = \frac{i - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{i + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\frac{1}{2} + i\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{1}{2} + i\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = i(2 + \sqrt{3}),$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Arctg} \frac{1-i\sqrt{3}}{2} &= -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i-z}{i+z} = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} i(2 + \sqrt{3}) = -\frac{i}{2} \left(\ln|i(2 + \sqrt{3})| + i \arg(i(2 + \sqrt{3})) + 2\pi ki \right) = \\ &= \left| i(2 + \sqrt{3}) \right| = 2 + \sqrt{3} \quad \left| \arg(i(2 + \sqrt{3})) = \frac{\pi}{2} \right| = -\frac{i}{2} \left(\ln(2 + \sqrt{3}) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) - \frac{i}{2} \ln(2 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \sin z^2$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

Megoldás.

Meghatározzuk az $f(z)$ függvény valós és képzetes részét:

$$\begin{aligned} f(z) = \sin z^2 &= \sin(x + iy)^2 = \sin(x^2 - y^2 + i2xy) = \sin(x^2 - y^2)\cos(i \cdot 2xy) + \\ &+ \cos(x^2 - y^2)\sin(i \cdot 2xy) = \sin(x^2 - y^2)\operatorname{ch}(2xy) + i\cos(x^2 - y^2)\operatorname{sh}(2xy). \end{aligned}$$

Így kapjuk:

$$u = \sin(x^2 - y^2)\operatorname{ch}(2xy);$$

$$v = \cos(x^2 - y^2)\operatorname{sh}(2xy).$$

Megkeressük a $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ parciális deriváltakat, és meghatározzuk azon pontokat,

melyek környezetében léteznek és folytonosak lesznek, és azokat melyekben teljesülnek a Cauchy-Riemann feltételek:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (\sin(x^2 - y^2)\operatorname{ch}(2xy))'_x = 2x\cos(x^2 - y^2)\operatorname{ch}(2xy) + 2y\sin(x^2 - y^2)\operatorname{sh}(2xy),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = (\cos(x^2 - y^2)\operatorname{sh}(2xy))'_y = 2y\sin(x^2 - y^2)\operatorname{sh}(2xy) + 2x\cos(x^2 - y^2)\operatorname{ch}(2xy),$$

vagyis $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ minden valós x és y értékére, és folytonosak az R^2 síkon.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (\sin(x^2 - y^2)ch(2xy))'_y = -2y \cos(x^2 - y^2)ch(2xy) + 2x \sin(x^2 - y^2)sh(2xy),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = (\cos(x^2 - y^2)sh(2xy))'_x = -2x \sin(x^2 - y^2)sh(2xy) + 2y \cos(x^2 - y^2)ch(2xy),$$

vagyis $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ minden valós x és y értékére, és folytonosak az R^2 síkon.

Mivel a Cauchy-Riemann feltételek teljesülnek minden (x, y) -ra és a $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ parciális deriváltak folytonosak az (x, y) tetszőleges környezetében, ezért az $f'(z)$ derivált létezik a C sík tetszőleges $z = x + iy$ pontjában.

Meghatározzuk a deriváltját:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 2x \cos(x^2 - y^2)ch(2xy) + 2y \sin(x^2 - y^2)sh(2xy) - \\ &- i \cdot 2x \sin(x^2 - y^2)sh(2xy) + i \cdot 2y \cos(x^2 - y^2)ch(2xy) = \\ &= 2x(\cos(x^2 - y^2)\cos(i \cdot 2xy) - \sin(x^2 - y^2)\sin(i \cdot 2xy)) + 2iy(-\sin(x^2 - y^2)\sin(i \cdot 2xy) + \\ &+ \cos(x^2 - y^2)\cos(i \cdot 2xy)) = 2x \cos(x^2 - y^2 + 2ixy) + 2yi \cos(x^2 - y^2 + 2ixy) = \\ &= 2x \cos(x + iy)^2 + 2yi \cos(x + iy)^2 = 2(x + iy) \cos(x + iy)^2 = 2z \cos z^2. \end{aligned}$$

Kapjuk, $f'(z) = (\sin z^2)' = 2z \cos z^2, \forall z \in C$.

A derivált valós része:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \cos(x^2 - y^2)ch(2xy) + 2y \sin(x^2 - y^2)sh(2xy),$$

és képzetes része:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2x \sin(x^2 - y^2)sh(2xy) + 2y \cos(x^2 - y^2)ch(2xy).$$

4. feladat. Határozza meg a $z = 5tgt - 3i \sec t$ görbe típusát!

Megoldás.

$$z(t) = x(t) + iy(t) = 5tgt - 3i \sec t.$$

$$\text{Innen } \begin{cases} x = 5tgt, \\ y = -3 \sec t. \end{cases}$$

$$\text{Kifejezzük a } t\text{-ét minden egyenletből: } \begin{cases} t = \arctg \frac{x}{5}, \\ t = \arccos \left(-\frac{3}{y} \right). \end{cases}$$

Elhagyjuk a t -ét:

$$\arccos\left(-\frac{3}{y}\right) = \operatorname{arctg}\frac{x}{5}.$$

$$\cos\left(\arccos\left(-\frac{3}{y}\right)\right) = \cos\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{5}\right),$$

$$\cos\left(\pi - \arccos\frac{3}{y}\right) = \frac{5}{\sqrt{x^2 + 5^2}}, \quad -\frac{3}{y} = \frac{5}{\sqrt{x^2 + 5^2}},$$

$$\frac{25y^2}{9} = x^2 + 25,$$

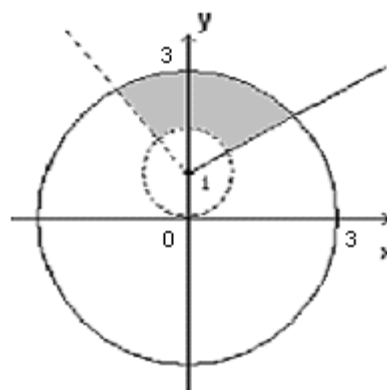
$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{25} = 1 - \text{hiperbola egyenlete.}$$

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

$$\text{a). } \begin{cases} 1 < |z - i| \leq 3, \\ \frac{\pi}{6} \leq \arg(z - i) < \frac{2\pi}{3}; \end{cases}$$

$$\text{b). } \begin{cases} |z^2 - 4| \leq 4, \\ \operatorname{Re} z > 1! \end{cases}$$

a). A keresett tartomány a $1 < |z - i| \leq 3$ gyűrű és a $\frac{\pi}{6} \leq \arg(z - i) < \frac{2\pi}{3}$ szög belső részének metszete lesz:



b). A $|z^2 - 4| = 4$ görbét descartes koordináta-rendszerben írjuk fel:

$$z^2 - 4 = (x + iy)^2 - 4 = x^2 + 2ixy - y^2 - 4 = (x^2 - y^2 - 4) + 2ixy$$

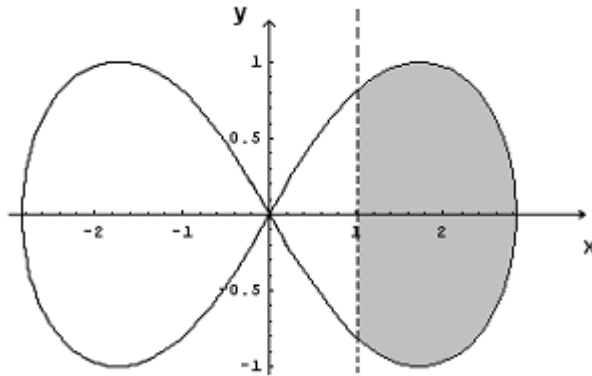
$$\begin{aligned} |z^2 - 4| &= \sqrt{(x^2 - y^2 - 4)^2 + (2xy)^2} = \sqrt{(x^2 - y^2)^2 - 8(x^2 - y^2) + 16 + 4x^2y^2} = \\ &= \sqrt{(x^2 + y^2)^2 - 8(x^2 - y^2) + 16}; \end{aligned}$$

$$\text{Innen, } \sqrt{(x^2 + y^2)^2 - 8(x^2 - y^2) + 16} = 4.$$

$$\text{Vagy } (x^2 + y^2)^2 - 8(x^2 - y^2) = 0,$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 8(x^2 - y^2) - \text{Bernoulli lemniszkáta.}$$

Nyilvánvaló, hogy a $|z^2 - 4| \leq 4$ azon pontokat határozza meg, melyek a Bernoulli lemniszkátán és annak belsejében helyezkednek el. A $\operatorname{Re} z > 1$ egyenlőtlenség azon pontokat határozza meg, melyek az $x = 1$ egyenes jobb oldalán helyezkednek el. A keresett tartomány ezen tartományok metszete lesz:



6. feladat. Lehet-e az $u = e^{2x} \cos 2y$ függvény valós része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 1$!

Megoldás.

Meghatározzuk a parciális deriváltakat:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2x} \cos 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2e^{2x} \sin 2y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4e^{2x} \cos 2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4e^{2x} \cos 2y.$$

Kapjuk, hogy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4e^{2x} \cos 2y - 4e^{2x} \cos 2y = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Tehát az $u(x, y)$ harmonikus a $\mathbb{C}$ síkon, és létezik olyan $f(z)$ analitikus függvény, melyre $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Cauchy-Riemann feltételek szerint:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2x} \cos 2y, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2e^{2x} \sin 2y. \quad (2)$$

Integráljuk az (1) egyenletet y változó szerint, így a képzetes részt kapjuk a $C(x)$ összeadandó pontosságával:

$$v = e^{2x} \sin 2y + C(x). \quad (3)$$

Deriváljuk a (3)-st x szerint:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2e^{2x} \sin 2y + C'(x).$$

A (2)-hez való összevetéssel, kapjuk, hogy $C'(x) = 0$, inenn pedig $C(x) = A$.

Tehát, kapjuk

$$v = e^{2x} \sin 2y + A \text{ и}$$

$$\begin{aligned} f(z) = u + iv &= e^{2x} \cos 2y + ie^{2x} \sin 2y + iA = e^{2x} (\cos 2y + i \sin 2y) + iA = e^{2x} e^{2iy} + iA = \\ &= e^{2(x+iy)} + iA = e^{2z} + iA. \end{aligned}$$

mivel $f(0) = 1$, kapjuk $A = 0$.

Végül, $f(z) = e^{2z}$.

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik

$$\text{a } w = \frac{1}{z} \text{ leképezés által, ha } D: \begin{cases} |\operatorname{Re} z| \leq 1, \\ \operatorname{Im} z \geq 0 \end{cases}!$$

Megoldás.

Először megkeressük a D tartomány L határvonalát, és ezután a D tartomány tetszőleges pontjának képét határozzuk meg.

A görbe kép egyenlet meghatározásának szabálya

Legyen a z tartományban az $F(x, y) = 0$ görbe megadva. Hogy megkeressük a görbe kép egyenletét $\Phi(u, v) = 0$ a w tartományban $w = f(z) = u + iv$ leképezés során, ki kel vonnunk az x és y változókat az egyenletekből:

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \\ F(x, y) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Ha a görbe paraméteres egyenlettel van megadva, vagyis:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{vagy} \quad z = z(t) = x(t) + iy(t),$$

akkor a képenek paraméteres egyenlete a $w = f(z) = u + iv$ leképezés során a következő lesz:

$$\begin{cases} u = u(x(t), y(t)) = U(t) \\ v = v(x(t), y(t)) = V(t) \end{cases}$$

A megadott feladatban a D tartomány határvonala három részből tevődik össze: $L_1 : x = -1, y \geq 0$, $L_2 : x = 1, y \geq 0$, $L_3 : y = 0, -1 \leq x \leq 1$. Megkeressük annak képét a megadott leképezés során.

Kiírjuk a függvény valós és képzetes részét.

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2};$$

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, v = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Megkeressük a határvonal első részének képét. Ehhez összeállítjuk az (1) egyenletrendszert:

$$\begin{cases} u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \\ v = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \\ x = -1, y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = -\frac{1}{1 + y^2}, \\ v = -\frac{y}{1 + y^2} \end{cases}$$

Négyzetre emeljük az egyenletrendszer első és a második egyenletét:

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{1 + y^2} = -u.$$

$$y \geq 0 \Rightarrow v \leq 0,$$

$$u = -\frac{1}{1 + y^2} \leq 0$$

Végül a határvonal részének képe $(u + \frac{1}{2})^2 + v^2 = \frac{1}{4}$, ha $u \leq 0, v \leq 0$.

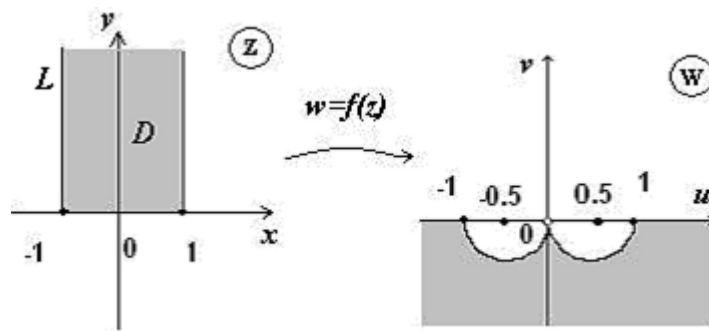
Hasonlóan meghatározzuk a határvonal második részének képét $L_2 : (u - \frac{1}{2})^2 + v^2 = \frac{1}{4}$, ha $u \geq 0, v \leq 0$.

Az L_3 képet az alábbi egyenletrendszerből határozzuk meg:

$$\begin{cases} u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \\ v = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{x}, \\ v = 0 \end{cases} \\ y = 0, -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Tehát, az $L_3: v = 0, u \geq 1$, ha $0 < x \leq 1$ és $u \leq -1$ ha $-1 \leq x < 0$; $u \neq 0$. Ábrázoljuk az L_1, L_2, L_3 határvonal részeket a W síkon.

A D tartomány képének ábrázolásához a W síkon veszünk egy kontroll pontot. A $z = i$ pont a $w = -i$ pontba képződik.



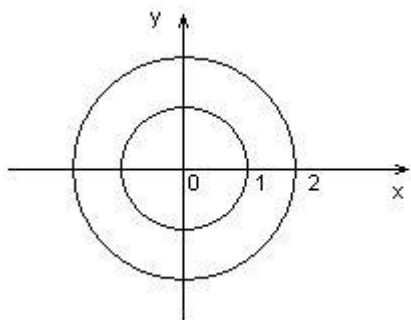
8. feladat. Keresse meg az alábbi függvények Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2}, z_0 = 0;$

b) $f(z) = \frac{2z+1}{(z-1)(z+2)}, z_0 = 1.$

Megoldás.

a) Az $f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2}$ függvénynek két szinguláris pontja van: $z_1 = 1$ és $z_2 = -2$. Jelöljük azokat a Z síkon, és két $z_0 = 0$ középpontú körvonalat ábrázolunk, melyek megfelelően $z_1 = 1$ és $z_2 = -2$ ponton haladnak át. Tehát van három olyan tartomány, melyekben az $f(z)$ függvény analitikus lesz:



$$1) |z| < 1;$$

$$2) 1 < |z| < 2 \text{ gyűrű;}$$

$$3) |z| > 2 \text{ tartomány, mely a } |z| \leq 2 \text{ körlap külső része.}$$

Megkeressük az $f(z)$ függvény Laurent sorát ezen tartományok mindegyikében a következő képletet használva:

$$(1-t)^{-1} = \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots + t^n + \dots \quad (1)$$

minden $|t| < 1$.

Az $f(z)$ függvényt elemi törtfüggvények összegeként írjuk fel:

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+2}.$$

1) Vizsgáljuk a $|z| < 1$ körlapot. A $\frac{1}{z-1}$ és $\frac{1}{z+2}$ elemi törtfüggvényeket pedig az $\frac{1}{1-t}$ alakban, ahol $|t| < 1$ amikor $|z| < 1$. Az $f(z)$ függvényt a következő alakban írjuk fel:

$$f(z) = -\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{z}{2}}. \text{ Az ilyen törtfüggvényekhez már használhatjuk az (1) képletet.}$$

A $|z| < 1$ tartományban, az (1) képlet szerint $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n + \dots$. Mivel $|z| < 1$

és annál inkább $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$ (ha $|z| < 1$, akkor annál inkább $|z| < 2$), tehát, az (1) képlet szerint

$$\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{8} + \dots + (-1)^n \frac{z^n}{2^n} + \dots$$

Tehát,

$$-\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{z}{2}} = -1 - z - z^2 - z^3 - \dots - z^n - \dots + \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} + \dots + (-1)^n \frac{z^n}{2^{n+1}} + \dots =$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{3}{4}z - \frac{7}{8}z^2 - \frac{15}{16}z^3 - \dots - \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}z^n - \dots = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}z^n = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{2^{n+1}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - 1 \right) z^n$$

A kapott kifejtés csak a Laurent sor szabályos részét tartalmazza.

2) Vizsgáljuk a $1 < |z| < 2$ gyűrűt. Ebben a tartományban felírjuk az $f(z)$ függvényt az alábbi alakban $f(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{z}{2}}$. A törtek nevezőiben az $1 - t$ alakú kifejezéseket írtuk fel, ahol $|t| < 1$.

Mivel $|z| > 1$, ezért $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ és az (1) képlet szerint $\frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots + \frac{1}{z^n} + \dots$. Mivel

$|z| < 2$, ezért az előző esethez hasonlóan $\frac{1}{1 + \frac{z}{2}} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{8} + \dots + (-1)^n \frac{z^n}{2^n} + \dots$.

Tehát,

$$\frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{z}{2}} =$$

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots + \frac{1}{z^n} + \dots + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}z^2 - \frac{1}{16}z^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

A kapott kifejtés a fő- és szabályos részét is tartalmazza a Laurent sornak.

3) Vizsgáljuk a $|z| > 2$ tartományt. Ezen tartományban $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, ezért az (1) képlet szerint

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots + \frac{1}{z^n} + \dots$$

A vizsgált tartományban $\left|\frac{z}{2}\right| > 1$, vagyis $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$ ezért

$$\frac{1}{1 + \frac{z}{2}} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{8} + \dots + (-1)^n \frac{z^n}{2^n} + \dots$$

Az $f(z)$ függvényt a következő alakban írjuk fel $f(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{z}{2}}$. A kapott felírás

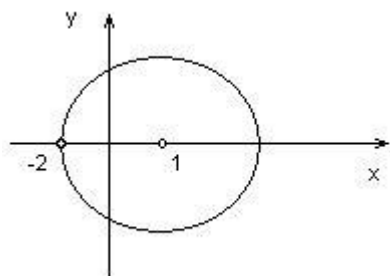
szerint kapjuk

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots + \frac{1}{z^n} + \dots + 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{8} + \dots + (-1)^n \frac{z^n}{2^n} + \dots \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{n-1}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n-1} \cdot 2^{n-1}}{z^n}. \end{aligned}$$

A kapott kifejtés csak a Laurent sor fő részét tartalmazza.

b) Az $f(z)$ függvénynek 2 szinguláris pontja van $z_1 = 1$ és $z_2 = -2$, melyeket a Z síkon jelölünk meg. A $z_1 = 1$ pont egybeesik a $z_0 = 1$. Húzunk egy $z_0 = 1$ középpontú körvonalat, mely a $z_2 = -2$ ponton halad át.

Megfelelően két olyan tartomány létezik, melyekben az $f(z)$ függvény analitikus:



$$1) 1 < |z - 1| < 3 \text{ gyűrű;}$$

$$2) |z - 1| > 3$$

Megkeressük az $f(z)$ függvény Laurent sorát mindegyik tartományban az (1) képlet segítségével. Ehhez felírjuk az $f(z)$ függvényt elemi törtfüggvények összegeként:

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+2}.$$

1) Először kifejtjük az $f(z)$ függvényt a $z-1$ hatványai szerint a $1 < |z-1| < 3$ tartományban. Az első törtfüggvény már hatványa a $z-1$ -nek. A második törtfüggvényben pedig elvégezzük a $z-1=t$ helyettesítést, akkor $z=t+1$ és $\frac{1}{z+2} = \frac{1}{t+3}$. A $\frac{1}{t+3}$ törtfüggvény a t hatványai szerint, hasonlóan az előző feladathoz. Amikor $0 < |t| < 3$, akkor a következő felírást használjuk:

$$\frac{1}{t+3} = \frac{1}{3} \frac{1}{1+\frac{t}{3}} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{t}{3} + \frac{t^2}{9} - \frac{t^3}{27} + \dots + (-1)^n \frac{t^n}{3^n} + \dots \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot t^n}{3^{n+1}};$$

Fordítva, visszahelyettesítjük a változót. Ha $0 < |z-1| < 3$, akkor az $f(z)$ függvény a következő alakot ölti:

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{3} \frac{1}{1+\frac{z-1}{3}} = \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(z-1)^n}{3^{n+1}}.$$

A kapott kifejtés a Laurent sor fő- és szabályos részét is tartalmazza.

2) Hasonlóan, a $z-1=t$ helyettesítéskor, az $\frac{1}{t+3}$ törtfüggvény kifejtése $|t| > 3$ tartományban a következő alakú lesz:

$$\frac{1}{t+3} = \frac{1}{t} \frac{1}{1+\frac{3}{t}} = \frac{1}{t} \left(1 - \frac{3}{t} + \frac{9}{t^2} - \frac{27}{t^3} + \dots + (-1)^n \frac{3^n}{t^n} + \dots \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{3^{n-1}}{t^n}$$

Fordítva, visszahelyettesítjük a változót, amikor $|z-1| > 3$, akkor az $f(z)$ függvény kifejtése a következő alakú lesz:

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{z-1}} = \frac{1}{z-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{3^{n-1}}{(z-1)^n} = \frac{2}{z-1} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{3^{n-1}}{(z-1)^n}.$$

Az első esetben a Laurent sor fő része csak egy összeadandót tartalmaz. A második esetben pedig, a Laurent sor csak a fő részt tartalmazza.

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z) = e^{\frac{z}{z-1}}$ függvényt a $z=1$ szinguláris pont környezetében!

Megoldás. Használjuk a már ismert kifejtést:

$$f(z) = e^{\frac{z}{z-1}} = e^{1+\frac{1}{z-1}} = e \cdot e^{\frac{1}{z-1}} = e \left(1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!(z-1)^2} + \dots + \frac{1}{n!(z-1)^n} + \dots \right) = e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(z-1)^n}.$$

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjai, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^3} + \frac{2}{z};$

b) $f(z) = \frac{1 - \cos 6z}{z^2};$

c) $f(z) = (z-i)^3 \sin \frac{1}{2(z-i)}!$

Megoldás.

a) A $z_0 = 0$ a függvény szinguláris pontja. A típusának meghatározásához kifejtjük Laurent sorba a függvényt a z hatványai szerint:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^z - 1}{z^3} + \frac{2}{z} = \left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \right) \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^3} + \frac{2}{z} = \\ &= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{1!z^2} + \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \dots + \frac{z^{n-3}}{n!} + \dots - \frac{1}{z^3} + \frac{2}{z} = \frac{1}{1!z^2} + \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \dots + \frac{z^{n-3}}{n!} + \dots + \frac{2}{z} = \\ &= \underbrace{\frac{5}{2z} + \frac{1}{1!z^2}}_{\text{fő rész}} + \underbrace{\frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \dots + \frac{z^{n-3}}{n!}}_{\text{szabályos rész}} + \dots \end{aligned}$$

A Laurent sor fő része véges számú összeadandót tartalmaz, vagyis a $z_0 = 0$ – pólus pont lesz. A negatív hatvány magasabb rendje ($n=2$) a pólus pont rendjét határozza meg. Tehát, a $z_0 = 0$ 2.

rendű pólus pont. A reziduumot a $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = C_{-1}$ képlettel határozzuk meg, akkor $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \frac{5}{2}$.

b) A $z_0 = 0$ a függvény szinguláris pontja. A típusának meghatározásához megvizsgáljuk az alábbi határértéket:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6z}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 3z}{z^2} = 18,$$

vagyis $z_0 = 0$ kiküszöbölhető szinguláris pont, és így $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 0$.

c) A $z_0 = i$ a függvény szinguláris pontja. A szinguláris pont típusának meghatározásához a függvényt Laurent sorba fejtsük a $z - i$ hatványai szerint:

$$f(z) = (z-i)^3 \sin \frac{1}{2(z-i)} = (z-i)^3 \left(\frac{1}{2(z-i)} - \frac{1}{3!(2(z-i))^3} + \frac{1}{5!(2(z-i))^5} - \dots \right. \\ \left. + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!(2(z-i))^{2n+1}} + \dots \right) = \frac{(z-i)^2}{2} - \frac{1}{2^3 3!} + \frac{1}{5! 2^5 (z-i)^2} - \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)! 2^{2n+1} (z-i)^{2n-2}} + \dots$$

fő rész

A Laurent sor fő része végtelenül sok tagot tartalmaz, vagyis a $z_0 = i$ lényeges szinguláris pont.

Akkor $\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = C_{-1} = 0$, mivel a $\frac{1}{z-i}$ mellett lévő együttható nullával egyenlő.

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{AB} z^3 dz$, ahol AB egy egyenes szakasza, $z_A = 0$, $z_B = i$;

b) $\int_{ABC} \bar{z} dz$, ahol ABC egy tört egyenes, $z_A = 0$, $z_B = i$, $z_C = 1+i$;

c) $\int_L z^2 dz$, ahol L egy körív $|z| = 1$, $0 \leq \arg z \leq \pi$;

d) $\int_L e^{\bar{z}} dz$, ahol L az $y = -x$ egyenes szakasza, mely az A és B pontot köti össze, $z_A = 0$ és

$$z_B = \pi - i\pi!$$

Megoldás.

a) Mivel az $f(z) = z^3$ függvény mindenütt analitikus, ezért Newton-Leibniz képlete használható:

$$\int_{AB} z^3 dz = \int_0^i z^3 dz = \frac{z^4}{4} \Big|_0^i = \frac{i^4}{4} - 0 = \frac{1}{4}.$$

b) Az $f(z) = \bar{z}$ függvény mindenütt folytonos, az ABC törtegyenes szakaszonként sima görbe, akkor az adott integrál kiszámítása két görbementi integrál kiszámításához vezethető le az alábbi képlet szerint: :

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} u dx - v dy + i \int_{\Gamma} v dx + u dy.$$

Innen kapjuk,

$$\int_{ABC} \bar{z} dz = \int_{ABC} (x - iy)(dx + idy) = \int_{ABC} x dx + y dy + i \int_{ABC} -y dx + x dy.$$

A görbementi integrál additív tulajdonsága szerint:

$$\int_{ABC} f(z) dz = \int_{AB} f(z) dz + \int_{BC} f(z) dz.$$

Az AB szakaszon $x = 0$, vagyis $dx = 0$, $y \in [0, 1]$. Kapjuk $\int_{AB} \bar{z} dz = \int_{AB} y dy = \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$.

A BC szakaszon $y = 1$, $dy = 0$, $0 \leq x \leq 1$. Kapjuk

$$\int_{BC} \bar{z} dz = \int_{BC} x dx + i \int_{BC} (-1) dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - i x \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - i.$$

A kereset integrál $\int_{ABC} \bar{z} dz$ egyenlő $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - i = 1 - i$.

c) Legyen $z = e^{i\varphi}$, akkor $dz = ie^{i\varphi} d\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$. Kapjuk,

$$\int_L z^2 dz = \int_0^\pi e^{2i\varphi} ie^{i\varphi} d\varphi = \frac{1}{3} e^{3i\varphi} \Big|_0^\pi = \frac{1}{3} e^{3i\pi} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} e^{i\pi} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} (\cos \pi + i \sin \pi) - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}.$$

d) Megadjuk az L -t paraméteres alakban: $x = t$, $y = -t$, $z = t - it$, $0 \leq t \leq \pi$.

Paraméteres alakban megadott $z(t) = x(t) + iy(t)$ $t_1 \leq t \leq t_2$ görbe esetében a következő képlet igaz:

$$\int_L f(z) dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t)) z'(t) dt.$$

Innen kapjuk:

$$\int_L \bar{z} dz = \int_0^\pi e^{t+it} (1-i) dt = \frac{1-i}{1+i} e^{(1+i)t} \Big|_0^\pi = -i (e^\pi (\cos \pi + i \sin \pi) - 1) = (e^\pi + 1)i.$$

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\oint_{|z+1|=2} \frac{\sin z dz}{z(z+1)^3};$

$$b) \oint_{|z|=2\pi} \frac{z \cos z \, dz}{z^2 - \pi^2} !$$

Megoldás.

a). Az integrálandó függvénynek az integrálási kontúr belsejében két szinguláris pontja van $z = 0$

$$\text{és } z = -1. \text{ Ezért } \oint_L \frac{\sin z \, dz}{z(z+1)^3} = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname{Res}_{z=-1} f(z) \right).$$

Meghatározzuk a szinguláris pontok típusát és azokban lévő reziduumokat.

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z(z+1)^3} = 1, \text{ innen } \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 0.$$

$$\lim_{z \rightarrow -1} \frac{\sin z}{z(z+1)^3} = \infty, \text{ innen } z = -1 \text{ pólus pont.}$$

Mivel $\lim_{z \rightarrow -1} \frac{\sin z}{z(z+1)^3} (z+1)^3 = 1$, ezért $z = -1$ pólus, melynek rendje $n = 3$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=-1} f(z) &= \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d^2}{dz^2} \left[(z+1)^3 \frac{\sin z}{z(z+1)^3} \right] = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow -1} \left[\frac{\sin z}{z} \right]'' = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow -1} \left[\frac{z \cdot \cos z - \sin z}{z^2} \right]' = \\ &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow -1} \left[\frac{z^2 (\cos z - z \sin z - \cos z) - 2z(z \cdot \cos z - \sin z)}{z^4} \right] = -\frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow -1} \left[\frac{z^2 \cdot \sin z + 2z \cos z - 2 \sin z}{z^3} \right] = \\ &= \frac{\sin 1 - 2 \cos 1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Végül kapjuk, } \oint_L \frac{\sin z \, dz}{z(z+1)^3} = 2\pi i \left(\frac{\sin 1 - 2 \cos 1}{2} \right) = \pi i (\sin 1 - 2 \cos 1).$$

b). Az integrálandó függvénynek az integrálási kontúr belsejében két szinguláris pontja van $z = \pi$

$$\text{és } z = -\pi. \text{ Tehát } \oint_L \frac{z \cos z \, dz}{z^2 - \pi^2} = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=\pi} f(z) + \operatorname{Res}_{z=-\pi} f(z) \right).$$

Mivel $z = \pi$ és $z = -\pi$ első rendű pólus pontok, ezért a reziduumok kiszámítására a következő

képletet használjuk: $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$, ahol $\varphi(z) = z \cos z$, $\psi(z) = z^2 - \pi^2$, $\psi'(z) = 2z$.

$$\operatorname{Res}_{z=\pi} f(z) = \frac{z \cos z}{2z} \Big|_{z=\pi} = -\frac{1}{2}, \quad \operatorname{Res}_{z=-\pi} f(z) = \frac{z \cos z}{2z} \Big|_{z=-\pi} = -\frac{1}{2}$$

Végül kapjuk, hogy

$$\oint_L \frac{z \cos z \, dz}{z^2 - \pi^2} = 2\pi i \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = -2\pi i.$$

13. feladat Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

a) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx;$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin 5x}{x^2 + 4} dx;$

c) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2 + \cos x)^2} !$

Megoldás.

a) A következő szabály van az integrálok kiszámítására:

Legyen $R(x)$ egy racionális törtfüggvény, $R(x) = \frac{P_k(x)}{Q_n(x)}$, ahol $P_k(x)$ és $Q_n(x)$

megfelelően k -ad és n -ed fokú polinomok. Ha az $R(x)$ folytonos a valós számok halmazán és $n \geq k + 2$, akkor

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx = 2\pi i \sigma$$

ahol σ az $R(z) = \frac{P_k(z)}{Q_n(z)}$ függvény reziduumjainak összegét jelöli az összes pólus pontban, melyek a fenti félsíkban fekszenek.

Mivel az $R(x) = \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2}$ integrálandó függvény páros, ezért

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

Legyen $R(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2}$, mely a valós halmazon (amikor $z = x$) egybeesik az $R(x)$

integrálandó függvénnyel. Az $R(z)$ szinguláris pontjai a $z_1 = i$ és $z_2 = -i$. Közülük csak a $z_1 = i$ fekszik a felső félsíkban és ez egy 2. rendű pólus pont. Az $R(z)$ függvény reziduumja az i pólus pontban egyenlő

$$\operatorname{Res} R(i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} (R(z)(z - i)^2) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2}{(z + i)^2} \right) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{2iz}{(z + i)^3} = \frac{1}{4i}.$$

Mivel a felső félsíkban csak egy szinguláris pont van, ezért $\sigma = \frac{1}{4i}$. Kapjuk, hogy

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{4}.$$

b) A következő szabály van az integrálok kiszámítására:

Legyen $R(x)$ egy racionális törtfüggvény, $R(x) = \frac{P_k(x)}{Q_n(x)}$, ahol $P_k(x)$ és $Q_n(x)$

megfelelően k -ad és n -ed fokú polinomok. Ha az $R(x)$ függvény folytonos a valós számok halmazán, és $n \geq k+1$, λ tetszőleges valós szám, akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos \lambda x dx = \operatorname{Re}\{2\pi i \sigma_1\}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin \lambda x dx = \operatorname{Im}\{2\pi i \sigma_1\}$$

ahol σ_1 $R(z) \cdot e^{i\lambda z}$ függvény rezidumjainak összege az összes pólus pontban, melyek a felső félsíkban fekszenek.

Mivel $f(x) = \frac{x \sin 5x}{x^2 + 4}$ páros függvény, ezért $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin 5x}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin 5x}{x^2 + 4} dx$. Legyen $f(z)$

$= R(z) \cdot e^{5iz}$, ahol a $R(z)$ a valós számok halmazán (amikor $z = x$) egybeesik az $R(x)$:

$f(z) = \frac{x}{x^2 + 4} \cdot e^{5iz}$. Leszögezzük, ha $z = x$, akkor $\operatorname{Im} f(z) = f(x)$. Az $f(z)$ függvény a felső

félsíkban $z = 2i$ első rendű pólus pontja van. Az $f(z)$ reziduumja ebben a pólusban egyenlő

$$\operatorname{Res} f(2i) = \lim_{z \rightarrow 2i} \left(\frac{z e^{5iz}}{z^2 + 4} \cdot (z - 2i) \right) = \frac{1}{2} e^{-10}.$$

Innen kapjuk, hogy $\sigma_1 = \frac{1}{2} e^{-10}$ és

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin 5x}{x^2 + 4} dx = \operatorname{Im} \left\{ 2\pi i \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-10} \right\} = \pi e^{-10}.$$

c) A következő szabály van a komplex változós trigonometrikus függvényektől való integrálok kiszámítására:

Legyen R egy racionális törtfüggvény, melynek argumentuma $\sin x$ és $\cos x$, $x \in [0, 2\pi]$ és az R függvény folytonos az integrálandó szakaszon belül. Legyen $z = e^{ix}$, innen

$dx = \frac{dz}{iz}$, $\cos x = \frac{z^2 + 1}{2z}$, $\sin x = \frac{z^2 - 1}{2iz}$, $|z| = 1$. Akkor

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx = \oint_{|z|=1} F(z) dz = 2\pi i \sigma$$

ahol σ az $e F(z)$ függvény rezidumjainak összege a pólus pontokban, melyek a $|z|=1$ körvonal belsejében fekszenek.

A vizsgált integrálban elvégezzük a következő helyettesítést: $z = e^{ix}$. Az átalakítás után kapjuk: $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2 + \cos x)^2} = \frac{4}{i} \oint_{|z|=1} \frac{z dz}{(z^2 + 4z + 1)^2}$. Az origó középpontú és 1 sugarú körvonal belsejében

csak a $z_1 = -2 + \sqrt{3}$ szinguláris pontja fekszik az $F(z) = \frac{z}{(z^2 + 4z + 1)^2}$ függvénynek, mely

másodrendű pólus pont. Az $F(z)$ függvény reziduuma a $z_1 = -2 + \sqrt{3}$ pontban egyenlő

$\text{Res} F(-2 + \sqrt{3}) = \lim_{z \rightarrow -2 + \sqrt{3}} \frac{d}{dz} \left(\frac{z(z + 2 - \sqrt{3})^2}{(z + 2 - \sqrt{3})^2 (z + 2 + \sqrt{3})^2} \right) = \frac{1}{2\sqrt{3}^3}$. Innen kapjuk, hogy

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2 + \cos x)^2} = 2\pi i \cdot \frac{4}{i} \cdot \frac{1}{2\sqrt{27}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

1. Változat

1. feladat.

a) Határozza meg a $z_1 = 1 - 2i$ és $z_2 = 4 - 2i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $\sqrt[3]{z_1} \cdot z_2^2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\sqrt[3]{z_2 - \bar{z}_1}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = \cos z$, $z_0 = \frac{\pi}{3}i - 1$;

b) $f(z) = e^z$, $z_0 = \frac{3}{2} + \frac{\pi}{2}i$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \cos z^2$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = 3 \sec t + i 2 \tan t$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} |z - 1| \leq 1, \\ |z + 1| > 2. \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \operatorname{Im}(z - \bar{z}) \geq 1, \\ z\bar{z} - (z + \bar{z}) > 0, \\ z\bar{z} - (z + \bar{z}) \leq 3! \end{cases}$

6. feladat. Lehet-e az $u = x^2 - y^2 + x$ függvény valós része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 0$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a

$w = \frac{1}{z}$ leképezés által, ha $D: \begin{cases} |z| = 1; \\ 0 \leq \arg z \leq \pi! \end{cases}$

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtesét az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{z - 2}{2z^3 + z^2 - z}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \frac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0 = 1 + 2i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z) = z \cos \frac{1}{z-2}$ függvényt a $z_0 = 2$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z) = \frac{(z+1)^2}{(z^2 - 3z + 2)^2}$;

b) $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^5}$!

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$$\int_{AB} \bar{z}^2 dz ; AB : \{y = x^2 ; z_A = 0 ; z_B = 1 + i\} !$$

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{|z+i|=3} \frac{\sin z dz}{(z+1)^3}$;

b) $\oint_{|z|=4} \frac{e^z}{z - \pi i} dz$!

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$;

2. $\int_0^{\infty} \frac{x \sin 3x}{(x^2 + 4)^2} dx$;

3. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + \sqrt{3} \sin x}$;

4. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(1 + \sqrt{\frac{10}{11}} \cos x)^2}$!

2. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = 4 + 4i$ és $z_2 = 2 - 2i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $z_1 \cdot z_2^2$, $\frac{z_2}{z_1}$, $\sqrt[4]{z_1 - 1}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = \operatorname{Ln} z$, $z_0 = \frac{1+i}{1-i}$;

b) $f(z) = \operatorname{ch} z$, $z_0 = 1 - \frac{\pi}{3}i$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \operatorname{sh} \frac{z}{3}$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = 2 \sec t - i3 \operatorname{tg} t$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} |z + i| \geq 1, \\ |z| < 2. \end{cases}$;

b) $\left| z - \frac{1}{2} \right| < \left| 1 - \frac{\bar{z}}{2} \right|$!

6. feladat. Lehet-e az $u = x^3 - 3xy + 1$ függvény valós része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 1$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a

$w = \frac{1}{z}$ leképezés által, ha $D: \begin{cases} 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 2; \\ \operatorname{Im} z \geq 0! \end{cases}$

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{z - 4}{z^4 + z^3 - 2z^2}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \frac{z + 1}{z(z - 1)}$, $z_0 = 2 - 3i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z) = \sin \frac{z}{z-1}$ függvényt a $z_0 = 1$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z) = \frac{z^2 - 1}{z^6 + 2z^5 + z^4};$

b) $f(z) = \frac{\cos(z-1)}{(z-1)^4};$

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$$\int_L (z+1)e^z dz; L: \{|z|=1; \operatorname{Re} z \geq 0\} !$$

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{|z|=1} z \operatorname{tg} \pi z dz;$

b) $\int_{|z-1-i|=2} \frac{z dz}{(z-2)^2(z^2+1)} !$

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{(x^2+4)^2} dx;$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1) \sin x}{(x^2+9)^2} dx;$

3. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4 + \sqrt{15} \sin x};$

4. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(\sqrt{5} + \cos x)^2} !$

3. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = 3 - 4i$ és $z_2 = -4 + 3i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $(z_1 \cdot z_2)^2$, $\frac{\bar{z}_2}{z_1}$, $\sqrt[4]{z_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = \operatorname{sh} z$, $z_0 = 2 + \frac{\pi}{4}i$;

b) $f(z) = \ln z$, $z_0 = 4\sqrt{3} + 4i$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = e^{i(z+1)}$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = -\sec t + i3\operatorname{tg} t$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} |z-3| - |z+3| \leq \sqrt{5}, \\ |\operatorname{Re} z| < \sqrt{5}. \end{cases}$;

b) $\operatorname{Re}(z^2 - \bar{z}^2) \leq 0$!

6. feladat. Lehet-e az $v = e^x(y \cos y + x \sin y)$ függvény képzetes része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 0$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a

$w = \frac{1}{z}$ leképezés által, ha $D : \begin{cases} |z| \leq 1; \\ \frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq 2\pi ! \end{cases}$

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{3z-18}{2z^3+3z^2-9z}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \frac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0 = -3-2i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z) = ze^{\frac{z}{z-5}}$ függvényt a $z_0 = 5$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z) = \frac{(z + \pi)^3}{(z^2 - \pi^2)^3};$

b) $f(z) = z^4 \sin \frac{3}{z}!$

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$$\int_{AB} \operatorname{Im} z^3 dz; \text{ AB egy szakasz } z_A = 0; z_B = 2 + 2i !$$

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{|z|=2} \frac{z dz}{1 - 2 \sin^2 z};$

b) $\int_{|z-1|=2} \frac{e^z}{z^5 - 4z^3} dz !$

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^4 + 1)^2};$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2 + 1)^2} dx;$

3. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 + 2\sqrt{6} \sin x};$

4. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(1 + \sqrt{\frac{6}{7}} \cos x)^2} !$

4. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = 7 + i$ és $z_2 = 1 + 7i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $z_1^2 \cdot \bar{z}_2$, $\frac{\bar{z}_1}{z_2}$, $\sqrt[3]{z_1 + z_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = \operatorname{ctgz}$, $z_0 = \frac{\pi}{2}i + 2$;

b) $f(z) = e^z$, $z_0 = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{2}i$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \ln z$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = 4\operatorname{tg} t - i3\sec t$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a)
$$\begin{cases} |z - 1 - i| < 1, \\ |\arg z| \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \sqrt{1 + (\operatorname{Re} z)^2} \geq \operatorname{Im} z, \\ |\operatorname{Re} z| < 2! \end{cases}$$

6. feladat. Lehet-e az $u = x^2 - y^2 - 2y$ függvény valós része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 0$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = \frac{1-z}{z}$ leképezés által, ha $D: |z| = 1$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{2z - 16}{z^4 + 2z^3 - 8z^2}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \frac{z + 1}{z(z - 1)}$, $z_0 = -2 + i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z) = \sin \frac{2z-7}{z+2}$ függvényt a $z_0 = -2$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z) = \frac{\cos z}{z^3 - \frac{\pi}{2}z^2};$

b) $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^3} !$

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$\int_{AB} (z^2 + 7z + 1)dz$; AB egy egyenes szakasza $z_A = 1; z_B = 1 - i$!

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^4 + 1};$

b) $\int_{|z|=2} z^2 \cos \frac{2-\pi z}{2z} dz !$

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^2 (x^2 + 16)};$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{(x^2 + 1)^2} dx;$

3. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{6 + \sqrt{35} \sin x};$

4. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2\sqrt{3} + \sqrt{11} \cos x)^2} !$

5. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = 3 + i$ és $z_2 = 1 - 3i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $z_1^2 \cdot \bar{z}_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\sqrt{z_1 + z_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = \operatorname{tg} z$, $z_0 = \frac{\pi}{6}i - 2$;

b) $f(z) = \operatorname{Arc} \sin z$, $z_0 = \sqrt{3}$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = 2i \sin z$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = 3 \operatorname{tg} t + i 4 \sec t$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a)
$$\begin{cases} |z - i| \leq 1, \\ -\frac{\pi}{2} \leq \arg(z - i) < \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

b) $z^2 + \bar{z}^2 > 3(\operatorname{Re} z)^2 - 4$!

6. feladat. Lehet-e az $u = \frac{e^{2x} + 1}{e^x} \cos y$ függvény valós része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 0$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a

$w = \frac{1}{z}$ leképezés által, ha $D: \begin{cases} |z| \geq 1 \\ \operatorname{Re} z \geq 0 \\ \operatorname{Im} z \geq 0 \end{cases}$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{5z - 50}{2z^3 + 5z^2 - 25z}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \frac{z + 1}{z(z - 1)}$, $z_0 = 1 + 3i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z) = \cos \frac{3z}{z-i}$ függvényt a $z_0 = i$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z) = \frac{z^2 + 4}{(z^2 + 3z + 2)^2};$

b) $f(z) = z^3 \operatorname{ch} \frac{2}{z} !$

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$$\int_{ABC} |z| dz; \text{ ABC egy törtegyenes } z_A = 0; z_B = -1 + i; z_C = 1 + i !$$

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{|z|=1,5} \frac{z dz}{(z-1)^2(z+2)};$

b) $\int_{|z-1|=5} \operatorname{ctg} z dz !$

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - x + 1)^2};$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) \cos x}{x^4 + 5x^2 + 6} dx;$

3. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{7 + 4\sqrt{3} \sin x};$

4. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \cos x)^2} !$

6. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = 7 + 24i$ és $z_2 = 24 - 7i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $z_1 \cdot \bar{z}_2^2$, $\bar{z}_1 / z_2$, $\sqrt[4]{z_1 - z_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = \operatorname{Arctg} z$, $z_0 = 1$;

b) $f(z) = e^z$, $z_0 = -1 - \frac{2\pi}{3}i$.

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \cos iz$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = -4\operatorname{tg} t - i2\sec t$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} |z + i| \leq 2, \\ |z - i| > 2. \end{cases}$;

b) $(z \cdot \bar{z})^3 \leq (z - \bar{z})^2$!

6. feladat. Lehet e az $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$ függvény valós része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek?

Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(1) = 1 + i$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a

$w = \frac{1}{z}$ leképezés által, ha $D: \begin{cases} 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1; \\ 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 2! \end{cases}$

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{3z - 36}{z^4 + 3z^3 - 18z^2}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \frac{z + 1}{z(z - 1)}$, $z_0 = 2 - i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z) = \sin \frac{5z}{z - 2i}$ függvényt a $z_0 = 2i$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z) = \frac{\cos \frac{\pi}{2} z}{z^4 - 1};$

b) $f(z) = (z^2 - 2z + 1) \operatorname{sh} \frac{2}{z-1} !$

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$\int_{AB} (12z^5 + 4z^3 + 1) dz$; AB egy egyenes szakasza $z_A = 1; z_B = 1 + i$!

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{|z+2i|=2} \frac{e^z dz}{z^3(z+1)};$

b) $\int_{|z|=4} \frac{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos z - 1} dz !$

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)^2};$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \frac{x}{2}}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx;$

3. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 4 \sin x};$

4. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(4 + \cos x)^2} !$

7. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = 4 + 3i$ és $z_2 = 3 + 4i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $z_1^2 \cdot z_2$, $\frac{\bar{z}_2}{z_1}$, $\sqrt[5]{z_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = \operatorname{Arcsh} z$, $z_0 = i$;

b) $f(z) = \cos z$, $z_0 = -\frac{\pi}{2}i - \frac{3}{2}$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \operatorname{ch} \frac{z}{i}$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = 3\operatorname{cosect} + i3\operatorname{ctgt}$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

$$\text{a) } \begin{cases} |z - 1 - i| \leq 1, \\ \operatorname{Im} z > 1, \\ \operatorname{Re} z \geq 1. \end{cases};$$

$$\text{b) } \bar{z}^2 + z^2 \leq 8 - 4(\operatorname{Im} z)^2 !$$

6. feladat. Lehet-e az $v = e^{-y} \sin x + y$ függvény képzetes része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 1$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = z + \frac{2}{z}$ leképezés által, ha $D: |z| = 1$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

$$\text{a) } f(z) = \frac{7z - 98}{2z^3 + 7z^2 - 49z}, \quad z_0 = 0;$$

$$\text{b) } f(z) = \frac{z+1}{z(z-1)}, \quad z_0 = -1 + 2i !$$

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z) = \sin \frac{3z-i}{3z+i}$ függvényt a $z_0 = -\frac{i}{3}$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z) = \frac{\sin z^3}{\left(z^2 - \frac{\pi}{8}z\right)^3};$

b) $f(z) = z^3 e^{-\frac{1}{z^2}}!$

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$\int_{AB} \bar{z}^2 dz$; AB egy egyenes szakasza $z_A = 0; z_B = 1+i$!

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{|z|=0,5} z^2 \sin \frac{1}{z} dz;$

b) $\int_{|z-i|=1,5} \frac{dz}{(z^3 + z)(z^2 + 4)}!$

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 10x^2 + 9};$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 3) \cos 2x}{x^4 + 3x^2 + 2} dx;$

3. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 3 \sin x};$

4. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(4 + 3 \cos x)^2}!$

8. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = -4 - 4i$ és $z_2 = 2 + 3i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $\bar{z}_1 \cdot z_2^2$, $\frac{z_2}{z_1}$, $\sqrt[3]{z_1 + 2z_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = \cos z$, $z_0 = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}i$;

b) $f(z) = \operatorname{Arcthz}$, $z_0 = i$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \sin(z+i)$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = 4\operatorname{cosect} - i2\operatorname{ctgt}$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a)
$$\begin{cases} |z - \sqrt{2}| + |z + \sqrt{2}| > 4, \\ -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z-1) \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} |z-1| \leq 1 + \operatorname{Re} z, \\ \operatorname{Re} z \leq 5! \end{cases}$$

6. feladat. Lehet e az $v = e^x \cos y$ függvény képzetes része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek?

Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 1 + i$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a

$w = z - \frac{1}{z}$ leképezés által, ha $D: |z| = 4$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{4z - 64}{z^4 + 4z^3 - 32z^2}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \frac{z+1}{z(z-1)}$, $z_0 = -2 - 3i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z) = z \cos \frac{1}{z-1}$ függvényt a $z_0 = 1$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z) = \frac{z^2 + 1}{(z-i)^2(z^2 + 4)}$;

b) $f(z) = \frac{\cos z}{z^3}$!

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$$\int_{ABC} z^3 e^{z^4} dz; \text{ ABC törtegyenes } z_A = i; z_B = 1; z_C = 0 !$$

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{|z-i|=3} \frac{e^{z^2} - 1}{z^3 - iz^2} dz$;

b) $\int_{|z|=1} z^3 \cos \frac{2i}{z} dz$!

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 9)(x^2 + 4)^2}$;

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3 - 2) \cos \frac{x}{2}}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx$;

3. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{8 - 3\sqrt{7} \sin x}$;

4. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(\sqrt{5} + \sqrt{3} \cos x)^2}$!

9. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ és $z_2 = \sqrt{8} - \sqrt{8}i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $z_1^2 \cdot \bar{z}_2$, $\frac{\bar{z}_2}{z_1}$, $\sqrt{z_1 - z_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = shz$, $z_0 = 2 - \frac{\pi}{2}i$;

b) $f(z) = Lnz$, $z_0 = 2 - 2i$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \ln z^3$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = ctgt - i2cosect$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a)
$$\begin{cases} |z - 2 - i| \leq 2, \\ \operatorname{Re} z \geq 3, \\ \operatorname{Im} z < 1. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \bar{z}z \geq \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z, \\ |\operatorname{Im} z| < 2 ! \end{cases}$$

6. feladat. Lehet e az $v = -\frac{y}{(x+1)^2 + y^2}$ függvény képzetes része valamely $f(z)$ analitikus

függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 1$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a

$w = z - \frac{4}{z}$ leképezés által, ha $D: |z| = 4$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtesét az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{9z - 162}{2z^3 + 9z^2 - 81z}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \frac{z+3}{z^2-1}$, $z_0 = 2+i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z) = z \sin \frac{1}{z-1}$ függvényt a $z_0 = 1$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z) = \frac{1 - \cos 2z}{z^2(z+3)}$;

b) $f(z) = \frac{1}{z} - e^{3/z}$!

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$$\int_{ABC} \operatorname{Re} \frac{\bar{z}}{z} dz ; ABC : \{|z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}, BC \text{ egy szakasz } z_B = 1, z_C = 2 !$$

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{|z|=\sqrt{3}} \frac{\sin \pi z}{z^2 - z} dz ;$

b) $\int_{|z+i\sqrt{2}|=2} \frac{ze^{2z}}{z^4 - 8z^2 - 9} dz !$

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 3)^2} dx ;$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 - x) \sin x}{x^4 + 9x^2 + 20} dx ;$

3. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{9 - 4\sqrt{5} \sin x} ;$

4. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(\sqrt{7} + 2 \cos x)^2} !$

10. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = 3 + 2i$ és $z_2 = -5 + 5i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $z_1 \cdot z_2^2$, $\frac{\bar{z}_2}{z_1}$, $\sqrt[4]{z_1 - i}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = \sin z$, $z_0 = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}i$;

b) $f(z) = \ln z$, $z_0 = 2\sqrt{3} - 2i$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \operatorname{Arctg} z$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = -\operatorname{ctgt} + i3\operatorname{cosect}$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a)
$$\begin{cases} |z - 1 - i| \geq 1, \\ 0 \leq \operatorname{Re} z < 2, \\ 0 < \operatorname{Im} z \leq 2. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \operatorname{Im} \frac{1}{z} < \frac{1}{4}, \\ |\arg(z + i)| \geq \frac{\pi}{3}! \end{cases}$$

6. feladat. Lehet-e az $v = y - \frac{y}{x^2 + y^2}$ függvény képzetes része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(1) = 2$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = z + \frac{3}{z}$ leképezés által, ha $D: |z| = 3$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{5z - 100}{z^4 + 5z^3 - 50z^2}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \frac{z+3}{z^2-1}, z_0 = 3-i!$

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z) = (z-3)\cos\pi\frac{z-3}{z}$ függvényt a $z_0 = 0$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z) = \frac{(z+\pi i)^3}{(z^2+\pi^2)^3};$

b) $f(z) = \frac{1}{z^2} + \sin\frac{1}{z^2}!$

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$$\int_{ABC} (z^2 + \cos z) dz; \text{ ABC törtegyenes } z_A = 0; z_B = 1; z_C = i!$$

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{|z+1|=4} \frac{z dz}{e^z + 3};$

b) $\int_{|z|=1} \frac{z^2 + \cos z}{z^3} dz!$

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2)(x^2+3)^2};$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2-2x+17} dx;$

3. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4-\sqrt{7}\sin x};$

4. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(4+\sqrt{7}\cos x)^2}!$

11. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = -3 - 4i$ és $z_2 = -3 + 4i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $(z_1 \cdot z_2)^2$, $\frac{\bar{z}_1}{z_2}$, $\sqrt[5]{z_1 + z_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = chz$, $z_0 = -1 + \frac{\pi}{4}i$;

b) $f(z) = \ln z$, $z_0 = \frac{1+2i}{-1+2i}$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = e^{z^2/2}$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = 3\cosh 2t + i2\sinh 2t$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} |z + i| < 2, \\ 0 < \operatorname{Re} z \leq 1. \end{cases}$

b) $\operatorname{Re}^4 z + 8\operatorname{Im}^2 \bar{z} < 4z\bar{z}$!

6. feladat. Lehet-e az $u = e^{-y} \cos x$ függvény valós része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 1$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = z + \frac{4}{z}$ leképezés által, ha $D: |z| = 2$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{11z - 242}{2z^3 + 11z^2 - 121z}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \frac{z+3}{z^2-1}$, $z_0 = -2 + 3i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z) = z^2 \sin \pi \frac{z+1}{z}$ függvényt a $z_0 = 0$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z) = \frac{\cos \pi z}{z^4 - 1};$

b) $f(z) = \frac{\operatorname{ch}(z+i)}{(z+i)^3} !$

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$\int_L \frac{\bar{z}}{z} dz$; ahol L a $\{1 < |z| < 2, \operatorname{Re} z > 0\}$ tartomány határvonala!

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{|z-2|=2} \frac{z dz}{(z-1)^3(z+2)};$

b) $\int_{|z|=0,5} \frac{e^z - \sin z}{z^2} dz !$

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 9)(x^2 + 1)^2};$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x - \sin x}{(x^2 + 4)^2} dx;$

3. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 - \sqrt{5} \sin x};$

4. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(3 + \sqrt{5} \cos x)^2} !$

12. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$ és $z_2 = 3 - 3\sqrt{3}i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $\overline{z_1 \cdot z_2}$, $\frac{z_1^2}{z_2}$, $\sqrt[3]{z_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = \operatorname{Arctg} z$, $z_0 = 2i$;

b) $f(z) = e^z$, $z_0 = 2 + \frac{\pi}{3}i$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \operatorname{ch} 2iz$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = 2\operatorname{ch} 3t - i3\operatorname{sh} 3t$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a)
$$\begin{cases} |z - i| \leq 1, \\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

b) $4 + \operatorname{Re} z > \operatorname{Re} \left(\overline{z^2} + z \right)$!

6. feladat. Lehet-e az $u = y - 2xy$ függvény valós része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 0$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = \frac{2}{z}$ leképezés által, ha $D: |z + 1| = 1$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtesét az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{6z - 144}{z^4 + 6z^3 - 72z^2}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \frac{z + 3}{z^2 - 1}$, $z_0 = -2 - 2i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z) = z \cos \frac{z}{z + 2i}$ függvényt a $z_0 = -2i$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z) = \frac{\sin z}{(z^2 - \pi z)^3};$

b) $f(z) = \frac{z^2}{e^{1/z}}!$

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$\int_{ABC} (chz + \cos iz) dz;$ ABC egy törtegyenes, $z_A = 0, z_B = -1, z_C = i!$

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{|z|=0,5} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)};$

b) $\int_{|z-i|=2} \frac{1 - \sin \frac{1}{z}}{z} dz !$

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{(x^2 + x + 1)^2} dx;$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 5x}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)} dx;$
3. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 - 2\sqrt{2} \sin x};$
4. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(3 + 2\sqrt{2} \cos x)^2} !$

13. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = 4 - 3i$ és $z_2 = 1 - 7i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $z_1^3 \cdot \bar{z}_2$, $\frac{\bar{z}_2}{z_1}$, $\sqrt[3]{z_1 - z_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = \cos z$, $z_0 = -\frac{\pi}{2}i - \frac{3}{2}$;

b) $f(z) = \ln z$, $z_0 = -2 - 2i$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \sin z^2$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = 5\operatorname{sh}4t + i4\operatorname{ch}4t$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} |z+2| + |z-2| > 4\sqrt{2}, \\ 0 < \operatorname{Im} z < 2. \end{cases}$;

b) $4|z| - \operatorname{Re} z = 12$!

6. feladat. Lehet-e az $v = x^2 - y^2 + 2x + 1$ függvény képzetes része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = i$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = z - \frac{3}{z}$ leképezés által, ha $D: |z| = 1$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtesét az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{13z - 338}{2z^3 + 13z^2 - 169z}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$, $z_0 = 2 + i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z) = \cos \frac{z^2 - 4z}{(z-2)^2}$ függvényt a $z_0 = 2$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z) = \frac{z^2 + 2iz - 1}{z^2(z^2 + 1)}$;

b) $f(z) = \frac{\cos 2z}{z^4}$!

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$$\int_L |z| \bar{z} dz; L : \{|z| = 4, \operatorname{Re} z \geq 0\} !$$

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{|z-i|=3} \frac{e^z dz}{z^2(z+9)}$;

b) $\int_{|z+i|=1} \frac{\cos iz - 1}{z^3} dz$!

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 4x + 13)^2} dx$;

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{(x^2 + 9)^2} dx$;

3. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4 - 2\sqrt{3} \sin x}$;

4. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2\sqrt{2} + \sqrt{7} \cos x)^2}$!

14. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = -3+3i$ és $z_2 = 2+i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1^2}{z_2}$, $\sqrt[5]{z_1 - \bar{z}_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = thz$, $z_0 = 1 - \frac{\pi}{2}i$;

b) $f(z) = Lnz$, $z_0 = \frac{2+i}{2-i}$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \text{Arctg}(z+i)$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = -4\text{sh}5t - i5\text{ch}5t$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} |z+i| > 1, \\ -\frac{\pi}{4} \leq \arg z < 0. \end{cases}$;

b) $|z-2| = |1-2\bar{z}|$!

6. feladat. Lehet e az $u = x^2 - y^2 - 2x + 1$ függvény valós része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 1$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = z - \frac{2}{z}$ leképezés által, ha $D: |z| = 3$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{7z-196}{z^4 + 7z^3 - 98z^2}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$, $z_0 = 1 - 2i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z) = \sin \frac{z+i}{z-i}$ függvényt a $z_0 = i$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z) = \frac{\operatorname{ctgz}}{16z^2 - \pi^2};$

b) $f(z) = z^5 \sin \frac{1}{z^2} !$

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$$\int_L (chz + \bar{z}) dz; L: \{|z| = 1, \operatorname{Im} z \leq 0\} !$$

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{|z-2,5|=1} \frac{dz}{(z-0,5)(z-3)^2};$

b) $\int_{|z|=2} \frac{z - \sin z}{z^4} dz !$

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 5)^2} dx;$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) \sin 2x}{x^2 + 2x + 2} dx;$

3. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - \sqrt{21} \sin x};$

4. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(\sqrt{6} + \cos x)^2} !$

15. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = 3 + 3i$ és $z_2 = 4 - 3i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $z_1 \cdot \bar{z}_2$, $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$, $\sqrt[4]{z_1 + \bar{z}_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = \operatorname{sh} z$, $z_0 = 1 + \frac{\pi}{2}i$;

b) $f(z) = \operatorname{Arctg} z$, $z_0 = \frac{3+4i}{5}$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = 2^z$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = \frac{2}{\operatorname{ch} 2t} + i 4t \operatorname{th} 2t$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} |z+1| \geq 1, \\ |z+i| < 1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} |z-1| \leq 1 + \operatorname{Re} z, \\ |z+1| + |z-1| > 2\sqrt{2} ! \end{cases}$

6. feladat. Lehet-e az $v = 3x^2y - y^3 - y$ függvény képzetes része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 0$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a

$w = z + \frac{1}{z}$ leképezés által, ha $D: |z| = 1$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{15z - 450}{2z^3 + 15z^2 - 225z}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$, $z_0 = -3 + i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z) = \sin \frac{z}{z-3}$ függvényt a $z_0 = 3$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z) = \frac{\sin^3 z}{(z^2 - z)^3};$

b) $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} - e^{1/z}!$

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$$\int_L |z| \operatorname{Re} z^2 dz; L : \{|z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}!$$

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{|z|=2} \frac{z+1}{e^z + 3} dz;$

b) $\int_{|z+1|=1,5} \frac{z^5 - 3z^3 + 5z}{z^4} dz!$

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 4)};$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + 1)^2} dx;$

3. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{6 - 4\sqrt{2} \sin x};$

4. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(\sqrt{6} + \sqrt{5} \cos x)^2}!$

16. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = 2 - 2\sqrt{3}i$ és $z_2 = \sqrt{3} + 2i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $z_1 \cdot z_2^2$, $\frac{z_2}{z_1}$, $\sqrt[5]{z_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = \cos z$, $z_0 = \frac{\pi}{3}i + 3$;

b) $f(z) = \operatorname{Arch} z$, $z_0 = -2$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \ln\left(\frac{z}{i}\right)$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = \frac{4}{\operatorname{ch} 4t} + i 2 \operatorname{th} 4t$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a)
$$\begin{cases} |z| < 2, \\ -\frac{\pi}{6} \leq \arg(z-1) \leq \frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 0 \leq 1 + \operatorname{Im} z < |z - i|, \\ -2 < \operatorname{Re} z \leq 2! \end{cases}$$

6. feladat. Lehet e az $v = 2xy + y$ függvény képzetes része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 0$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a

$w = \frac{1}{z}$ leképezés által, ha $D: \left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{8z - 256}{z^4 + 8z^3 - 128z^2}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$, $z_0 = -3 - 2i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z) = z \operatorname{sh} \frac{1}{z-2}$ függvényt a $z_0 = 2$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z) = \frac{\cos z}{(4z^2 - \pi^2)^2};$

b) $f(z) = \frac{e^{2z+i}}{2z+i} !$

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$$\int_{AB} (3z^2 + 2z) dz \quad AB : \{y = x^2; z_A = 0; z_B = 1+i\} !$$

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{|z-2|=1,5} \frac{dz}{(z-1)(z-2)^2};$

b) $\int_{|z|=1} \frac{z^2 e^{1/z^2} dz}{z} !$

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 5}{x^4 + 5x^2 + 6} dx;$

2. $\int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2 + \frac{1}{4})^2} dx;$

3. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{8 - 2\sqrt{15} \sin x};$

4. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(\sqrt{7} + \sqrt{5} \cos x)^2} !$

17. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = 1 + i$ és $z_2 = 3 - i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $\overline{(z_1 \cdot z_2)}^2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\sqrt[5]{z_1 - z_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = \operatorname{Ln} z$, $z_0 = -1 + i$;

b) $f(z) = \operatorname{Arc} \cos z$, $z_0 = -5$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \operatorname{cth}(zi)$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = \operatorname{th} 5t + \frac{5i}{\operatorname{ch} 5t}$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a)
$$\begin{cases} |z| \leq 1, \\ |\arg(z + i)| > \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \operatorname{Im} z > |z| - 3, \\ \operatorname{Im} z \leq 3 - |z|! \end{cases}$$

6. feladat. Lehet-e az $v = 3x^2y - y^3$ függvény képzetes része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 1$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = z + \frac{2}{z}$ leképezés által, ha $D: |z| = 3$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{z + 2}{z + z^2 - 2z^3}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = 4 \cdot \frac{z + 2}{(z - 1)(z + 3)}$, $z_0 = -2 + 2i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z) = e^{\frac{z}{z-3}}$ függvényt a $z_0 = 3$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z) = \frac{(z-3)^2}{(z^2 - 5z + 6)^2};$

b) $f(z) = z^3 \cos \frac{4-2\pi z}{4z} !$

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$$\int_L z \operatorname{Re} z^2 dz; L: \{|z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\} !$$

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{|z+2|=3} \frac{e^z dz}{z^2(z^2-9)};$

b) $\int_{|z|=1} \frac{e^{2z} - z}{z^2} dz !$

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3};$

2. $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^3} dx;$

3. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{3} \sin x - 2};$

4. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(\sqrt{2} + \cos x)^2} !$

18. Válozat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = 5 - 6i$ és $z_2 = -2 + 2i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $\bar{z}_1 \cdot z_2^2$, $\frac{\bar{z}_1}{z_2}$, $\sqrt[3]{z_1 + z_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = e^z$, $z_0 = 1 + \frac{\pi}{3}i$;

b) $f(z) = chz$, $z_0 = 2 + \frac{\pi}{2}i$.

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \sin^2 z$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = \frac{1}{\sinh t} - i \cosh t$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

$$\text{a) } \begin{cases} 1 < |z - 1| \leq 2, \\ \operatorname{Im} z \geq 0, \\ \operatorname{Re} z < 1. \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \left| \arg z \right| < \frac{\pi}{2}, \\ \left| \frac{1}{z^2} - 3 \right| \leq 3! \end{cases}$$

6. feladat. Lehet-e az $u = e^x(x \cos y - y \sin y)$ függvény valós része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 0$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = z - \frac{1}{z}$ leképezés által, ha $D: |z| = 2$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

$$\text{a) } f(z) = \frac{z + 4}{2z^2 + z^3 - z^4}, \quad z_0 = 0;$$

b) $f(z) = 4 \cdot \frac{z+2}{(z-1)(z+3)}, z_0 = 1-3i !$

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z) = \sin \frac{2z}{z-4}$ függvényt a $z_0 = 4$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z) = \frac{\sin^2 z}{z^3 + 2z^2};$

b) $f(z) = \frac{3}{z^4 e^z} !$

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$\int_{ABC} (z^2 + 1) dz ;$ ABC egy törtegyenes $z_A = 0; z_B = -1 + i; z_C = i !$

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{|z|=3} \frac{z+1}{z^2+4} dz ;$

b) $\int_{|z-0,5|=1} z \operatorname{tg} 2z dz .$

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+3}{(x^2-10x+29)^2} dx ;$

2. $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+9)(x^2+16)} dx ;$

3. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{15} \sin x - 4} ;$

4. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(\sqrt{5} + 2 \cos x)^2} !$

19. Válozat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = 4 - 4i$ és $z_2 = 3 + 2i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát!

Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $z_1^2 \cdot \bar{z}_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\sqrt[4]{z_1}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = \sin z$, $z_0 = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}i$;

b) $f(z) = \ln z$, $z_0 = 1 + i$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \cos^2(zi)$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = 2e^{it} + \frac{1}{2e^{it}}$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a)
$$\begin{cases} 1 \leq |z - i| < 2, \\ \operatorname{Re} z \leq 0, \\ \operatorname{Im} z > 1. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} |z + \bar{z}| \geq 2 \operatorname{Im} \bar{z}^{-2}, \\ \frac{\pi}{6} \leq \arg z < \frac{\pi}{2} ! \end{cases}$$

6. feladat. Lehet-e az $v = 2xy + 2x$ függvény képzetes része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 0$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a

$$w = \frac{1}{z} \text{ leképezés által, ha } D : \begin{cases} |z| \geq 1; \\ \operatorname{Re} z \leq 0; \\ \operatorname{Im} z \leq 0 ! \end{cases}$$

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{3z + 18}{9z + 3z^2 - 2z^3}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = 4 \cdot \frac{z+2}{(z-1)(z+3)}, z_0 = -3-i!$

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z) = \cos \frac{z^2 - 4z}{(z-2)^2}$ függvényt a $z_0 = 2$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z) = \frac{\operatorname{sh} z}{(z^2 + \pi^2)^2};$

b) $f(z) = \frac{e^{2z} - 3}{z^3}!$

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$$\int_{AB} e^{|z|^2} \operatorname{Im} z dz; \text{ AB egy egyenes szakasza } z_A = 1+i; z_B = 0!$$

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{|z-\pi i|=\pi} \frac{\operatorname{ch} z dz}{(z^2 + \pi^2)^2};$

b) $\oint_{|z|=4} \frac{e^{1/z} + 1}{z} dz!$

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 5)^2};$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 2x + 10} dx;$

3. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\sqrt{6} \sin x - 5};$

4. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(3 + \cos x)^2}!$

20. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = \sqrt{3} + 3i$ és $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $z_1 \cdot \bar{z}_2$, $\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2$, $\sqrt[5]{z_1}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = \operatorname{sh} z$, $z_0 = 2 + \frac{\pi}{4}i$;

b) $f(z) = \operatorname{Arc} \sin z$, $z_0 = \frac{-3+i}{4}$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = e^{iz/2}$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = 3e^{it} - \frac{1}{2e^{it}}$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

$$\text{a) } \begin{cases} |z| < 2, \\ \operatorname{Re} z \geq 1, \\ |\arg z| < \frac{\pi}{6}. \end{cases};$$

$$\text{b) } \operatorname{Re}(z^2 + \bar{z}^2) > 4 \operatorname{Re} z - 2 \operatorname{Im} z !$$

6. feladat. Lehet e az $u = 1 - \sin y \cdot e^x$ függvény valós része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 1 + i$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a

$$w = \frac{1}{z} \text{ leképezés által, ha } D : \begin{cases} |z| \leq 1; \\ \operatorname{Re} z \geq 0; \\ \operatorname{Im} z \leq 0 ! \end{cases}$$

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{2z+16}{8z^2+2z^3-z^4}, z_0 = 0;$

b) $f(z) = 4 \cdot \frac{z+2}{(z-1)(z+3)}, z_0 = -2+i !$

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z) = \operatorname{ch} \frac{4z-2z^2}{(z-1)^2}$ függvényt a $z_0 = 1$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z) = \frac{(z^2+9)^2}{(z-3i)^2(z^2+4)};$

b) $f(z) = \frac{\operatorname{sh} 3z-1}{z^2} !$

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$$\int_L (\sin iz + z) dz; L : \{|z|=1, \operatorname{Re} z \geq 0\} !$$

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{|z-i|=1} \frac{e^z dz}{z^4 + 2z^2 + 1};$

b) $\int_{|z|=1} z \sin \frac{1}{z^2} dz !$

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 7x^2 + 12};$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx;$

3. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{35 \sin x - 6}};$

4. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(\sqrt{7} + \sqrt{2} \cos x)^2} !$

21. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = \sqrt{3} + i$ és $z_2 = 2\sqrt{3} + 2i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $z_1^2 \cdot \bar{z}_2$, $\frac{z_2}{z_1}$, $\sqrt[4]{z_2 - z_1}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = \cos z$, $z_0 = \frac{\pi}{6}i + 2$;

b) $f(z) = \operatorname{Arch} z$, $z_0 = 3i$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = 2i \ln z$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = -2e^{it} + \frac{1}{e^{it}}$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a)
$$\begin{cases} 1 < |z - 1| \leq 2, \\ \operatorname{Im} z \geq 0, \\ \operatorname{Re} z < 1. \end{cases}$$

b) $\operatorname{Im}(\overline{z^2 - z}) \leq 2 - \operatorname{Im} z$!

6. feladat. Lehet-e az $v = \frac{e^{2x} - 1}{e^x} \sin y$ függvény képzetes része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 2$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a

$w = \frac{1}{z}$ leképezés által, ha $D : \begin{cases} |z| \leq 1; \\ \operatorname{Re} z \leq 0; \\ \operatorname{Im} z \geq 0 ! \end{cases}$

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{5z + 50}{25z + 5z^2 - 2z^3}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = 4 \cdot \frac{z+2}{(z-1)(z+3)}, z_0 = -1-2i !$

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z) = ze^{\frac{z}{(z-3i)^2}}$ függvényt a $z_0 = 3i$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z) = \frac{\sin^2 \pi z}{(z^2 - \pi^2)^2};$

b) $f(z) = \frac{\operatorname{ch} z}{z^4} !$

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$\int_{AB} z \operatorname{Re} z^2 dz$ AB egy egyenes szakasza $z_A = 0; z_B = 1+2i !$

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{|z|=4} \frac{e^{iz} dz}{(z-\pi)^3};$

b) $\int_{|z+i|=1} \frac{\cos z + z}{z^2} dz !$

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 4}{(x^2 + 9)^2} dx;$

2. $\int_0^{\infty} \frac{x \sin \frac{x}{2}}{x^2 + 4} dx;$

3. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4\sqrt{3} \sin x - 7};$

4. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(\sqrt{3} + \cos x)^2} !$

22. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = -4 + 3i$ és $z_2 = 3 - 4i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $(\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2)^2$, $\frac{z_2}{z_1}$, $\sqrt[5]{z_1 + z_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = \operatorname{Ln} z$, $z_0 = 1 - i$;

b) $f(z) = \operatorname{Arctg} z$, $z_0 = -\frac{i}{3}$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \operatorname{sh}(i - z)$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = 2e^{2it} - \frac{1}{e^{2it}}$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a)
$$\begin{cases} |z - 1| > 1, \\ 0 \leq \operatorname{Re} z < 3, \\ -1 \leq \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

b)
$$\left| 1 - \frac{\bar{z}}{4} \right| \geq |z - 0,25| !$$

6. feladat. Lehet e az $v = 1 - \frac{y}{x^2 + y^2}$ függvény képzetes része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(1) = 1 + i$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a

$w = \frac{1}{z}$ leképezés által, ha $D: \begin{cases} -4 \leq \operatorname{Re} z \leq 4; \\ 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 8! \end{cases}$

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtesét az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{3z + 36}{18z^2 + 3z^3 - z^4}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = 4 \cdot \frac{z+2}{(z-1)(z+3)}, z_0 = 3+i !$

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z) = \operatorname{zsh} \frac{\pi z}{z-\pi}$ függvényt a $z_0 = \pi$ pont környezetében! **10.**

feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z) = \frac{e^{z^2} - 1}{z^3 - iz^2};$

b) $f(z) = \frac{2}{z} + \sin \frac{2}{z} !$

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$\int_{AB} (2x+1)dz \quad AB: \{y = x^3; z_A = 0; z_B = 1+i\} !$

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{|z+3|=2} \frac{\cos z/2}{z^2 - 4} dz ;$

b) $\int_{|z|=1} \frac{ze^z - z - 1}{z^3} dz !$

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^5};$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2 - x + 1)^2} dx ;$

3. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4 \sin x + 5};$

4. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2 + \sqrt{3} \cos x)^2} !$

23. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = -2 - 2i$ és $z_2 = 1 + 3i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $\bar{z}_1 \cdot z_2$, $\frac{\bar{z}_1}{z_2}$, $\sqrt[4]{z_2^3}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = \operatorname{tg} z$, $z_0 = \frac{\pi}{3} + i$;

b) $f(z) = e^z$, $z_0 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}i$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \operatorname{Arctg}(iz)$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = \frac{1+t}{1-t} + i \frac{2+t}{2-t}$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a)
$$\begin{cases} |z+i| < 1, \\ -\frac{3\pi}{4} \leq \arg z \leq -\frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} |z| - 2 \leq \operatorname{Re} z, \\ 2 - |z| > \operatorname{Re} z! \end{cases}$$

6. feladat. Lehet-e az $u = e^{-y} \cos x + x$ függvény valós része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 1$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a

$w = \frac{1}{z}$ leképezés által, ha $D: \begin{cases} -1 \leq \operatorname{Re} z \leq 1; \\ -2 \leq \operatorname{Im} z \leq 0! \end{cases}$

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{7z + 98}{49z + 7z^2 - 2z^3}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = 4 \cdot \frac{z + 2}{(z-1)(z+3)}$, $z_0 = 2 - 2i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z) = z \sin \pi \frac{z+2}{z}$ függvényt a $z_0 = 0$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z) = \frac{z^2 - 4}{z^6 + 4z^5 + 4z^4};$

b) $f(z) = \cos \frac{1}{z} - \sin \frac{2 - \pi z}{2z} !$

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$$\int_{ABC} z \bar{z} dz \quad AB : \{|z| = 1; \operatorname{Re} z \geq 0; \operatorname{Im} z \geq 0\} \quad BC \text{ egy } z_B = 1, z_C = 0 !$$

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{|z|=4} \frac{e^{iz} dz}{(z - \pi)^3};$

b) $\int_{|z|=1} \frac{z^2 + chz}{z^3} dz !$

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2)^2 (x^2 + 10)^2};$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2 + x + 1)^2} dx;$

3. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 \sin x + 5};$

4. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(\sqrt{13} + 2\sqrt{3} \cos x)^2} !$

24. Válozat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = 3 - 2i$ és $z_2 = 1 - i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $\overline{(z_1 \cdot z_2)}^2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\sqrt[3]{z_1 + z_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = \sin z$, $z_0 = \frac{\pi}{2} - 5i$;

b) $f(z) = \operatorname{Ln} z$, $z_0 = -1 - i$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \operatorname{ch}^2(iz)$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = \frac{t-1+it}{t(t-1)}$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a)
$$\begin{cases} |z+1| < 1, \\ |z-i| \leq 1. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} |z+i| < 1 + \operatorname{Im} z, \\ 0 < \arg(z+i) \leq \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{Im} z \leq 2! \end{cases}$$

6. feladat. Lehet e az $v = e^{-y} \sin x$ függvény képzetes része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 1$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a

$w = \frac{1}{z}$ leképezés által, ha $D: \begin{cases} -1 \leq \operatorname{Re} z \leq 1; \\ 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 4! \end{cases}$

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{4z+64}{32z^2+4z^3-z^4}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = 4 \cdot \frac{z+2}{(z-1)(z+3)}, z_0 = -2-i !$

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z) = z \cos \pi \frac{z+3}{z-1}$ függvényt a $z_0 = 1$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z) = \frac{\operatorname{ch} z}{(z^2 + \pi^2)^3};$

b) $f(z) = 3z \cos \frac{5}{z} !$

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$$\int_L (\cos iz + 3z^2) dz; L : \{|z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\} !$$

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{|z-1|=\sqrt{2}} \frac{\sin \pi z}{(z^2 - 1)^2} dz ;$

b) $\int_{|z|=1} \frac{e^{iz} - 1}{z^3} dz !$

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 8x + 17)^2};$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3 + 5x) \sin x}{x^4 + 10x^2 + 9} dx;$

3. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3\sqrt{7} \sin x + 8};$

4. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2 + \cos x)^2} !$

25. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = 5 - 5i$ és $z_2 = 2 - i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát!

Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $\bar{z}_1 \cdot z_2^2$, $\frac{\bar{z}_2}{z_1}$, $\sqrt[5]{z_1 - z_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = \operatorname{Arc} \cos z$, $z_0 = -3i$;

b) $f(z) = e^z$, $z_0 = \frac{3\pi}{4}i + 2$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \operatorname{th}(iz)$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = \frac{1+i}{1-i} + \frac{t}{1-t}(2-4i)$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} |z+1| - |z-1| > 4, \\ \operatorname{Re} z \leq 5. \end{cases}$

b) $\begin{cases} \operatorname{Re} z < \sqrt{(\operatorname{Im} z)^2 + 1}, \\ |\arg z| \leq \frac{\pi}{4} ! \end{cases}$

6. feladat. Lehet e az $v = 2xy + x$ függvény képzetes része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek?

Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 0$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a

$w = z - \frac{4}{z}$ leképezés által, ha $D: |z| = 5$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{9z + 162}{81z + 9z^2 - 2z^3}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \frac{2z}{z^2 + 4}$, $z_0 = -1 - 3i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z) = z^2 \sin \frac{z+3}{z}$ függvényt a $z_0 = 0$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z) = \frac{\cos z}{(z^2 - \pi^2)^3};$

b) $f(z) = (z-1) \operatorname{ch} \frac{3}{z};$

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$$\int_L |z| dz; L: \{|z| = \sqrt{2}, 3\pi/4 \leq \arg z \leq 5\pi/4\}!$$

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{|z|=4} \frac{(z+1)dz}{z^2 + 2z - 3};$

b) $\int_{|z-i|=2} \frac{z - \sin z}{2z^4} dz!$

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 10}{(x^2 + 4)^2} dx;$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{x^4 + 10x^2 + 9} dx;$

3. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4\sqrt{5} \sin x + 9};$

4. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(3 + 2 \cos x)^2}!$

26. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = \sqrt{3} - i$ és $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $(z_1 \cdot z_2)^2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\sqrt[4]{z_1}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = \cos z$, $z_0 = \frac{\pi}{4}i + 1$;

b) $f(z) = \operatorname{Arctg} z$, $z_0 = 2 - i$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \cos(2iz)$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = \frac{2+t}{2-t} + i \frac{1+t}{1-t}$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a)
$$\begin{cases} |z - 1 + i| \geq 1, \\ \operatorname{Re} z < 1, \\ \operatorname{Im} z \leq -1. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} |z - 2| \geq |z + 2i|, \\ |z + 3| < |z - 5|! \end{cases}$$

6. feladat. Lehet-e az $u = \frac{x}{(x^2 + y^2)} + x$ függvény valós része valamely $f(z)$ analitikus

függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(1) = 2$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a

$w = z + \frac{3}{z}$ leképezés által, ha $D: |z| = 5$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{5z + 100}{50z^2 + 5z^3 - z^4}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \frac{2z}{z^2 + 4}, z_0 = -3 + 2i !$

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z) = z \sin \frac{z^2 - 2z}{(z-1)^2}$ függvényt a $z_0 = 1$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z) = \frac{\sin z}{(z^2 - \pi^2)^2};$

b) $f(z) = \frac{\text{sh}(2z)}{z^2} !$

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$\int_{ABC} (z^9 + 1) dz ;$ ABC egy törtegyenes $z_A = 0; z_B = 1 + i; z_C = i !$

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{|z-1|=3} \frac{\sin z}{(z-\pi)^5} dz ;$

b) $\oint_{|z|=4} \frac{e^{2z} + 3z}{z^2} dz !$

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^4} ;$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3 + 1) \cos x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx ;$

3. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{7} \sin x + 4} ;$

4. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2 + \cos x)^2} !$

27. Változat

1. feladat

a) Határozza meg a $z_1 = 2 + 5i$ és $z_2 = -3 - 4i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $z_1^3 \cdot \bar{z}_2$, $\frac{\bar{z}_1}{z_2}$, $\sqrt[3]{z_1 - \bar{z}_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = shz$, $z_0 = 1 - \frac{\pi}{3}i$;

b) $f(z) = Lnz$, $z_0 = \sqrt{3} + i$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \sin^2(2iz)$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = t^2 - 2 + i(t^2 - 4t + 5)$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a)
$$\begin{cases} -\frac{5\pi}{6} \leq \arg z \leq -\frac{\pi}{6}, \\ \frac{\pi}{4} \leq \arg(z + 2i) \leq \frac{3\pi}{4}. \end{cases};$$

b) $\operatorname{Re}(z + 1) = |z|$!

6. feladat. Lehet e az $v = x^2 - y^2 - x$ függvény képzetes része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 0$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a

$w = z - \frac{3}{z}$ leképezés által, ha $D : |z| = 4$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{11z + 242}{121z + 11z^2 - 2z^3}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \frac{2z}{z^2 + 4}$, $z_0 = 2 + 3i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z) = z \cos \frac{z}{z-3}$ függvényt a $z_0 = 3$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{z^2 - \frac{\pi}{4} z};$

b) $f(z) = \frac{1}{z^2} + \cos \frac{1}{z} !$

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$$\int_{ABC} (\sin z + z^5) dz; \text{ ABC egy törtegyenes } z_A = 0; z_B = 1; z_C = 2i !$$

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{|z+i|=1} \frac{dz}{(z^2 + 1)^2};$

b) $\int_{|z|=1} z^2 \sin \frac{i}{z^2} dz !$

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 15)^2};$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3 + 1) \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx;$

3. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{5} \sin x + 3};$

4. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(\sqrt{10} + 3 \cos x)^2} !$

28. Változat

1. feladat.

a) Határozza meg a $z_1 = 2\sqrt{3} + 2i$ és $z_2 = 3 + 3\sqrt{3}i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $z_1 \cdot \bar{z}_2$, $\frac{z_1^2}{z_2}$, $\sqrt[5]{z_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = \operatorname{tg} z$, $z_0 = \frac{\pi}{2} + i$;

b) $f(z) = \operatorname{Arcsh} z$, $z_0 = -4i$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = ie^{z^2}$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = t^2 + 2t + 5 + i(t^2 + 2t + 1)$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} |\operatorname{Re} z| \geq 2, \\ |\operatorname{Im} z| < 3. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2 \geq |2 - z^2|, \\ |\operatorname{Re} z| < 1! \end{cases}$

6. feladat. Lehet e az $u = -2xy - 2y$ függvény valós része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek?

Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = i$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a

$w = z - \frac{2}{z}$ leképezés által, ha $D: |z| = 2$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{6z + 144}{72z^2 + 6z^3 - z^4}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \frac{2z}{z^2 + 4}$, $z_0 = 3 + 2i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z) = z \sin \pi \frac{z-1}{z-2}$ függvényt a $z_0 = 2$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z) = \frac{z^2 + 4}{z^5 + 4iz^4 - 4z^3};$

b) $f(z) = \frac{e^{z+e}}{z+e} !$

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$$\int_{AB} z \operatorname{Im} z^2 dz \quad \text{AB egy egyenes szakasza } z_A = 0; z_B = 1 + i !$$

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{|z+1|=1} \frac{2 + 3z^3 - 5z^4}{z^5} dz;$

b) $\int_{|z|=1} \frac{shz - z^2}{z^3} dz !$

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 2}{x^4 + 7x^2 + 12} dx;$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x - \cos x}{(x^2 + 1)^3} dx;$

3. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\sqrt{2} \sin x + 3};$

4. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(\sqrt{3} + \sqrt{2} \cos x)^2} !$

29. Válozat

1. feladat.

a) Határozza meg a $z_1 = 5 - 3i$ és $z_2 = -2 + i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát!

Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $z_1^2 \cdot z_2$, $\frac{\bar{z}_2}{z_1}$, $\sqrt[4]{z_1 - \bar{z}_2}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = \sin z$, $z_0 = \frac{3\pi}{2} + i$;

b) $f(z) = \ln z$, $z_0 = 1 + \sqrt{3}i$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \ln(z^2 - i)$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = 2t^2 + 2t + 1 - i(t^2 + t + 4)$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a) $\begin{cases} |z - 1 - i| \geq 2, \\ \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 2. \end{cases}$

b) $\begin{cases} |3i + z| \leq |3 - z|, \\ |\arg z| < \frac{\pi}{3} ! \end{cases}$

6. feladat. Lehet e az $v = 2xy - 2y$ függvény képzetes része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 1$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = z + \frac{1}{z}$ leképezés által, ha $D: |z| = 5$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{13z + 338}{169z + 13z^2 - 2z^3}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \frac{2z}{z^2 - 4}$, $z_0 = -1 + 3i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z) = ze^{\frac{z}{z-4}}$ függvényt a $z_0 = 4$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z) = \frac{e^z}{(z^2 + \pi^2)^2};$

b) $f(z) = z^4 \cos \frac{2 - \pi z}{2z} !$

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$$\int_L (z^3 + \sin z) dz; L : \{|z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0\} !$$

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{|z+i|=2} \frac{\sin z}{z^2 \left(z - \frac{\pi}{2}\right)} dz;$

b) $\int_{|z+i|=2} (z+1) e^{\frac{1}{z}} dz !$

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - 10x + 29)^2};$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + x) \sin x}{x^4 + 13x^2 + 36} dx;$

3. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\sqrt{3} \sin x + 4};$

4. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(\sqrt{7} + \sqrt{3} \cos x)^2} !$

30. Változat

1. feladat.

a) Határozza meg a $z_1 = 5 + 6i$ és $z_2 = 1 - 3i$ komplex számok abszolútértékét és argumentumát! Ábrázolja ezen komplex számokat a komplex síkon! Írja fel trigonometrikus és exponenciális alakját!

b) Keresse meg: $z_1 \cdot \bar{z}_2^2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\sqrt[3]{z_2 - \bar{z}_1}$!

2. feladat. Számolja ki az $f(z)$ függvény értékét a z_0 pontban, a választ a komplex szám algebrai alakjában írja fel:

a) $f(z) = \operatorname{ch} z$, $z_0 = 2 - \pi i$;

b) $f(z) = \operatorname{Arctg} z$, $z_0 = 2 + i$!

3. feladat. Határozza meg az $f(z) = \operatorname{th}\left(\frac{z}{i}\right)$ függvény differenciálhatósági tartományát és keresse meg deriváltját! Határozza meg derivált függvény valós és képzetes részét!

4. feladat. Határozza meg a $z = t^2 - 2t + 3 + i(t^2 - 2t + 1)$ görbe típusát!

5. feladat. Határozza meg azt a z tartományt, mely az alábbi egyenlőtlenségekkel van megadva:

a)
$$\begin{cases} \left| \frac{z + 2i}{3 - 4i} \right| \leq 1, \\ |\arg z| < \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

b) $2z\bar{z} + (z + i)z + (2 - i)\bar{z} < 2$!

6. feladat. Lehet-e az $u = x^3 - 3xy^2 - x$ függvény valós része valamely $f(z)$ analitikus függvénynek? Ha igen, akkor hajtsa végre annak helyreállítását tudván, hogy $f(0) = 0$!

7. feladat. Keresse meg a W sík azon tartományát, melybe a Z sík D tartománya képződik a $w = z + \frac{4}{z}$ leképezés által, ha $D: |z| = 5$!

8. feladat. Keresse meg Laurent-sorba való fejtését az $f(z)$ függvénynek a $z - z_0$ hatványai szerint! Határozza meg a fő- és szabályos részét!

a) $f(z) = \frac{7z + 196}{98z^2 + 7z^3 - z^4}$, $z_0 = 0$;

b) $f(z) = \frac{2z}{z^2 - 4}$, $z_0 = 2 + 2i$!

9. feladat. Fejtse ki Laurent sorba az $f(z) = z \cos \frac{z}{z - 5}$ függvényt a $z_0 = 5$ pont környezetében!

10. feladat. Keresse meg az $f(z)$ függvény izolált szinguláris pontjait, határozza meg azok típusát és számítsa ki a reziduumokat ezen pontokban:

a) $f(z) = \frac{\sin^2 z}{z^3 - z^5};$

b) $f(z) = (z-2) \operatorname{sh} \frac{1}{z}!$

11. feladat. Számítsa ki az alábbi integrált:

$$\int_L z|z|dz; L: \{|z|=1, \operatorname{Im} z \geq 0\}!$$

12. feladat. Reziduumok Cauchy-tétele szerint számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{ctg} z}{4z - \pi} dz;$

b) $\int_{|z|=1} z^3 \sin \frac{1}{z} dz!$

13. feladat. Számítsa ki az alábbi integrálokat a reziduumok segítségével:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 11)^2} dx;$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + x) \cos x}{x^4 + 13x^2 + 36} dx;$

3. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{21} \sin x + 5};$

4. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(\sqrt{7} + \cos x)^2}!$

Irodalom

1. *Halász Gábor*. Bevezető komplex függvénytanba . – Budapest: ELTE Eötvös Kiadó Kft., 2002.
2. *B.A.Fuksz, B.V. Sabat* Komplex változós függvények és néhány alkalmazásuk. –Budapest: Tankönyvkiadó, 1976 .
3. *Мартиненко, М. А.* Теорія функції комплексної змінної. Операційне числення : навч. посіб. / *М. А. Мартиненко, І. І. Юрик*. - К.: Видавничий дім «Слово», 2013. - 296 с.
4. *Долженко Є. П., Єрмаков А. І.* Теорія функції комплексної змінної та деякі її застосування: Навчальний посібник. Луганськ: Вид-во СЛУ ім. В. Даля, 2003.

Посібник з комплексного аналізу призначений для студентів III курсу Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці спеціальності 4.04 Середня освіта (Математика) заочної форми навчання з метою організації контрольних робіт з курсу "Комплексний аналіз".

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики
(протокол № 10 від «23» червня 2025 року)

Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості вищої освіти
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол №7 від 26 серпня 2025 року)

Рекомендовано до видання у електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол №8 від 28 серпня 2025 року)

Підготовлено до видання у електронній формі (PDF) кафедрою математики та інформатики
з Видавничим відділом Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II