

Кафедра математики та інформатики
Matematika és Informatika Tanszék

«КОМПЛЕКСНИЙ АНАЛІЗ»
(МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДЛЯ ПРАКТИЧНИХ РОБІТ)

(для студентів 3-го курсу спеціальності 4.04 Середня освіта (Математика))

KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN

(Módszertani utmutató gyakorlati órákhoz)

Перший (бакалаврський) / Alapképzés (BA)
(ступінь вищої освіти / a felsőoktatás szintje)

Освіта / Oktatás
(галузь знань / képzési ág)

"Математика"
"Matematika"
(освітня програма / képzési program)



Берегове / Beregszász
2025 p. / 2025

Посібник з комплексного аналізу призначений для студентів III курсу Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці спеціальності 4.04 Середня освіта (Математика) денної та заочної форми навчання з метою організації практичних занять з курсу "Комплексний аналіз".

Матеріал призначений для використання як навчально-методичний посібник з дисципліни "Комплексний аналіз".

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики
(протокол № 10 від «23» червня 2025 року)

Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості вищої освіти
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол №7 від 26 серпня 2025 року)

Рекомендовано до видання у електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол №8 від 28 серпня 2025 року)

Підготовлено до видання у електронній формі (PDF) кафедрою математики та інформатики з
Видавничим відділом Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Укладач:

СТОЙКА МИРОСЛАВ ВІКТОРОВИЧ – доцент кафедри математики та інформатики
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Рецензенти:

МЕСАРОШ ЛІВІА ВАСИЛІВНА – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри
математики та інформатики ЗУІ;

БОРТОШ МАРІЯ ЮЛІЇВНА – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри
та диференціальних рівнянь ДВНЗ «УжНУ»

Відповідальний за випуск:

Олександр ДОБОШ – начальник Видавничого відділу ЗУІ ім. Ф.Ракоці II

За зміст посібника відповідальність несуть розробники.

Видавництво: Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II (адреса: пл.
Кошута 6, м. Берегове, 90202. Електронна пошта: foiskola@kmf.uz.ua)

© Мирослав Стойка, 2025

© Кафедра математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II, 2025

A komplex függvénytan a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola, III. éves, matematika szakos, nappali és levelezős hallgatóinak készült, a Komplex analízis c. tantárgy alaposabb tanulmányozásának és elsajátításának megkönnyítése céljából.

Az oktatási folyamatban történő felhasználását jóváhagyta

a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Matematika és Informatika Tanszéke

(2025. június 23, 10. számú jegyzőkönyv).

Megjelentetésre javasolta a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Minőségbiztosítási Tanácsa

(2025. augusztus 26, 7. számú jegyzőkönyv).

Elektronikus formában (PDF fájlformátumban) történő kiadásra javasolta

a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Tudományos Tanácsa

(2025. augusztus 28, 8. számú jegyzőkönyv).

Kiadásra előkészítette a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Matematika és Informatika Tanszéke és Kiadói Részlege.

Szerkesztő:

SZTOJKA MIROSLÁV – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének docense

Szakmai lektorok:

MÉSZÁROS LÍVIA – fizika és matematika tudományok kandidátusa, docens, a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének docense

BARTOS MÁRIA – fizika és matematika tudományok kandidátusa, docens, az Ungvári Nemzeti Egyetem Algebra és Diferenciál Egyenletek Tanszékének docense

A kiadásért felel:

DOBOS Sándor – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Kiadói Részlegének vezetője

A tartalomért kizárólag a jegyzet szerkesztője felel.

Kiadó: a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola (cím: 90 202, Beregszász, Kossuth tér 6. E-mail: foiskola@kmf.uz.ua)

© Sztojka Mirosláv, 2025

© A II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Matematika és Informatika Tanszéke, 2025

Tartalom

1.	A komplex szám fogalma.....	5
2.	Komplex számokkal végzett műveletek.....	6
3.	Komplex szám trigonometrikus alakja.....	7
4.	Euler-formula. A komplex szám exponenciális alakja.....	8
5.	Komplex számok műveletei trigonometrikus és exponenciális alakban.....	9
6.	A komplex szám geometriai értelmezése.....	10
7.	Komplex változós függvény.....	11
8.	Komplex számok sorozatának határértéke. Komplex változós függvény határértéke.....	12
9.	Komplex változós függvényének deriváltja. Cauchy-Riemann feltételek.....	13
10.	Az analitikus függvény helyreállítása annak valós (képzetes) része alapján.....	14
11.	Egylapú függvények.....	15
12.	Komplex változós függvény integrálása.....	16
13.	Cauchy-féle integrálképletek.....	17
14.	Komplex tagú számsorok.....	18
15.	Komplex változós függvények szinguláris pontjai.....	19
16.	Reziduumok kiszámítása.....	20
17.	Reziduumok alaptétele.....	21
18.	Az integrálok kiszámítása zárt görbéken a reziduumok segítségével a $z = \infty$ pontban.....	22
19.	Többértékű függvények integrálása.....	23
20.	Improprius integrálok kiszámítása reziduumok segítségével.....	24
21.	Improprius integrálok kiszámítása a Jordán lemma segítségével.....	25
22.	Trigonometriai racionális függvényektől való határozott integrálok kiszámítása.....	26
23.	Laplace transzformáció.....	27
24.	Tétel az eredeti és transzformált függvény deriváltjáról.....	29
25.	Tételek az eredeti és transzformált függvények integráljairól.....	30
26.	Az eredeti késleltetésének tétele.....	31
27.	A transzformált függvény eltolásának tétele.....	32
28.	A konvolúció tétele.....	33
29.	A gamma-függvények és tulajdonságaik.....	34
30.	Lineáris differenciálegyenletek és lineáris differenciálegyenletrendszerek.....	35
	Irodalom.....	37

1. A komplex szám fogalma

$Re(z)$ a z komplex szám valós része, míg $Im(z)$ az komplex szám képzetes része.

1.1. Addja meg z komplex szám $Re(z)$ (valós rész) és $Im(z)$ (képzetes rész) értékét:

- a) $6i^2 + 3i$; b) $(1+i)^3$; c) $i + \frac{1}{i}$; d) $i - \frac{1}{i}$; e) $\frac{1+i}{1-i}$; f) $(1-i)^5$;
g) $1 + i + i^2 + i^3$; h) $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4}$; i) $i - i^2$; j) $\sum_{k=1}^n i^k$!

1.2. Addja meg z komplex szám $Re(z)$ (valós rész) és $Im(z)$ (képzetes rész) értékét:

- a) $\frac{1-i}{i}$; b) $i + (8i+1)^2$; c) i^{17} ;
d) $16i^{32}$; e) $(1+i)^4$; f) $i - \frac{1}{i} + \frac{1/i}{i}$!

1.3. Határozza meg a z komplex konjugáltját:

- a) $-3i^3 - 5i^2$; b) $(5+6i)^5$; c) 7 ;
d) i^{53} ; e) $i(6i + 7i^2)$; f) $-i(-i(1-i^2))$;
g) $i(-i)(i+2)$; h) $\frac{1+i}{1-i}$; i) $\frac{1}{i-7}$; j) $\frac{1}{i}$!

1.4. Határozd meg a z komplex konjugáltját:

- a) $\frac{i}{6+i}$; b) $i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5$; c) $i + (i+2) + (i+4)$;
d) $-i(-i(1-i))$; e) i^3 ; f) $16 + i^4$!

1.5. Bizonyítsa be az alábbi egyenlőségeket:

- a) $(1+i)^{8n} = 2^{4n}$ ($n \in \mathbb{Z}$); b) $(1+i)^{4n} = (-1)^n 2^{2n}$ ($n \in \mathbb{Z}$) !

2. Komplex számokkal végzett műveletek

2.1. Végezze el az alábbi műveleteket:

a) $(1-6i)(1+6i)$;

b) $\frac{1}{1-2i} \cdot (1+2i)$;

c) $(1+i)(1+2i)$;

d) $(1+i)(i^5-i)$;

e) $(5+i)(15-3i)$;

f) $(4-5i)(-2+3i) + (1+2i)(-3+4i)$.

g) $(1-i)(1+i)(1-2i)(1+2i)$;

h) $(1-i)^3(1+i)^3$;

i) $(1-i)(1-2i)(1-3i)$;

j) $(1+i)^8$!

2.2. Végezze el az alábbi műveleteket:

a) $(1+i)(1+2i)(1+3i)$;

b) $\frac{1}{1+3i} \cdot (1-3i)$;

c) $(1+i)^2(i-1)^2$;

d) $(1-i)(1-2i)(1-3i)$;

e) $i(1+i)(1-i)$;

f) $z \cdot \frac{1}{\bar{z}}$!

3. Komplex szám trigonometrikus alakja

A komplex szám trigonometrikus alakja a következő $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, ahol r a komplex szám abszolútértéke, φ pedig a komplex szám argumentuma. Ha z -t egy komplex változó síkján ábrázoljuk egy ponttal, akkor az OZ vektor elhajlásának szöge az OX tengelyhez képest (óramutató járásával ellentétes irányban) megegyezik a komplex szám argumentumával radianban mérve.

Ha $x > 0$, akkor $\varphi = \arctg(y/x)$; ha $x = 0$ és $y > 0$, akkor $\varphi = \pi/2$; ha $x = 0$ és $y < 0$, akkor $\varphi = -\pi/2$; ha $x < 0$ és $y > 0$, akkor $\varphi = \pi + \arctg(y/x)$; ha $x < 0$ és $y < 0$, akkor $\varphi = -\pi + \arctg(y/x)$. Az $x = 0, y = 0$ esetében az argumentum nem létezik. Ha a φ értéke $(-\pi, \pi]$ szakaszba esik, akkor azt fő argumentumnak nevezik.

3.1. Határozza meg a z komplex szám abszolútértékét:

- | | | |
|---|--|-----------------------------|
| a) $i^n, n \in \mathbb{N}$; | b) $(1+i)^n, n \in \mathbb{N}$; | c) $\frac{1-i}{i}$; |
| d) $i + i^3 + i^5 + i^7 + \dots + i^{2k+1}$; | e) $4 + 3i$; | f) $i^{52} + i^{100}$! |
| g) $2i^3 - 1$; | h) i^{5+i} ; i) $\frac{1}{3+i}$; | j) $\frac{1}{(1-i)(1+i)}$! |

3.2. Határozza meg a z komplex szám abszolútértékét:

- | | | | |
|-----------------|------------------------------|---------------------|---------------------|
| a) $-i - i^3$; | b) $\sum_{k=1}^{10} (i+k)$; | c) $\frac{1}{2i}$; | d) $i - \sqrt{5}$! |
|-----------------|------------------------------|---------------------|---------------------|

4. Euler-formula $e^{\pm i\varphi} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi$.

A komplex szám exponenciális alakja

4.1. Végezze el a műveleteket:

a) $(1+i)^3(1-i)^5$;

b) $(1+i)^{-1}(1-i)^3$;

c) $\sin iz$;

d) $\cos iz$;

e) $\sin iz + \cos iz$;

f) $\operatorname{tg} iz$;

g) $\operatorname{ctg} iz$;

h) $e + \frac{1}{e}$!

4.2. Végezze el a műveleteket:

a) $(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})^5$;

b) $(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) \cdot (\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4})$;

c) $\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)$;

d) $e^{iz+\bar{z}}$;

e) $e^{i\pi/3}$;

f) $e^{i \ln 2}$!

5. Komplex számok műveletei trigonometrikus és exponenciális alakban

A $z = re^{i\varphi}$ komplex szám n -edik gyöke meghatározható a következő képlettel:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, \text{ ahol } n \in \mathbb{N}, k = \overline{0, n-1}.$$

A Moivre-formula a következő alakban írható fel:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

5.1. Emelje hatványra az alábbi kifejezéseket:

- a) $(1+i)^5$; b) $(1-i)^5$; c) $(1+i)^7$;
d) $(\cos i)^6$; e) $(\sin i)^5$; f) $i + i^2 + i^3 + i^4$;
g) $(\cos \frac{\varphi}{10} + i \sin \frac{\varphi}{10})^{10}$; h) $(\sin \varphi - i \cos \varphi)^5$!

5.2. Vonjon gyököt az alábbi komplex számokból:

- a) $\sqrt[3]{1}$; b) $\sqrt[3]{-1}$; c) $\sqrt[4]{-i}$; d) $\sqrt[3]{i+1}$; e) $\sqrt{|3+4i|}$!

6. A komplex szám geometriai értelmezése

6.1. Határozza meg a komplex változó síkjának vonalait:

a) $z = 1 + ti$;

b) $z = t + it^2$;

c) $|z| = 2$;

d) $|z + i| = 1$;

e) $|z + 1| = 1, x > 0$;

f) $|z| = 3, x > 0, y > 0$!

6.2. Határozza meg a komplex változó síkjának vonalait:

a) $z = a \cos \varphi + ib \sin \varphi, \varphi \in [0; 2\pi]$;

b) $z = t + 3it$; c) $z = t + \frac{i}{t}, t > 0$;

d) $\arg z = \frac{\pi}{4}$;

e) $\arg z = |z|$;

f) $|z| = 1, x < 0, y > 0$!

7. Komplex változós függvény

7.1. Fejezze ki a komplex változós függvény valós $u(x, y) = \operatorname{Re}(z)$ és képzetes $v(x, y) = \operatorname{Im}(z)$ részét:

a) $w(z) = z^3$;

b) $w = |z^2|$;

c) $w(z) = \frac{1}{z+i}$;

d) $w(z) = i^{ix}$;

e) $w(z) = \ln z$;

f) $w(z) = e^{iz}$!

7.2. Fejezze ki a komplex változós függvény valós $u(x, y) = \operatorname{Re}(z)$ és képzetes $v(x, y) = \operatorname{Im}(z)$ részét:

a) $w(z) = \cos z$;

b) $w = \sqrt{z}$;

c) $w(z) = \frac{1}{z}$;

d) $w(z) = z^2$;

e) $w(z) = \sin z$!

7.3. Határozza meg $f(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx$!

8. Komplex számok sorozatának határértéke.

Komplex változós függvény határértéke

8.1. Határozza meg az alábbi komplex számsorozatok és függvények határértékét:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{in}$;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^n$;

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\pi}{2n}\right)^{in}$;

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ix}{x}$;

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ix}{x^2}$;

f) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin^3 z}{z^3}$!

9. Komplex változós függvényének deriváltja. Cauchy-Riemann feltételek

Cauchy-Riemann feltételek: $\partial u / \partial x = \partial v / \partial y$, $\partial u / \partial y = -\partial v / \partial x$.

9.1. Ellenőrizze a Cauchy-Riemann feltételeket a alábbi függvényekre:

- a) $w(z) = z^3$; b) $w(z) = \cos z$; c) $w(z) = \frac{1}{z}$;
d) $w(z) = \bar{z}$; e) $w(z) = z|z|$; f) $w(z) = z + \bar{z}$!

9.2. Ellenőrizze a Cauchy-Riemann feltételeket a alábbi függvényekre:

- a) $w(z) = e^z$; b) $w(z) = a^z$; c) $w(z) = e^{iz}$;
d) $w = x^2 + y^2 + ixy$; e) $w(z) = \sin z$; f) $w = x^2 + iy^2$!

9.3. Az alábbi függvények elemi függvényekhez való összehasonlításával ellenőrizze a Cauchy-Riemann feltételek teljesülését:

- a) $w(z) = \sin \cos z$; b) $w = \sin e^z$; c) $w = \cos e^{\bar{z}}$;
d) $w = \operatorname{arctg} z$; e) $w = \sin \frac{1}{z}$; f) $w(z) = z^z$!

10. Az analitikus függvény helyreállítása annak valós (képzetes) része alapján

10.1. Ha ismert az $u(x; y) = \operatorname{Re} w(z)$ [$v(x; y) = \operatorname{Im} w(z)$], határozza meg az $\operatorname{Im} w(z)$ [$\operatorname{Re} w(z)$]:

a) $u = x^2 - y^2$;

b) $u = \cos x \cdot \cosh y$;

c) $u = x^3 - 3xy^2$;

d) $u = x^2 + y^2$;

e) $v = e^x \sin y$;

f) $v = -y$!

11. Egylapú függvények

Ha $z_1 \neq z_2$ viszont $w(z_1) = w(z_2)$ akkor a komplex változós függvényt egylapúnak nevezzük.

11.1. Egylapúak e az alábbi függvények:

a) $w(z) = 3z + 1$;

b) $w(z) = \sqrt{z}$;

c) $w(z) = z^2$?

11.2. Egylapúak e az alábbi függvények:

a) $w(z) = \frac{1}{z}$;

b) $w(z) = \sin z$;

c) $w(z) = e^z$?

12. Komplex változós függvény integrálása

12.1. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{AB} z dz$, ahol AB - vonal $y = x^2, z_A = 0, z_B = 1 + i$;

b) $\int_{AB} \bar{z} dz$, ahol AB - vonal $y = x^2, z_A = 0, z_B = 1 + i$;

c) $\int_{AB} \bar{z} dz$, ahol AB - vonal $y = x, z_A = 0, z_B = 1 + i$;

d) $\int_{AB} \bar{z} dz$, ahol AB - vonal $y = \sqrt{x}, z_A = 0, z_B = 1 + i$;

e) $\int_{AB} z dz$, ahol AB - vonal $y = x, z_A = 0, z_B = 1 + i$;

f) $\int_{AB} z dz$, ahol AB - vonal $y^2 = x, z_A = 0, z_B = 1 + i$!

12.2. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{AB} x dz$, ahol AB - vonal $y = x^2, z_A = 0, z_B = 1 + i$;

b) $\int_{AB} x dz$, ahol AB - vonal $y = x, z_A = 0, z_B = 1 + i$;

c) $\int_{AB} x dz$, ahol AB - vonal $y^2 = x, z_A = 0, z_B = 1 + i$;

d) $\int_{AB} e^z dz$, ahol AB - vonal $y = x, z_A = 0, z_B = 1 + i$;

e) $\int_{AB} e^z dz$, ahol AB - vonal $y = x^2, z_A = 0, z_B = 1 + i$!

13. Cauchy-féle integrálképletek

Ha $f(z)$ szabályos a D tartományban, akkor minden γ zárt görbére, ami ebben a tartományban helyezkedik el, és minden olyan z -re, ami γ belső részén található, érvényes a Cauchy-féle integrálképlet: $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$. A Cauchy-féle integrálképlet általánosítható a

komplex változós függvényének deriváltjára is: $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$.

13.1. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\oint_{|z|=1} \frac{\sin(z+1)}{z} dz;$

b) $\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z} dz;$

c) $\oint_{|z|=1} \frac{i \cdot e^z}{z} dz;$

d) $\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{i(z - \pi/4)} dz;$

e) $\oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{tg} z}{i(z - \pi/6)} dz;$

f) $\oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{tg} z}{z} dz !$

13.2. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\oint_{|z|=3} \frac{i \cdot \ln z}{|z - e|} dz;$

b) $\oint_{|z|=1} \frac{\cos z \cdot \sin z}{(z - \pi/4)} dz;$

c) $\oint_{|z|=2} \frac{\cos z}{(z - i)} dz;$

d) $\oint_{|z|=1/2} \frac{\cos z}{(z - i)} dz;$

e) $\oint_{|z|=3} \frac{\sin z}{2\pi(z - i)} dz;$

f) $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{i\pi(z + i)} dz !$

14. Komplex tagú számsorok

14.1. Kovergensek e az alábbi sorok:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{4n+1} + i \frac{n}{2n+1} \right); & \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + i \frac{1}{n^2} \right); & \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + i \frac{1}{n^3} \right); \\ \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + i \frac{1}{2^n} \right); & \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+4} + i \frac{1}{n} \right); & \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n} + i \frac{1}{n} \right)? \end{array}$$

14.2. Kovergensek e az alábbi sorok:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n + i \frac{1}{n} \right); & \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1+in}{3n+1} \right); & \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n \ln n} + i \frac{1}{n \ln n \ln n \ln n} \right); \\ \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{n\sqrt{n}} \right); & \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n + i \cdot 3^n}{4^n} \right); & \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1-i}{2n+1} \right)? \end{array}$$

14.3. Fejtse Taylor-sorba az alábbi függvényeket a z_0 pont környezetében:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } w = \sin z, \quad z_0 = i; & \text{b) } w = \cos z, \quad z_0 = -i; & \text{c) } w = z^3, \quad z_0 = i; \\ \text{d) } w = e^z, \quad z_0 = 1; & \text{e) } w = e^{z^2}, \quad z_0 = 1; & \text{e) } w = (z-2)^2, \quad z_0 = 1! \end{array}$$

14.4. Fejtse Taylor-sorba az alábbi függvényeket a z_0 pont környezetében:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } w = \sin z, \quad z_0 = -i; & \text{b) } w = \cos z, \quad z_0 = i; & \text{c) } w = z^2, \quad z_0 = i; \\ \text{d) } w = \sin z, \quad z_0 = 1+i; & \text{e) } w = e^{z^2}, \quad z_0 = i; & \text{f) } w = z \cdot \bar{z}, \quad z_0 = i! \end{array}$$

14.5. Fejtse MacLaurin-sorba az alábbi függvényeket a $z_0 = 0$ pont környezetében:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } w = \sin(iz); & \text{b) } w = \cos z; & \text{c) } w = (z+3)^3; \\ \text{d) } w = e^{iz}; & \text{e) } w = \operatorname{sh} z; & \text{f) } w = \operatorname{ch} z! \end{array}$$

15. Komplex változós függvények szinguláris pontjai

15.1. Határozza meg a komplex változós függvény szinguláris pontjának típusát:

a) $w = \frac{\sin^2 z}{z^2};$

b) $w = \frac{1 - \cos^2 z}{2z^2};$

c) $w = e^{\frac{1}{z}};$

d) $w = \frac{1}{(z-1)(z-3)^2};$

e) $w = \frac{1}{z^2} \sin z;$

f) $w = \frac{\sin z^3}{z^5} !$

15.2. Határozza meg a komplex változós függvény izolált szinguláris pontjának típusát:

a) $w = \sin z ;$

b) $w = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (x-k)^k};$

c) $w = \operatorname{tg} z ;$

d) $w = \frac{2 - z^2 - 2 \cos z}{z^5};$

e) $w = \operatorname{ctg}^2 z ;$

f) $w = \operatorname{tg}^3 z !$

16. Reziduumok kiszámítása

16.1. Számítsa ki a következő függvények szinguláris helyeihez tartozó reziduumokat:

a) $w = \frac{1}{1-z};$

b) $w = \frac{1}{(z-1)(z-2)^2};$

c) $w = \frac{1}{z+1};$

d) $w = \frac{1}{(z-1)^2};$

e) $w = \frac{1}{z(z-1)};$

f) $w = \frac{1}{(z-i)(z+i)} !$

16.2. Számítsa ki a következő függvények szinguláris helyeihez tartozó reziduumokat:

a) $w = z \sin \frac{1}{z};$

b) $w = \frac{1}{z^2} \sin z;$

c) $w = z \cos \frac{1}{z};$

d) $w = \frac{1}{z^2} \cos z;$

e) $w = e^{-1/z};$

f) $w = \frac{1}{z^3} e^{1/z} !$

17. Reziduumok alaptétele

Ha $f(z)$ függvény reguláris egy összefüggő D tartományban, kivéve véges számú szinguláris pontot $\{z_i\}$, akkor az integrál egy egyszerű zárt γ görbementén, ami a D határa, a következő képlettel határozódik meg

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z_k).$$

17.1. A reziduumok alaptételének segítségével számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\oint_{|z|=2} \frac{1}{(z-1)(z-3)} dz;$

b) $\oint_{|z|=2,5} \frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)} dz;$

c) $\oint_{|z|=2} \frac{z-4}{(z-5)(z-10)} dz;$

d) $\oint_{|z|=6} \frac{z-4}{(z-5)(z-10)} dz;$

e) $\oint_{|z-10|=2} \frac{z-4}{(z-5)(z-10)} dz;$

f) $\oint_{|z|=1} \frac{z-4}{(z-5)(z-10)} dz !$

17.2. A reziduumok alaptételének segítségével számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\oint_{|z|=1,5} \frac{z+1}{(z-1)(z-2)} dz;$

b) $\oint_{|z|=3} \frac{z+1}{(z-1)(z-2)} dz;$

c) $\oint_{|z-2|=0,5} \frac{z+1}{(z-1)(z-2)} dz;$

d) $\oint_{|z|=0,5} \frac{z+1}{(z-1)(z-2)} dz;$

e) $\oint_{|z-2|=0,5} \frac{z^2+1}{(z-1)(z-2)(z-3)} dz;$

f) $\oint_{|z|=1,5} \frac{z^2+1}{(z-1)(z-2)(z-3)} dz !$

18. Az integrálok kiszámítása zárt görbén a reziduumok segítségével a $z = \infty$ pontban

Ha $f(z)$ reguláris az összefüggő D tartományban, kivéve a véges számú n szinguláris pontban $\{z_i\}$, és nincsenek más szinguláris pontok a komplex változós síkján, kivéve $z = \infty$, akkor az integrál a egyszerű zárt γ görbementén, amely D tartományban található a következő képlettel kiszámítható: $\oint_{\gamma} f(z) dz = -2\pi i \cdot \text{res } f(\infty)$. Ez a képlet megkönnyíti az integrál kiszámítását a korábbi

leírt módszerekhez képest, mert nem szükséges megkeresni a reziduumot az összes véges pontban. Elég megkeresni a reziduumot a végtelen távoli pontban.

18.1. Számítsa ki az alábbi integrált a zárt görbe mentén a reziduumok segítségével a $z = \infty$ pontban:

a) $\oint_{|z|=3} \frac{z+1}{z(z+i)(z+2i)} dz ;$

b) $\oint_{|z|=3} \frac{2z+1}{(z-1)(z-2)} dz ;$

c) $\oint_{|z|=4} \frac{6z^3+5z}{(z-3)^2(z-1)^2} dz !$

19. Többértékű függvények integrálása

19.1. Számítsa ki a többértékű függvény integrálját:

a) $\oint_{|z-4|=1/2} \frac{\sqrt{8}}{z-4} dz;$

b) $\oint_{|z-9|=1} \frac{\sqrt{z}}{z^2(z-9)} dz;$

c) $\oint_{|z-1|=1/2} \frac{z^2+1}{\ln z - 2\pi i} dz;$

d) $\oint_{|z+1|=1/3} \frac{z^2+1}{\ln z - \pi i} dz !$

19.2. Számítsa ki a megadott logaritmusos I integrál értékét a C görbe mentén!

a) $I = \int_C z^n \operatorname{Ln} z \, dz$, ahol $C = \{z : |z| = 1\}$, és $n \in \mathbb{N}$ és $\operatorname{Ln} 1 = 0$.

b) $I = \int_C |\operatorname{Ln} z|^3 dz$, ahol $C = \{z : |z| = 1\}$, és $\operatorname{Ln} 1 = 0$.

c) $I = \int_C \operatorname{Ln} z \, dz$, ahol $C = \{z : |z| = R\}$, és $\operatorname{Ln} R = \ln R + 2\pi i$.

d) $I = \int_C z^n \operatorname{Ln} z \, dz$, ahol $C = \{z : |z| = 1\}$, $n \in \mathbb{N}$ és $\operatorname{Ln}(-1) = i\pi$.

e) $I = \int_C |\operatorname{Ln} z|^2 dz$, ahol $C = \{z : |z| = 1\}$, és $\operatorname{Ln} 1 = 2\pi i$.

f) $I = \int_C \frac{\operatorname{Ln} z}{z} dz$, ahol $C = \{z : |z| = 1\}$, és $\operatorname{Ln} 1 = 2\pi i$.

g) $I = \int_C \frac{\ln(z-3)}{z-3} dz$, ahol $C = \{z : |z| = 3\}$.

h) $I = \int_C \left| \frac{\operatorname{Ln} z}{z} \right| dz$, ahol $C = \{z : |z| = 1\}$, és $\operatorname{Ln} 1 = 2\pi i$.

i) $I = \int_C z^n \operatorname{Ln} z \, dz$, ahol $C = \{z : |z| = 1\}$, $n \in \mathbb{N}$ és $\operatorname{Ln} 1 = 0$.

j) $I = \int_C |\operatorname{Ln} z| dz$, ahol $C = \{z : |z| = 1\}$, és $\operatorname{Ln}(-1) = 7i\pi$.

k) $I = \int_C \operatorname{Ln} z |dz|$, ahol $C = \{z : |z| = 1\}$, és $\operatorname{Ln} 1 = 4\pi i$.

l) $I = \int_C |\operatorname{Ln} z|^2 dz$, ahol $C = \{z : |z| = 1\}$, és $\operatorname{Ln} 1 = 2\pi i$.

m) $I = \int_C \frac{\operatorname{Ln} z}{z} dz$, ahol $C = \{z : |z| = 2\}$, és $\operatorname{Ln}(-2) = \ln 2 + 3\pi i$.

n) $I = \int_C |\operatorname{Ln} z| \cdot |dz|$, ahol $C = \{z : |z| = 1\}$, és $\operatorname{Ln}(-1) = -\pi i$.

20. Improprius integrálok kiszámítása reziduumok segítségével

Az alábbi képletet fogjuk felhasználni az integrálok kiszámítására:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum \operatorname{res} f(z_i),$$

ahol a reziduumokat a felső félsíkban vesszük (az OX tengely felett). Az $f(z)$ reguláris függvény az $\operatorname{Im}(z) > 0$ tartományban, kivéve véges számú szinguláris pontokban, és nullához konvergál amikor $|z| \rightarrow \infty$, ahol a szabály $1/|z|^n, n \geq 2$.

20.1. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1};$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)};$

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)(x^2+9)};$

d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)(x^2+9)(x^2+16)};$

e) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1};$

f) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} !$

21. Improprius integrálok kiszámítása a Jordán lemma segítségével

A Jordán-lemma a következő formulákat adja az improprius integrálok kiszámításához:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos ax = -2\pi \operatorname{Im} \sum \operatorname{res}(e^{iaz_k} f(z_k)),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin ax = 2\pi \operatorname{Re} \sum \operatorname{res}(e^{iaz_k} f(z_k)),$$

ahol a reziduumokat a felső félsík szinguláris pontjaiban van véve.

21.1. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{x^2 + 1};$

b) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{x^2 + 4};$

c) $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{x^2 + a^2};$

d) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x \, dx}{x^2 + 1};$

e) $I = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x \, dx}{x^2 + 9};$

f) $I = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin 2x \, dx}{x^2 + 4} !$

21.2. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x \, dx}{x^2 + 1};$

b) $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos 3x \, dx}{x^2 + 9};$

c) $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos nx \, dx}{x^2 + a^2};$

d) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x \, dx}{x^2 + 4};$

e) $I = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin nx \, dx}{x^2 + a^2};$

f) $I = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x \cos x \, dx}{x^2 + 1} !$

22. Trigonometriai racionális függvényektől való határozott integrálok kiszámítása

Ebben az esetben a $\int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$ integrál levezethető a $|z|=1$ zárt vonalú integrálhoz

a következő helyettesítéssel:

$$\sin \varphi = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right), \quad \cos \varphi = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad dz = -i \frac{dz}{z}.$$

22.1. Számítsa ki az alábbi trigonometriai racionális függvényektől való integrálokat:

a) $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi + 2};$

b) $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi - 2};$

c) $I = \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi;$

d) $I = \int_0^{2\pi} \cos^4 \varphi d\varphi;$

e) $I = \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi$, használja a $2 \cos^2 \varphi = \cos 2\varphi + 1$ helyettesítést;

f) $I = \int_0^{\pi} \cos^6 \varphi d\varphi!$

22.2. Vezesse ki a következő integrál kiszámításának általános képletét: $I = \int_0^{2\pi} \cos^{2m} \varphi d\varphi, \quad m \in \mathbb{R}!$

23. Laplace transzformáció

Az $f(t)$ (eredeti függvény) valós változós függvény Laplace transzformációjának az $F(p)$ (transzformált függvény) komplex változós függvényt nevezzük, ahol $p = s + i\sigma$

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt, \quad f(t) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt} dp.$$

Az eredeti és a transzformált függvény közötti összefüggést így jelöljük:

$$f(t) \rightleftharpoons F(p) \quad \text{vagy} \quad F(p) \rightleftharpoons f(t).$$

A Laplace transzformáció főbb tulajdonságai:

1. Linearitás: $\alpha f(t) + \beta g(t) \rightleftharpoons \alpha F(p) + \beta G(p)$.

2. Hasonlóság: $f(\alpha t) \rightleftharpoons \frac{F(\frac{p}{\alpha})}{\alpha}$.

3. Késés: $f(t - \tau) \rightleftharpoons e^{-p\tau} F(p)$.

4. Eltolás: $e^{p_0 t} f(t) \rightleftharpoons F(p - p_0)$.

5. $F(p) * G(p) \rightleftharpoons \int_0^t f(\tau) * g(t - \tau) d\tau$.

6. Az eredeti deriváltja: $f'(t) \rightleftharpoons pF(p) - f(0)$.

7. A transzformált deriváltja: $F^{(n)}(p) \rightleftharpoons (-1)^n t^n f(t)$.

8. Az eredeti integrálása: $\int_0^t f(t) dt \rightleftharpoons \frac{F(p)}{p}$.

9. A transzformált integrálása: $\frac{f(t)}{t} \rightleftharpoons \int_p^{\infty} F(p) dp$.

23.1. Lehet-e az $f(t)$ eredeti függvény, ha az $f(t)$ folytonos, kivéve véges számú szakadási pontban:

a) $f(t) = t|t| + t^2$; b) $f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{1}{\sin t}, & t > 0. \end{cases}$; c) $f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{\sin t}{t}, & t > 0. \end{cases}$;

d) $f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ e^{t^2}, & t > 0. \end{cases}$; e) $f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ t^2 e^t, & t > 0. \end{cases}$; f) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t g t, & t \geq 0. \end{cases}$?

23.2. Lehet-e az $f(t)$ eredeti függvény, ha az $f(t)$ folytonos, kivéve véges számú szakadási pontban:

$$\text{a) } f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{t}{|t|}, & t > 0. \end{cases};$$

$$\text{b) } f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \sin e^t, & t \geq 0. \end{cases};$$

$$\text{c) } f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{1}{t}, & t > 0. \end{cases};$$

$$\text{d) } f(t) = t + |t|;$$

$$\text{e) } f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ [t]!, & t > 0. \end{cases};$$

$$\text{f) } f(t) = \frac{1}{t-3}?$$

23.3. Határozza meg a transzformált függvényt, ha az eredeti adott:

$$\text{a) } f(t) = 1 + t;$$

$$\text{b) } f(t) = \sum_{k=0}^n t^k = \frac{t^{n+1} - 1}{t - 1};$$

$$\text{c) } f(t) = 5 - t^3;$$

$$\text{d) } f(t) = e^t - 1;$$

$$\text{e) } f(t) = \sin t + \cos t;$$

$$\text{f) } f(t) = \sinh t + \cosh t !$$

23.4. Határozza meg a transzformált függvényt, ha az eredeti adott:

$$\text{a) } f(t) = e^t + e^{-t};$$

$$\text{b) } f(t) = \sum_{k=0}^n e^{kt} = \frac{e^{(n+1)t} - 1}{e^t - 1};$$

$$\text{c) } f(t) = \sin it + \cos it;$$

$$\text{d) } f(t) = e^t + e^{2t};$$

$$\text{e) } f(t) = \sin t + \sin 2t;$$

$$\text{f) } f(t) = \sin t + \sin it !$$

24. Tétel az eredeti és transzformált függvény deriváltjáról

Ha az $f(t)$ az eredeti függvény és deriváltjai $f^{(k)}(t)$, $k = 1, 2, \dots$, akkor tetszőleges $k = 1, 2, \dots, n$

$$f^{(k)}(t) \rightleftharpoons p^k F(p) - p^{k-1} f(0) - p^{k-2} f'(0) - \dots - f^{(k-1)}(0).$$

Tehát, $f'(t) \rightleftharpoons pF(p) - f(0)$.

$$t^n f(t) \rightleftharpoons (-1)^n F^{(n)}(p), n = 1, 2, \dots$$

24.1. Keresse meg a transzformált függvényt az eredeti deriváltjától:

a) $f(t) = \sin^{(4)} t$; b) $f(t) = \sin^{(8)} t$; c) $f(t) = (t^3)^{///}$;

d) $f(t) = \sin^{(4n)} t, \quad n \in N$; e) $f(t) = (e^t)^{(n)} !$

24.2. Keresse meg a transzformált függvényt az eredeti deriváltjától:

a) $f(t) = (sht)'$; b) $f(t) = \sin^{(2)} wt$; c) $f(t) = (t \cos t)'$;

d) $f(t) = \cos^{(4n)} t, \quad n \in N$; e) $f(t) = (shwt)^{(2n)}$; f) $f(t) = (chwt)^{(2n)} !$

25. Tételek az eredeti és transzformált függvények integráljairól

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{F(p)}{p} \quad \frac{1}{t} f(t) \doteq \int_p^\infty F(q) dq$$

25.1. Az eredeti függvény integráljáról való tétel segítségével határozza meg a transzformált függvényt:

a) $\int_0^t \varphi d\varphi;$

b) $\int_0^t \varphi^n d\varphi;$

c) $\int_0^t \sin \varphi d\varphi;$

d) $\int_0^t \cos \varphi d\varphi;$

e) $\int_0^t \sin w\varphi d\varphi;$

f) $\int_0^t \left(\int_0^t \sin w\varphi' d\varphi' \right) d\varphi !$

25.2. Az eredeti függvény integráljáról való tétel segítségével határozza meg a transzformált függvényt:

a) $\int_0^t e^{a\varphi} d\varphi;$

b) $\int_0^t \varphi e^{a\varphi} d\varphi;$

c) $\int_0^t \varphi^2 e^{a\varphi} d\varphi;$

d) $\int_0^t \dots \left(\int_0^t \varphi^m e^{a\varphi} d\varphi \right) \dots d\varphi;$

e) $\int_0^t \varphi \sin \varphi d\varphi;$

f) $\int_0^t \varphi \cos \varphi d\varphi !$

26. Az eredeti késleltetésének tétele

$$f(t - \tau) \rightleftharpoons e^{-\tau p} F(p), \operatorname{Re} p > \sigma_0, t < \tau$$

26.1. Keresse meg a transzformált függvényt a késleltetés tétel segítségével:

a) $f(t) = sh(\omega t - 1)$; b) $f(t) = \cos(\omega t - \pi/2)$;

c) $f(t) = \sin(\omega t - \pi/2)$; d) $f(t) = (t - 3)^3$;

e) $f(t) = \cos(t + \tau)$; f) $f(t) = \sin(t - \tau)$!

27. A transzformált függvény eltolásának tétele

$$e^{\lambda t} f(t) \hat{=} F(p - \lambda)$$

27.1. . Keresse meg a transzformált függvényt az eltolás tétel segítségével:

a) $f(t) = e^{at} \cos wt$;

b) $f(t) = e^{it}$;

c) $f(t) = e^{-at} \sin wt$;

d) $f(t) = e^{3t} \cdot t^3$;

e) $f(t) = e^{-t} \cdot t$;

f) $f(t) = e^t t + e^{2t} t^2 + e^{3t} t^3$!

28. A konvolúció tétele

Az eredeti függvények konvolúciójának

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau$$

a transzformált szorzata felel meg

$$f_1(t) * f_2(t) \rightleftharpoons F_1(p) F_2(p)$$

28.1. Keresse meg a transzformált függvényt a konvolúció tétele segítségével:

a) $\int_0^t \tau \cdot e^{t-\tau} d\tau;$

b) $\int_0^t \tau^2 \cdot \sin(t - \tau) d\tau;$

c) $\int_0^t (-\tau + t) d\tau;$

d) $\int_0^t \sin \tau \cdot (t - \tau) d\tau;$

e) $\int_0^t \cos w \tau \cdot (t - \tau) d\tau;$

f) $\int_0^t e^{at} \cdot \cos(t - \tau) d\tau!$

29. A gamma-függvények és tulajdonságaik

A gamma-függvény alakja, amikor $\operatorname{Re} \beta > -1$: $\Gamma(\beta + 1) = \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^{\beta} d\tau$.

Amikor $\beta = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$, akkor $\Gamma(\beta + 1) = \beta!$.

Tetszőleges β -ra $\Gamma(\beta + 1) = \beta \Gamma(\beta)$. Ezen kívül $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}$.

Mivel a gamma-függvény hasonlít a Laplace-transzformációhoz, ezért tulajdonságait használhatjuk a transzformált függvények meghatározására.

Példa. Tegyük fel, hogy meg kell határozni a transzformált függvényt, amikor $f(t) = \sqrt{t}$. $F(p) =$

$$\int_0^{\infty} t^{1/2} e^{-pt} dt = \frac{1}{p^{3/2}} \int_0^{\infty} (pt)^{1/2} e^{-pt} d(pt) = \frac{1}{p^{3/2}} \Gamma(3/2) = \frac{\Gamma(1/2)}{2p^{3/2}} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2p^{3/2}}.$$

29.1. Keresse meg a transzformált függvényt a gamma-függvények tulajdonságainak segítségével:

a) $f(t) = \sqrt{t}$;

b) $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$;

c) $f(t) = t^{3/2}$;

d) $f(t) = t^2$;

e) $f(t) = t^{7/2}$;

f) $f(t) = t^{-3/2}$!

30. Lineáris differenciálegyenletek és lineáris differenciálegyenletrendszerek

Lineáris differenciálegyenlet $\sum_{k=0}^n a_k y^{(n-k)}(t) = f(t)$ konstans a_k együtthatókkal, ahol $a_0 = 1$, és a kezdeti feltételek $y^{(k)}(0) = y_k, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, megoldható a következőképpen. A differenciálegyenlet bal oldalának transzformáltját $A(p)Y(p) - B(p)$ az eredeti differenciálás tételével határozzuk meg, ahol $A(p)$ és $B(p)$ n -edrendű polinomok, $Y(p)$ pedig egy ismeretlen függvény. Ezután a differenciálegyenlet $f(t)$ jobb oldalát is lecseréljük az $F(p)$ transzformált függvénnyel. Ennek eredményeként az differenciálegyenletből algebrai egyenletet kapunk $A(p)Y(p) - B(p) = F(p)$, amiből meghatározzuk a $Y(p)$ függvény explicit alakját. Ezután, a Laplace inverz transzformációval vagy a Laplace transzformáció táblázatával meghatározzuk az $y = y(t)$ eredetet, amely a kezdeti feltételeknek megfelelően a kiinduló differenciálegyenlet partikuláris megoldása lesz.

Az eredeti függvények táblázata

Eredeti	Transzformált	Eredeti	Transzformált
1	$1/p$	$e^{\lambda t} \cdot \cos \omega t$	$(p-\lambda)/[(p-\lambda)^2 + \omega^2]$
t^n	$n!/p^{n+1}$	$e^{\lambda t} \sin \omega t$	$\omega/[(p-\lambda)^2 + \omega^2]$
$e^{\lambda t}$	$1/(p-\lambda)$	$t \cdot \cos \omega t$	$(p^2 - \omega^2)/(p^2 + \omega^2)^2$
$\cos \omega t$	$p/(p^2 + \omega^2)$	$t \cdot \sin \omega t$	$2p\omega/(p^2 + \omega^2)^2$
$\sin \omega t$	$\omega/(p^2 + \omega^2)$	$ch \omega t$	$p/(p^2 - \omega^2)$
$t^n e^{\lambda t}$	$n!/(p-\lambda)^{n+1}$	$sh \omega t$	$\omega/(p^2 - \omega^2)$

Példa. Oldja meg az alábbi egyenletet $y' + y = 0, y(0) = 1$.

Végrehajtjuk a Laplace-transzformációt:

$$y'(t) \doteq pY(p) - 1.$$

Az eredetit a transzponáltra helyettesítve kapjuk az algebrai egyenletet:

$$Y(p)(p + 1) = 1,$$

Innen

$$Y(p) = 1/(p + 1).$$

A táblázat szerint

$$1/(p + 1) \doteq e^{-t}.$$

Tehát a megoldás $y = e^{-t}$.

30.1. Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket, ha adottak a kezdeti értékek:

- $y' + ay = b, y(0) = 0$;
- $y'' - y' - 6y = 2, y(0) = 1, y'(0) = 0$;
- $y'' + 3y' = e^{-3t}, y(0) = 0, y'(0) = -1$;
- $y'' - 2y' + 2y = \sin t, y(0) = 0, y'(0) = 1$;
- $y'' + 4y' = \sin 2t, y(0) = 1, y'(0) = -2$;
- $y''' - y'' = e^t, y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = 0$!

30.2. Határozza meg a differenciálegyenlet általános megoldását:

a) $y'' + 9y = \cos 3t$;

b) $y'' + 4y' + 4y = e^{2t}$;

c) $y'' + 2y' = te^{-2t}$;

d) $y'' + y' - 2y = e^t$;

e) $y'' + y' = e^{-t} \sin t$!

Irodalom

1. *Halász Gábor*. Bevezető a komplex függvénytanba . – Budapest: ELTE Eötvös Kiadó Kft., 2002.
2. *B.A.Fuksz, B.V. Sabat* Komplex változós függvények és néhány alkalmazásuk. –Budapest: Tankönyvkiadó, 1976 .

Посібник з комплексного аналізу призначений для студентів III курсу Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці спеціальності 4.04 Середня освіта (Математика) денної та заочної форми навчання з метою організації практичних занять з курсу "Комплексний аналіз".

Матеріал призначений для використання як навчально-методичний посібник з дисципліни "Комплексний аналіз".

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики
(протокол № 10 від «23» червня 2025 року)

Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості вищої освіти
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол №7 від 26 серпня 2025 року)

Рекомендовано до видання у електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол №8 від 28 серпня 2025 року)

Підготовлено до видання у електронній формі (PDF) кафедрою математики та інформатики
з Видавничим відділом Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II