

Кафедра математики та інформатики
Matematika és Informatika Tanszék

«КОМПЛЕКСНИЙ АНАЛІЗ»
(МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДЛЯ САМОСТІЙНИХ РОБІТ)

(для студентів 3-го курсу спеціальності 4.04 Середня освіта (Математика))

KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN

(Módszertani utmutató önálló munkához)

Перший (бакалаврський) / Alapképzés (BA)
(ступінь вищої освіти / a felsőoktatás szintje)

Освіта / Oktatás
(галузь знань / képzési ág)

"Математика"
"Matematika"
(освітня програма / képzési program)



Берегове / Beregszász
2025 р. / 2025

Посібник з комплексного аналізу призначений для студентів III курсу Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці спеціальності 4.04 Середня освіта (Математика) денної та заочної форми навчання з метою організації самостійної роботи з курсу "Комплексний аналіз".

Матеріал призначений для використання як навчально-методичний посібник з дисципліни "Комплексний аналіз".

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики
(протокол № 10 від «23» червня 2025 року)

Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості вищої освіти
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол №7 від 26 серпня 2025 року)

Рекомендовано до видання у електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол №8 від 28 серпня 2025 року)

Підготовлено до видання у електронній формі (PDF) кафедрою математики та інформатики з
Видавничим відділом Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Укладач:

СТОЙКА МИРОСЛАВ ВІКТОРОВИЧ – доцент кафедри математики та інформатики
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Рецензенти:

МЕСАРОШ ЛІВІА ВАСИЛІВНА – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри
математики та інформатики ЗУІ;

БОРТОШ МАРІЯ ЮЛІЇВНА – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри
та диференціальних рівнянь ДВНЗ «УжНУ»

Відповідальний за випуск:

Олександр ДОБОШ – начальник Видавничого відділу ЗУІ ім. Ф.Ракоці II

За зміст посібника відповідальність несуть розробники.

Видавництво: Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II (адреса: пл.
Кошута 6, м. Берегове, 90202. Електронна пошта: foiskola@kmf.uz.ua)

© Мирослав Стойка, 2025

© Кафедра математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II, 2025

A komplex függvénytan a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola, III. éves, matematika szakos, nappali és levelezős hallgatóinak készült, a Komplex analízis c. tantárgy alaposabb tanulmányozásának és elsajátításának megkönnyítése céljából.

Az oktatási folyamatban történő felhasználását jóváhagyta
a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Matematika és Informatika Tanszéke
(2025. június 23, 10. számú jegyzőkönyv).

Megjelentetésre javasolta a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Minősegbiztosítási Tanácsa
(2025. augusztus 26, 7. számú jegyzőkönyv).

Elektronikus formában (PDF fájlformátumban) történő kiadásra javasolta
a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Tudományos Tanácsa
(2025. augusztus 28, 8. számú jegyzőkönyv).

Kiadásra előkészítette a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Matematika és Informatika Tanszéke és Kiadói Részlege.

Szerkesztő:

SZTOJKA MIROSZLÁV – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének docense

Szakmai lektorok:

MÉSZÁROS LÍVIA – fizika és matematika tudományok kandidátusa, docens, a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének docense

BARTOS MÁRIA – fizika és matematika tudományok kandidátusa, docens, az Ungvári Nemzeti Egyetem Algebra és Diferenciál Egyenletek Tanszékének docense

A kiadásért felel:

DOBOS Sándor – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Kiadói Részlegének vezetője

A tartalomért kizárólag a jegyzet szerkesztője felel.

Kiadó: a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola (cím: 90 202, Beregszász, Kossuth tér 6. E-mail: foiskola@kmf.uz.ua)

© Sztojka Mirosláv, 2025

© A II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Matematika és Informatika Tanszéke, 2025

Tartalom

1.	A komplex szám fogalma.....	5
2.	Komplex számokkal végzett műveletek.....	6
3.	Komplex szám trigonometrikus alakja.....	7
4.	Euler-formula. A komplex szám exponenciális alakja.....	8
5.	Komplex számok műveletei trigonometrikus és exponenciális alakban.....	9
6.	A komplex szám geometriai értelmezése.....	10
7.	Komplex változós függvény.....	11
8.	Komplex számok sorozatának határértéke. Komplex változós függvény határértéke.....	12
9.	Komplex változós függvényének deriváltja. Cauchy-Riemann feltételek.....	13
10.	Az analitikus függvény helyreállítása annak valós (képzetes) része alapján.....	14
11.	Egylapú függvények.....	15
12.	Komplex változós függvény integrálása.....	16
13.	Cauchy-féle integrálképletek.....	17
14.	Komplex tagú számsorok.....	18
15.	Komplex változós függvények szinguláris pontjai.....	20
16.	Reziduumok kiszámítása.....	21
17.	Reziduumok alaptétele.....	22
18.	Az integrálok kiszámítása zárt görbéken a reziduumok segítségével a $z = \infty$ pontban.....	23
19.	Többértékű függvények integrálása.....	24
20.	Improprius integrálok kiszámítása reziduumok segítségével.....	25
21.	Improprius integrálok kiszámítása a Jordán lemma segítségével.....	26
22.	Trigonometriai racionális függvényektől való határozott integrálok kiszámítása.....	27
23.	Laplace transzformáció.....	28
24.	Tétel az eredeti és transzformált függvény deriváltjáról.....	29
25.	Tételek az eredeti és transzformált függvények integráljairól.....	30
26.	Az eredeti késleltetésének tétele.....	31
27.	A transzformált függvény eltolásának tétele.....	32
28.	A konvolúció tétele.....	33
29.	A gamma-függvények és tulajdonságaik.....	34
30.	Lineáris differenciálegyenletek és lineáris differenciálegyenletrendszerek.....	35
	Irodalom.....	36

1. A komplex szám fogalma

1.1. Keresse meg az x és y valós számokat, amelyek kielégítik a következő egyenleteket:

a) $(2 + i)x + (1 + 2i)y = 1 - 4i$;

b) $(3 + 2i)x + (1 + 3i)y = 4 - 9i$!

1.2. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket:

a)
$$\begin{cases} (3 - i)x + (4 + 2i)y = 2 + 6i, \\ (4 + 2i)x - (2 + 3i)y = 5 + 4i; \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} (2 + i)x + (2 - i)y = 6, \\ (3 + 2i)x + (3 - 2i)y = 8; \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + iy - 2z = 10, \\ x - y + 2iz = 20, \\ ix + 3iy - (1 + i)z = 30! \end{cases}$$

1.3. Legyen $\alpha \in \mathbb{C}$ és $\sqrt{\alpha}$ — olyan komplex szám, hogy $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$. Számítsa ki:

a) $\sqrt{2i}$; b) $\sqrt{-15 + 8i}$; c) $\sqrt{-3 - 4i}$; d) $\sqrt{-11 + 60i}$;

e) $\sqrt[4]{-1}$; f) $\sqrt{8 + 6i}$; g) $\sqrt{1 - i\sqrt{3}}$; h) $\sqrt[4]{2 - i\sqrt{12}}$!

1.4. Oldja meg az alábbi egyenleteket:

a) $x^2 - (2 + i)x - 1 + 7i = 0$;

b) $x^2 - (3 - 2i)x + 5 - 5i = 0$;

c) $(2 + i)x^2 - (5 - i)x + 2 - 2i = 0$;

d) $(1 - i)x^2 - (2 - 16i)x - 23 - 39i = 0$!

1.5. Bizonyítsa be, hogy:

a) a z komplex szám akkor és csak akkor lesz valós, ha $\bar{z} = z$;

b) a z komplex szám akkor és csak akkor lesz tiszta képzetes, ha $\bar{z} = -z$!

2. Komplex számokkal végzett műveletek

2.1. Végezze el az alábbi műveleteket:

a) $\frac{1+i}{1-i};$

b) $\frac{1-2i-6}{1+i};$

c) $\frac{(i+3)^2}{i-3};$

d) $\frac{|z+i|}{z};$

e) $\frac{4-i}{5+i};$

f) $\frac{i^7}{1+i} !$

2.2. Végezze el az alábbi műveleteket:

a) $\frac{5-6i}{5-i};$

b) $\frac{i-i^2+i^3-i^4}{1-i};$

c) $\frac{i+5}{i+i^3};$

d) $\frac{i+i^4}{i+i^8};$

e) $\frac{i^9}{1+i} !$

3. Komplex szám trigonometrikus alakja

3.1. Határozza meg a z komplex szám argumentumának értékét:

a) i ; b) $-i^2$; c) $1+i^3$;

d) $i^2+i^4+i^6$; e) $1+i\sqrt{3}$; f) $-1-i\sqrt{3}$!

3.2. Határozd meg a z komplex szám argumentumának értékét:

a) $1+\frac{1}{i}$; b) $1-\frac{1}{i\sqrt{3}}$; c) $z \cdot \bar{z}$; d) $i-i^3+i^5-i^7$; e) $i+i^3+i^5+i^7$; f) $iz \cdot \bar{z}$!

4. Euler-formula $e^{\pm i\varphi} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi$.

A komplex szám exponenciális alakja

4.1. Írja fel a komplex számot általános alakban (a $\sqrt{\dots}$ jel alatt annak számtani értékét értjük):

a) $z = (17 + 34i)^2$;

b) $z = \frac{(-\sqrt{2}+i\sqrt{23})^2}{(1-3i)^4}$;

c) $z = (6 + i)^{-3}$;

d) $z = \frac{(11i-3)^8}{(\sqrt{15}-i\sqrt{10})^{12}}$;

e) $z = (i\sqrt{5} + 4)^{-7}$;

f) $z = \frac{i+\sqrt{15}}{(-\sqrt{14}+i\sqrt{2})^{11}}$;

g) $z = (i\sqrt{7} + \sqrt{14})^3$;

h) $z = i \frac{(5+i\sqrt{11})^9}{-3-4i}$;

i) $z = (-\sqrt{3} + i)^{-5}$;

j) $z = \frac{(7i^7+\sqrt{15})^8}{(1+i\sqrt{3})^8(-\sqrt{7}-3i)^8}$;

k) $z = \frac{(3-4i)^4}{(2+5i)^3}$;

l) $z = \frac{(12+5i^3)^4}{(3-4i)^7(-2-i\sqrt{21})^3}!$

5. Komplex számok műveletei trigonometrikus és exponenciális alakban

A $z = re^{i\varphi}$ komplex szám n -edik gyöke meghatározható a következő képlettel:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, \text{ ahol } n \in \mathbb{N}, k = \overline{0, n-1}.$$

A Moivre-formula a következő alakban írható fel:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

5.1. Moivre-formula segítségével határozzuk meg az alábbi kifejezések értékét:

- a) $\cos 3x$; b) $\sin 3x$; c) $\cos 2x$; d) $\sin x + \sin(x + \alpha)$!

Bizonyítsa az alábbi azonosságokat:

a) $\cos(2n\varphi) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_{2n}^{2k} (\cos \varphi)^{2k} (\sin \varphi)^{2(n-k)}$;

b) $\sin(2n\varphi) = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} C_{2n}^{2k-1} (\cos \varphi)^{2k-1} (\sin \varphi)^{2(n-k)+1}$

Használja a Newton-binomot!

5.2. Moivre-formula segítségével határozzuk meg az alábbi kifejezések értékét:

- a) $\cos 4x$; b) $\sin 4x$; c) $\cos x + \cos(x + \alpha)$; d) $\sin 2x$!

6. A komplex szám geometriai értelmezése

6.1. Határozza meg a komplex változó síkjának tartományait:

- a) $|z| \leq 3$; b) $1 \leq |z| \leq 2$; c) $\operatorname{Im} z > 0$;
- d) $\operatorname{Re} z < 0$; e) $-1 \leq \operatorname{Im} z \leq 1$; f) $\begin{matrix} -1 \leq \operatorname{Im} z \leq 1 \\ -1 \leq \operatorname{Re} z \leq 1 \end{matrix}$!

6.2. Határozza meg a komplex változó síkjának tartományait:

- a) $|z| \geq 3$; b) $|z| > R, R \rightarrow \infty$; c) $\operatorname{Im} z = 0$;
- d) $\operatorname{Re} z = 0$; e) $z = t^2 + it$; f) $|z| < 1$!

7. Komplex változós függvény

7.1. Határozza meg $f(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx$!

7.2. Számítsa ki az alábbi függvények értékét a megadott pontokban:

a) $\cos(1 + i)$; b) chi ; c) $\operatorname{sh}(-2 + i)$; d) $\operatorname{Ln}(-1)$; e) $\operatorname{ln} i$;

f) $\operatorname{Ln} \frac{1+i}{\sqrt{2}}$; g) $\operatorname{Arcsini}$; h) Arcshi !

7.3. Határozza meg a hatványozás értékét:

a) 2^i ; b) $(-1)^i$; c) $(1 + i)^i$; d) $(-1)^{\sqrt{2}}$; e) $(3 - 4i)^{1+i}$!

8. Komplex számok sorozatának határértéke.

Komplex változós függvény határértéke

8.1. Határozza meg az alábbi komplex számsorozatok és függvények határértékét:

a) $\lim_{x \rightarrow i} \frac{x^2 + 1}{x + i};$

b) $\lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i}{z}\right)^{z\pi};$

c) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin iz}{z};$

d) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 - 1}{z - i};$

e) $\lim_{z \rightarrow \infty} \sin iz !$

8.2. Határozza meg az alábbi komplex függvények határértékét:

a) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|}{z};$

b) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z^2|}{z};$

c) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 1}{z^6 + 1};$

d) $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^3 + z + 1}{z^2 - 1} !$

9. Komplex változós függvényének deriváltja. Cauchy-Riemann feltételek

9.1. Az alábbi függvények elemi függvényekhez való összehasonlításával ellenőrizze a Cauchy-Riemann feltételek teljesülését:

a) $w(z) = \sin z^5$; b) $w = \frac{1}{\sin z}$; c) $w = \frac{1}{\cos \bar{z}}$;

d) $w = |z| \bar{z}$; e) $w = \sin(z + \cos z)!$

9.2. Deriválhatóak e az alábbi függvények:

a) $w(z) = x + y + iy$; b) $w(z) = i\bar{z}$; c) $w(z) = x^2 + y^2 + iy^2$;

d) $w(z) = z \operatorname{Im} z$; e) $w(z) = z \operatorname{Re} \bar{z}$; f) $w(z) = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$?

9.3. Deriválhatóak e az alábbi függvények:

a) $w(z) = \frac{1}{x} + \frac{i}{y}$; b) $w(z) = \frac{1}{\cos z}$; c) $w(z) = e^{\bar{z}}$;

d) $w(z) = z^5 + e^{\sin z}$; e) $w = \sqrt{x} + i\sqrt{y}$; f) $w(z) = x \operatorname{Re} z + iy \operatorname{Im} z$?

10. Az analitikus függvény helyreállítása annak valós (képzetes) része alapján

10.1. Ha ismert az $u(x; y) = \operatorname{Re} w(z)$ [$v(x; y) = \operatorname{Im} w(z)$], határozza meg az $\operatorname{Im} w(z)$ [$\operatorname{Re} w(z)$]:

a) $u = xy$;

b) $u = y$;

c) $u = x^2$;

d) $u = e^x \cos y$;

e) $u = \frac{1}{x}$;

f) $u = -y$!

10.2. A alábbi feladatokban számítsák ki az $f(z)$ függvény $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ valós és a $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ képzetes részét és ellenőrizze a Chouchy - Riemman feltételeket.

a) $f(z) = \sin z$;

g) $f(z) = \operatorname{tg} z$;

b) $f(z) = \operatorname{sh} z$;

h) $f(z) = \operatorname{th} z$;

c) $f(z) = \cos z$;

i) $f(z) = z^n$, ahol $n \in \mathbb{N}$;

d) $f(z) = \operatorname{ch} z$;

j) $f(z) = \ln z$;

e) $f(z) = z \ln z$;

k) $f(z) = z/(1 - 2z)^2$;

f) $f(z) = z \cdot e^z$;

l) $f(z) = z^2/(2i - z)!$

11. Egylapú függvények

11.1. Egylapúak e az alábbi függvények, valamint számítsa ki a $|f'(z)|$ és az $\arg f'(z)$ függvényt az a pontban

a) $f(z) = 1/(1+z)$, $a = i$;

e) $f(z) = z + e^{iz}$, $a = -i$;

b) $f(z) = (z-2)/(z+i)$, $a = 1-i$;

f) $f(z) = \sin(1+z)$, $a = 1-i$;

c) $f(z) = (z-i)/(2z+1)$, $a = 2i$;

g) $f(z) = \operatorname{ch} 3z$, $a = 1+7i$;

d) $f(z) = z+i/(z+i)$, $a = 1+i$;

h) $f(z) = \operatorname{tg} (z/(1+iz))$, $a = i$!

12. Komplex változós függvény integrálása

12.1. Az első Cauchy-tétel érvényes-e: Ha $f(z)$ szabályos a D tartományban, akkor bármely zárt görbére, amely ebben a tartományban helyezkedik el $\oint_{\gamma} f(z)dz = 0$:

a) $\int_{|z|=1} z^2 dz = 0$;

b) $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 0$;

c) $\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z} dz = 0$;

d) $\int_{|z|=R} \sin z dz = 0$;

e) $\int_{|z-2|=1} \frac{dz}{z} = 0$;

f) $\oint_{\forall \gamma \in C} e^z dz = 0$?

12.2. Az első Cauchy-tétel érvényes-e: Ha $f(z)$ szabályos a D tartományban, akkor bármely zárt görbére, amely ebben a tartományban helyezkedik el $\oint_{\gamma} f(z)dz = 0$:

a) $\int_{|z|=1} \frac{1-\cos z}{z^2} dz = 0$;

b) $\int_{|z|=1} \frac{1-\cos z}{z-2} dz = 0$;

c) $\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2} \sin z dz = 0$;

d) $\oint_{|z|=0} \frac{1}{z^2} \sin^2 z dz = 0$;

e) $\oint_{|z|=1} \arctg z dz = 0$;

f) $\oint_{\forall \gamma \in C} (z^3 + z^5) dz = 0$?

13. Cauchy-féle integrálképletek

13.1. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{i(z-i)^4} dz;$

b) $\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{i \cdot z^4} dz;$

c) $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-i)^5} dz ;$
;

d) $\oint_{|z|=4} \frac{\cos z}{i(z-\pi)^5} dz ;$

e) $\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{(z-i)^5} dz ;$

f) $\oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{tg} z}{z^2} dz !$

13.2. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\oint_{|z|=3} \frac{\ln z}{(z-e)^2} dz ;$

b) $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{(z-2i)^5} dz ;$

c) $\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{(z-i)^2} dz ;$

d) $\oint_{|z|=1} \frac{\sin z - \cos z}{(zi)^4} dz ;$

e) $\oint_{|z-i|=1/2} \frac{1}{z(z-i)^3} dz ;$

f) $\oint_{|z|=1} \frac{e^{2\pi iz}}{z^2} dz !$

14. Komplex tagú számsorok

14.1. Fejtse Taylor-sorba az alábbi függvényeket a z_0 pont környezetében:

- a) $w = \sin z, \quad z_0 = i;$ b) $w = \cos z, \quad z_0 = -i;$ c) $w = z^3, \quad z_0 = i;$
d) $w = e^z, \quad z_0 = 1;$ e) $w = e^{z^2}, \quad z_0 = 1;$ e) $w = (z-2)^2, \quad z_0 = 1!$

14.2. Fejtse Taylor-sorba az alábbi függvényeket a z_0 pont környezetében:

- a) $w = \sin z, \quad z_0 = -i;$ b) $w = \cos z, \quad z_0 = i;$ c) $w = z^2, \quad z_0 = i;$
d) $w = \sin z, \quad z_0 = 1+i;$ e) $w = e^{z^2}, \quad z_0 = i;$ f) $w = z \cdot \bar{z}, \quad z_0 = i!$

14.3. Fejtse MacLaurin-sorba az alábbi függvényeket a $z_0 = 0$ pont környezetében:

- a) $w = \sin(iz);$ b) $w = \cos z;$ c) $w = (z+3)^3;$
d) $w = e^{iz};$ e) $w = shz;$ f) $w = chz !$

14.4. Fejtse MacLaurin-sorba az alábbi függvényeket a $z_0 = 0$ pont környezetében:

- a) $w = z \sin z;$ b) $w = z \sin \frac{1}{z};$ c) $w = \frac{1}{z} \cos z;$
d) $w = z \cdot shz;$ e) $w = e^{\frac{1}{z}};$ f) $w = e^{-\frac{1}{z}} !$

14.5. Fejtse MacLaurin-sorba az alábbi függvényeket a szinguláris pont környezetében:

- a) $\frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1;$ b) $\frac{1}{(1-z)^2}, \quad |z| < 1;$ c) $\frac{1}{(1-z)^3}, \quad |z| < 1!$

14.6. Fejtse MacLaurin-sorba az alábbi függvényeket a szinguláris pont környezetében:

- a) $\frac{1}{1-z^2}, \quad |z| < 1;$ b) $\frac{2z}{(1-z^2)^2}, \quad |z| < 1;$ c) $\frac{1}{(1+z^2)^2}, \quad |z| < 1!$

14.7. Határozza meg az alábbi függvények zéró pontjának rendjét:

$$a) w = \frac{\sin z^2}{z};$$

$$b) w = \frac{1 - \cos^2 z}{z};$$

$$c) w = e^{z^2} - 1;$$

$$d) w = \frac{\operatorname{tg}^3 z}{z};$$

$$e) w = z^k(e^z - 1);$$

$$f) w = \frac{e^z - 1 - z}{z};$$

$$g) w = z^5(e^{z^2} - 1);$$

$$h) w = e^{-z^2} \cdot e^{z^5} - 1;$$

$$i) w = \sum_{n=4}^{\infty} z^n !$$

14.8. Határozza meg az alábbi függvények zéró pontjának rendjét:

$$a) w = e^{\sin z} - \sin z - 1;$$

$$b) w = \frac{1 - \frac{z^2}{2!} - \cos z}{z};$$

$$c) w = e^z;$$

$$d) w = z^2 + 16;$$

$$e) w = z^{16} + 2i;$$

$$f) w = (z^3 - 1)^2;$$

$$g) w = e^{z^5} - 1;$$

$$h) w = e^{z^5} - 1 - z^5;$$

$$i) w = \frac{1}{z^2} !$$

14.9. Fejtse Laurent-sorba az alábbi függvényeket a $z_0 = 0$ pont környezetében:

$$a) w = \frac{1}{z+1};$$

$$b) w = \frac{1}{z-3};$$

$$c) w = \frac{1}{z(z-2)} !$$

14.10. Fejtse Laurent-sorba az alábbi függvényeket a $z_0 = 0$ pont környezetében:

$$a) w = z \sin \frac{1}{z};$$

$$b) w = \frac{1}{z^2} \sin z;$$

$$c) w = e^{-1/z};$$

$$d) w = \frac{1}{z^3} e^{1/z};$$

$$e) w = z \cos \frac{1}{z};$$

$$f) w = \frac{1}{z^2} \cos z !$$

14.11. Fejtse Laurent-sorba az alábbi függvényeket a $0 < z < \infty$ tartományban:

$$a) w = e^{\frac{2z+1}{z}};$$

$$b) w = \sin \frac{1}{z} \sin z;$$

$$c) w = \cos \frac{1}{z} \cos z;$$

$$d) w = \frac{2z+4}{z^3};$$

$$e) w = e^{iz};$$

$$f) w = \sin iz !$$

15. Komplex változós függvények szinguláris pontjai

15.1. Határozza meg a komplex változós függvény végtelenül távoli szinguláris pontjának típusát:

a) $w = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$;

b) $w = \frac{\sin z}{z}$;

c) $w = e^{\frac{1}{z}}$;

d) $w = \cos z$;

e) $w = \sin z$;

f) $w = z^3 \sin \frac{1}{z}$!

15.2. Határozza meg a komplex változós függvény végtelenül távoli szinguláris pontjának típusát:

a) $w = \frac{z^7}{1-z}$;

b) $w = \frac{1}{z^2(z+1)}$;

c) $w = \frac{1}{e^z - 1}$;

d) $w = e^z$;

e) $w = \frac{1}{\cos z}$;

f) $w = \cos z$!

16. Reziduumok kiszámítása

16.1. Számítsa ki a következő függvények szinguláris helyeihez tartozó reziduumokat:

$$\text{a) } w = \sin z \cdot \sin \frac{1}{z^2}; \quad \text{b) } w = \frac{1}{(z-1)(z-3)}; \quad \text{c) } w = \frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)};$$

$$\text{d) } w = \frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)}; \quad \text{e) } w = \frac{z-4}{(z-5)(z-6)}; \quad \text{f) } w = \frac{z^2+1}{(z-1)(z-2)(z-3)}!$$

16.2. Számítsa ki a következő függvények polús helyeihez tartozó reziduumokat: $w = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (x-k)}$!

16.3. Számítsa ki a következő függvények reziduumjait az alábbi képlet szerint, ha

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \varphi(z_0) \neq 0, \psi(z_0) = 0, \psi'(z_0) \neq 0, \text{ akkor } \operatorname{res}_{z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}:$$

$$\text{a) } w = \frac{1}{z-1}, \quad z_0 = 1; \quad \text{b) } w = \frac{1}{(z-1)(z-2)^2}, \quad z_0 = 1; \quad \text{c) } w = \frac{1}{z(z-1)}, \quad z_0 = 0, \quad z_1 = 1;$$

$$\text{d) } w = \frac{z}{(z-i)(z+i)}, \quad z_0 = i, z_1 = -i, z_2 = \infty; \quad \text{e) } w = \frac{z-4}{(z-5)(z-6)}, \quad z_0 = 5, \quad z_1 = 6, \quad z_3 = \infty;$$

$$\text{f) } w = \frac{\cos z}{z}, \quad z_0 = 0!$$

17. Reziduumok alaptétele

17.1. A reziduumok alaptételének segítségével számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\oint_{|z|=0,5} \frac{z+1}{z(z+i)(z+2i)} dz;$

b) $\oint_{|z+i|=0,5} \frac{z+1}{z(z+i)(z+2i)} dz;$

c) $\oint_{|z|=3} \frac{z+1}{z(z+i)(z+2i)} dz;$

d) $\oint_{|z|=0,5} \frac{1}{z(z+i)(z+1)} dz;$

e) $\oint_{|z|=2} \frac{1}{z(z+i)(z+1)} dz;$

f) $\oint_{|z+i|=0,5} \frac{1}{z(z+i)(z+1)} dz !$

17.2. A reziduumok alaptételének segítségével számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\oint_{|z+i|=0,5} \frac{1}{(z+i)^2(z-i)} dz;$

b) $\oint_{|z-i|=0,5} \frac{1}{(z+i)^2(z-i)} dz;$

c) $\oint_{|z|=0,5} \frac{z+1}{z^2(z-i)} dz;$

d) $\oint_{|z-i|=0,5} \frac{z+1}{z^2(z-i)} dz;$

e) $\oint_{|z|=0,5} \frac{1}{(z-1)^2 z^2} dz;$

f) $\oint_{|z-a|=0,5} \frac{1}{z^n(z-a)} dz !$

17.3. A reziduumok alaptételének segítségével számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\oint_{|z|=0,5} \frac{1}{z^n(z-a)} dz;$

b) $\oint_{|z|=0,5} \frac{1}{z^3(z-i)} dz;$

c) $\oint_{|z|=0,5} \frac{1}{z(z+i)} dz;$

d) $\oint_{|z-3|=0,5} \frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)} dz;$

e) $\oint_{|z|=1,5} \frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)} dz;$

f) $\oint_{|z-k|=0,5} \frac{1}{\prod_{k=0}^n (z-k)} dz !$

**18. Az integrálok kiszámítása zárt görbén
a reziduumok segítségével a $z = \infty$ pontban**

18.1. Számítsa ki az alábbi integrált a zárt görbe mentén a reziduumok segítségével a $z = \infty$ pontban:

a) $\oint_{|z|=8} \frac{-17z^5 + 6z}{(z-7)^6} dz ;$

b) $\oint_{|z|=2} \frac{iz^7}{(z-i)(z+i)^3(z+1)^4} dz ;$

c) $\oint_{|z|=200} \frac{z^5 - 3iz^{100}}{(z+i)^{101}} dz !$

19. Többértékű függvények integrálása

19.1. Számítsa ki a többértékű függvény integrálját:

a) $\oint_{|z-4|=1/2} \frac{\sqrt{8}}{z-4} dz;$

b) $\oint_{|z-9|=1} \frac{\sqrt{z}}{z^2(z-9)} dz;$

c) $\oint_{|z-1|=1/2} \frac{z^2+1}{\ln z - 2\pi i} dz;$

d) $\oint_{|z+1|=1/3} \frac{z^2+1}{\ln z - \pi i} dz !$

19.2. Számítsa ki a megadott logaritmosos I integrál értékét a C görbe mentén!

a) $I = \int_C z^n \operatorname{Ln} z \, dz$, ahol $C = \{z : |z| = 1\}$, és $n \in \mathbb{N}$ és $\operatorname{Ln} 1 = 0$.

b) $I = \int_C |\operatorname{Ln} z|^3 dz$, ahol $C = \{z : |z| = 1\}$, és $\operatorname{Ln} 1 = 0$.

c) $I = \int_C \operatorname{Ln} z \, dz$, ahol $C = \{z : |z| = R\}$, és $\operatorname{Ln} R = \ln R + 2\pi i$.

d) $I = \int_C z^n \operatorname{Ln} z \, dz$, ahol $C = \{z : |z| = 1\}$, $n \in \mathbb{N}$ és $\operatorname{Ln}(-1) = i\pi$.

e) $I = \int_C |\operatorname{Ln} z|^2 dz$, ahol $C = \{z : |z| = 1\}$, és $\operatorname{Ln} 1 = 2\pi i$.

f) $I = \int_C \frac{\operatorname{Ln} z}{z} dz$, ahol $C = \{z : |z| = 1\}$, és $\operatorname{Ln} 1 = 2\pi i$.

g) $I = \int_C \frac{\ln(z-3)}{z-3} dz$, ahol $C = \{z : |z| = 3\}$.

h) $I = \int_C \left| \frac{\operatorname{Ln} z}{z} \right| dz$, ahol $C = \{z : |z| = 1\}$, és $\operatorname{Ln} 1 = 2\pi i$.

i) $I = \int_C z^n \operatorname{Ln} z \, dz$, ahol $C = \{z : |z| = 1\}$, $n \in \mathbb{N}$ és $\operatorname{Ln} 1 = 0$.

j) $I = \int_C |\operatorname{Ln} z| dz$, ahol $C = \{z : |z| = 1\}$, és $\operatorname{Ln}(-1) = 7i\pi$.

k) $I = \int_C \operatorname{Ln} z |dz|$, ahol $C = \{z : |z| = 1\}$, és $\operatorname{Ln} 1 = 4\pi i$.

l) $I = \int_C |\operatorname{Ln} z|^2 dz$, ahol $C = \{z : |z| = 1\}$, és $\operatorname{Ln} 1 = 2\pi i$.

m) $I = \int_C \frac{\operatorname{Ln} z}{z} dz$, ahol $C = \{z : |z| = 2\}$, és $\operatorname{Ln}(-2) = \ln 2 + 3\pi i$.

n) $I = \int_C |\operatorname{Ln} z| \cdot |dz|$, ahol $C = \{z : |z| = 1\}$, és $\operatorname{Ln}(-1) = -\pi i$.

20. Impropius integrálok kiszámítása reziduumok segítségével

20.1. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3};$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^4};$

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^5};$

d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, \quad b > a;$

e) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)(x^2+c^2)}, \quad 0 < a < b < c \in \mathbb{R};$

f) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2} !$

21. Improprius integrálok kiszámítása a Jordán lemma segítségével

21.1. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

$$\text{a) } I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)};$$

$$\text{b) } I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)};$$

$$\text{c) } I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \cdot \cos x \, dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)};$$

$$\text{d) } I = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x \, dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)};$$

$$\text{e) } I = \int_0^{+\infty} \frac{x^3 \cdot \sin x \, dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)};$$

$$\text{f) } I = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x \cos x \, dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} !$$

22. Trigonometriai racionális függvényektől való határozott integrálok kiszámítása

22.1. Számítsa ki az alábbi trigonometriai racionális függvényektől való integrálokat:

a) $I = \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi;$

b) $I = \int_0^{\pi} \sin^4 \varphi \, d\varphi;$

c) $I = \int_0^{\pi} \sin^{2m} \varphi \, d\varphi;$

d) $I = \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi \, d\varphi;$

e) $I = \int_0^{2\pi} \sin^4 \varphi \cdot \cos^4 \varphi \, d\varphi;$

f) $I = \int_0^{2\pi} \sin^{2m} \varphi \cdot \cos^{2m} \varphi \, d\varphi!$

22.2. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx;$

b) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin nx}{x} dx, \quad n \in \mathbb{R};$

c) $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos x}{x} dx;$

d) $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx;$

e) $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 2x}{x^2} dx;$

f) $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 nx}{x^2} dx, \quad n \in \mathbb{R}!$

23. Laplace transzformáció

23.1. A hasonlóság tulajdonság segítségével határozza meg az eredeti függvényt:

a) $f(t) = t, \quad f(3t);$

b) $f(t) = t^2, \quad f(3t);$

c) $f(t) = e^{3t}, \quad \tilde{f}(t) = e^{3^2 t};$

d) $f(t) = e^{-t}, \quad \tilde{f}(t) = e^{-2t};$

e) $f(t) = \sin wt \xrightarrow{\cdot} \frac{w}{p^2 + w^2}, \quad \tilde{f}(t) = \sin t;$

f) $f(t) = \cos wt \rightarrow \frac{p}{p^2 + w^2}, \quad \tilde{f}(t) = \cos t !$

23.2. Határozza meg az eredeti függvényt, ha adott a transzformált:

a) $F(p) = \frac{1}{p(p-5)};$

b) $F(p) = \frac{1}{p(p-1)(p-3)};$

c) $F(p) = \frac{1}{p^2(p^2+1)};$

d) $F(p) = \frac{1}{p(p^2+1)};$

e) $F(p) = \frac{1}{p^2(p^2-3)(p^2+4)};$

f) $F(p) = \frac{1}{(p^2-w^2)(p^2+w^2)} !$

23.3. Határozza meg az eredeti függvényt, ha adott a transzformált:

a) $F(p) = \frac{1}{p^2(p+1)};$

b) $F(p) = \frac{1}{p^3(p+1)};$

c) $F(p) = \frac{1}{(p-1)(p-2)(p-3)};$

d) $F(p) = \frac{p}{(p-1)(p-2)};$

e) $F(p) = \frac{p^2}{(p-1)(p-2)(p-3)};$

f) $F(p) = \frac{p^2}{(p^2-w^2)(p^2+w^2)} !$

24. Tétel az eredeti és transzformált függvény deriváltjáról

24.1. Keresse meg az eredeti függvényt:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } F^{(2)}(p) = \frac{2}{p^3}; & \text{b) } F^{(n)}(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}; & \text{c) } F^{(8)}(p) = \frac{p}{p^2 + w^2}; \\ \text{d) } F^{(10)}(p) = \frac{w}{p^2 + w^2}; & \text{e) } F'(p) = (-1)^n \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}; & \text{f) } F'(p) = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}! \end{array}$$

24.2. Keresse meg az eredeti függvényt:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } F'(p) = \frac{p-a}{(p-a)^2 + w^2}; & \text{b) } F^{(n)}(p) = \frac{p-a}{(p-a)^2 + w^2}; & \text{c) } F'(p) = \frac{w}{(p-a)^2 + w^2}; \\ \text{d) } F^{(n)}(p) = \frac{w}{(p-a)^2 + w^2}; & \text{e) } F'(p) = \frac{2wp}{(p^2 + w^2)^2}; & \text{f) } F^{(n)}(p) = \frac{2wp}{(p^2 + w^2)^2}! \end{array}$$

25. Tételek az eredeti és transzformált függvények integráljairól

25.1. Az eredeti függvény integráljáról való tétel segítségével határozza meg a transzformált függvényt:

a) $\int_p^\infty \frac{dp}{p-1}, \quad p > 1;$

b) $\int_p^\infty \frac{dp}{p+\lambda}, \quad p > -\lambda;$

c) $\int_p^\infty \frac{dp}{p^n}, \quad p > 0;$

d) $\int_p^\infty \frac{dp}{p^2+1};$

e) $\int_p^\infty \frac{pdp}{p^2+1};$

f) $\int_p^\infty \frac{dp}{p^2-1} !$

25.2. Az eredeti függvény integráljáról való tétel segítségével határozza meg az eredeti integrálját:

a) $\int_p^\infty \frac{p^2-w^2}{(p^2+w^2)^2} dp ;$

b) $\int_p^\infty \frac{2wp}{(p^2+w^2)^2} dp ;$

c) $\int_p^\infty \frac{dp}{(p-a)^{n+1}} ;$

d) $\int_p^\infty \frac{dp}{p}, \quad p > 0;$

e) $\int_p^\infty \left(\int_p^\infty \frac{dp}{p} \right) dp ;$

f) $\int_p^\infty \left(\int_p^\infty \frac{pdp}{p^2+1} \right) dp !$

26. Az eredeti késleltetésének tétele

26.1. Keresse meg a transzformált függvényt a késleltetés tétel segítségével:

a) $f(t) = ch(\omega t + 1);$

b) $f(t) = e^{\lambda(t-2)};$

c) $f(t) = \sin(t - \pi/2) \cos(t - \pi/2);$

d) $f(t) = (1 - \tau);$

e) $f(t) = e^{\lambda(t-1)} \cos(t-1);$

f) $f(t) = ch(\omega t - \omega)!$

27. A transzformált függvény eltolásának tétele

27.1. Keresse meg a transzformált függvényt az eltolás tétel segítségével:

a) $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{nt} = \frac{1}{1 - e^{-t}}, \quad t > 0;$

b) $f(t) = \frac{t^n - 1}{t - 1};$

c) $f(t) = e^{2t}(1 + t^2 + t^3);$

d) $f(t) = e^{2t} \cdot sht;$

e) $f(t) = e^{-2t} \cdot cht;$

f) $f(t) = e^{2t}(sht + cht)!$

28. A konvolúció tétele

28.2. Keresse meg a transzformált függvényt a konvolúció tétele segítségével:

a) $\int_0^t sh \tau \cdot ch(t - \tau) d\tau$; b) $\int_0^t \tau^3 \cdot ch(t - \tau) d\tau$;

c) $\int_0^t \tau^2 \cdot (t - \tau)^3 d\tau$; d) $\int_0^t e^{a\tau} \cdot sh(t - \tau) d\tau$;

e) $\int_0^t \cos w\tau \cdot \sin w(t - \tau) d\tau$; f) $\int_0^t \tau^n \cdot e^{a(t-\tau)} d\tau$!

29. A gamma-függvények és tulajdonságaik

29.1. Keresse meg az eredeti függvényt a gamma-függvények tulajdonságainak segítségével:

a) $F(p) = \frac{\Gamma(5)}{p^5};$

b) $F(p) = \sqrt{p};$

c) $F(p) = \frac{1}{p^{7/2}};$

d) $F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}};$

e) $F(p) = \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^5};$

f) $F(p) = \frac{1}{p\sqrt{p}} !$

30. Lineáris differenciálegyenletek és lineáris differenciálegyenletrendszerek

30.1. Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet, ha adottak a nullás kezdeti értékek:

a) $y' + y = f(t)$, ahol $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$;

b) $y'' + y = f(t)$, ahol $f(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}$;

c) $y'' - y' = f(t)$, ahol $f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}$!

30.2. Ha $y_1(t)$ – konstans együthatós differenciálegyenlet megoldása

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 1$$

nullás kezdeti értékekkel, akkor a

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(t)$$

differenciálegyenlet megoldása ugyan azon nullás kezdeti értékekre az alábbi függvény lesz:

$$y(t) = \int_0^t y'(\tau) f(t - \tau) d\tau = y_1(t) f(0) + \int_0^t f'(\tau) y_1(t - \tau) d\tau.$$

Az megadott módszert segítségével keresse meg az alábbi differenciálegyenletek megoldását:

a) $y' - y = \frac{1}{e^t + 3}$;

b) $y'' + y = \frac{1}{1 + e^t}$;

c) $y'' - y' = \frac{1}{1 + e^t}$!

30.3. Keresse meg a differenciálegyenletrendszerek megoldását, ha adottak a kezdeti értékek:

a) $\begin{cases} x' + y = 0 \\ x + y' = 0 \end{cases}$, $x(0) = 1$, $y(0) = -1$;

b) $\begin{cases} y' = 3x - y \\ x' = y + x + e^t \end{cases}$, $x(0) = 0$, $y(0) = 0$;

c) $\begin{cases} y' - 2y - 4x = \cos t \\ x' + y + 2x = \sin t \end{cases}$, $x(0) = 0$, $y(0) = 0$;

d) $\begin{cases} y' + 7y - x = 0 \\ x' + 2y + 5x = 0 \end{cases}$, $x(0) = 1$, $y(0) = 1$;

e) $\begin{cases} 2x'' + x - y' = -3\sin t \\ x + y' = -\sin t \end{cases}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $y(0) = 0$!

Irodalom

1. *Halász Gábor*. Bevezető a komplex függvénytanba . – Budapest: ELTE Eötvös Kiadó Kft., 2002.
2. *B.A.Fuksz, B.V. Sabat* Komplex változós függvények és néhány alkalmazásuk. –Budapest: Tankönyvkiadó, 1976 .

Посібник з комплексного аналізу призначений для студентів III курсу Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці спеціальності 4.04 Середня освіта (Математика) денної та заочної форми навчання з метою організації самостійної роботи з курсу "Комплексний аналіз".

Матеріал призначений для використання як навчально-методичний посібник з дисципліни "Комплексний аналіз".

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики
(протокол № 10 від «23» червня 2025 року)

Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості вищої освіти
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол №7 від 26 серпня 2025 року)

Рекомендовано до видання у електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол №8 від 28 серпня 2025 року)

Підготовлено до видання у електронній формі (PDF) кафедрою математики та інформатики
з Видавничим відділом Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II