

Кафедра математики та інформатики
Matematika és Informatika Tanszék

«ЛІНІЙНА АЛГЕБРА»
(МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ)

(для студентів 1-го курсу спеціальності А 4.04 Середня освіта (Математика))

LINEÁRIS ALGEBRA

(Módszertani utmutató dolgozati munkákhoz)

Перший (бакалаврський) / Alapképzés (BA)
(ступінь вищої освіти / a felsőoktatás szintje)

A Osztás / A Oktatás
(галузь знань / képzési ág)

"Математика"
"Matematika"
(освітня програма / képzési program)



Посібник з лінійної алгебри для математиків призначений для студентів I курсу Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці спеціальності А 4.04 Середня освіта (Математика) заочної форми навчання з метою організації контрольної роботи з курсу "Лінійна алгебра".

Посібник умовно поділений на дві частини: перший та другий семестр навчання, кожен з яких, містить приклад розв'язаного варіанту. Всього є 10 варіантів контрольних робіт з кожного семестру курсу "Лінійна алгебра".

Матеріал призначений для використання як навчально-методичний посібник з дисципліни "Лінійна алгебра".

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики
(протокол № 10 від «23» червня 2025 року)

Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості вищої освіти
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол №7 від 26 серпня 2025 року)

Рекомендовано до видання у електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол №8 від 28 серпня 2025 року)

Підготовлено до видання у електронній формі (PDF) кафедрою математики та інформатики з
Видавничим відділом Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Укладач:

СТОЙКА МИРОСЛАВ ВІКТОРОВИЧ – доцент кафедри математики та інформатики
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Рецензенти:

БОРТОШ МАРІЯ ЮЛІЇВНА – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри
та диференціальних рівнянь ДВНЗ «УжНУ»;

МЕСАРОШ ЛІВІА ВАСИЛІВНА – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри
математики та інформатики ЗУІ.

Відповідальний за випуск:

Олександр ДОБОШ – начальник Видавничого відділу ЗУІ ім. Ф.Ракоці II

За зміст посібника відповідальність несуть розробники.

Видавництво: Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II (адреса: пл.
Кошута 6, м. Берегове, 90202. Електронна пошта: foiskola@kmf.uz.ua)

© Мирослав Стойка, 2025

© Кафедра математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II, 2025

Az Algebra és mértan a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola, I. éves, matematika szakos, levelezős hallgatóinak készült, a Lineáris algebra c. tantárgy dolgozati munkákhoz.

A jegyzet két részre van osztva: első és második félévekre. A jegyzet dolgozatok 10 változatát tartalmazza minden félévből és egy megoldott példadolgozatot. .

Az oktatási folyamatban történő felhasználását jóváhagyta

a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Matematika és Informatika Tanszéke

(2025. június 23, 10. számú jegyzőkönyv).

Megjelentetésre javasolta a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Minőségbiztosítási Tanácsa

(2025. augusztus 26, 7. számú jegyzőkönyv).

Elektronikus formában (PDF fájlformátumban) történő kiadásra javasolta

a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Tudományos Tanácsa

(2025. augusztus 28, 8. számú jegyzőkönyv).

Kiadásra előkészítette a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

Matematika és Informatika Tanszéke és Kiadói Részlege.

Szerkesztő:

SZTOJKA MIROSLÁV – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének docense

Szakmai lektorok:

BARTOS MÁRIA – fizika és matematika tudományok kandidátusa, docens, az Ungvári Nemzeti Egyetem Algebra és Diferenciál Egyenletek Tanszékének docense;

MÉSZÁROS LÍVIA – fizika és matematika tudományok kandidátusa, II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének docense.

A kiadásért felel:

DOBOS Sándor – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Kiadói Részlegének vezetője

A tartalomért kizárólag a jegyzet szerkesztője felel.

Kiadó: a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola (cím: 90 202, Beregszász, Kossuth tér 6. E-mail: foiskola@kmf.uz.ua)

© Sztojka Mirosláv, 2025

© A II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Matematika és Informatika Tanszéke, 2025

Tartalomjegyzék

I. Első félév. Lineáris algebra.

Példadolgozat megoldással	5
1. Változat.....	15
2. Változat.....	17
3. Változat.....	19
4. Változat.....	21
5. Változat.....	23
6. Változat.....	25
7. Változat.....	27
8. Változat.....	29
9. Változat.....	31
10. Változat.....	33

II. Második félév. Geometria

Példadolgozat megoldással	35
1. Változat.....	54
2. Változat.....	57
3. Változat.....	60
4. Változat.....	63
5. Változat.....	66
6. Változat.....	69
7. Változat.....	72
8. Változat.....	75
9. Változat.....	78
10. Változat.....	81
Irodalomjegyzék	84

I. Első félév. Lineáris algebra

Példadolgozat megoldással

1. Oldja meg a $z^2 - (2 + i)z - 1 + 7i = 0$ egyenletet!

Megoldás. A megadott egyenlet feltételének bal oldala egy z ismeretlentől vett komplex együtthatójú négyzetes polinom. Ezért az adott egyenlet megoldását hasonlóképpen fogjuk keresni, mint a valós együtthatójú másodfokú egyenlet esetében.

Először kiszámoljuk a négyzetes polinom diszkriminánsát

$$D = (2 + i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1 + 7i) = 7 - 24i.$$

Továbbá, megkeressük a D diszkrimináns négyzetgyökeit. Legyen $x + iy$ – bármelyik ezen gyökök közül, algebrai alakban felírva. Akkor $(x + iy)^2 = D$. Ahonnan $(x^2 - y^2) + 2xyi = 7 - 24i$. Tehát

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 7, \\ 2xy = -24. \end{cases} \quad (1)$$

Az (1) rendszer második egyenletéből következik, hogy $y \neq 0$, ezért $x = -\frac{12}{y}$. Behelyettesítve a kapott értéket az x ismeretlen helyébe a következőt kapjuk: $\frac{144}{y^2} - y^2 = 7$. Innen $y^4 + 7y^2 - 144 = 0$. Viéta-tétel alapján $y^2 = 9$ vagy $y^2 = -16$. Mivel y – valós szám, ezért $y^2 = 9$, vagyis $y = 3$ vagy $y = -3$. Az $y = 3$ esetben azt kapjuk, hogy $x = -4$. Ha $y = -3$, akkor $x = 4$. Ezek szerint $\sqrt{D} = \{4 - 3i, -4 + 3i\}$.

Tehát a feladatban megadott másodfokú egyenlet megoldásai a következők:

$$z_1 = \frac{(2 + i) + (4 - 3i)}{2} = 3 - i, \quad z_2 = \frac{(2 + i) + (-4 + 3i)}{2} = -1 + 2i.$$

2. Határozza meg a $-1 + i$ komplex szám trigonometrikus alakját!

Megoldás. Előbb kiszámoljuk a $-1 + i$ szám abszolút értékét:

$$|-1 + i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Továbbá, ha $\varphi = \arg(-1 + i)$, akkor $\cos \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Innen $\varphi = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

Tehát, $\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ lesz a $-1 + i$ szám trigonometrikus alakja.

3. Oldja meg Gauss-módszerével az alábbi racionális együtthatójú lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4! \end{cases} \quad (2)$$

Megoldás. Felírjuk a (2)-es rendszer kibővített mátrixát, amelyben az egyszerűség kedvéért a szabad tagok oszlopát elválasztjuk egy függőleges vonallal:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array} \right).$$

Az előző példafeladattól eltérően most az első oszlop egyetlen eleme sem osztja ezen oszlop többi elemét. Ezért, hogy elkerüljük a tört (nem egész) együtthatókat először is elvégezzük a következő elemi átalakítást: az A mátrix első sorához hozzáadjuk a második -1 -szeresét. Így azt kapjuk, hogy:

$$A \sim B = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array} \right).$$

Ez után folyamatosan hozzáadjuk a B mátrix második, harmadik és negyedik sorához megfelelően annak első sorának három-, öt- és kétszeresét. Innen azt kapjuk, hogy

$$B \sim C = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & -7 & 9 & -1 \\ 0 & 16 & -16 & 22 & -6 \\ 0 & 5 & -5 & 5 & 2 \end{array} \right).$$

Ezek után hozzáadjuk a C mátrix harmadik sorához annak negyedik sorának -3 -szorosát. Ezen kívül még felcseréljük a második és harmadik sorokat. Ebből kapjuk, hogy:

$$C \sim D = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -12 \\ 0 & 7 & -7 & 9 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 5 & 2 \end{array} \right).$$

Ezek után folyamatosan hozzáadjuk a D mátrix harmadik és negyedik sorához megfelelően annak második sorának -7 -szeresét és -5 -szörösét. Innen azt kapjuk, hogy

$$D \sim F = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -40 & 83 \\ 0 & 0 & 0 & -30 & 62 \end{array} \right).$$

Végül az F mátrix negyedik sorához hozzáadjuk annak harmadik sorának $-\frac{30}{40}$ -szeresét. Innen kapjuk, hogy:

$$F \sim G = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -40 & 83 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{array} \right).$$

A kapott G mátrix lesz a következő egyenletrendszer kibővített mátrixa

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -1, \\ x_2 - x_3 + 7x_4 = -12, \\ -40x_4 = 83, \\ 0 = -\frac{1}{4}, \end{cases}$$

ahol az utolsó egyenlet baloldala egyenlő nullával viszont a jobboldala nem egyenlő nullával. Az ilyen rendszernek nincs megoldása, vagyis ellentmondó.

4. Keresse meg az x permutációt, amely kielégíti az alábbi egyenletet:

$$\alpha x \beta = \gamma, \quad (3)$$

ahol

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. Legyen x – olyan permutáció, amely kielégíti a (3)-es egyenletet. Tudjuk, hogy az α és β permutációknak léteznek inverz permutációi, megfelelően α^{-1} és β^{-1} . Akkor, megszorozva baloldallal a (3)-es egyenletet α^{-1} -re, aztán pedig jobboldallal β^{-1} -re, azt kapjuk, hogy $x = \alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}$. Fordítva, nyilvánvaló, hogy az $x = \alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}$ egyenlet kielégíti a (3)-es egyenletet. Ezért

$$x = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Válasszuk ki az i és k értékeit úgy, hogy az $a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{54}$ szorzat pozitív előjellel kerüljön bele egy ötödrendű determinánsba!

Megoldás. Ahhoz, hogy az adott szorzat bekerüljön a determinánsba szükséges, hogy $(i, k) = (1, 4)$ vagy $(i, k) = (4, 1)$. Felírjuk a szorzandók indexeiből felépített permutációt az első és második esetben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Mivel az inverziók száma az első esetben páros, megfelelően $2 + 2 = 4$, a második esetben pedig páratlan, megfelelően $2 + 5 = 7$. Ebből kifolyólag $(i, k) = (1, 4)$ és a determináns meghatározása alapján, az $a_{11}a_{32}a_{44}a_{25}a_{54}$ szorzat pozitív előjellel kerül be az ötöd rendű determinánsba.

6. Laplace tételének felhasználásával számítsa ki az alábbi determinánst:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}!$$

Megoldás. Rögzítjük a Δ determináns második és ötödik sorait. Megvizsgáljuk az

$$M_1 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$$

aldeterminánsokat, amelyek ezekben a sorokban helyezkednek el. Az összes többi másodrendű alldetermináns ezekben a sorokban egyenlő nullával, mivel nullás oszlopot tartalmaznak.

Kiszámítjuk az M_1, M_2, M_3 alldeterminánsok algebrai komplementereit:

$$(-1)^{s_{M_1} M'_1} = (-1)^{2+5+1+2} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 49,$$

$$(-1)^{s_{M_2} M'_2} = (-1)^{2+5+1+4} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -100,$$

$$(-1)^{s_{M_3} M'_3} = (-1)^{2+5+2+4} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

Végül

$$\Delta = \sum_{k=1}^3 M_k \cdot (-1)^{s_{M_k} M'_k} = 2 \cdot 49 + 1 \cdot (-100) + (-2) \cdot 1 = -4.$$

7. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert a Cramer-szabály szerint:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 7, \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -2! \end{cases}$$

Megoldás. Kiszámoljuk az adott egyenletrendszer determinánsát:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & -1 \\ 6 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -47.$$

Amennyiben az egyenletrendszer determinánsa nem egyenlő nullával, akkor a Cramer-szabály szerint annak egyetlen megoldása van. Megoldjuk ezen szabály segítségével. Ehhez kiszámítjuk az alábbi determinánsokat:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 4 & 1 \\ 7 & 2 & 5 & -1 \\ 11 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -94, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 5 & -1 \\ 6 & 11 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -47,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & -1 \\ 6 & 2 & 11 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 5 & 7 \\ 6 & 2 & -1 & 11 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 141.$$

Így az

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 0, \quad x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = -3$$

lesz az adott egyenletrendszer megoldása.

8. Keresse meg az alábbi mátrix inverzét

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}!$$

Megoldás. Először kiszámoljuk az A mátrix determinánsát:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Így az A mátrix nem elfajuló, tehát létezik inverz mátrixa. Megkeressük azt. Ehhez kiszámítjuk az A mátrix a_{ij} elemeinek A_{ij} algebrai komplementereit, melyek az i -edik sor és j -edik oszlop metszetén találhatók ($i, j = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, & A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \\ A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1, & A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4, \\ A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5, & A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6, \\ A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3, & A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3, \\ A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4. \end{aligned}$$

Akkor

$$A^{-1} = |A|^{-1} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

9. Határozza meg, hogy lineárisan összefüggő-e az alábbi vektorrendszer:

$$a_1 = (2, -3, 1), \quad a_2 = (3, -1, 5), \quad a_3 = (1, -4, 3)!$$

Megoldás. Legyenek $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – tetszőleges valós számok. Megvizsgáljuk a következő lineáris kombinációt:

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \gamma_3 a_3 = (2\gamma_1 + 3\gamma_2 + \gamma_3, -3\gamma_1 - \gamma_2 - 4\gamma_3, \gamma_1 + 5\gamma_2 + 3\gamma_3).$$

Ez a lineáris kombináció akkor és csak akkor lesz egyenlő nullás vektorral, ha igazak az alábbi egyenlőségek:

$$2\gamma_1 + 3\gamma_2 + \gamma_3 = 0,$$

$$-3\gamma_1 - \gamma_2 - 4\gamma_3 = 0,$$

$$\gamma_1 + 5\gamma_2 + 3\gamma_3 = 0,$$

vagyis az a_1, a_2, a_3 vektorrendszer akkor és csak akkor lesz lineárisan összefüggő, ha megfelelően az a_1, a_2, a_3 vektorokkal egyenlő oszlopokat tartalmazó mátrixszal rendelkező homogén lineáris egyenletrendszernek nem csak nullás megoldása van. Megoldjuk ezt az egyenletrendszert:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -4 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 0 \\ 0 & 14 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right).$$

Tehát a rendszernek csak nullás megoldása van, ezért a feltételben megadott a_1, a_2, a_3 vektorrendszer lineárisan független.

10. Határozza meg az alábbi mátrix rangját

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}!$$

Megoldás. A mátrix bal felső sarkában lévő másodrendű aldetermináns nullával egyenlő. Azonban az A mátrix tartalmaz nullától eltérő másodrendű aldeterminánsokat, például

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

A harmadrendű

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

aldetermináns, amely a δ_2 beszegési aldeterminánása, szintén nem egyenlő nullával (győződjene meg arról, hogy $\delta_3 = 1$). Azonban mind a két negyedrendű aldetermináns, amelyek a δ_3 beszegési aldeterminánsai, egyenlő nullával:

$$\delta'_4 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad \delta''_4 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Tehát az A mátrix rangja egyenlő hárommal.

11. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0! \end{cases}$$

Megoldás. Megmutatható, hogy a lineáris egyenletrendszer megoldható, amennyiben a mátrixának és bővített mátrixának rangja egyenlő nullával. Mátrixának bal felső sarkában található másodrendű

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

aldetermináns nullától eltérő. Ezért azt a rendszert fogjuk megoldani, amely a feltételben adott rendszer első két x_1 és x_2 ismeretlenektől vett egyenletéből tevődik össze. A többi x_3, x_4, x_5 ismeretleneket szabad ismeretlenként kezeljük és átvisszük ezen egyenletek jobb oldalára:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + 2x_3 + x_4 - x_5, \\ 3x_1 - x_2 = 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5. \end{cases}$$

A Cramer-szabály szerint megkeressük ennek a rendszernek a megoldását

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 & 1 \\ 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - x_3 + 3x_4 + 4x_5,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 \\ 3 & 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 \end{vmatrix} = 1 - 7x_3 - 7x_4;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{M} = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 - x_5,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{M} = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4.$$

Így a feltételben megadott lineáris egyenletrendszer általános megoldása:

$$\left(\frac{5}{4} + \frac{1}{4}\alpha - \frac{3}{4}\beta - \delta, -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}\alpha + \frac{7}{4}\beta, \alpha, \beta, \delta\right),$$

ahol α, β, δ tetszőleges valós számok.

12. Keresse meg az egyenletrendszer megoldásainak fundamentális rendszerét és általános megoldását

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0! \end{cases} \quad (4)$$

Megoldás. Először kiszámoljuk az (4) rendszer

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

mátrixának rangját. Az A mátrix bal felső sarkában található

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

aldetermináns nullától különböző. Kiszámítjuk az A mátrix M aldeterminánsnak megfelelő összes harmadrendű beszegési aldeterminánsait. Emellett figyelembe vesszük azt is, hogy az A mátrix harmadik és negyedik oszlopa megfelelően arányosak az első és második oszlopokkal. Ezért azok az aldeterminánsok, amelyek a harmadik és negyedik oszlopok által képződnek, nullával egyenlőek. Az alábbi két aldetermináns kiszámítása marad fent:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ezek szerint $\text{rank } A = 2$. Számításba véve, hogy a rangot meghatározó M aldetermináns (bázis aldetermináns) az A mátrix bal felső sarkában található, az (4) rendszerben az első két egyenletet hagyjuk meg, a bal oldalukon pedig – csak az első két ismeretlen fog szerepelni (*kötött* ismeretlenek).

A másik három x_3, x_4, x_5 ismeretlen *szabadoknak* nyilvánítjuk és az egyenlet jobb oldalára visszük át

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 + x_4 + 2x_5, \\ x_2 = x_4 + x_5. \end{cases} \quad (5)$$

Táblázatot szerkesztünk az $x_1, \dots, x_5$ ismeretlenek számára, melyben elkülönítjük a szabad és a kötött ismeretleneket, és a szabad ismeretleneknek a táblázatban feltüntetett értékeket adjuk:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
		1	0	0
		0	1	0
		0	0	1

1. táblázat

A szabad ismeretlenek értékeinek e három készletének mindegyikére vonatkozóan megoldjuk az (5) rendszert és megtaláljuk az x_1, x_2 kötött ismeretlenek megfelelő értékeit:

1) az első $x_3 = 1, x_4 = x_5 = 0$ készletre az (5) egyenletrendszerből azt kapjuk, hogy $x_2 = 0, x_1 = 1 - x_2 = 1$;

2) a második $x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$ készletre az (5) egyenletrendszerből azt kapjuk, hogy $x_2 = 1, x_1 = 1 - x_2 = 0$;

3) a harmadik $x_3 = x_4 = 0, x_5 = 1$ készletre az (5) egyenletrendszerből azt kapjuk, hogy $x_2 = 1, x_1 = 2 - x_2 = 1$.

Így kitölthetjük a szabad helyeket az 1. táblázatban és egy új táblázatot kapunk:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	0	1	0	0
0	1	0	1	0
1	1	0	0	1

2. táblázat

A 2. táblázat az (5) egyenletrendszer három $a_1 = (1,0,1,0,0), a_2 = (0,1,0,1,0), a_3 = (1,1,0,0,1)$ megoldását adja meg és egyben az (1) homogén lineáris egyenletrendszer megoldásait is.

Ezek a megoldások az (1) egyenletrendszer fundamentális rendszerét alkotják. Ez abból következik, hogy az $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ vektorok lineárisan független vektorrendszert alkotnak.

Az(4) egyenletrendszer általános megoldása a fundamentális rendszerének tetszőleges lineáris kombinációja

$$\delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \delta_3 a_3 = (\delta_1 + \delta_3, \delta_2 + \delta_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3),$$

ahol $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ – tetszőleges valós számok.

13. Bizonyítsuk be, hogy az egész számok $\mathbb{Z}$ halmaza az egész számok összeadására nézve csoportot alkot, a szorzásra nézve viszont nem lesz csoport. Az adott $\mathbb{Z}$ halmazon hozzunk fel olyan példát binér műveletre, amelyre nem teljesül az asszociativitás tulajdonsága!

Megoldás. Nyilvánvaló, hogy az egész számok összeadása binér művelet lesz a $\mathbb{Z}$ halmazon, amennyiben a meghatározás szerint az egész számok összege szintén egész szám. Továbbá ismeretes, hogy ez a művelet eleget tesz az asszociativitás tulajdonságának, vagyis $(a + b) + c = a + (b + c)$ tetszőleges $a, b, c \in \mathbb{Z}$ elemekre. Az egész számok között található egy olyan 0 szám, amelyre $a + 0 = 0 + a = a$ tetszőleges $a \in \mathbb{Z}$ elemre. Végül tetszőleges a egész számra létezik ellentétes $-a$ egész szám a következő tulajdonsággal: $a + (-a) = (-a) + a = 0$. Megjegyezhetjük, hogy az egész számok összeadására teljesül a kommutativitás tulajdonsága is, így a $\mathbb{Z}$ halmaz Abel-csoportot alkot az összeadásra nézve.

Másik esetben, amikor a $\mathbb{Z}$ halmazon a szorzás művelete van megadva, láthatjuk, hogy:

- 1) ez a művelet binér művelet, amennyiben $ab \in \mathbb{Z}$ tetszőleges $a, b \in \mathbb{Z}$ elemekre;
- 2) $(ab)c = a(bc)$ tetszőleges a, b, c egész számokra;
- 3) az egész számok között található egy olyan 1 szám, hogy $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ tetszőleges a egész számra.

Azonban nem mindegyik $a \in \mathbb{Z}$ elemre létezik inverz $a^{-1} \in \mathbb{Z}$ elem. Például a 2 egész számra nem létezik olyan x egész szám, amelyre $2x = 1$. Így a $\mathbb{Z}$ halmaz nem alkot csoportot az egész számok szorzására nézve.

Végül, megvizsgáljuk a következő binér műveletet a $\mathbb{Z}$ halmazon:

$$m \circ n = -m + (-n) \quad (m, n \in \mathbb{Z}),$$

Ahol a $+$ az egész számok összeadása, $-a$ pedig az a egész szám ellentétes eleme (nyilvánvaló, hogy $m \circ n \in \mathbb{Z}$ tetszőleges $m, n \in \mathbb{Z}$ elemekre). Akkor

$$(1 \circ 2) \circ 3 = (-1 + (-2)) \circ 3 = -(-1 + (-2)) + (-3) = 0 \neq 4 = 1 \circ (2 \circ 3).$$

Az utolsó egyenlőségből következik, hogy a „ $\circ$ ” binér műveletre nem teljesül az asszociativitás tulajdonsága.

14. Keressük meg az $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 + 7x^2 - 12x + 10$ és a $g(x) = 3x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 2x - 2$ polinomok legnagyobb közös osztóját!

Megoldás. Az $f(x)$ és $g(x)$ polinomok legnagyobb közös osztóját Euklideszi algoritmusa alapján fogjuk keresni. Mivel a polinomok legnagyobb közös osztója egy nem nullás szorzó(tényező) pontosságával fejeződik ki, ezért, hogy elkerüljük a tört együtthatókat, megengedett, hogy szorozzuk az osztót és az osztandót egy bármilyen nem nulla számra. Ez a művelet nem csupán az osztási folyamat elején, de a folyamat menete során is elvégezhető.

1. lépés. Osztjuk a $3f(x)$ polinomot a $g(x)$ -re:

$$3x^5 - 6x^4 + 3x^3 + 21x^2 - 36x + 30 =$$

$$= x(3x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 2x - 2) + (-2x^3 + 19x^2 - 34x + 30).$$

Megkapjuk az $r_1(x) = -2x^3 + 19x^2 - 34x + 30$ maradékot.

2. lépés. Osztjuk a $2g(x)$ polinomot a $-r_1(x)$ -re. Ezt a következő ábrát felhasználva végezzük el:

$$\begin{array}{r|l}
 6x^4 - 12x^3 + 10x^2 + 4x - 4 & 2x^3 - 19x^2 + 34x - 30 \\
 6x^4 - 57x^3 + 102x^2 - 90x & \hline
 (szorozzuk 2-re) \quad 45x^3 - 92x^2 + 94x - 4 & 3x + 45 \\
 90x^3 - 184x^2 + 188x - 8 & \\
 90x^3 - 855x^2 + 1530x - 1350 & \\
 (szorozzuk \frac{1}{671}-re) \quad 671x^2 - 1342x + 1342 & \\
 \hline
 x^2 - 2x + 2 &
 \end{array}$$

Megjegyzés. Az $r_2(x) = x^2 - 2x + 2$ polinom nem lesz a $2g(x)$ polinom osztásának maradéka a $-r_1(x)$ -re való osztásakor, viszont a $(f(x), g(x)) = (-r_1(x), r_2(x))$.

3. lépés. Osztjuk a $-r_1(x)$ polinomot az $r_2(x)$ -re:

$$2x^3 - 19x^2 + 34x - 30 = (2x - 15)(x^2 - 2x + 2).$$

Mivel a maradék az utolsó osztás során 0-val egyenlő, a feltételekben megadott $f(x)$ és $g(x)$ polinomok legnagyobb közös osztója az $r_2(x) = x^2 - 2x + 2$ polinom lesz.

15. Osszuk el az $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$ polinomot a $g(x) = x - 1$ polinomra!

Megoldás. Mivel a $g(x)$ — lineáris polinom 1-es főegyütthatóval, ezért az $f(x)$ polinomot a $g(x)$ polinomra Horner-elrendezéssel osztjuk. Szerkesztünk egy táblázatot, melynek első sorában az $f(x)$ polinom együtthatói állnak kezdve a főegyütthatótól. A másodikban pedig a hányados és a maradék megfelelő együtthatói, amelyeket folyamatosan fogjuk kiszámítani, valamint a baloldalon elhelyezzük a $g(x)$ gyökét, esetünkben az 1-et.

	1	-2	4	-6	8
1	1	$1 \cdot 1 - 2 = -1$	$1 \cdot (-1) + 4 = 3$	$1 \cdot 3 - 6 = -3$	$1 \cdot (-3) + 8 = 5$

Így az $x^3 - x^2 + 3x - 3$ — hányados, az 5 — pedig maradék az $f(x)$ polinom $g(x)$ -re való osztásakor.

1. Változat

1. Számítsa ki a kifejezés értékét $\frac{(3+i)(4-3i)}{1+2i}$!

2. Keresse meg a $\sqrt{3} - i$ komplex szám trigonometrikus alakját!

3. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$$

4. Határozza meg a 7, 5, 6, 4, 1, 3, 2 rendezés paritását!

5. A determináns meghatározása alapján számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}!$$

6. Számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}!$$

7. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a Cramer-szabály szerint:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3! \end{cases}$$

8. Keresse meg az alábbi mátrixok inverzét:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}!$$

9. Keresse meg az alábbi vektorok $3a_1 + 5a_2 - a_3$ lineáris kombinációját

$$a_1 = (4, 1, 3, -2), \quad a_2 = (1, 2, -3, 2), \quad a_3 = (16, 9, 1, -3)!$$

10. Számítsa ki az alábbi mátrix rangját a beszegési aldeterminánsok módszerével:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 11 \\ 3 & 3 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}!$$

11. Vizsgálja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert megoldhatóságára és keresse meg általános és egy konkrét megoldását:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2! \end{cases}$$

12. Keresse meg az egyenletrendszer fundamentális rendszerét és általános megoldását:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0! \end{cases}$$

13. Bizonyítsa be, hogy egy tetszőleges G csoportban egyetlen egységelem és egyetlen inverz elem létezik a G csoport tetszőleges elemére!

14. Ossza el az $f(x)$ polinomot a $g(x)$ polinomra, ha:

$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6, \quad g(x) = x^2 - 3x + 1!$$

15. A Horner-elrendezés algoritmusának segítségével számítsa ki az $f(x)$ polinom $f(c)$ értékét (amikor $x = c$), ha:

$$f(x) = 5x^4 - 19x^3 - 7x^2 + 9x + 3, \quad c = 2!$$

2. Változat

1. Számítsa ki a kifejezés értékét $\frac{(3-i)(1-4i)}{2-i}$!

2. Keresse meg a $\sqrt{5} - \sqrt{5}i$ komplex szám trigonometrikus alakját!

3. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval:

$$\begin{cases} -9x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7, \\ -4x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 7x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3! \end{cases}$$

4. Határozza meg a 1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8 rendezés paritását!

5. A determináns meghatározása alapján számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 2 & a \\ d & 0 & 0 & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \end{vmatrix}!$$

6. Számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}!$$

7. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a Cramer-szabály szerint:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37! \end{cases}$$

8. Keresse meg az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}!$$

9. Határozza meg az x és y vektorokat az alábbi egyenletből $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4x = \vec{0}$, ahol $a_1 = (5, -8, -1, 2)$, $a_2 = (2, -1, 4, -3)$, $a_3 = (-3, 2, -5, 4)$.

10. Számítsa ki az alábbi mátrix rangját a beszegési aldeterminánsok módszerével:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}!$$

11. Vizsgálja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert megoldhatóságára és keresse meg általános és egy konkrét megoldását:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1! \end{cases}$$

12. Keresse meg az egyenletrendszer fundamentális rendszerét és általános megoldását:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0; \end{cases}$$

13. Csoportot alkot-e a racionális számok halmaza az összeadás műveletét tekintve?

14. Ossza el az $f(x)$ polinomot a $g(x)$ polinomra, ha:

$$f(x) = 3x^5 + 2x^2 - 1, \quad g(x) = 3x^3 - 3x - 2!$$

15. A Horner-elrendezés algoritmusának segítségével számítsa ki az $f(x)$ polinom $f(c)$ értékét (amikor $x = c$), ha:

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 5x^2 + x + 33, \quad c = -2!$$

3. Változat

1. Számítsa ki a kifejezés értékét $\frac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}$!

2. Keresse meg a $1 + \sqrt{3}i$ komplex szám trigonometrikus alakját!

3. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6! \end{cases}$$

4. Az $1, 2, 3, \dots, n$ számok melyik rendezésében lesz a legnagyobb az inverziók száma és mennyivel lesz egyenlő?

5. A determináns meghatározása alapján számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-2} & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} !$$

6. Számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} !$$

7. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a Cramer-szabály szerint:

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z + t - 5 = 0, \\ 3x - 7y + 6z - t + 1 = 0, \\ 5x - 9y + 3z + 4t - 7 = 0, \\ 4x - 6y + 3z + t - 8 = 0! \end{cases}$$

8. Keresse meg az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} !$$

9. Határozza meg az x és y vektorokat az alábbi egyenletből $3(a_1 - y) + 2(a_2 + y) = 4(a_3 - y)$, ahol $a_1 = (5, -8, -1, 2)$, $a_2 = (2, -1, 4, -3)$, $a_3 = (-3, 2, -5, 4)$.

10. Számítsa ki az alábbi mátrix rangját a beszegési aldeterminánsok módszerével:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} !$$

11. Vizsgálja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert megoldhatóságára és keresse meg általános és egy konkrét megoldását:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4! \end{cases}$$

12. Keresse meg az egyenletrendszer fundamentális rendszerét és általános megoldását:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0! \end{cases}$$

13. Csoportot alkot-e az egész számok halmaza a szorzás műveletét tekintve?

14. Ossza el az $f(x)$ polinomot a $g(x)$ polinomra, ha:

$$f(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 + x + 1, \quad g(x) = x^2 - 3x + 1!$$

15. A Horner-elrendezés algoritmusának segítségével számítsa ki az $f(x)$ polinom $f(c)$ értékét (amikor $x = c$), ha:

$$f(x) = 6x^4 + 8x^3 + 10x^2 + 2x + 66, \quad c = -2!$$

4. Változat

1. Számítsa ki a kifejezés értékét $(7 - 2i)(3 + 4i) + (3 + i)(1 + 2i)$!

2. Keresse meg a $\sqrt{3} + i$ komplex szám trigonometrikus alakját!

3. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3! \end{cases}$$

4. Írja ki az összes heted rendű permutációt, amelyek az alábbi páronként idegen ciklusok szorzataként vannak megadva:

$$(1\ 5)(2\ 3\ 4)$$

5. A determináns meghatározása alapján számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & -\lambda & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & -\lambda & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda + a_4 \end{vmatrix}!$$

6. Számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}!$$

7. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a Cramer-szabály szerint:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6 = 0, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 + 8 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8 = 0! \end{cases}$$

8. Keresse meg az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}!$$

9. Határozza meg, hogy lineárisan összefüggő-e az alábbi vektorrendszer:

$$a_1 = (5, 4, 3), a_2 = (3, 3, 2), a_3 = (8, 1, 3).$$

10. Számítsa ki az alábbi mátrix rangját a beszegési aldeterminánsok módszerével:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}!$$

11. Vizsgálja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert megoldhatóságára és keresse meg általános és egy konkrét megoldását:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3! \end{cases}$$

12. Keresse meg az egyenletrendszer fundamentális rendszerét és általános megoldását:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0! \end{cases}$$

13. Csoportot alkot-e az természetes számok halmaza a szorzás műveletét tekintve?

14. Ossza el az $f(x)$ polinomot a $g(x)$ polinomra, ha:

$$f(x) = 3x^5 + 2x^2 - 1, \quad g(x) = 2x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4!$$

15. A Horner-elrendezés algoritmusának segítségével számítsa ki az $f(x)$ polinom $f(c)$ értékét (amikor $x = c$), ha:

$$f(x) = 12x^4 + 16x^3 + 20x^2 + 4x + 132, \quad c = -2!$$

5. Változat

1. Számítsa ki a kifejezés értékét $(8 - 2i)(13 + 4i) + (4 + i)(1 + 7i)$!

2. Keresse meg a $7 + 7i$ komplex szám trigonometrikus alakját!

3. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 13, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14! \end{cases}$$

4. Írja ki az összes heted rendű permutációt, amelyek az alábbi páronként idegen ciklusok szorzataként vannak megadva:

$$(1\ 3)(2\ 5)(4\ 7)!$$

5. A determináns meghatározása alapján számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} !$$

6. Számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} !$$

7. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a Cramer-szabály szerint:

$$\begin{cases} 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0! \end{cases}$$

8. Keresse meg az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} !$$

9. Határozza meg, hogy lineárisan összefüggő-e az alábbi vektorrendszer:

$$b_1 = (2, -4, 1), b_2 = (0, 5, -6), b_3 = (1, -2, 4).$$

10. Számítsa ki az alábbi mátrix rangját az elemi átalakítások segítségével:

$$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}!$$

11. Vizsgálja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert megoldhatóságára és keresse meg általános és egy konkrét megoldását:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12! \end{cases}$$

12. Keresse meg az egyenletrendszer fundamentális rendszerét és általános megoldását:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0, \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0, \\ -x_3 + x_5 = 0, \\ -x_4 + x_6 = 0! \end{cases}$$

13. Csoportot alkot-e az természetes számok halmaza az összeadás műveletét tekintve?

14. Ossza el az $f(x)$ polinomot a $g(x)$ polinomra, ha:

$$f(x) = x^5 + 2x^2 - 1, \quad g(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4!$$

15. A Horner-elrendezés algoritmusának segítségével számítsa ki az $f(x)$ polinom $f(c)$ értékét (amikor $x = c$), ha:

$$f(x) = 3x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x + 1, \quad c = -2!$$

6. Változat

1. Számítsa ki a kifejezés értékét $(9 - i)(3 + 4i) + (8 + i)(1 + 9i)$!
2. Keresse meg a $-1 - i$ komplex szám trigonometrikus alakját!
3. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0! \end{cases}$$

4. Írja ki az összes heted rendű permutációt, amelyek az alábbi páronként idegen ciklusok szorzataként vannak megadva:

$$(7\ 5\ 3\ 1)(2\ 4\ 6)!$$

5. A determináns meghatározása alapján számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 2 & a \\ d & 0 & 0 & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \end{vmatrix}!$$

6. Számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}!$$

7. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a Cramer-szabály szerint:

$$\begin{cases} 6x + 5y - 2z + 4t + 4 = 0, \\ 9x - y + 4z - t - 13 = 0, \\ 3x + 4y + 2z - 2t - 1 = 0, \\ 3x - 9y + 2t - 11 = 0! \end{cases}$$

8. Keresse meg az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}!$$

9. Határozza meg, hogy lineárisan összefüggő-e az alábbi vektorrendszer:

$$a_1 = (5, 4, 3), a_2 = (3, 3, 2), a_3 = (8, 1, 3).$$

10. Számítsa ki az alábbi mátrix rangját az elemi átalakítások segítségével:

$$\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}!$$

11. Vizsgálja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert megoldhatóságára és keresse meg általános és egy konkrét megoldását:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7! \end{cases}$$

12. Keresse meg az egyenletrendszer fundamentális rendszerét és általános megoldását:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0! \end{cases}$$

13. Csoportot alkot-e az komplex számok halmaza az összeadás műveletét tekintve?

14. Ossza el az $f(x)$ polinomot a $g(x)$ polinomra, ha:

$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6, \quad g(x) = x^2 - 3x + 1!$$

15. A Horner-elrendezés algoritmusának segítségével számítsa ki az $f(x)$ polinom $f(c)$ értékét (amikor $x = c$), ha:

$$f(x) = x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 4x + 1, \quad c = -2!$$

7. Változat

1. Számítsa ki a kifejezés értékét $(14 - i)(2 + 4i) + (1 - i)(2 + 3i)$!

2. Keresse meg a $-1 + \sqrt{3}i$ komplex szám trigonometrikus alakját!

3. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 3! \end{cases}$$

4. Adja meg páronként idegen ciklusok szorzataként az alábbi permutációkat és határozza meg azok párosságát:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}!$$

5. A determináns meghatározása alapján számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}!$$

6. Számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}!$$

7. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a Cramer-szabály szerint:

$$\begin{cases} 2x - y - 6z + 3t + 1 = 0, \\ 7x - 4y + 2z - 15t + 32 = 0, \\ x - 2y - 4z + 9t - 5 = 0, \\ x - y + 2z - 6t + 8 = 0! \end{cases}$$

8. Keresse meg az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}!$$

9. Határozza meg, hogy lineárisan összefüggő-e az alábbi vektorrendszer:

$$c_1 = (4, -5, 2, 6), c_2 = (2, -2, 1, 3), c_3 = (6, -3, 3, 9), c_4 = (4, -1, 5, 6).$$

10. Számítsa ki az alábbi mátrix rangját az elemi átalakítások segítségével:

$$\begin{pmatrix} 75 & 0 & 116 & 39 & 0 \\ 171 & -69 & 402 & 123 & 45 \\ 301 & 0 & 87 & -417 & -169 \\ 114 & -46 & 268 & 82 & 30 \end{pmatrix}!$$

11. Vizsgálja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert megoldhatóságára és keresse meg általános és egy konkrét megoldását:

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18! \end{cases}$$

12. Keresse meg az egyenletrendszer fundamentális rendszerét és általános megoldását:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0! \end{cases}$$

13. Csoportot alkot-e az komplex számok halmaza a szorzás műveletét tekintve?

14. Ossza el az $f(x)$ polinomot a $g(x)$ polinomra, ha:

$$f(x) = 3x^5 + 2x^2 - 1, \quad g(x) = 3x^3 - 3x - 2!$$

15. A Horner-elrendezés algoritmusának segítségével számítsa ki az $f(x)$ polinom $f(c)$ értékét (amikor $x = c$), ha:

$$f(x) = 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 1, \quad c = -1!$$

8. Változat

1. Számítsa ki a kifejezés értékét $\frac{(6+2i)(8-6i)}{1+2i}$!

2. Keresse meg a $-\sqrt{3} + \sqrt{3}i$ komplex szám trigonometrikus alakját!

3. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 7 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 14 = 0! \end{cases}$$

4. Adja meg páronként idegen ciklusok szorzataként az alábbi permutációkat és határozza meg azok párosságát:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}!$$

5. A determináns meghatározása alapján számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & -\lambda & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & -\lambda & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda + a_4 \end{vmatrix}!$$

6. Számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}!$$

7. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a Cramer-szabály szerint:

$$\begin{cases} 2x + y + 4z + 8t = -1, \\ x + 3y - 6z + 2t = 3, \\ 3x - 2y + 2z - 2t = 8, \\ 2x - y + 2z = 4! \end{cases}$$

8. Keresse meg az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}!$$

9. Határozza meg, hogy lineárisan összefüggő-e az alábbi vektorrendszer:

$$a_1 = (5, 4, 3), a_2 = (3, 3, 2), a_3 = (8, 1, 3).$$

10. Számítsa ki az alábbi mátrix rangját az elemi átalakítások segítségével:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}!$$

11. Vizsgálja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert megoldhatóságára és keresse meg általános és egy konkrét megoldását:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 7! \end{cases}$$

12. Keresse meg az egyenletrendszer fundamentális rendszerét és általános megoldását:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0! \end{cases}$$

13. Csoportot alkot-e az egész számok halmaza a szorzás műveletét tekintve?

14. Ossza el az $f(x)$ polinomot a $g(x)$ polinomra, ha:

$$f(x) = 3x^5 + 2x^2 - 1, \quad g(x) = 2x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4!$$

15. A Horner-elrendezés algoritmusának segítségével számítsa ki az $f(x)$ polinom $f(c)$ értékét (amikor $x = c$), ha:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + x + 1, \quad c = -3!$$

9. Változat

1. Számítsa ki a kifejezés értékét $\frac{(9+3i)(12-9i)}{1+2i}$!

2. Keresse meg a $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ komplex szám trigonometrikus alakját!

3. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0! \end{cases}$$

4. Határozza meg az alábbi hetedrendű permutációk szorzatát:

$$[(1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6\ 7)] \cdot [(1\ 4\ 7)(2\ 3\ 5\ 6)]!$$

5. A determináns meghatározása alapján számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}!$$

6. Számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}!$$

7. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a Cramer-szabály szerint:

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z + t - 5 = 0, \\ 3x - 7y + 6z - t + 1 = 0, \\ 5x - 9y + 3z + 4t - 7 = 0, \\ 4x - 6y + 3z + t - 8 = 0! \end{cases}$$

8. Keresse meg az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}!$$

9. Határozza meg, hogy lineárisan összefüggő-e az alábbi vektorrendszer:

$$d_1 = (1, 0, 0, 2, 5), d_2 = (0, 1, 0, 3, 4), d_3 = (0, 0, 1, 4, 7), d_4 = (2, -3, 4, 11, 12).$$

10. Számítsa ki az alábbi mátrix rangját az elemi átalakítások segítségével:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}!$$

11. Vizsgálja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert megoldhatóságára és keresse meg általános és egy konkrét megoldását:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1! \end{cases}$$

12. Keresse meg az egyenletrendszer fundamentális rendszerét és általános megoldását:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0! \end{cases}$$

13. Csoportot alkot-e a természetes számok halmaza a szorzás műveletét tekintve?

14. Ossza el az $f(x)$ polinomot a $g(x)$ polinomra, ha:

$$f(x) = x^5 + x^2 - 1, \quad g(x) = 3x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4!$$

15. A Horner-elrendezés algoritmusának segítségével számítsa ki az $f(x)$ polinom $f(c)$ értékét (amikor $x = c$), ha:

$$f(x) = 5x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1, \quad c = -3!$$

10. Változat

1. Számítsa ki a kifejezés értékét $\frac{(18+6i)(24-18i)}{1+2i}$!

2. Keresse meg a $1 - 1i$ komplex szám trigonometrikus alakját!

3. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 1 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 1 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 1 = 0! \end{cases}$$

4. Határozza meg az alábbi hetedrendű permutációk szorzatát:

$$[(1\ 3)(5\ 7)(2\ 4\ 6)] \cdot [(1\ 3\ 5)(2\ 4)(6\ 7)]!$$

5. A determináns meghatározása alapján számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-2} & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}!$$

6. Számítsa ki az alábbi determináns értékét:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}!$$

7. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a Cramer-szabály szerint:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6 = 0, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 + 8 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8 = 0! \end{cases}$$

8. Keresse meg az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}!$$

9. Határozza meg, hogy lineárisan összefüggő-e az alábbi vektorrendszer:

$$a_1 = (5, 4, 3), a_2 = (3, 3, 2), a_3 = (8, 1, 3).$$

10. Számítsa ki az alábbi mátrix rangját az elemi átalakítások segítségével:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}!$$

11. Vizsgálja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert megoldhatóságára és keresse meg általános és egy konkrét megoldását:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 7! \end{cases}$$

12. Keresse meg az egyenletrendszer fundamentális rendszerét és általános megoldását:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0! \end{cases}$$

13. Csoportot alkot-e a racionális számok halmaza a szorzás műveletét tekintve?

14. Ossza el az $f(x)$ polinomot a $g(x)$ polinomra, ha:

$$f(x) = 6x^5 + 2x^2 - 1, \quad g(x) = 2x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4!$$

15. A Horner-elrendezés algoritmusának segítségével számítsa ki az $f(x)$ polinom $f(c)$ értékét (amikor $x = c$), ha:

$$f(x) = 7x^4 - 3x^3 + 5x^2 + x + 1, \quad c = -3!$$

II. Második félév. Lineáris algebra

Példadolgozat megoldással

1. Bizonyítsa be, hogy az $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 0, 1, 1)$, $a_3 = (1, 1, 0, 1)$, $a_4 = (1, 1, 1, 0)$ vektorrendszer az $\mathbb{R}^4$ vektoriális tér bázisa lesz a valós számok $\mathbb{R}$ teste fölött! Keresse meg az $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) \in \mathbb{R}^4$ vektor koordinátáinak képleteit ebben a bázisban! Milyenek lesznek a $c = (-1, 0, -1, 0)$ vektor koordinátái az a_1, a_2, a_3, a_4 bázisban?

Megoldás. Az a_1, a_2, a_3, a_4 vektorrendszer a valós számok $\mathbb{R}$ teste fölött az $\mathbb{R}^4$ vektoriális tér bázisa lesz akkor és csakis akkor, ha az ezen vektorok elemeiből álló Δ determináns nem egyenlő 0-val. Kiszámoljuk ezt a determinánst.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Tehát az a_1, a_2, a_3, a_4 vektorrendszer az $\mathbb{R}^4$ tér bázisa.

Legyenek $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$ – az x vektor koordinátái az a_1, a_2, a_3, a_4 bázisban. Vagyis $x = \kappa_1 a_1 + \kappa_2 a_2 + \kappa_3 a_3 + \kappa_4 a_4$. Akkor fennállnak az alábbi egyenlőségek:

$$\begin{cases} \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4 = \chi_1, \\ \kappa_1 + \kappa_3 + \kappa_4 = \chi_2, \\ \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_4 = \chi_3, \\ \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = \chi_4. \end{cases} \quad (1)$$

Ezáltal az x vektor koordinátáinak meghatározásához az a_1, a_2, a_3, a_4 bázisban az (1)-es lineáris egyenletrendszert szükséges megoldani a $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$ ismeretlenekre vonatkozóan. Ezért elvégezzük az alábbi átalakításokat a kapott rendszer kibővített mátrixa fölött.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & \chi_1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \chi_2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \chi_3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \chi_4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & \chi_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \chi_2 - \chi_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \chi_3 - \chi_1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \chi_4 - \chi_1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \chi_2 + \chi_3 + \chi_4 - 2\chi_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \chi_2 - \chi_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \chi_3 - \chi_1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \chi_4 - \chi_1 \end{array} \right).$$

Ebből következik, hogy $\kappa_1 = -2\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4$, $\kappa_2 = \chi_1 - \chi_2$, $\kappa_3 = \chi_1 - \chi_3$, $\kappa_4 = \chi_1 - \chi_4$. A $c = (-1, 0, -1, 0)$ vektor számára a következő koordináta értékeket kapjuk ebben a bázisban: $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = -1$, $\kappa_3 = 0$, $\kappa_4 = -1$, vagyis $c = 1 \cdot a_1 - 1 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 - 1 \cdot a_4$.

2. Bizonyítsa be, hogy az $a_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (2, 1, 1)$, $a_3 = (3, 2, 3)$ és a $b_1 = (0, 1, 0)$, $b_2 = (1, 1, 2)$, $b_3 = (1, 2, 1)$ vektorrendszerek az $\mathbb{R}^3$ vektoriális tér bázisai! Keresse meg az átmeneti mátrixot és a koordináták átalakításának képleteit az egyik bázisból való átmenet során a másikba! Ezután határozza meg a $c = (1, 2, 3)$ vektor koordinátáit mindkét bázisban, és ellenőrizze le a kapott eredményt a koordináták átalakítási képleteinek segítségével!

Megoldás. Hasonlóan, mint az előző fejezetben tettük, kiszámoljuk a determinánst, amelyet megfelelően az a_1, a_2, a_3 és a b_1, b_2, b_3 vektorok komponensei alkotnak.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Amennyiben egyik determináns sem egyenlő 0-val, akkor az a_1, a_2, a_3 és a b_1, b_2, b_3 vektorrendszerek az $\mathbb{R}^3$ tér bázisai lesznek.

Megkeressük az átmeneti mátrixot az első bázisból a másodikba. Ehhez az szükséges, hogy a második bázis vektorait felírjuk az első bázis vektorai által. Legyen $\tau_{1j}, \tau_{2j}, \tau_{3j}$ a b_j vektor koordinátái az a_1, a_2, a_3 bázisban, ahol $(j = 1, 2, 3)$, akkor

$$\begin{aligned} b_1 &= \tau_{11}a_1 + \tau_{21}a_2 + \tau_{31}a_3, \\ b_2 &= \tau_{12}a_1 + \tau_{22}a_2 + \tau_{32}a_3, \\ b_3 &= \tau_{13}a_1 + \tau_{23}a_2 + \tau_{33}a_3. \end{aligned} \tag{2}$$

A (2)-es vektorok egyenlőségeitől áttérve a megfelelő komponensek egyenlőségeihez három lineáris egyenletrendszert kapunk

$$\begin{cases} \tau_{11} + 2\tau_{21} + 3\tau_{31} = 0, \\ \tau_{11} + \tau_{21} + 2\tau_{31} = 1, \\ \tau_{11} + \tau_{21} + 3\tau_{31} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \tau_{12} + 2\tau_{22} + 3\tau_{32} = 1, \\ \tau_{12} + \tau_{22} + 2\tau_{32} = 1, \\ \tau_{12} + \tau_{22} + 3\tau_{32} = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} \tau_{13} + 2\tau_{23} + 3\tau_{33} = 1, \\ \tau_{13} + \tau_{23} + 2\tau_{33} = 2, \\ \tau_{13} + \tau_{23} + 3\tau_{33} = 1. \end{cases}$$

Mint ahogy ezen egyenletrendszerek mátrixai páronként egyenlők, így ezeket a rendszereket egyidejűleg oldjuk meg elvégezve az alábbi átalakításokat a mátrix felett, amely a_1, a_2, a_3 és a b_1, b_2, b_3 vektorok elemeiből áll.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Tehát,

$$F = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

– az átmeneti mátrix az a_1, a_2, a_3 bázisból a b_1, b_2, b_3 bázisba. Legyen $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ és $\kappa'_1, \kappa'_2, \kappa'_3$ – az $x \in \mathbb{R}^3$ vektor koordinátái megfelelően az a_1, a_2, a_3 és a b_1, b_2, b_3 bázisokban, vagyis

$$x = \kappa_1 a_1 + \kappa_2 a_2 + \kappa_3 a_3 = \kappa'_1 b_1 + \kappa'_2 b_2 + \kappa'_3 b_3.$$

Akkor

$$\begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa'_1 \\ \kappa'_2 \\ \kappa'_3 \end{pmatrix}.$$

Leellenőrizzük ezt az egyenlőséget a $c = (1, 2, 3)$ vektor esetében. Előbb megkeressük a c vektor koordinátáit az a_1, a_2, a_3 bázisban, azután pedig a b_1, b_2, b_3 bázisban.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & -1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & -1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

Tehát $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = -2$, $\kappa_3 = 1$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 2 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}.$$

Tehát $\kappa'_1 = 2$, $\kappa'_2 = 2$, $\kappa'_3 = -1$. Megkapjuk a következő egyenlőség bizonyosságát

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. Keresse meg az $L_1 + L_2$ összeg dimenzióját és bázisát, valamint az $L_1 \cap L_2$ metszetet, ahol L_1 és L_2 az $\mathbb{R}^5$ tér lineáris alterei és L_1 az alábbi egyenletrendszer megoldásainak a tere:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0; \end{cases} \quad (3)$$

$L_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$ – az $a_1 = (7, 2, -4, 1, 1)$, $a_2 = (10, -1, 0, -2, -6)$ vektorrendszerből előállított lineáris burok!

Megoldás. Meghatározzuk az adott feltételnek megfelelő lineáris homogén egyenletrendszer megoldásainak fundamentális rendszerét

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & -7 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tehát $b_1 = (-17, 4, 9, 1, 0)$ és $b_2 = (0, -1, -1, 0, 1)$ – a megoldások fundamentális rendszere, és egyben az L_1 altér bázisa.

Ha most meg akarjuk keresni az $L_1 + L_2$ altér dimenzióját és bázisát, meghatározzuk a következő mátrix rangját

$$A = \begin{pmatrix} -17 & 4 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix},$$

amelynek sorai megfelelően egybeesnek a b_1 , b_2 és a_1 , a_2 vektorokkal. Amennyiben

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} = -27 \neq 0,$$

akkor $2 \leq r(A) \leq 4$. Kiszámítjuk az alábbi aldeterminánst:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 7 & 2 & -4 \\ 10 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 7 & 6 & -4 \\ 10 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}(-1) \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} = 67 \neq 0. \quad (4)$$

Tehát $3 \leq r(A) \leq 4$. Továbbá kiszámítjuk a negyedrendű aldeterminánsokat (beszegési aldeterminánsok), amelyek tartalmazzák a (4)-es aldeterminánst.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} -17 & 4 & 9 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 7 & 2 & -4 & 1 \\ 10 & -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -17 & 4 & 9 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 24 & -2 & -13 & 0 \\ -24 & 7 & 18 & 0 \end{vmatrix} = \\ & = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 24 & -2 & -13 \\ -24 & 7 & 18 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 24 & 11 & -13 \\ -24 & -11 & 18 \end{vmatrix} = 0; \\ & \begin{vmatrix} -17 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & -4 & 1 \\ 10 & -1 & 0 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -17 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -3 & 0 \\ 10 & -7 & -6 & 0 \end{vmatrix} = \\ & = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} -17 & 4 & 9 \\ 7 & 3 & -3 \\ 10 & -7 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -17 & 4 & 9 \\ -10 & 7 & 6 \\ 10 & -7 & -6 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Tehát $r(A) = 3$. Ezért az $L_1 + L_2$ altér dimenziója 3, és a b_1, b_2, a_1 vektorok rendszere ezen altér bázisa.

Legyen $c \in L_1 \cap L_2$, akkor egyik oldalról léteznek olyan α_1, α_2 valós számok, hogy

$$c = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = (7\alpha_1 + 10\alpha_2, 2\alpha_1 - \alpha_2, -4\alpha_1, \alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_1 - 6\alpha_2),$$

a másik oldalról pedig a c vektor komponensei kielégítik az (3)-es rendszert. Behelyettesítve a c vektor komponenseit ezen rendszer minden egyenletébe, megkapjuk az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0, \\ 10\alpha_1 - 10\alpha_2 = 0, \\ 10\alpha_1 - 10\alpha_2 = 0, \\ 11\alpha_1 - 11\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Innen az következik, hogy $\alpha_1 = \alpha_2$, vagyis $c = \alpha_1(a_1 + a_2)$. Ezért a $c_0 = a_1 + a_2 = (17, 1, -4, -1, -5)$ vektor az $L_1 \cap L_2$ metszet bázisa, ahol L_1 és L_2 az $\mathbb{R}^5$ tér lineáris alterei.

4. A $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezés minden $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$ vektort $\varphi(x) = (\chi_1 + \chi_2 + \chi_3, 2\chi_1 - \chi_3, 3\chi_2 - \chi_1)$ vektorba alakít át (képez). Bizonyítsa be, hogy a φ lineáris transzformáció lesz! Keresse meg a vektor képének koordinátáinak képletét az $\mathbb{R}^3$ tér e_1, e_2, e_3 kanonikus bázisában; az $a = (1, 1, 1)$ és e_1, e_2, e_3 vektorok képét és a φ transzformáció mátrixát ugyan ebben a bázisban!

Megoldás. Legyen $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$, $y = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ – az $\mathbb{R}^3$ tér tetszőleges vektorai. Akkor

$$\begin{aligned} \varphi(x+y) &= \varphi[(\chi_1 + \gamma_1, \chi_2 + \gamma_2, \chi_3 + \gamma_3)] = \\ &= (\chi_1 + \gamma_1 + \chi_2 + \gamma_2 + \chi_3 + \gamma_3, 2(\chi_1 + \gamma_1) - (\chi_3 + \gamma_3), 3(\chi_2 + \gamma_2) - (\chi_1 + \gamma_1)) = \\ &= (\chi_1 + \chi_2 + \chi_3, 2\chi_1 - \chi_3, 3\chi_2 - \chi_1) + (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3, 2\gamma_1 - \gamma_3, 3\gamma_2 - \gamma_1) = \varphi(x) + \varphi(y), \\ \varphi(\lambda x) &= \varphi[(\lambda\chi_1, \lambda\chi_2, \lambda\chi_3)] = (\lambda\chi_1 + \lambda\chi_2 + \lambda\chi_3, 2(\lambda\chi_1) - \lambda\chi_3, 3(\lambda\chi_2) - \lambda\chi_1) = \\ &= \lambda(\chi_1 + \chi_2 + \chi_3, 2\chi_1 - \chi_3, 3\chi_2 - \chi_1) = \lambda\varphi(x), \end{aligned}$$

ahol $\lambda \in \mathbb{R}$. Tehát φ – lineáris transzformáció.

Legyen $\varphi(x) = \chi'_1 e_1 + \chi'_2 e_2 + \chi'_3 e_3$, ahol $\chi'_1, \chi'_2, \chi'_3 \in \mathbb{R}$. Amennyiben $\varphi(x) = (\chi_1 + \chi_2 + \chi_3, 2\chi_1 - \chi_3, 3\chi_2 - \chi_1)$ és a tetszőleges vektor koordinátái az e_1, e_2, e_3 kanonikus bázisban megegyeznek a $\varphi(x)$ elemeivel, akkor megkapjuk a vektor képének koordinátáinak képleteit az e_1, e_2, e_3 bázisban

$$\begin{cases} \chi'_1 = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3, \\ \chi'_2 = 2\chi_1 - \chi_3, \\ \chi'_3 = -\chi_1 + 3\chi_2, \end{cases}$$

vagy mátrix alakban

$$\begin{pmatrix} \chi'_1 \\ \chi'_2 \\ \chi'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{pmatrix}.$$

Egyértelmű lesz, hogy

$$\varphi(a) = (3, 1, 2), \quad \varphi(e_1) = (1, 2, -1), \quad \varphi(e_2) = (1, 0, 3), \quad \varphi(e_3) = (1, -1, 0).$$

Amennyiben

$$\varphi(e_1) = 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 - 1 \cdot e_3, \quad \varphi(e_2) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3, \quad \varphi(e_3) = 1 \cdot e_1 - 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3,$$

akkor az alábbi mátrix

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

a φ lineáris transzformáció mátrixa lesz az e_1, e_2, e_3 bázisban.

5. Határozza meg az $\mathbb{R}^3$ vektortér azon φ lineáris transzformációját, amely az $a_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 0, 0)$, $a_3 = (2, 2, 1)$ bázis vektorokat megfelelően ezen tér $b_1 = (0, 0, 0)$, $b_2 = (1, 0, 0)$, $b_3 = (1, 1, 0)$ vektoraiba alakítja át! Keresse meg a φ transzformáció mátrixát az a_1, a_2, a_3 bázisban!

Megoldás. Legyen $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$ – az $\mathbb{R}^3$ vektortér tetszőleges vektora. Megvizsgáljuk a $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezést, amely minden $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$ vektornak megfeleltet egy $\varphi(a) = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3$ vektort. Bebizonyítjuk a leképezés lineáriságát. Legyen $b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3$ – úgyszintén az $\mathbb{R}^3$ vektortér tetszőleges vektora. Akkor

$$\begin{aligned} \varphi(a+b) &= \varphi[(\alpha_1 + \beta_1)a_1 + (\alpha_2 + \beta_2)a_2 + (\alpha_3 + \beta_3)a_3] = \\ &= (\alpha_1 + \beta_1)b_1 + (\alpha_2 + \beta_2)b_2 + (\alpha_3 + \beta_3)b_3 = \\ &= (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3) + (\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3) = \varphi(a) + \varphi(b), \\ \varphi(\lambda a) &= \varphi[(\lambda \alpha_1)a_1 + (\lambda \alpha_2)a_2 + (\lambda \alpha_3)a_3] = (\lambda \alpha_1)b_1 + (\lambda \alpha_2)b_2 + (\lambda \alpha_3)b_3 = \\ &= \lambda(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3) = \lambda \varphi(a) \quad (\lambda \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Tehát φ – lineáris transzformáció. Nyilvánvaló, hogy $\varphi(a_1) = b_1$, $\varphi(a_2) = b_2$, $\varphi(a_3) = b_3$.

Megkeressük a φ transzformáció mátrixát az a_1, a_2, a_3 bázisban. Ehhez kiszámítjuk a bázisvektorok képeinek koordinátáit ebben a bázisban. Legyen

$$\begin{aligned}\varphi(a_1) &= b_1 = \tau_{11}a_1 + \tau_{21}a_2 + \tau_{31}a_3, \\ \varphi(a_2) &= b_2 = \tau_{12}a_1 + \tau_{22}a_2 + \tau_{32}a_3, \\ \varphi(a_3) &= b_3 = \tau_{13}a_1 + \tau_{23}a_2 + \tau_{33}a_3.\end{aligned}\tag{5}$$

Az $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ vektorok komponenseiből felépítve egy mátrixot, és ezen mátrix sorai fölött elvégezve az elemi átalakításokat megkapjuk a τ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) koordináták értékeit, amelyek kielégítik a (5)-ös egyenlőségeket.

$$\begin{aligned}&\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1\end{array}\right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right).\end{aligned}$$

Tehát

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– a φ transzformáció mátrixa az a_1, a_2, a_3 bázisban.

6. Legyen φ lineáris transzformációja az $\mathbb{R}^3$ vektortérnek, amely az $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$ vektort a $\varphi(x) = (\chi_1 - \chi_2, \chi_2 - \chi_3, \chi_3 - \chi_1)$ vektorba alakítja át,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

– a ψ lineáris transzformáció mátrixa ugyan ezen tér $a_1 = (1, -1, 1), a_2 = (2, -1, 1), a_3 = (3, -2, 3)$ bázisában. Keresse meg az $\mathbb{R}^3$ tér kanonikus bázisában a $\varphi, \psi, \varphi + \psi, \varphi - \psi, \varphi\psi, \psi\varphi$ lineáris transzformációk mátrixait!

Megoldás. Amennyiben

$$\varphi(e_1) = (1, 0, -1) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 - 1 \cdot e_3,$$

$$\varphi(e_2) = (-1, 1, 0) = -1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3,$$

$$\varphi(e_3) = (0, -1, 1) = 0 \cdot e_1 - 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3,$$

akkor

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– a φ transzformáció mátrixa a kanonikus bázisban.

Megkeressük az átmeneti mátrixot az a_1, a_2, a_3 bázisból az e_1, e_2, e_3 kanonikus bázisba.

Világos, hogy

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

– az átmeneti mátrix az e_1, e_2, e_3 bázisból az a_1, a_2, a_3 bázisba. Kiszámítjuk a T mátrixot, amely a T^{-1} mátrix inverze.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Innen

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A ψ transzformáció A_ψ mátrixa a kanonikus bázisban egyenlő lesz

$$A_\psi = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -3 & -31 & -14 \\ 2 & 19 & 8 \\ -4 & -26 & -10 \end{pmatrix}.$$

Ezután megkeressük a $\varphi + \psi$, $\varphi - \psi$, $\varphi\psi$, $\psi\varphi$ transzformációknak megfelelő $A_{\varphi+\psi}$, $A_{\varphi-\psi}$,

$A_{\varphi\psi}$, $A_{\psi\varphi}$ mátrixokat az e_1, e_2, e_3 bázisban

$$A_{\varphi+\psi} = A_{\varphi} + A_{\psi} = \begin{pmatrix} -2 & -32 & -14 \\ 2 & 20 & 7 \\ -5 & -26 & -9 \end{pmatrix}, \quad A_{\varphi-\psi} = A_{\varphi} - A_{\psi} = \begin{pmatrix} 4 & 30 & 14 \\ -2 & -18 & -9 \\ 3 & 26 & 11 \end{pmatrix},$$

$$A_{\varphi\psi} = A_{\varphi}A_{\psi} = \begin{pmatrix} -5 & -50 & -22 \\ 6 & 45 & 18 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_{\psi\varphi} = A_{\psi}A_{\varphi} = \begin{pmatrix} 11 & -28 & 17 \\ -6 & 17 & -11 \\ 6 & -22 & 16 \end{pmatrix}.$$

7. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

– az $\mathbb{R}^4$ vektortér φ lineáris transzformációjának mátrixa a c_1, c_2, c_3, c_4 bázisban. Határozza meg az $\text{Im}\varphi$ és a $\text{Ker}\varphi$ alterek bázisát és dimenzióját! Győződjön meg arról, hogy $\dim \text{Im}\varphi + \dim \text{Ker}\varphi = \dim \mathbb{R}^4$!

Megoldás. Előbb a φ lineáris transzformáció $\text{Im}\varphi$ képterének dimenzióját és bázisát keressük meg. Ehhez kiszámítjuk az A mátrix rangját.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \leq r(A) \leq 4;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 5 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 5 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Tehát $r(A) = 2$. Ezért $\dim \text{Im}\varphi = 2$ és a $\varphi(c_1), \varphi(c_2)$ vektorrendszer az $\text{Im}\varphi$ képtér bázisa.

Most a $\text{Ker}\varphi$ nulltér bázisát keressük meg. Legyen $x = \chi_1 c_1 + \chi_2 c_2 + \chi_3 c_3 + \chi_4 c_4$ – a φ lineáris transzformáció $\text{Ker}\varphi$ magjának tetszőleges eleme. Akkor ezen vektor $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$ koordinátáira igaz az alábbi egyenlőség

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Megoldjuk a (6)-os lineáris homogén egyenletrendszert a $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$ változókra. Amennyiben

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

– az A maximális rendű mátrixának aldeterminánsa nem egyenlő nullával (rangot meghatározó aldetermináns), akkor az (6)-os egyenletrendszer ekvivalens a következő egyenletrendszerrel:

$$\begin{cases} \chi_1 + 2\chi_2 = -3\chi_3 - 4\chi_4, \\ -2\chi_1 + \chi_2 = \chi_3 + 3\chi_4. \end{cases}$$

Innen

$$\begin{cases} \chi_1 = -\chi_3 - 2\chi_4, \\ \chi_2 = -\chi_3 - \chi_4. \end{cases}$$

Tehát a $\text{Ker}\varphi$ bázisát az $u_1 = -c_1 - c_2 + c_3$, $u_2 = -2c_1 - c_2 + c_4$ elemek alkotják. Ezért $\dim \text{Ker}\varphi = 2$ és az u_1, u_2 vektorrendszer a $\text{Ker}\varphi$ nulltér bázisa.

8. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

– az $\mathbb{R}^4$ vektortér φ lineáris transzformáció mátrixa a kanonikus bázisban. Keresse meg a φ^2 , φ^3 , φ^4 lineáris transzformációk mátrixait ebben a bázisban és győződjön meg arról, hogy $f(\varphi) = 0$, ahol f – a φ transzformáció karakterisztikus polinomja! Határozza meg a φ transzformáció összes sajátértékét és összes sajátvektorát!

Megoldás. Legyenek A_{φ^2} , A_{φ^3} , A_{φ^4} – megfelelően a φ^2 , φ^3 , φ^4 transzformációk mátrixai a kanonikus bázisban. Akkor

$$A_{\varphi^2} = A^2 = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{\varphi^3} = A_{\varphi^2} A = 4 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{\varphi^4} = A_{\varphi^3} A = 16 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Megkeressük a φ transzformáció $f(\lambda)$ karakterisztikus polinomját

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2-\lambda & 2-\lambda & 1-(1-\lambda)^2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & -2+\lambda \\ 0 & 0 & 2-\lambda & -2+\lambda \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\
= -(2-\lambda)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^3(\lambda+2).$$

Kiszámoljuk $f(A)$ -t

$$\begin{aligned}
(A-2E)^3 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^3 = 16 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \\
(A+2E) &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix};
\end{aligned}$$

$$f(A) = (A-2E)^3(A+2E) = 0.$$

Innen, valamint a transzformációk fölötti és azok mátrixai fölötti műveletek közötti kapcsolatából következik, hogy $f(\varphi) = 0$.

Nyilvánvaló hogy, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$ – a φ transzformáció sajátértékei. Megkeressük a sajátvektorokat, amelyek ezekhez a sajátértékekhez tartoznak. Előbb a $\lambda_1 = 2$ esetet vizsgáljuk. Megoldjuk az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases} (1-2)x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + (1-2)x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + (1-2)x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + (1-2)x_4 = 0, \end{cases} \quad (7)$$

Könnyen észrevehető, hogy a (7)-es rendszer ekvivalens a következő egyenlettel:

$$-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Ezért az $u_1 = (1, 1, 0, 0)$, $u_2 = (1, 0, 1, 0)$, $u_3 = (1, 0, 0, 1)$ vektorok a (7)-es rendszer megoldásainak fundamentális rendszerét alkotják. Tehát, ezen rendszer bármely nem nulla x megoldását fel lehet írni a következőképpen:

$$x = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3, \quad (8)$$

ahol $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – valamilyen valós számok, amelyek egyszerre nem egyenlők nullával. Így a φ transzformáció sajátvektorai, amelyek a $\lambda_1 = 2$ sajátértékhez tartoznak, a (8)-as alakban megadott vektorral fejeződnek ki.

Most megkeressük a φ transzformáció sajátvektorait, amelyek a $\lambda_2 = -2$ sajátértéknek tartoznak meg. Ehhez megoldjuk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Elvégezzük a következő átalakításokat (9)-es rendszer mátrixának sorain

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & -8 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Innen az következik, hogy $v = (-1, 1, 1, 1)$ – a (9)-es rendszer megoldásainak fundamentális rendszere.

Így a (14)-es rendszer bármilyen nem nulla megoldása felírható a következőképpen:

$$x = \gamma(-1, 1, 1, 1) \quad (\gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0).$$

9. Az $\mathbb{R}^4$ euklideszi tér L altere az

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0, \end{cases} \quad (10)$$

egyenletrendszer megoldásainak a tere. Keresse meg az L altér $L^\perp$ ortogonális komplementerét az $\mathbb{R}^4$ térben és a $c = (-24, 20, 5, -1)$ vektor vetületét az L altérre és az ő $L^\perp$ ortogonális komplementerére!

Megoldás. Az L homogén egyenletrendszer megoldásainak terének $L^\perp$ ortogonális komplementere megegyezik azzal a burokkal, amely ezen rendszer mátrixának soraira van felépítve. Előbb megtaláljuk a (10)-es rendszer mátrixának rangját

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Amennyiben

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

akkor $r(A) = 2$ és az $a_1 = (1, 2, -1, 1)$, $a_2 = (2, 3, 4, -1)$ vektorrendszer az $L^\perp$ tér bázisa.

Legyen b_1, b_2 az L tér bázisa, vagyis a (10)-es rendszer megoldásainak fundamentális rendszere. Akkor a_1, a_2, b_1, b_2 – az $\mathbb{R}^4$ tér bázisa és

$$c = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 \quad (11)$$

ahol $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

Legyen c', c'' – a c vektor vetületei megfelelően az $L, L^\perp$ altereken. Akkor $c = c' + c''$ és $c' = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2$, $c'' = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Előbb kiszámítjuk az α_1, α_2 együtthatókat. Ehhez skalárisan megszorozzuk a (11)-es egyenletet az a_1, a_2 vektorokra. Megkapjuk a következő egyenletrendszert

$$\begin{cases} (a_1, c) = \alpha_1 (a_1, a_1) + \alpha_2 (a_1, a_2), \\ (a_2, c) = \alpha_1 (a_2, a_1) + \alpha_2 (a_2, a_2); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 = 7\alpha_1 + 3\alpha_2, \\ 33 = 3\alpha_1 + 30\alpha_2. \end{cases}$$

Innen $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Tehát $c' = a_1 + a_2 = (3, 5, 3, 0)$ és $c'' = c - c' = (-27, 15, 2, -1)$.

10. Az $\mathbb{R}^4$ euklideszi térben ortonormalizálja az alábbi vektorrendszert:

$$a_1 = (1, 2, 3, 4), \quad a_2 = (0, 5, 0, 5), \quad a_3 = (8, 10, -8, 14)!$$

Megoldás. Mint ismeretes, az ortogonalizáció eljárás csak a lineárisan független vektorrendszereknél használható. Ezért előbb kiszámoljuk az alábbi mátrix rangját:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 8 & 10 & -8 & 14 \end{pmatrix}.$$

Könnyen kiszámítható, hogy az $r(A) = 3$ és az a_1, a_2, a_3 vektorok lineárisan független rendszert alkotnak.

A keresett ortogonális vektorrendszer első c_1 vektorának értékéül az a_1 vektort vesszük

$$c_1 = a_1 = (1, 2, 3, 4).$$

Ezután a c_2 vektort keressük a c_1 és a_2 vektorok lineáris kombinációjaként

$$c_2 = \lambda_1^{(2)} c_1 + a_2.$$

Ahhoz, hogy a c_2 vektor ortogonális legyen a c_1 vektorhoz, teljesülnie kell az alábbi feltételnek:

$$(c_1, c_2) = (c_1, \lambda_1^{(2)} c_1 + a_2) = \lambda_1^{(2)} (c_1, c_1) + (c_1, a_2) = 0.$$

Innen

$$\lambda_1^{(2)} = -\frac{(c_1, a_2)}{(c_1, c_1)} = -\frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 5}{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} = -\frac{30}{30} = -1.$$

Tehát, $c_2 = -c_1 + a_2 = (-1, 3, -3, 1)$.

A c_3 vektort keressük a c_1 , c_2 és az a_3 vektorok lineáris kombinációjaként

$$c_3 = \lambda_1^{(3)} c_1 + \lambda_2^{(3)} c_2 + a_3.$$

Ahhoz, hogy a c_3 vektor ortogonális legyen a c_1 , c_2 vektorokhoz, teljesülniük kell az alábbi feltételeknek:

$$(c_1, c_3) = (c_1, \lambda_1^{(3)} c_1 + \lambda_2^{(3)} c_2 + a_3) = \lambda_1^{(3)} (c_1, c_1) + \lambda_2^{(3)} (c_1, c_2) + (c_1, a_3) = 0,$$

$$(c_2, c_3) = (c_2, \lambda_1^{(3)} c_1 + \lambda_2^{(3)} c_2 + a_3) = \lambda_1^{(3)} (c_2, c_1) + \lambda_2^{(3)} (c_2, c_2) + (c_2, a_3) = 0.$$

Innen

$$\lambda_1^{(3)} = -\frac{(c_1, a_3)}{(c_1, c_1)} = -\frac{1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot (-8) + 4 \cdot 14}{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} = -\frac{60}{30} = -2,$$

$$\lambda_2^{(3)} = -\frac{(c_2, a_3)}{(c_2, c_2)} = -\frac{-1 \cdot 8 + 3 \cdot 10 + (-3) \cdot (-8) + 1 \cdot 14}{(-1)^2 + 3^2 + (-3)^2 + 1^2} = -\frac{60}{20} = -3.$$

Így

$$c_3 = -2c_1 - 3c_2 + a_3 = (9, -3, -5, 3).$$

Felépítettünk egy új párosával ortogonális nem nulla vektorokból álló rendszert

$$c_1 = (1, 2, 3, 4),$$

$$c_2 = (-1, 3, -3, 1),$$

$$c_3 = (9, -3, -5, 3).$$

Ahhoz, hogy a kapott rendszerből ortonormalizált rendszert kapjunk, a c_1 , c_2 , c_3 vektorokat elosztjuk saját normájukra.

$$\|c_1\| = \sqrt{(c_1, c_1)} = \sqrt{30}, \quad \|c_2\| = 2\sqrt{5}, \quad \|c_3\| = 2\sqrt{31}.$$

Akkor

$$b_1 = \frac{c_1}{\|c_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}, \frac{4}{\sqrt{30}} \right),$$

$$b_2 = \frac{c_2}{\|c_2\|} = \left(-\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{3}{2\sqrt{5}}, -\frac{3}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{5}} \right),$$

$$b_3 = \frac{c_3}{\|c_3\|} = \left(\frac{9}{2\sqrt{31}}, -\frac{3}{2\sqrt{31}}, -\frac{5}{2\sqrt{31}}, \frac{3}{2\sqrt{31}} \right)$$

– a keresett ortonormalizált vektorrendszer.

11. A $C_{[0,1]}^2$ euklideszi térben, mely az összes olyan függvény tere, melyek négyzete integrálható, ortogonalizálja a $p_1 = 1$, $p_2 = x$, $p_3 = x^2$, $p_4 = x^3$ polinomok rendszerét!

Megoldás. Ahogy az előző példában is, feltesszük, hogy

$$b_1 = p_1 = 1, \quad b_2 = \lambda_1^{(2)} b_1 + p_2.$$

Megkeressük a $\lambda_1^{(2)} = -\frac{(p_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{\int_0^1 x dx}{\int_0^1 1 dx} = -\frac{\frac{x^2}{2} \Big|_0^1}{1} = -\frac{1}{2}.$

Ezért $b_2 = -\frac{1}{2} + x$. A b_3 vektort a következő alakban fogjuk keresni:

$$b_3 = \lambda_1^{(3)} b_1 + \lambda_2^{(3)} b_2 + p_3.$$

Hasonlóan az előző példához a $\lambda_1^{(3)}$, $\lambda_2^{(3)}$ együtthatókat a következőképpen számítjuk ki:

$$\lambda_1^{(3)} = -\frac{(p_3, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{\int_0^1 x^2 dx}{1} = -\frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = -\frac{1}{3}, \quad \lambda_2^{(3)} = -\frac{(p_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = -\frac{\int_0^1 x^2 \left(-\frac{1}{2} + x\right) dx}{\int_0^1 \left(-\frac{1}{2} + x\right)^2 dx} = -\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}} = -1.$$

Tehát

$$b_3 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - x + x^2 = \frac{1}{6} - x + x^2.$$

A $b_4 = \lambda_1^{(4)} b_1 + \lambda_2^{(4)} b_2 + \lambda_3^{(4)} b_3 + p_4$ vektor $\lambda_1^{(4)}$, $\lambda_2^{(4)}$, $\lambda_3^{(4)}$ együtthatóit az alábbi képletek segítségével számítjuk ki:

$$\lambda_1^{(4)} = -\frac{(p_4, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{\int_0^1 x^3 dx}{1} = -\frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = -\frac{1}{4}, \quad \lambda_2^{(4)} = -\frac{(p_4, b_2)}{(b_2, b_2)} = -\frac{\int_0^1 x^3 \left(-\frac{1}{2} + x\right) dx}{\int_0^1 \left(-\frac{1}{2} + x\right)^2 dx} = -\frac{\frac{3}{40}}{\frac{1}{12}} = -\frac{9}{10},$$

$$\lambda_3^{(4)} = -\frac{(p_4, b_3)}{(b_3, b_3)} = -\frac{\int_0^1 x^3 \left(\frac{1}{6} - x + x^2 \right) dx}{\int_0^1 \left(\frac{1}{6} - x + x^2 \right)^2 dx} = -\frac{\frac{1}{120}}{\frac{1}{180}} = -\frac{2}{3}.$$

Így

$$b_4 = -\frac{1}{20} + \frac{3}{5}x - \frac{3}{2}x^2 + x^3.$$

12. Keresse meg a valós számok teste felett az $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$ kvadratikus alak normálalakját valamint az ismeretlenek transzformációit, amelyek ehhez az alakhoz vezetnek az $\bar{f}$ alakot!

Megoldás. Előbb elvégezzük az ismeretlenek transzformációját, amely fordított az alábbi transzformációhoz:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3, \end{cases}$$

vagyis az alábbi transzformációt:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2, \\ x_2 = y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

az alábbi mátrixszal:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ami után azt kapjuk, hogy

$$f = y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2 + 2y_2^2 - y_3^2 + 2y_1y_2 - 2y_2^2 - 4y_2y_3 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - 4y_2y_3.$$

Feltéve, hogy

$$\begin{cases} z_1 = y_1, \\ z_2 = y_2 - 2y_3, \\ z_3 = y_3, \end{cases}$$

vagyis elvégezve az ismeretlenek lineáris transzformációit az alábbi mátrixszal:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

az $\bar{f}$ kvadratikus alakot a következő alakhoz hozzuk:

$$f = z_1^2 + z_2^2 + 4z_2z_3 + 4z_3^2 - z_3^2 - 4z_2z_3 - 8z_3^2 = z_1^2 + z_2^2 - 5z_3^2.$$

Végül, elvégezzük az alábbi transzformációt:

$$\begin{cases} z_1 = u_1, \\ z_2 = u_2, \\ z_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}u_3, \end{cases}$$

az alábbi mátrixszal:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Eredményül megkapjuk az f kvadratikus alak kanonikus alakját

$$f = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2.$$

A

$$\begin{aligned} Q = ABC &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 2\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mátrix az ismeretlenek lineáris transzformációjának mátrixa, ami az f kvadratikus alakot kanonikus alakba vezeti át.

13. A $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ kvadratikus alak, amely az alábbi mátrixszal van megadva:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

pozitív definit, negatív definit vagy indefinit?

Megoldás. Kiszámítjuk a $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ kvadratikus alak mátrixának sarok aldeterminánsait:

$$A_1 = |3| = 3 > 0, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 5 > 0,$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0,$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

$$A_5 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Amennyiben a $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ kvadratikus alak összes sarok aldeterminánsa pozitív, úgy az egy pozitív definit kvadratikus alak.

1. Változat

1. Bizonyítsa be, hogy az a_1, a_2, a_3, a_4 vektorrendszer az $\mathbb{R}^4$ vektoriális tér bázisa lesz a valós számok $\mathbb{R}$ teste fölött! Keresse meg az $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ vektor koordinátáinak képleteit ebben a bázisban! Milyenek lesznek a $c \in \mathbb{R}^4$ vektor koordinátái az a_1, a_2, a_3, a_4 bázisban?

$$a_1 = (2, 1, 1, 3), a_2 = (3, 3, 1, 4), a_3 = (1, 4, 2, 4), a_4 = (4, 1, 2, 2), c = (14, 6, 9, 12).$$

2. Bizonyítsa be, hogy az a_1, a_2, a_3 és a b_1, b_2, b_3 vektorrendszerek az $\mathbb{R}^3$ vektoriális tér bázisai! Keresse meg az átmeneti mátrixot és a koordináták átalakításának képleteit az egyik bázisból való átmenet során a másikba. Ezután határozza meg a $c = (1, 2, 3)$ vektor koordinátáit mindkét bázisban, és ellenőrizze le a kapott eredményt a koordináták átalakítási képleteinek segítségével!

$$a_1 = (1, -1, 1), \quad a_2 = (2, -1, -1), \quad a_3 = (3, -2, 1).$$

$$b_1 = (-1, 1, 0), \quad b_2 = (2, -1, 1), \quad b_3 = (1, 0, 0)$$

3. Keresse meg az $L_1 + L_2$ összeg dimenzióját és bázisát, valamint az $\mathbb{R}^5$ tér L_1 és L_2 lineáris altereinek $L_1 \cap L_2$ metszetét, ahol L_1 – az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak tere, $L_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$ – az a_1, a_2 vektorrendszerből előállított lineáris burok!

$$\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ -5x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 6x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 12x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0; \end{cases} \quad \begin{aligned} a_1 &= (4, 3, 1, 2, -1), \\ a_2 &= (1, 7, -2, -1, -10). \end{aligned}$$

4. A $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezés minden $x = (x_1, x_2, x_3)$ vektort $\varphi(x) \in \mathbb{R}^3$ vektorba alakít át (képez). Bizonyítsa be, hogy a φ lineáris transzformáció lesz! Keresse meg a vektor képének koordinátáinak képletét az $\mathbb{R}^3$ tér e_1, e_2, e_3 kanonikus bázisában; az $a = (1, 1, 1)$ és e_1, e_2, e_3 vektorok képét és a φ transzformáció mátrixát ugyan ebben a bázisban!

$$\varphi(x) = (3x_1 - x_2, x_1 + 2x_2 - x_3, x_3 - x_2).$$

5. Határozza meg az $\mathbb{R}^3$ vektortér azon φ lineáris transzformációját, amely az a_1, a_2, a_3 bázis vektorokat megfelelően ezen tér b_1, b_2, b_3 vektoraiba alakítja át! Keresse meg a φ transzformáció mátrixát az a_1, a_2, a_3 bázisban!

$$a_1 = (1, 3, -2), a_2 = (4, -2, 1), \quad a_3 = (-4, -1, 1).$$

$$b_1 = (-4, -1, 1), \quad b_2 = (7, -1, 0), \quad b_3 = (0, -1, 0).$$

6. Legyen φ lineáris transzformációja az $\mathbb{R}^3$ vektortérnek, amely az $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$ vektort a $\varphi(x)$ vektorba alakítja át,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

– a ψ lineáris transzformáció mátrixa ugyan ezen tér a_1, a_2, a_3 bázisában. Keresse meg az $\mathbb{R}^3$ tér kanonikus bázisában a $\varphi, \psi, \varphi + \psi, \varphi - \psi, \varphi\psi, \psi\varphi$ lineáris transzformációk mátrixait!

$$\varphi(x) = (2\chi_2 - 3\chi_3, \chi_1 + 2\chi_2 + 3\chi_3, \chi_3 - \chi_1);$$

$$a_1 = (1, 1, 2), a_2 = (1, 1, 1), a_3 = (1, -1, 2).$$

7. Legyen A – az $\mathbb{R}^4$ vektortér φ lineáris transzformációjának mátrixa a c_1, c_2, c_3, c_4 bázisban. Határozza meg az $\text{Im}\varphi$ és a $\text{Ker}\varphi$ alterek bázisát és dimenzióját! Győződjön meg arról, hogy $\dim \text{Im}\varphi + \dim \text{Ker}\varphi = \dim \mathbb{R}^4$!

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Legyen A – az $\mathbb{R}^4$ vektortér φ lineáris transzformáció mátrixa a kanonikus bázisban. Keresse meg a $\varphi^2, \varphi^3, \varphi^4$ lineáris transzformációk mátrixait ebben a bázisban és győződjön meg arról, hogy $f(\varphi) = 0$, ahol f – a φ transzformáció karakterisztikus polinomja! Határozza meg a φ transzformáció összes sajátértékét és összes sajátvektorát!

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

9. Az $\mathbb{R}^4$ euklideszi tér L altere az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak a tere. Keresse meg az L altér $L^\perp$ ortogonális komplementerét az $\mathbb{R}^4$ térben és a c vektor vetületét az L altérre és az ő $L^\perp$ ortogonális komplementerére!

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, & c = (-5, 4, 6, -1). \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0; \end{cases}$$

10. Az $\mathbb{R}^4$ euklideszi térben ortonormalizálja az a_1, a_2, a_3, a_4 vektorrendszert!

$$a_1 = (1, 1, 1, 1), a_2 = (1, -1, 1, -1), a_3 = (0, 1, 1, 1), a_4 = (0, 0, 1, 1).$$

11. A $C_{[\alpha, \beta]}^2$ euklideszi térben, mely az összes olyan függvény tere, melyek négyzete integrálható, ortogonalizálja a $p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2, p_4 = x^3$ polinomok rendszerét (a $C_{[\alpha, \beta]}^2$ tér két tetszőleges f és g függvényének skaláris szorzata a következő módon határozható meg:

$$(f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx \text{)!}$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1.$$

12. Keresse meg megfelelően a valós és komplex számok teste felett az $f(x_1, x_2, x_3)$ kvadratikus alak normálalakját valamint az ismeretlenek transzformációit, amelyek ehhez az alakhoz vezetnek az f alakot!

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3.$$

13. A $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X^T A X$ kvadratikus alak, amely az A mátrixszal van megadva, pozitív definit, negatív definit vagy indefinit?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Változat

1. Bizonyítsa be, hogy az a_1, a_2, a_3, a_4 vektorrendszer az $\mathbb{R}^4$ vektoriális tér bázisa lesz a valós számok $\mathbb{R}$ teste fölött! Keresse meg az $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ vektor koordinátáinak képleteit ebben a bázisban! Milyenek lesznek a $c \in \mathbb{R}^4$ vektor koordinátái az a_1, a_2, a_3, a_4 bázisban?

$$a_1 = (2, 1, 2, 2), a_2 = (2, 1, 1, 2), a_3 = (2, 2, 1, 1), a_4 = (1, 1, 1, 0), c = (1, -1, 1, -1).$$

2. Bizonyítsa be, hogy az a_1, a_2, a_3 és a b_1, b_2, b_3 vektorrendszerek az $\mathbb{R}^3$ vektoriális tér bázisai! Keresse meg az átmeneti mátrixot és a koordináták átalakításának képleteit az egyik bázisból való átmenet során a másikba. Ezután határozza meg a $c = (1, 2, 3)$ vektor koordinátáit mindkét bázisban, és ellenőrizze le a kapott eredményt a koordináták átalakítási képleteinek segítségével!

$$\begin{aligned} a_1 &= (3, 3, -2), & a_2 &= (1, -1, 3), & a_3 &= (11, 6, 2); \\ b_1 &= (-2, 1, 4), & b_2 &= (3, -2, 1), & b_3 &= (-11, 7, 2). \end{aligned}$$

3. Keresse meg az $L_1 + L_2$ összeg dimenzióját és bázisát, valamint az $\mathbb{R}^5$ tér L_1 és L_2 lineáris altereinek $L_1 \cap L_2$ metszetét, ahol L_1 – az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak tere, $L_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$ – az a_1, a_2 vektorrendszerből előállított lineáris burok!

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 - x_5 = 0; \end{cases} \quad \begin{aligned} a_1 &= (3, 4, -7, -3, -3), \\ a_2 &= (-4, 8, -8, -5, -4). \end{aligned}$$

4. A $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezés minden $x = (x_1, x_2, x_3)$ vektort $\varphi(x) \in \mathbb{R}^3$ vektorba alakít át (képez). Bizonyítsa be, hogy a φ lineáris transzformáció lesz! Keresse meg a vektor képének koordinátáinak képletét az $\mathbb{R}^3$ tér e_1, e_2, e_3 kanonikus bázisában; az $a = (1, 1, 1)$ és e_1, e_2, e_3 vektorok képét és a φ transzformáció mátrixát ugyan ebben a bázisban!

$$\varphi(x) = (2x_1 - x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3).$$

5. Határozza meg az $\mathbb{R}^3$ vektortér azon φ lineáris transzformációját, amely az a_1, a_2, a_3 bázis vektorokat megfelelően ezen tér b_1, b_2, b_3 vektoraiba alakítja át! Keresse meg a φ transzformáció mátrixát az a_1, a_2, a_3 bázisban!

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, -1, 1), & a_2 &= (1, 0, 1), & a_3 &= (2, -1, 1); \\ b_1 &= (1, 1, 1), & b_2 &= (1, 1, 1), & b_3 &= (1, 1, 0). \end{aligned}$$

6. Legyen φ lineáris transzformációja az $\mathbb{R}^3$ vektortérnek, amely az $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$ vektort a $\varphi(x)$ vektorba alakítja át,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

– a ψ lineáris transzformáció mátrixa ugyan ezen tér a_1, a_2, a_3 bázisában. Keresse meg az $\mathbb{R}^3$ tér kanonikus bázisában a $\varphi, \psi, \varphi + \psi, \varphi - \psi, \varphi\psi, \psi\varphi$ lineáris transzformációk mátrixait!

$$\varphi(x) = (2\chi_1 - \chi_2, 2\chi_2 - \chi_3, \chi_1 + \chi_2 + \chi_3);$$

$$a_1 = (1, 1, 1), a_2 = (2, 1, 1), a_3 = (3, 2, 3).$$

7. Legyen A – az $\mathbb{R}^4$ vektortér φ lineáris transzformációjának mátrixa a c_1, c_2, c_3, c_4 bázisban. Határozza meg az $\text{Im}\varphi$ és a $\text{Ker}\varphi$ alterek bázisát és dimenzióját! Győződjön meg arról, hogy $\dim \text{Im}\varphi + \dim \text{Ker}\varphi = \dim \mathbb{R}^4$!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

8. Legyen A – az $\mathbb{R}^4$ vektortér φ lineáris transzformáció mátrixa a kanonikus bázisban. Keresse meg a $\varphi^2, \varphi^3, \varphi^4$ lineáris transzformációk mátrixait ebben a bázisban és győződjön meg arról, hogy $f(\varphi) = 0$, ahol f – a φ transzformáció karakterisztikus polinomja! Határozza meg a φ transzformáció összes sajátértékét és összes sajátvektorát!

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Az $\mathbb{R}^4$ euklideszi tér L altére az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak a tere. Keresse meg az L altér $L^\perp$ ortogonális komplementerét az $\mathbb{R}^4$ térben és a c vektor vetületét az L altérre és az $\tilde{o}$ $L^\perp$ ortogonális komplementerére!

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_4 = 0, & c = (2, 0, 4, -1). \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0; \end{cases}$$

10. Az $\mathbb{R}^4$ euklideszi térben ortonormalizálja az a_1, a_2, a_3, a_4 vektorrendszert!

$$a_1 = (1, -1, 1, -1), a_2 = (1, 0, -1, 0), a_3 = (0, 1, 1, 1), a_4 = (0, 0, 1, -1).$$

11. A $C_{[\alpha, \beta]}^2$ euklideszi térben, mely az összes olyan függvény tere, melyek négyzete integrálható, ortogonalizálja a $p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2, p_4 = x^3$ polinomok rendszerét (a $C_{[\alpha, \beta]}^2$ tér két tetszőleges f és g függvényének skaláris szorzata a következő módon határozható meg:

$$(f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx \text{)!}$$

$$\alpha = -1, \quad \beta = 0.$$

12. Keresse meg megfelelően a valós és komplex számok teste felett az $f(x_1, x_2, x_3)$ kvadratikus alak normálalakját valamint az ismeretlenek transzformációit, amelyek ehhez az alakhoz vezetnek az f alakot!

$$f = -x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3.$$

13. A $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X^T A X$ kvadratikus alak, amely az A mátrixszal van megadva, pozitív definit, negatív definit vagy indefinit?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Változat

1. Bizonyítsa be, hogy az a_1, a_2, a_3, a_4 vektorrendszer az $\mathbb{R}^4$ vektoriális tér bázisa lesz a valós számok $\mathbb{R}$ teste fölött! Keresse meg az $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ vektor koordinátáinak képleteit ebben a bázisban! Milyenek lesznek a $c \in \mathbb{R}^4$ vektor koordinátái az a_1, a_2, a_3, a_4 bázisban?

$$a_1 = (1, 1, 1, 1), a_2 = (1, -1, 1, -1), a_3 = (2, 1, 1, 1), a_4 = (3, 4, 1, 1), c = (3, -3, 0, 12).$$

2. Bizonyítsa be, hogy az a_1, a_2, a_3 és a b_1, b_2, b_3 vektorrendszerek az $\mathbb{R}^3$ vektoriális tér bázisai! Keresse meg az átmeneti mátrixot és a koordináták átalakításának képleteit az egyik bázisból való átmenet során a másikba. Ezután határozza meg a $c = (1, 2, 3)$ vektor koordinátáit mindkét bázisban, és ellenőrizze le a kapott eredményt a koordináták átalakítási képleteinek segítségével!

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, -1, 1), & a_2 &= (-1, 2, 0), & a_3 &= (0, 1, 2); \\ b_1 &= (1, -1, 1), & b_2 &= (2, -1, 0), & b_3 &= (3, -2, 0). \end{aligned}$$

3. Keresse meg az $L_1 + L_2$ összeg dimenzióját és bázisát, valamint az $\mathbb{R}^5$ tér L_1 és L_2 lineáris altereinek $L_1 \cap L_2$ metszetét, ahol L_1 – az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak tere, $L_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$ – az a_1, a_2 vektorrendszerből előállított lineáris burok!

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_4 + 2x_5 = 0; \end{cases} \quad \begin{aligned} a_1 &= (7, -4, 1, 2, 1), \\ a_2 &= (10, 0, -6, -1, -2). \end{aligned}$$

4. A $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezés minden $x = (x_1, x_2, x_3)$ vektort $\varphi(x) \in \mathbb{R}^3$ vektorba alakít át (képez). Bizonyítsa be, hogy a φ lineáris transzformáció lesz! Keresse meg a vektor képének koordinátáinak képletét az $\mathbb{R}^3$ tér e_1, e_2, e_3 kanonikus bázisában; az $a = (1, 1, 1)$ és e_1, e_2, e_3 vektorok képét és a φ transzformáció mátrixát ugyan ebben a bázisban!

$$\varphi(x) = (x_1 - x_2 - x_3, -x_1 + x_2 - x_3, -x_1 - x_2 + x_3).$$

5. Határozza meg az $\mathbb{R}^3$ vektortér azon φ lineáris transzformációját, amely az a_1, a_2, a_3 bázis vektorokat megfelelően ezen tér b_1, b_2, b_3 vektoraiba alakítja át! Keresse meg a φ transzformáció mátrixát az a_1, a_2, a_3 bázisban!

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, -1, 1), & a_2 &= (2, 1, -1), & a_3 &= (3, 0, 1); \\ b_1 &= (-1, 1, 1), & b_2 &= (0, -1, 1), & b_3 &= (-1, 0, 2). \end{aligned}$$

6. Legyen φ lineáris transzformációja az $\mathbb{R}^3$ vektortérnek, amely az $x = (x_1, x_2, x_3)$ vektort a $\varphi(x)$ vektorba alakítja át,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

– a ψ lineáris transzformáció mátrixa ugyan ezen tér a_1, a_2, a_3 bázisában. Keresse meg az $\mathbb{R}^3$ tér kanonikus bázisában a $\varphi, \psi, \varphi + \psi, \varphi - \psi, \varphi\psi, \psi\varphi$ lineáris transzformációk mátrixait!

$$\varphi(x) = (\chi_1 + \chi_2 + \chi_3, 2\chi_1 - \chi_3, 3\chi_2 - \chi_1);$$

$$a_1 = (1, -1, 1), a_2 = (-1, 2, 0), a_3 = (0, 1, 2) ..$$

7. Legyen A – az $\mathbb{R}^4$ vektortér φ lineáris transzformációjának mátrixa a c_1, c_2, c_3, c_4 bázisban. Határozza meg az $\text{Im}\varphi$ és a $\text{Ker}\varphi$ alterek bázisát és dimenzióját! Győződjön meg arról, hogy $\dim \text{Im}\varphi + \dim \text{Ker}\varphi = \dim \mathbb{R}^4$!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

8. Legyen A – az $\mathbb{R}^4$ vektortér φ lineáris transzformáció mátrixa a kanonikus bázisban. Keresse meg a $\varphi^2, \varphi^3, \varphi^4$ lineáris transzformációk mátrixait ebben a bázisban és győződjön meg arról, hogy $f(\varphi) = 0$, ahol f – a φ transzformáció karakterisztikus polinomja! Határozza meg a φ transzformáció összes sajátértékét és összes sajátvektorát!

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

9. Az $\mathbb{R}^4$ euklideszi tér L altere az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak a tere. Keresse meg az L altér $L^\perp$ ortogonális komplementerét az $\mathbb{R}^4$ térben és a c vektor vetületét az L altérre és az $L^\perp$ ortogonális komplementerére!

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 3x_4 = 0, & c = (5, 1, -4, 0). \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$$

10. Az $\mathbb{R}^4$ euklideszi térben ortonormalizálja az a_1, a_2, a_3, a_4 vektorrendszert!

$$a_1 = (-1, -1, 1, 1), a_2 = (1, 0, -1, 0), a_3 = (1, 1, 1, 0), a_4 = (1, 0, 0, -1).$$

11. A $C_{[\alpha, \beta]}^2$ euklideszi térben, mely az összes olyan függvény tere, melyek négyzete integrálható, ortogonalizálja a $p_1 = 1$, $p_2 = x$, $p_3 = x^2$, $p_4 = x^3$ polinomok rendszerét (a $C_{[\alpha, \beta]}^2$ tér két tetszőleges f és g függvényének skaláris szorzata a következő módon határozható meg:

$$(f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx \text{)!}$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2.$$

12. Keresse meg megfelelően a valós és komplex számok teste felett az $f(x_1, x_2, x_3)$ kvadratikus alak normálalakját valamint az ismeretlenek transzformációit, amelyek ehhez az alakhoz vezetnek az f alakot!

$$f = x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

13. A $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X^T A X$ kvadratikus alak, amely az A mátrixszal van megadva, pozitív definit, negatív definit vagy indefinit?

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Változat

1. Bizonyítsa be, hogy az a_1, a_2, a_3, a_4 vektorrendszer az $\mathbb{R}^4$ vektoriális tér bázisa lesz a valós számok $\mathbb{R}$ teste fölött! Keresse meg az $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ vektor koordinátáinak képleteit ebben a bázisban! Milyenek lesznek a $c \in \mathbb{R}^4$ vektor koordinátái az a_1, a_2, a_3, a_4 bázisban?

$$a_1 = (-1, 2, 2, 1), a_2 = (0, 3, 2, 1), a_3 = (1, 1, 4, 2), a_4 = (1, -2, 1, 3), c = (2, -4, 5, 6).$$

2. Bizonyítsa be, hogy az a_1, a_2, a_3 és a b_1, b_2, b_3 vektorrendszerek az $\mathbb{R}^3$ vektoriális tér bázisai! Keresse meg az átmeneti mátrixot és a koordináták átalakításának képleteit az egyik bázisból való átmenet során a másikba. Ezután határozza meg a $c = (1, 2, 3)$ vektor koordinátáit mindkét bázisban, és ellenőrizze le a kapott eredményt a koordináták átalakítási képleteinek segítségével!

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, -1, -1), & a_2 &= (-1, 2, 0), & a_3 &= (0, 1, 0); \\ b_1 &= (1, 0, 1), & b_2 &= (1, -1, 2), & b_3 &= (2, -1, 4). \end{aligned}$$

3. Keresse meg az $L_1 + L_2$ összeg dimenzióját és bázisát, valamint az $\mathbb{R}^5$ tér L_1 és L_2 lineáris altereinek $L_1 \cap L_2$ metszetét, ahol L_1 – az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak tere, $L_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$ – az a_1, a_2 vektorrendszerből előállított lineáris burok!

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0; \end{cases} \quad \begin{aligned} a_1 &= (-5, 4, 1, 2, 3), \\ a_2 &= (1, 1, 1, 1, 1). \end{aligned}$$

4. A $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezés minden $x = (x_1, x_2, x_3)$ vektort $\varphi(x) \in \mathbb{R}^3$ vektorba alakít át (képez). Bizonyítsa be, hogy a φ lineáris transzformáció lesz! Keresse meg a vektor képének koordinátáinak képletét az $\mathbb{R}^3$ tér e_1, e_2, e_3 kanonikus bázisában; az $a = (1, 1, 1)$ és e_1, e_2, e_3 vektorok képét és a φ transzformáció mátrixát ugyan ebben a bázisban!

$$\varphi(x) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_1 - x_3).$$

5. Határozza meg az $\mathbb{R}^3$ vektortér azon φ lineáris transzformációját, amely az a_1, a_2, a_3 bázis vektorokat megfelelően ezen tér b_1, b_2, b_3 vektoraiba alakítja át! Keresse meg a φ transzformáció mátrixát az a_1, a_2, a_3 bázisban!

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, -1, 1), & a_2 &= (2, -1, 0), & a_3 &= (3, -2, 0); \\ b_1 &= (-1, 0, 1), & b_2 &= (0, 0, 0), & b_3 &= (0, 1, 1). \end{aligned}$$

6. Legyen φ lineáris transzformációja az $\mathbb{R}^3$ vektortérnek, amely az $x = (x_1, x_2, x_3)$ vektort a $\varphi(x)$ vektorba alakítja át,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

– a φ lineáris transzformáció mátrixa ugyan ezen tér a_1, a_2, a_3 bázisában. Keresse meg az $\mathbb{R}^3$ tér kanonikus bázisában a $\varphi, \psi, \varphi + \psi, \varphi - \psi, \varphi\psi, \psi\varphi$ lineáris transzformációk mátrixait!

$$\varphi(x) = (2x_1 - x_2 - x_3, x_1 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3);$$

$$a_1 = (1, 1, -1), a_2 = (-1, 2, 0), a_3 = (0, 1, 0).$$

7. Legyen A – az $\mathbb{R}^4$ vektortér φ lineáris transzformációjának mátrixa a c_1, c_2, c_3, c_4 bázisban. Határozza meg az $\text{Im}\varphi$ és a $\text{Ker}\varphi$ alterek bázisát és dimenzióját! Győződjön meg arról, hogy $\dim \text{Im}\varphi + \dim \text{Ker}\varphi = \dim \mathbb{R}^4$!

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Legyen A – az $\mathbb{R}^4$ vektortér φ lineáris transzformáció mátrixa a kanonikus bázisban. Keresse meg a $\varphi^2, \varphi^3, \varphi^4$ lineáris transzformációk mátrixait ebben a bázisban és győződjön meg arról, hogy $f(\varphi) = 0$, ahol f – a φ transzformáció karakterisztikus polinomja! Határozza meg a φ transzformáció összes sajátértékét és összes sajátvektorát!

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Az $\mathbb{R}^4$ euklideszi tér L altere az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak a tere. Keresse meg az L altér $L^\perp$ ortogonális komplementerét az $\mathbb{R}^4$ térben és a c vektor vetületét az L altérre és az $L^\perp$ ortogonális komplementerére!

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, & c = (1, -2, -4, 5). \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0; \end{cases}$$

10. Az $\mathbb{R}^4$ euklideszi térben ortonormalizálja az a_1, a_2, a_3, a_4 vektorrendszert!

$$a_1 = (1, 1, -1, -1), a_2 = (1, 0, 1, 0), a_3 = (1, 1, 0, 1), a_4 = (1, 1, 0, 0).$$

11. A $C_{[\alpha, \beta]}^2$ euklideszi térben, mely az összes olyan függvény tere, melyek négyzete integrálható, ortogonalizálja a $p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2, p_4 = x^3$ polinomok rendszerét (a $C_{[\alpha, \beta]}^2$ tér két

tetszőleges f és g függvényének skaláris szorzata a következő módon határozható meg:

$$(f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx \text{)!}$$

$$\alpha = -2, \quad \beta = -1.$$

12. Keresse meg megfelelően a valós és komplex számok teste felett az $f(x_1, x_2, x_3)$ kvadratikus alak normálalakját valamint az ismeretlenek transzformációit, amelyek ehhez az alakhoz vezetnek az f alakot!

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 - 6x_1x_2 - 4x_2x_3.$$

13. A $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X^T A X$ kvadratikus alak, amely az A mátrixszal van megadva, pozitív definit, negatív definit vagy indefinit?

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Változat

1. Bizonyítsa be, hogy az a_1, a_2, a_3, a_4 vektorrendszer az $\mathbb{R}^4$ vektoriális tér bázisa lesz a valós számok $\mathbb{R}$ teste fölött! Keresse meg az $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) \in \mathbb{R}^4$ vektor koordinátáinak képleteit ebben a bázisban! Milyenek lesznek a $c \in \mathbb{R}^4$ vektor koordinátái az a_1, a_2, a_3, a_4 bázisban?

$$a_1 = (3, -1, 1, 3), a_2 = (2, 0, 6, 1), a_3 = (1, -1, 1, 1), a_4 = (2, 4, 1, 1), c = (2, 4, 3, -1).$$

2. Bizonyítsa be, hogy az a_1, a_2, a_3 és a b_1, b_2, b_3 vektorrendszerek az $\mathbb{R}^3$ vektoriális tér bázisai! Keresse meg az átmeneti mátrixot és a koordináták átalakításának képleteit az egyik bázisból való átmenet során a másikba. Ezután határozza meg a $c = (1, 2, 3)$ vektor koordinátáit mindkét bázisban, és ellenőrizze le a kapott eredményt a koordináták átalakítási képleteinek segítségével!

$$\begin{aligned} a_1 &= (0, 1, 2), & a_2 &= (1, -2, -1), & a_3 &= (1, -1, 2); \\ b_1 &= (-1, 1, 0), & b_2 &= (2, -1, 1), & b_3 &= (1, 0, 2). \end{aligned}$$

3. Keresse meg az $L_1 + L_2$ összeg dimenzióját és bázisát, valamint az $\mathbb{R}^5$ tér L_1 és L_2 lineáris altereinek $L_1 \cap L_2$ metszetét, ahol L_1 – az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak tere, $L_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$ – az a_1, a_2 vektorrendszerből előállított lineáris burok!

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 0; \end{cases} \quad \begin{aligned} a_1 &= (1, 1, 1, 1, 0), \\ a_2 &= (2, 1, -1, 1, 1). \end{aligned}$$

4. A $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezés minden $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$ vektort $\varphi(x) \in \mathbb{R}^3$ vektorba alakít át (képez). Bizonyítsa be, hogy a φ lineáris transzformáció lesz! Keresse meg a vektor képének koordinátáinak képletét az $\mathbb{R}^3$ tér e_1, e_2, e_3 kanonikus bázisában; az $a = (1, 1, 1)$ és e_1, e_2, e_3 vektorok képét és a φ transzformáció mátrixát ugyan ebben a bázisban!

$$\varphi(x) = (\chi_2 + 3\chi_3, 2\chi_2 - \chi_3, \chi_2 + \chi_3).$$

5. Határozza meg az $\mathbb{R}^3$ vektortér azon φ lineáris transzformációját, amely az a_1, a_2, a_3 bázis vektorokat megfelelően ezen tér b_1, b_2, b_3 vektoraiba alakítja át! Keresse meg a φ transzformáció mátrixát az a_1, a_2, a_3 bázisban!

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, -1, -1), & a_2 &= (-1, 2, 0), & a_3 &= (0, 1, 0); \\ b_1 &= (1, -1, 1), & b_2 &= (1, 0, -1), & b_3 &= (2, -1, 0). \end{aligned}$$

6. Legyen φ lineáris transzformációja az $\mathbb{R}^3$ vektortérnek, amely az $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$ vektort a $\varphi(x)$ vektorba alakítja át,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

– a ψ lineáris transzformáció mátrixa ugyan ezen tér a_1, a_2, a_3 bázisában. Keresse meg az $\mathbb{R}^3$ tér kanonikus bázisában a $\varphi, \psi, \varphi + \psi, \varphi - \psi, \varphi\psi, \psi\varphi$ lineáris transzformációk mátrixait!

$$\varphi(x) = (\chi_1 - \chi_2 + 2\chi_3, \chi_1 - \chi_2, \chi_1 + 2\chi_2);$$

$$a_1 = (1, -1, 1), a_2 = (2, -1, -1), a_3 = (3, -2, 1).$$

7. Legyen A – az $\mathbb{R}^4$ vektortér φ lineáris transzformációjának mátrixa a c_1, c_2, c_3, c_4 bázisban. Határozza meg az $\text{Im}\varphi$ és a $\text{Ker}\varphi$ alterek bázisát és dimenzióját! Győződjön meg arról, hogy $\dim \text{Im}\varphi + \dim \text{Ker}\varphi = \dim \mathbb{R}^4$!

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Legyen A – az $\mathbb{R}^4$ vektortér φ lineáris transzformáció mátrixa a kanonikus bázisban. Keresse meg a $\varphi^2, \varphi^3, \varphi^4$ lineáris transzformációk mátrixait ebben a bázisban és győződjön meg arról, hogy $f(\varphi) = 0$, ahol f – a φ transzformáció karakterisztikus polinomja! Határozza meg a φ transzformáció összes sajátértékét és összes sajátvektorát!

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Az $\mathbb{R}^4$ euklideszi tér L altere az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak a tere. Keresse meg az L altér $L^\perp$ ortogonális komplementerét az $\mathbb{R}^4$ térben és a c vektor vetületét az L altérre és az $\tilde{o}$ $L^\perp$ ortogonális komplementerére!

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 0, \\ -x_1 - 6x_3 - x_4 = 0; \end{cases} \quad c = (-14, -3, 5, 0).$$

10. Az $\mathbb{R}^4$ euklideszi térben ortonormalizálja az a_1, a_2, a_3, a_4 vektorrendszert!

$$a_1 = (1, 1, 1, -1), a_2 = (1, 0, 0, 1), a_3 = (1, 1, 1, 0), a_4 = (0, 1, 1, 1).$$

11. A $C_{[\alpha, \beta]}^2$ euklideszi térben, mely az összes olyan függvény tere, melyek négyzete integrálható, ortogonalizálja a $p_1 = 1$, $p_2 = x$, $p_3 = x^2$, $p_4 = x^3$ polinomok rendszerét (a $C_{[\alpha, \beta]}^2$ tér két tetszőleges f és g függvényének skaláris szorzata a következő módon határozható meg:

$$(f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx \text{)!}$$

$$\alpha = 2, \quad \beta = 3.$$

12. Keresse meg megfelelően a valós és komplex számok teste felett az $f(x_1, x_2, x_3)$ kvadratikus alak normálalakját valamint az ismeretlenek transzformációit, amelyek ehhez az alakhoz vezetnek az f alakot!

$$f = -x_1^2 + 4x_2^2 - x_3^2 + 8x_2x_3 - 4x_1x_3.$$

13. A $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X^T A X$ kvadratikus alak, amely az A mátrixszal van megadva, pozitív definit, negatív definit vagy indefinit?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Változat

1. Bizonyítsa be, hogy az a_1, a_2, a_3, a_4 vektorrendszer az $\mathbb{R}^4$ vektoriális tér bázisa lesz a valós számok $\mathbb{R}$ teste fölött! Keresse meg az $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ vektor koordinátáinak képleteit ebben a bázisban! Milyenek lesznek a $c \in \mathbb{R}^4$ vektor koordinátái az a_1, a_2, a_3, a_4 bázisban?

$$a_1 = (-2, 5, 0, 3), a_2 = (1, 3, 2, 6), a_3 = (1, 1, 1, 0), a_4 = (2, 2, 2, 2), c = (3, 6, 9, -2).$$

2. Bizonyítsa be, hogy az a_1, a_2, a_3 és a b_1, b_2, b_3 vektorrendszerek az $\mathbb{R}^3$ vektoriális tér bázisai! Keresse meg az átmeneti mátrixot és a koordináták átalakításának képleteit az egyik bázisból való átmenet során a másikba. Ezután határozza meg a $c = (1, 2, 3)$ vektor koordinátáit mindkét bázisban, és ellenőrizze le a kapott eredményt a koordináták átalakítási képleteinek segítségével!

$$\begin{aligned} a_1 &= (2, 1, 1), & a_2 &= (1, 1, 3), & a_3 &= (3, 2, 5); \\ b_1 &= (1, 1, 1), & b_2 &= (2, 1, 1), & b_3 &= (3, 1, 3). \end{aligned}$$

3. Keresse meg az $L_1 + L_2$ összeg dimenzióját és bázisát, valamint az $\mathbb{R}^5$ tér L_1 és L_2 lineáris altereinek $L_1 \cap L_2$ metszetét, ahol L_1 – az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak tere, $L_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$ – az a_1, a_2 vektorrendszerből előállított lineáris burok!

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 0; \end{cases} \quad \begin{aligned} a_1 &= (1, 1, 1, 1, 1), \\ a_2 &= (0, 2, 3, 4, -6). \end{aligned}$$

4. A $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezés minden $x = (x_1, x_2, x_3)$ vektort $\varphi(x) \in \mathbb{R}^3$ vektorba alakít át (képez). Bizonyítsa be, hogy a φ lineáris transzformáció lesz! Keresse meg a vektor képének koordinátáinak képletét az $\mathbb{R}^3$ tér e_1, e_2, e_3 kanonikus bázisában; az $a = (1, 1, 1)$ és e_1, e_2, e_3 vektorok képét és a φ transzformáció mátrixát ugyan ebben a bázisban!

$$\varphi(x) = (2x_1 - x_3, 2x_2 - x_3, x_1 - x_3).$$

5. Határozza meg az $\mathbb{R}^3$ vektortér azon φ lineáris transzformációját, amely az a_1, a_2, a_3 bázis vektorokat megfelelően ezen tér b_1, b_2, b_3 vektoraiba alakítja át! Keresse meg a φ transzformáció mátrixát az a_1, a_2, a_3 bázisban!

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, 0, 1), & a_2 &= (1, -1, 2), & a_3 &= (2, -1, 4); \\ b_1 &= (0, -1, 1), & b_2 &= (1, 1, 0), & b_3 &= (1, 0, 1). \end{aligned}$$

6. Legyen φ lineáris transzformációja az $\mathbb{R}^3$ vektortérnek, amely az $x = (x_1, x_2, x_3)$ vektort a $\varphi(x)$ vektorba alakítja át,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

– a ψ lineáris transzformáció mátrixa ugyan ezen tér a_1, a_2, a_3 bázisában. Keresse meg az $\mathbb{R}^3$ tér kanonikus bázisában a $\varphi, \psi, \varphi + \psi, \varphi - \psi, \varphi\psi, \psi\varphi$ lineáris transzformációk mátrixait!

$$\varphi(x) = (\chi_1 - \chi_2 - \chi_3, -\chi_1 + \chi_2 - \chi_3, -\chi_1 - \chi_2 + \chi_3);$$

$$a_1 = (2, 1, 1), a_2 = (1, 1, 3), a_3 = (3, 2, 3).$$

7. Legyen A – az $\mathbb{R}^4$ vektortér φ lineáris transzformációjának mátrixa a c_1, c_2, c_3, c_4 bázisban. Határozza meg az $\text{Im}\varphi$ és a $\text{Ker}\varphi$ alterek bázisát és dimenzióját! Győződjön meg arról, hogy $\dim \text{Im}\varphi + \dim \text{Ker}\varphi = \dim \mathbb{R}^4$!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. Legyen A – az $\mathbb{R}^4$ vektortér φ lineáris transzformáció mátrixa a kanonikus bázisban. Keresse meg a $\varphi^2, \varphi^3, \varphi^4$ lineáris transzformációk mátrixait ebben a bázisban és győződjön meg arról, hogy $f(\varphi) = 0$, ahol f – a φ transzformáció karakterisztikus polinomja! Határozza meg a φ transzformáció összes sajátértékét és összes sajátvektorát!

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

9. Az $\mathbb{R}^4$ euklideszi tér L altere az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak a tere. Keresse meg az L altern $L^\perp$ ortogonális komplementerét az $\mathbb{R}^4$ térben és a c vektor vetületét az L alterre és az ő $L^\perp$ ortogonális komplementerére!

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, & c = (2, 8, 6, 4). \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0; \end{cases}$$

10. Az $\mathbb{R}^4$ euklideszi térben ortonormalizálja az a_1, a_2, a_3, a_4 vektorrendszert!

$$a_1 = (-1, 1, 1, 1), a_2 = (1, 1, 0, 0), a_3 = (0, 1, 0, 1), a_4 = (0, 0, 1, 1).$$

11. A $C_{[\alpha, \beta]}^2$ euklideszi térben, mely az összes olyan függvény tere, melyek négyzete integrálható, ortogonalizálja a $p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2, p_4 = x^3$ polinomok rendszerét (a $C_{[\alpha, \beta]}^2$ tér két tetszőleges f és g függvényének skaláris szorzata a következő módon határozható meg:

$$(f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx \text{)!}$$

$$\alpha = -3, \quad \beta = -2.$$

12. Keresse meg megfelelően a valós és komplex számok teste felett az $f(x_1, x_2, x_3)$ kvadratikus alak normálalakját valamint az ismeretlenek transzformációit, amelyek ehhez az alakhoz vezetnek az $\bar{f}$ alakot!

$$f = -x_1^2 + 3x_2^2 - 3x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_2x_3 - 4x_1x_3.$$

13. A $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X^T A X$ kvadratikus alak, amely az A mátrixszal van megadva, pozitív definit, negatív definit vagy indefinit?

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Változat

1. Bizonyítsa be, hogy az a_1, a_2, a_3, a_4 vektorrendszer az $\mathbb{R}^4$ vektoriális tér bázisa lesz a valós számok $\mathbb{R}$ teste fölött! Keresse meg az $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) \in \mathbb{R}^4$ vektor koordinátáinak képleteit ebben a bázisban! Milyenek lesznek a $c \in \mathbb{R}^4$ vektor koordinátái az a_1, a_2, a_3, a_4 bázisban?

$$a_1 = (4, -1, 3, 2), a_2 = (2, 3, 1, 5), a_3 = (2, -3, 1, 1), a_4 = (2, 3, 2, 1), c = (2, -4, 3, 7).$$

2. Bizonyítsa be, hogy az a_1, a_2, a_3 és a b_1, b_2, b_3 vektorrendszerek az $\mathbb{R}^3$ vektoriális tér bázisai! Keresse meg az átmeneti mátrixot és a koordináták átalakításának képleteit az egyik bázisból való átmenet során a másikba. Ezután határozza meg a $c = (1, 2, 3)$ vektor koordinátáit mindkét bázisban, és ellenőrizze le a kapott eredményt a koordináták átalakítási képleteinek segítségével!

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, -1, 2), & a_2 &= (2, 1, 1), & a_3 &= (3, 0, 2); \\ b_1 &= (1, 1, 1), & b_2 &= (-2, -1, 1), & b_3 &= (1, 0, 3). \end{aligned}$$

3. Keresse meg az $L_1 + L_2$ összeg dimenzióját és bázisát, valamint az $\mathbb{R}^5$ tér L_1 és L_2 lineáris altereinek $L_1 \cap L_2$ metszetét, ahol L_1 – az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak tere, $L_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$ – az a_1, a_2 vektorrendszerből előállított lineáris burok!

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 0; \end{cases} \quad \begin{aligned} a_1 &= (1, 1, 1, 1, 1), \\ a_2 &= (0, -7, 6, 2, 2). \end{aligned}$$

4. A $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezés minden $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$ vektort $\varphi(x) \in \mathbb{R}^3$ vektorba alakít át (képez). Bizonyítsa be, hogy a φ lineáris transzformáció lesz! Keresse meg a vektor képének koordinátáinak képletét az $\mathbb{R}^3$ tér e_1, e_2, e_3 kanonikus bázisában; az $a = (1, 1, 1)$ és e_1, e_2, e_3 vektorok képét és a φ transzformáció mátrixát ugyan ebben a bázisban!

$$\varphi(x) = (\chi_1 - \chi_2 + 2\chi_3, \chi_1 - \chi_2, \chi_1 + 2\chi_2).$$

5. Határozza meg az $\mathbb{R}^3$ vektortér azon φ lineáris transzformációját, amely az a_1, a_2, a_3 bázis vektorokat megfelelően ezen tér b_1, b_2, b_3 vektoraiba alakítja át! Keresse meg a φ transzformáció mátrixát az a_1, a_2, a_3 bázisban!

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, 1, 1), & a_2 &= (0, -1, 2), & a_3 &= (1, 0, 2); \\ b_1 &= (1, -2, 1), & b_2 &= (-1, 2, -1), & b_3 &= (1, 0, 1). \end{aligned}$$

6. Legyen φ lineáris transzformációja az $\mathbb{R}^3$ vektortérnek, amely az $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$ vektort a $\varphi(x)$ vektorba alakítja át,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

– a ψ lineáris transzformáció mátrixa ugyan ezen tér a_1, a_2, a_3 bázisában. Keresse meg az $\mathbb{R}^3$ tér kanonikus bázisában a $\varphi, \psi, \varphi + \psi, \varphi - \psi, \varphi\psi, \psi\varphi$ lineáris transzformációk mátrixait!

$$\varphi(x) = (\chi_1 - \chi_2, \chi_1 + \chi_2 + \chi_3, \chi_1 + 2\chi_2 - \chi_3);$$

$$a_1 = (-1, 1, -1), a_2 = (1, 0, 2), a_3 = (0, 1, 2).$$

7. Legyen A – az $\mathbb{R}^4$ vektortér φ lineáris transzformációjának mátrixa a c_1, c_2, c_3, c_4 bázisban. Határozza meg az $\text{Im}\varphi$ és a $\text{Ker}\varphi$ alterek bázisát és dimenzióját! Győződjön meg arról, hogy $\dim \text{Im}\varphi + \dim \text{Ker}\varphi = \dim \mathbb{R}^4$!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Legyen A – az $\mathbb{R}^4$ vektortér φ lineáris transzformáció mátrixa a kanonikus bázisban. Keresse meg a $\varphi^2, \varphi^3, \varphi^4$ lineáris transzformációk mátrixait ebben a bázisban és győződjön meg arról, hogy $f(\varphi) = 0$, ahol f – a φ transzformáció karakterisztikus polinomja! Határozza meg a φ transzformáció összes sajátértékét és összes sajátvektorát!

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 7 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Az $\mathbb{R}^4$ euklideszi tér L altere az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak a tere. Keresse meg az L altér $L^\perp$ ortogonális komplementerét az $\mathbb{R}^4$ térben és a c vektor vetületét az L altérre és az ő $L^\perp$ ortogonális komplementerére!

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 0; \end{cases} \quad c = (6, 2, 3, 0).$$

10. Az $\mathbb{R}^4$ euklideszi térben ortonormalizálja az a_1, a_2, a_3, a_4 vektorrendszert!

$$a_1 = (1, 2, 1, 1), a_2 = (2, -1, 1, -1), a_3 = (1, 1, 2, 0), a_4 = (1, 1, 0, 0).$$

11. A $C_{[\alpha, \beta]}^2$ euklideszi térben, mely az összes olyan függvény tere, melyek négyzete integrálható, ortogonalizálja a $p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2, p_4 = x^3$ polinomok rendszerét (a $C_{[\alpha, \beta]}^2$ tér két tetszőleges f és g függvényének skaláris szorzata a következő módon határozható meg:

$$(f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx \text{)!}$$

$$\alpha = -1, \quad \beta = 1.$$

12. Keresse meg megfelelően a valós és komplex számok teste felett az $f(x_1, x_2, x_3)$ kvadratikus alak normálalakját valamint az ismeretlenek transzformációit, amelyek ehhez az alakhoz vezetnek az f alakot!

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 - 8x_1x_2 + 4x_2x_3 + 2x_1x_3.$$

13. A $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X^T A X$ kvadratikus alak, amely az A mátrixszal van megadva, pozitív definit, negatív definit vagy indefinit?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

8. Változat

1. Bizonyítsa be, hogy az a_1, a_2, a_3, a_4 vektorrendszer az $\mathbb{R}^4$ vektoriális tér bázisa lesz a valós számok $\mathbb{R}$ teste fölött! Keresse meg az $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) \in \mathbb{R}^4$ vektor koordinátáinak képleteit ebben a bázisban! Milyenek lesznek a $c \in \mathbb{R}^4$ vektor koordinátái az a_1, a_2, a_3, a_4 bázisban?

$$a_1 = (2, 1, 3, 1), a_2 = (5, 2, 2, 5), a_3 = (3, 1, 6, 0), a_4 = (0, 6, 0, 7), c = (0, -6, -5, -11).$$

2. Bizonyítsa be, hogy az a_1, a_2, a_3 és a b_1, b_2, b_3 vektorrendszerek az $\mathbb{R}^3$ vektoriális tér bázisai! Keresse meg az átmeneti mátrixot és a koordináták átalakításának képleteit az egyik bázisból való átmenet során a másikba. Ezután határozza meg a $c = (1, 2, 3)$ vektor koordinátáit mindkét bázisban, és ellenőrizze le a kapott eredményt a koordináták átalakítási képleteinek segítségével!

$$\begin{aligned} a_1 &= (6, 4, -1), & a_2 &= (1, -2, 2), & a_3 &= (9, 3, 1); \\ b_1 &= (-3, 7, 8), & b_2 &= (2, 1, 3), & b_3 &= (0, -2, -3). \end{aligned}$$

3. Keresse meg az $L_1 + L_2$ összeg dimenzióját és bázisát, valamint az $\mathbb{R}^5$ tér L_1 és L_2 lineáris altereinek $L_1 \cap L_2$ metszetét, ahol L_1 – az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak tere, $L_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$ – az a_1, a_2 vektorrendszerből előállított lineáris burok!

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0; \end{cases} \quad \begin{aligned} a_1 &= (1, 1, 1, 1, 1), \\ a_2 &= (3, -6, 1, 7, 3). \end{aligned}$$

4. A $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezés minden $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$ vektort $\varphi(x) \in \mathbb{R}^3$ vektorba alakít át (képez). Bizonyítsa be, hogy a φ lineáris transzformáció lesz! Keresse meg a vektor képének koordinátáinak képletét az $\mathbb{R}^3$ tér e_1, e_2, e_3 kanonikus bázisában; az $a = (1, 1, 1)$ és e_1, e_2, e_3 vektorok képét és a φ transzformáció mátrixát ugyan ebben a bázisban!

$$\varphi(x) = (\chi_1 + 2\chi_2 - \chi_3, 2\chi_1 - \chi_2 + \chi_3, \chi_1 + 2\chi_2 - \chi_3).$$

5. Határozza meg az $\mathbb{R}^3$ vektortér azon φ lineáris transzformációját, amely az a_1, a_2, a_3 bázis vektorokat megfelelően ezen tér b_1, b_2, b_3 vektoraiba alakítja át! Keresse meg a φ transzformáció mátrixát az a_1, a_2, a_3 bázisban!

$$\begin{aligned} a_1 &= (2, 3, 5), & a_2 &= (0, 1, 2), & a_3 &= (1, 0, 0); \\ b_1 &= (1, 1, 1), & b_2 &= (1, 1, -1), & b_3 &= (2, 1, 2). \end{aligned}$$

6. Legyen φ lineáris transzformációja az $\mathbb{R}^3$ vektortérnek, amely az $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$ vektort a $\varphi(x)$ vektorba alakítja át,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

– a ψ lineáris transzformáció mátrixa ugyan ezen tér a_1, a_2, a_3 bázisában. Keresse meg az $\mathbb{R}^3$ tér kanonikus bázisában a $\varphi, \psi, \varphi + \psi, \varphi - \psi, \varphi\psi, \psi\varphi$ lineáris transzformációk mátrixait!

$$\varphi(x) = (\chi_2 + 2\chi_3, 2\chi_3 - \chi_1, 3\chi_1 - \chi_2);$$

$$a_1 = (1, 2, 1), a_2 = (0, 1, 1), a_3 = (1, 1, 1).$$

7. Legyen A – az $\mathbb{R}^4$ vektortér φ lineáris transzformációjának mátrixa a c_1, c_2, c_3, c_4 bázisban. Határozza meg az $\text{Im}\varphi$ és a $\text{Ker}\varphi$ alterek bázisát és dimenzióját! Győződjön meg arról, hogy $\dim \text{Im}\varphi + \dim \text{Ker}\varphi = \dim \mathbb{R}^4$!

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & -1 & -5 \\ -1 & -2 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Legyen A – az $\mathbb{R}^4$ vektortér φ lineáris transzformáció mátrixa a kanonikus bázisban. Keresse meg a $\varphi^2, \varphi^3, \varphi^4$ lineáris transzformációk mátrixait ebben a bázisban és győződjön meg arról, hogy $f(\varphi) = 0$, ahol f – a φ transzformáció karakterisztikus polinomja! Határozza meg a φ transzformáció összes sajátértékét és összes sajátvektorát!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. Az $\mathbb{R}^4$ euklideszi tér L altere az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak a tere. Keresse meg az L altér $L^\perp$ ortogonális komplementerét az $\mathbb{R}^4$ térben és a c vektor vetületét az L altérre és az ő $L^\perp$ ortogonális komplementerére!

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, & c = (-5, -11, 3, 5). \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 14x_3 + 3x_4 = 0; \end{cases}$$

10. Az $\mathbb{R}^4$ euklideszi térben ortonormalizálja az a_1, a_2, a_3, a_4 vektorrendszert!

$$a_1 = (0, 0, 1, -1), a_2 = (0, 1, -1, 1), a_3 = (1, 1, -1, 1), a_4 = (1, 1, 1, 1).$$

11. A $C_{[\alpha, \beta]}^2$ euklideszi térben, mely az összes olyan függvény tere, melyek négyzete integrálható, ortogonalizálja a $p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2, p_4 = x^3$ polinomok rendszerét (a $C_{[\alpha, \beta]}^2$ tér két tetszőleges f és g függvényének skaláris szorzata a következő módon határozható meg:

$$(f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx \text{)!}$$

$$\alpha = -2, \quad \beta = 2.$$

12. Keresse meg megfelelően a valós és komplex számok teste felett az $f(x_1, x_2, x_3)$ kvadratikus alak normálalakját valamint az ismeretlenek transzformációit, amelyek ehhez az alakhoz vezetnek az $\bar{f}$ alakot!

$$f = -2x_1^2 - 2x_2^2 - 8x_1x_2 - 4x_2x_3.$$

13. A $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X^T A X$ kvadratikus alak, amely az A mátrixszal van megadva, pozitív definit, negatív definit vagy indefinit?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

9. Változat

1. Bizonyítsa be, hogy az a_1, a_2, a_3, a_4 vektorrendszer az $\mathbb{R}^4$ vektoriális tér bázisa lesz a valós számok $\mathbb{R}$ teste fölött! Keresse meg az $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) \in \mathbb{R}^4$ vektor koordinátáinak képleteit ebben a bázisban! Milyenek lesznek a $c \in \mathbb{R}^4$ vektor koordinátái az a_1, a_2, a_3, a_4 bázisban?

$$a_1 = (4, 3, 2, 1), a_2 = (-1, 3, 3, 3), a_3 = (2, 1, 2, 1), a_4 = (1, 5, 0, 1), c = (-1, -1, 2, 2).$$

2. Bizonyítsa be, hogy az a_1, a_2, a_3 és a b_1, b_2, b_3 vektorrendszerek az $\mathbb{R}^3$ vektoriális tér bázisai! Keresse meg az átmeneti mátrixot és a koordináták átalakításának képleteit az egyik bázisból való átmenet során a másikba. Ezután határozza meg a $c = (1, 2, 3)$ vektor koordinátáit mindkét bázisban, és ellenőrizze le a kapott eredményt a koordináták átalakítási képleteinek segítségével!

$$\begin{aligned} a_1 &= (4, 3, 2), & a_2 &= (1, 1, 3), & a_3 &= (2, 2, 5); \\ b_1 &= (5, 4, 3), & b_2 &= (2, 2, 1), & b_3 &= (1, 6, -1). \end{aligned}$$

3. Keresse meg az $L_1 + L_2$ összeg dimenzióját és bázisát, valamint az $\mathbb{R}^5$ tér L_1 és L_2 lineáris altereinek $L_1 \cap L_2$ metszetét, ahol L_1 – az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak tere, $L_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$ – az a_1, a_2 vektorrendszerből előállított lineáris burok!

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 0, \\ 4x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 = 0; \end{cases} \quad \begin{aligned} a_1 &= (1, 0, 1, 0, 1), \\ a_2 &= (1, 3, 7, 9, -10). \end{aligned}$$

4. A $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezés minden $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$ vektort $\varphi(x) \in \mathbb{R}^3$ vektorba alakít át (képez). Bizonyítsa be, hogy a φ lineáris transzformáció lesz! Keresse meg a vektor képének koordinátáinak képletét az $\mathbb{R}^3$ tér e_1, e_2, e_3 kanonikus bázisában; az $a = (1, 1, 1)$ és e_1, e_2, e_3 vektorok képét és a φ transzformáció mátrixát ugyan ebben a bázisban!

$$\varphi(x) = (\chi_2 + 4\chi_3, \chi_1 + \chi_2 - 2\chi_3, 2\chi_2 - 2\chi_3).$$

5. Határozza meg az $\mathbb{R}^3$ vektortér azon φ lineáris transzformációját, amely az a_1, a_2, a_3 bázis vektorokat megfelelően ezen tér b_1, b_2, b_3 vektoraiba alakítja át! Keresse meg a φ transzformáció mátrixát az a_1, a_2, a_3 bázisban!

$$\begin{aligned} a_1 &= (2, 0, 3), & a_2 &= (4, 1, 5), & a_3 &= (3, 1, 2); \\ b_1 &= (1, 2, -1), & b_2 &= (4, 5, -2), & b_3 &= (1, -1, 1). \end{aligned}$$

6. Legyen φ lineáris transzformációja az $\mathbb{R}^3$ vektortérnek, amely az $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$ vektort a $\varphi(x)$ vektorba alakítja át,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

– a φ lineáris transzformáció mátrixa ugyan ezen tér a_1, a_2, a_3 bázisában. Keresse meg az $\mathbb{R}^3$ tér kanonikus bázisában a $\varphi, \psi, \varphi + \psi, \varphi - \psi, \varphi\psi, \psi\varphi$ lineáris transzformációk mátrixait!

$$\varphi(x) = (\chi_1 + 4\chi_2 + \chi_3, 2\chi_1 - 3\chi_3, \chi_2 - 3\chi_1);$$

$$a_1 = (3, 1, 1), a_2 = (1, 2, -1), a_3 = (2, 0, 1).$$

7. Legyen A – az $\mathbb{R}^4$ vektortér φ lineáris transzformációjának mátrixa a c_1, c_2, c_3, c_4 bázisban. Határozza meg az $\text{Im}\varphi$ és a $\text{Ker}\varphi$ alterek bázisát és dimenzióját! Győződjön meg arról, hogy $\dim \text{Im}\varphi + \dim \text{Ker}\varphi = \dim \mathbb{R}^4$!

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. Legyen A – az $\mathbb{R}^4$ vektortér φ lineáris transzformáció mátrixa a kanonikus bázisban. Keresse meg a $\varphi^2, \varphi^3, \varphi^4$ lineáris transzformációk mátrixait ebben a bázisban és győződjön meg arról, hogy $f(\varphi) = 0$, ahol f – a φ transzformáció karakterisztikus polinomja! Határozza meg a φ transzformáció összes sajátértékét és összes sajátvektorát!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Az $\mathbb{R}^4$ euklideszi tér L altere az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak a tere. Keresse meg az L altér $L^\perp$ ortogonális komplementerét az $\mathbb{R}^4$ térben és a c vektor vetületét az L altérre és az ő $L^\perp$ ortogonális komplementerére!

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0, & c = (-15, 29, 3, -5). \\ 4x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ -10x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 7x_4 = 0; \end{cases}$$

10. Az $\mathbb{R}^4$ euklideszi térben ortonormalizálja az a_1, a_2, a_3, a_4 vektorrendszert!

$$a_1 = (-1, 0, 0, 1), a_2 = (0, 1, 1, 1), a_3 = (1, 1, -1, -1), a_4 = (1, 0, -1, 0).$$

11. A $C_{[\alpha, \beta]}^2$ euklideszi térben, mely az összes olyan függvény tere, melyek négyzete integrálható, ortogonalizálja a $p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2, p_4 = x^3$ polinomok rendszerét (a $C_{[\alpha, \beta]}^2$ tér két tetszőleges f és g függvényének skaláris szorzata a következő módon határozható meg:

$$(f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx \text{)!}$$

$$\alpha = -2, \quad \beta = 0.$$

12. Keresse meg megfelelően a valós és komplex számok teste felett az $f(x_1, x_2, x_3)$ kvadratikus alak normálalakját valamint az ismeretlenek transzformációit, amelyek ehhez az alakhoz vezetnek az $\bar{f}$ alakot!

$$f = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 6x_2x_3 - 2x_1x_3.$$

13. A $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X^T A X$ kvadratikus alak, amely az A mátrixszal van megadva, pozitív definit, negatív definit vagy indefinit?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

10. Változat

1. Bizonyítsa be, hogy az a_1, a_2, a_3, a_4 vektorrendszer az $\mathbb{R}^4$ vektoriális tér bázisa lesz a valós számok $\mathbb{R}$ teste fölött! Keresse meg az $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ vektor koordinátáinak képleteit ebben a bázisban! Milyenek lesznek a $c \in \mathbb{R}^4$ vektor koordinátái az a_1, a_2, a_3, a_4 bázisban?

$$a_1 = (0, 5, 1, 3), a_2 = (2, 4, 0, 1), a_3 = (1, 3, 1, 5), a_4 = (3, 6, 0, 1), c = (3, 8, -2, -10).$$

2. Bizonyítsa be, hogy az a_1, a_2, a_3 és a b_1, b_2, b_3 vektorrendszerek az $\mathbb{R}^3$ vektoriális tér bázisai! Keresse meg az átmeneti mátrixot és a koordináták átalakításának képleteit az egyik bázisból való átmenet során a másikba. Ezután határozza meg a $c = (1, 2, 3)$ vektor koordinátáit mindkét bázisban, és ellenőrizze le a kapott eredményt a koordináták átalakítási képleteinek segítségével!

$$\begin{aligned} a_1 &= (8, 1, -1), & a_2 &= (3, 2, -3), & a_3 &= (4, -1, 2); \\ b_1 &= (1, 2, -1), & b_2 &= (4, 4, -1), & b_3 &= (3, 0, 2). \end{aligned}$$

3. Keresse meg az $L_1 + L_2$ összeg dimenzióját és bázisát, valamint az $\mathbb{R}^5$ tér L_1 és L_2 lineáris altereinek $L_1 \cap L_2$ metszetét, ahol L_1 – az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak tere, $L_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$ – az a_1, a_2 vektorrendszerből előállított lineáris burok!

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_4 + 2x_5 = 0, \\ -x_1 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 11x_4 + 6x_5 = 0; \end{cases} \quad \begin{aligned} a_1 &= (1, 0, 1, 0, 1), \\ a_2 &= (-11, 6, -6, 1, -3). \end{aligned}$$

4. A $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezés minden $x = (x_1, x_2, x_3)$ vektort $\varphi(x) \in \mathbb{R}^3$ vektorba alakít át (képez). Bizonyítsa be, hogy a φ lineáris transzformáció lesz! Keresse meg a vektor képének koordinátáinak képletét az $\mathbb{R}^3$ tér e_1, e_2, e_3 kanonikus bázisában; az $a = (1, 1, 1)$ és e_1, e_2, e_3 vektorok képét és a φ transzformáció mátrixát ugyan ebben a bázisban!

$$\varphi(x) = (2x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 - x_3, x_2 + x_3).$$

5. Határozza meg az $\mathbb{R}^3$ vektortér azon φ lineáris transzformációját, amely az a_1, a_2, a_3 bázis vektorokat megfelelően ezen tér b_1, b_2, b_3 vektoraiba alakítja át! Keresse meg a φ transzformáció mátrixát az a_1, a_2, a_3 bázisban!

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, 1, 1), & a_2 &= (1, 1, -1), & a_3 &= (2, 1, 2); \\ b_1 &= (1, 1, 1), & b_2 &= (1, 1, 1), & b_3 &= (1, 1, 0). \end{aligned}$$

6. Legyen φ lineáris transzformációja az $\mathbb{R}^3$ vektortérnek, amely az $x = (x_1, x_2, x_3)$ vektort a $\varphi(x)$ vektorba alakítja át,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

– a φ lineáris transzformáció mátrixa ugyan ezen tér a_1, a_2, a_3 bázisában. Keresse meg az $\mathbb{R}^3$ tér kanonikus bázisában a $\varphi, \psi, \varphi + \psi, \varphi - \psi, \varphi\psi, \psi\varphi$ lineáris transzformációk mátrixait!

$$\varphi(x) = (2x_2 - 2x_3, 2x_1 - 2x_3, -x_2 - x_1);$$

$$a_1 = (0, 1, -1), a_2 = (1, 2, -1), a_3 = (1, 1, -1).$$

7. Legyen A – az $\mathbb{R}^4$ vektortér φ lineáris transzformációjának mátrixa a c_1, c_2, c_3, c_4 bázisban. Határozza meg az $\text{Im}\varphi$ és a $\text{Ker}\varphi$ alterek bázisát és dimenzióját! Győződjön meg arról, hogy $\dim \text{Im}\varphi + \dim \text{Ker}\varphi = \dim \mathbb{R}^4$!

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -2 & -4 \\ 4 & -3 & 2 & -4 \\ 5 & -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

8. Legyen A – az $\mathbb{R}^4$ vektortér φ lineáris transzformáció mátrixa a kanonikus bázisban. Keresse meg a $\varphi^2, \varphi^3, \varphi^4$ lineáris transzformációk mátrixait ebben a bázisban és győződjön meg arról, hogy $f(\varphi) = 0$, ahol f – a φ transzformáció karakterisztikus polinomja! Határozza meg a φ transzformáció összes sajátértékét és összes sajátvektorát!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Az $\mathbb{R}^4$ euklideszi tér L altere az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak a tere. Keresse meg az L altér $L^\perp$ ortogonális komplementerét az $\mathbb{R}^4$ térben és a c vektor vetületét az L altérre és az ő $L^\perp$ ortogonális komplementerére!

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, & c = (14, -5, 1, -5). \\ -2x_1 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 0; \end{cases}$$

10. Az $\mathbb{R}^4$ euklideszi térben ortonormalizálja az a_1, a_2, a_3, a_4 vektorrendszert!

$$a_1 = (0, 1, 1, 1), a_2 = (1, -1, 2, 0), a_3 = (0, 0, 1, 1), a_4 = (1, 1, 1, 1).$$

11. A $C_{[\alpha, \beta]}^2$ euklideszi térben, mely az összes olyan függvény tere, melyek négyzete integrálható, ortogonalizálja a $p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2, p_4 = x^3$ polinomok rendszerét (a $C_{[\alpha, \beta]}^2$ tér két tetszőleges f és g függvényének skaláris szorzata a következő módon határozható meg:

$$(f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx \text{)!}$$

$$\alpha = -1, \quad \beta = 2.$$

12. Keresse meg megfelelően a valós és komplex számok teste felett az $f(x_1, x_2, x_3)$ kvadratikus alak normálalakját valamint az ismeretlenek transzformációit, amelyek ehhez az alakhoz vezetnek az $\bar{f}$ alakot!

$$f = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3 + 2x_1x_3.$$

13. A $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X^T A X$ kvadratikus alak, amely az A mátrixszal van megadva, pozitív definit, negatív definit vagy indefinit?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Irodalomjegyzék

1. *Fried Ervin* Algebra I. Elemi és lineáris algebra. – Budapest: Nemzeti tankönyvkiadó, 2000.
2. *D.K. Fagyev, I.Sz. Szominszkij* Felsőfokú algebrai példatár. – Budapest: Typotex, 2006.
3. *A.G. Kuros* Felsőbb algebra. – Budapest: Tankönyvkiadó, 1967.
4. *B. Bódi* Az algebra alapjai. – Ungvár: PoliPrint, 2010.
5. *Баранник В.Ф., Погоріляк Є.Я., Рудько В.П., Шапочка І.В.* Лінійна алгебра. – Ужгород: Ужгород. держ. ун-т, 2000.
6. *Гудивок П.М., Погоріляк Є.Я., Шапочка І.В.* Практикум з алгебри і теорії чисел для студентів першого курсу. – Ужгород: Ужгород. держ. ун-т, 2002.
7. Основи аналітичної геометрії та лінійної алгебри. Навчаль-ний посібник // Укл. *Пукальський І.Д., Перун Г.М.* – Чернівці:Рута, 2002. – 108 с.

Посібник з лінійної алгебри для математиків призначений для студентів I курсу Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці спеціальності А 4.04 Середня освіта (Математика) заочної форми навчання з метою організації контрольної роботи з курсу "Лінійна алгебра".

Посібник умовно поділений на дві частини: перший та другий семестр навчання, кожен з яких, містить приклад розв'язаного варіанту. Всього є 10 варіантів контрольних робіт з кожного семестру курсу "Лінійна алгебра".

Матеріал призначений для використання як навчально-методичний посібник з дисципліни "Лінійна алгебра".

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики
(протокол № 10 від «23» червня 2025 року)

Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості вищої освіти
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол №7 від 26 серпня 2025 року)

Рекомендовано до видання у електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол №8 від 28 серпня 2025 року)

Підготовлено до видання у електронній формі (PDF) кафедрою математики та інформатики з
Видавничим відділом Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II