

Кафедра математики та інформатики
Matematika és Informatika Tanszék

«ЛІНІЙНА АЛГЕБРА»
(МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДЛЯ ЛЕКЦІЙНИХ ЗАНЯТЬ)

(для студентів 1-го курсу спеціальності А 4.04 Середня освіта (Математика))

LINEÁRIS ALGEBRA

(Módszertani útmutató előadásokhoz)

Перший (бакалаврський) / Alapképzés (BA)
(ступінь вищої освіти / a felsőoktatás szintje)

A Osztály / A Oktatás
(галузь знань / képzési ág)

"Математика"
"Matematika"
(освітня програма / képzési program)



Берегове / Beregszász
2025 р. / 2025

Посібник з лінійної алгебри для математиків призначений для студентів I курсу Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці спеціальності А 4.04 Середня освіта (Математика) денної та заочної форми навчання з метою організації лекційних занять з курсу "Лінійна алгебра".

Матеріал призначений для використання як навчально-методичний посібник з дисципліни "Лінійна алгебра".

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики
(протокол № 10 від «23» червня 2025 року)

Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості вищої освіти
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол №7 від 26 серпня 2025 року)

Рекомендовано до видання у електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту імені Ференца
Ракоці II
(протокол №8 від 28 серпня 2025 року)

Підготовлено до видання у електронній формі (PDF) кафедрою математики та інформатики з
Видавничим відділом Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Укладач:

СТОЙКА МИРОСЛАВ ВІКТОРОВИЧ – доцент кафедри математики та інформатики
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Рецензенти:

БОРТОШ МАРІЯ ЮЛІЇВНА – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри
та диференціальних рівнянь ДВНЗ «УжНУ»;
МЕСАРОШ ЛІВІА ВАСИЛІВНА – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри
математики та інформатики ЗУІ.

Відповідальний за випуск:

Олександр ДОБОШ – начальник Видавничого відділу ЗУІ ім. Ф.Ракоці II

За зміст посібника відповідальність несуть розробники.

Видавництво: Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II (адреса: пл.
Кошута 6, м. Берегове, 90202. Електронна пошта: foiskola@kmf.uz.ua)

© Мирослав Стойка, 2025
© Кафедра математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II, 2025

A Lineáris algebra jegyzet a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola elsőéves, matematika szakos, nappali és levelező tagozatos hallgatói számára készült, és a Lineáris algebra című tantárgy előadásainak anyagát tartalmazza.

Az oktatási folyamatban történő felhasználását jóváhagyta
a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Matematika és Informatika Tanszéke
(2025. június 23, 10. számú jegyzőkönyv).

Megjelentetésre javasolta a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Minőségbiztosítási Tanácsa
(2025. augusztus 26, 7. számú jegyzőkönyv).

Elektronikus formában (PDF fájlformátumban) történő kiadásra javasolta
a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Tudományos Tanácsa
(2025. augusztus 28, 8. számú jegyzőkönyv).

Kiadásra előkészítette a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Matematika és Informatika Tanszéke és Kiadói Részlege.

Szerkesztő:

SZTOJKA MIROSZLÁV – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Matematika és Informatika Tanszékének docense

Szakmai lektorok:

BARTOS MÁRIA – fizika és matematika tudományok kandidátusa, docens, az
Ungvári Nemzeti Egyetem Algebra és Diferenciál Egyenletek Tanszékének docense;
MÉSZÁROS LÍVIA – fizika és matematika tudományok kandidátusa, II. Rákóczi
Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének docense.

A kiadásért felel:

DOBOS Sándor – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Kiadói Részlegének
vezetője

A tartalomért kizárólag a jegyzet szerkesztője felel.

Kiadó: a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola (cím: 90 202, Beregszász,
Kossuth tér 6. E-mail: foiskola@kmf.uz.ua)

© Sztojka Mirosláv, 2025

© A II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Matematika és Informatika Tanszéke, 2025

Tartalomjegyzék

1.	Halmazok. Halmazok leképezése.....	6
2.	Komplex számok. A komplex számok algebrai alakja	9
3.	A komplex számok trigonometrikus alakja	13
4.	Lineáris egyenletrendszerek. A Gauss-elimináció.....	16
5.	Permutációk. Transzpozíciók	19
6.	n -edrendű determinánsok. A determinánsok tulajdonságai	22
7.	Az aldetermináns és az elem komplementere. Determinánsok kiszámítása.....	25
8.	A Cramer-szabály.....	27
9.	Mátrix-műveletek. A mátrix inverze.....	29
10.	Az n -dimenziós számtani vektortér. Vektorrendszerek lineáris összefüggősége	32
11.	A mátrix rangja.....	35
12.	Lineáris egyenletrendszer. A Kronecker-Capelli tétel.....	37
13.	Homogén lineáris egyenletrendszerek	38
14.	Csoportok. Gyűrűk. Testek	40
15.	A polinomok gyűrűje	43
16.	A polinomok gyökei.....	47
17.	Irreducibilis polinomok. Polinomok a racionális számok teste felett.....	50
18.	A lineáris tér axiómái. A tér bázisa és dimenziója.....	53
19.	Átmeneti mátrix egyik bázisból a másikba	58
20.	Lineáris terek izomorfizmusa.....	60
21.	A lineáris tér alterei. Műveletek alterekkel.....	61
22.	Alterek szerinti mellékosztályok. Faktor-terek.....	63
23.	Lineáris terek lineáris leképezése.....	65
24.	Műveletek lineáris leképezésekkel	68
25.	Lineáris transzformáció.....	70
26.	A mátrix és a lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja.....	73
27.	Lineáris transzformáció sajátvektora és sajátértéke.....	75
28.	Euklideszi tér.....	77

29. Az euklideszi tér ortogonális transzformációja.....	81
30. Az euklideszi tér szimmetrikus transzformációja	83
31. Kvadratikus alak.....	85
32. Komplex kvadratikus alakok.....	89
33. Valós kvadratikus alakok	90
34. Pozitív definit valós kvadratikus alakok	91
Irodalomjegyzék	92

1. Halmazok. Halmazok leképezése

A matematikában valamely fogalmak elsődlegesek vagy meghatározhatatlanok. Az egyik ilyen fogalom közülük, a *halmaz* fogalma. A halmaz fogalma alatt objektumok tetszőleges összességét értjük, amelyeket a halmaz *elemeinek* nevezünk. Megemlíthetjük még az úgy nevezett *üres* halmazt, mely olyan halmaz, amely nem tartalmaz egyetlen elemet sem.

A halmazokat leggyakrabban a latin abc nagy betűivel jelöljük: $A, B, \dots, Z$, elemeiket pedig – kis betűkkel: $a, b, \dots, z$. Néhány fontosabb halmaz számára szabványos megjelölést fogadtak el. Így, az $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ betűk jelölik megfelelően a természetes számok halmazát, az egész számok halmazát, a racionális számok halmazát, és a valós számok halmazát. Az üres halmazt a következő szimbólum jelöli: $\emptyset$.

Azt a halmazt, amely véges számú elemekből áll, *végesnek* nevezünk. A véges X halmaz elemeinek számát a $|X|$ jelöli. A véges halmazok felírhatóak elemeinek felsorolása által; általában ezek az elemek kapcsos zárójelekbe íródnak. Például, az A az első három latin betű halmaza, a következőképpen írható fel $\{a, b, c\}$. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az a elem az A halmazhoz tartozik, és jelölése $a \in A$ vagy $A \ni a$. A $d \notin A$ felírás azt jelenti, hogy a d nem eleme az A halmaznak.

A B halmazt az A halmaz *részalmazának* nevezünk, ha a B halmaz összes eleme az A halmazhoz tartozik, és a következőképpen jelöljük: $B \subset A$ vagy $A \supset B$. Az üres halmaz, meghatározása alapján, bármely halmaz részalmaz.

Az A és B halmazokat *egyenlőknek* nevezünk (jelölése $A = B$), ha az A halmaz részalmaz a B -nek, és fordítva, a B is részalmaz a A -nak. Az $A \neq B$ felírás azt jelenti, hogy az A és B halmazok nem egyenlők.

Az A részalmazát a B halmaz *valódi részalmazának* nevezünk, ha $A \neq \emptyset$ és $A \neq B$.

Az $A \subset B$ részalmaz kiválasztásakor gyakran valamilyen tulajdonságot használnak, amelyet csak az A halmaz elemei elégítenek ki. Például, $\{n \in \mathbb{Z} | n = 2m \text{ bármely } m \in \mathbb{Z} \text{ számra}\}$ az összes páros egész szám halmaza.

Két halmaz *uniójának* egy olyan halmazt nevezünk, amely mindazokból az elemekből áll, amelyek hozzátartoznak a megadott halmazok közül legalább az egyikhez. Az A és B halmazok uniójának jelölése: $A \cup B$.

Két halmaz *metszetének* egy olyan halmazt nevezünk, amely mindazokból az elemekből áll, amelyek egyidejűleg mind a két halmazhoz tartoznak. Az A és B halmazok metszetének jelölése: $A \cap B$.

Az A és B halmazok *különbségének* egy olyan halmazt nevezünk, amelyek az A halmaz mindazon elemeiből áll, amelyek nem tartoznak a B halmazhoz. Az A és B halmazok különbségének jelölése: $A \setminus B$.

Legyen X és Y tetszőleges halmazok. Az $x \in X$ és $y \in Y$ elemekből álló *rendezett pároknak* az (x, y) kifejezést nevezzük. Az (a, b) és (c, d) rendezett párok egyenlők, ha $a = c$ és $b = d$. Két X és Y halmaz *Descartes-szorzatának* nevezzük az $x \in X$ és $y \in Y$ elemekből álló (x, y) rendezett párok összességének halmazát. Az X és Y halmazok *Descartes-szorzatának* jelölése: $X \times Y$.

Az $A \times B$ halmaz ρ részhalmazát *megfeleltetésnek* vagy *binér relációnak* nevezzük az A és B halmazok között. Ha $(a, b) \in \rho$, akkor azt mondjuk, hogy a b elem *megfelel* az a elemnek, vagy, hogy az a elem ρ relációban van a b elemmel. Az $(a, b) \in \rho$ helyett gyakran az apb kifejezést írjuk.

Azt a megfeleltetést, amely szerint az A halmaz bármely elemének megfeleltetünk egyetlen egy elemet a B halmazból, az A halmaz *leképezésének* nevezzük a B halmazba.

A halmazok leképezését általában a következő betűkkel jelöljük: $f, g, h, \dots$, és így írjuk: $f: A \rightarrow B$ vagy $A \xrightarrow{f} B$. Ezért azt mondjuk, hogy az A az f leképezés *értelmezési tartománya*, a B pedig az f leképezés *értékkészlete*.

Ha az f leképezés során az $a \in A$ elemnek a $b \in B$ elem felel meg, akkor a b elemet az a elem *képének* nevezzük, az a elemet pedig b elem *ősképe*nek (*eredeti képe*nek) nevezzük, és így jelöljük: $b = f(a)$.

Az $\text{Im} f = \{f(a) \mid a \in A\}$ halmazt az $f: A \rightarrow B$ leképezés *képének* nevezzük.

Az $f: A \rightarrow B$ leképezés során a $b \in B$ elem *teljes ősképe* az $f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$ halmazt nevezzük.

Az $f: A \rightarrow B$ leképezést *szűrjektívnek* nevezzük, ha $\text{Im} f = B$. A leképezést akkor nevezzük *injektívnek*, ha az A halmaz tetszőleges $a_1, a_2 \in A$ (ahol $a_1 \neq a_2$) különböző elemeinek képei is különbözőek, vagyis ha $f(a_1) \neq f(a_2)$. Végül az $f: A \rightarrow B$ leképezést *bijektívnek* nevezzük, ha az egyidejűleg szűrjektív és injektív is.

Az $f: A \rightarrow B$ és $g: A \rightarrow B$ leképezések $f = g$ *egyenlősége* azt jelenti, hogy bármely $a \in A$ elemre igaz az $f(a) = g(a)$ egyenlőség.

Az A halmaz önmagára való *azonos* vagy *egyenértékű* leképezésének az olyan $e_A: A \rightarrow A$ leképezést nevezzük, hogy bármely $a \in A$ elemre $e_A(a) = a$.

Tétel 1. Legyen $f: A \rightarrow B$ egy bijektív leképezés. Akkor az f^{-1} megfeleltetés (amely a következő szabály szerint van megadva: minden $b \in B$ elemnek megfelel az ő $f^{-1}(b)$ ősképe) a B halmaz A halmazba való bijektív leképezése lesz.

A fent említett tétel értelmében az $f^{-1}: B \rightarrow A$ leképezést az f leképezés fordítottjának nevezzük.

Két leképezés $f: A \rightarrow B$ és $g: B \rightarrow C$ szorzatának vagy kompozíciójának a $gf: A \rightarrow C$ leképezést nevezzük, amely bármely $a \in A$ elemre a $gf(a) = g(f(a))$ feltétellel van meghatározva.

Nyilvánvaló, hogy egy tetszőleges $f: A \rightarrow B$ leképezés számára

$$f e_A = f, \quad e_B f = f.$$

Tétel 2. Ha az $f: A \rightarrow B$ és $g: B \rightarrow A$ tetszőleges leképezések, melyek számára $gf = e_A$, akkor f injektív, g pedig szürjektív leképezés lesz.

Tétel 3. Az $f: A \rightarrow B$ leképezés akkor és csak akkor bijektív, ha létezik egy olyan $g: B \rightarrow A$ leképezés, hogy $gf = e_A$ és $fg = e_B$.

Tétel 4. A leképezések szorzata kielégíti az asszociativitás törvényét. Tehát tetszőleges három leképezésre $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, $h: C \rightarrow D$ teljesül a $h(gf) = (hg)f$ egyenlőség.

2. Komplex számok. A komplex számok algebrai alakja

Legyen $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a valós számok halmazának Descartes-szorzata önmagára. Mint ahogy korábban is (lásd. 1. fejezetet) figyelembe vesszük, hogy az (a, b) és (c, d) párokat, akkor tekintjük egyenlőknek egymással, ha $a = c$ és $b = d$, és ebben az esetben felírhatjuk a következőt:

$$(a, b) = (c, d). \quad (1)$$

Két tetszőleges $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$ pár *összegének* nevezzük a $\mathbb{C}$ halmazhoz tartozó következő formában felírt párt:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d). \quad (2)$$

Két tetszőleges $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$ pár *szorzatának* nevezzük a $\mathbb{C}$ halmazhoz tartozó következő alakban felírt párt:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc). \quad (3)$$

Tétel 1. *Tetszőleges $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{C}$ párok számára igazak a következő egyenlőségek:*

$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &= (c, d) + (a, b), \\ [(a, b) + (c, d)] + (e, f) &= (a, b) + [(c, d) + (e, f)], \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (c, d) \cdot (a, b), \\ [(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f) &= (a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)], \\ (a, b) \cdot [(c, d) + (e, f)] &= (a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (e, f). \end{aligned}$$

Ezek szerint a $\mathbb{C}$ halmazon meghatároztuk az összeadás és szorzás két algebrai műveletét, melyek ugyanolyan tulajdonságokkal rendelkeznek, mint a valós és racionális számok halmazának elmeire vonatkozó összeadás és szorzás műveletek, tehát mindkettő kommutatív, asszociatív és érvényes rájuk a disztributivitás törvénye.

Nullás párnak nevezzük a $\mathbb{C}$ halmazban az olyan (x, y) párt, amely tetszőleges $(a, b) \in \mathbb{C}$ párra kielégíti az $(a, b) + (x, y) = (a, b)$ egyenlőséget.

Egységpárnak nevezzük a $\mathbb{C}$ halmazban az olyan (x, y) párt, amely tetszőleges $(a, b) \in \mathbb{C}$ párra kielégíti az $(a, b) \cdot (x, y) = (a, b)$ egyenlőséget.

A párok összegének és szorzatának egyenlőségeire vonatkozó meghatározásaiból következik, hogy a $(0, 0)$ és $(1, 0)$ párok megfelelően az egyetlen nullás és egységpár a $\mathbb{C}$ halmazban. Ezek a párok hasonló tulajdonságokkal rendelkeznek, mint a nulla és az egy számok a racionális és valós számok halmazában.

Az $(a, b) \in \mathbb{C}$ pár *ellentétes párjának* nevezzük az olyan $(x, y) \in \mathbb{C}$ párt, amelyre $(a, b) + (x, y) = (0, 0)$. Az (a, b) pár ellentétes párját a következővel jelöljük: $-(a, b)$.

Az $(a, b) \in \mathbb{C}$ pár *inverz párjának* nevezzük az olyan $(x, y) \in \mathbb{C}$ párt, amelyre $(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0)$. Az (a, b) pár inverz párját a következővel jelöljük: $(a, b)^{-1}$.

Tétel 2. A $\mathbb{C}$ halmaz tetszőleges (a, b) párjára egyetlen ellentétes pár létezik, továbbá $-(a, b) = (-a, -b)$. A $\mathbb{C}$ halmaz tetszőleges nem nullás (a, b) párjára egyetlen inverz pár létezik, továbbá $(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2} \right)$.

A valós számok összes rendezett párjainak $\mathbb{C}$ halmazát, melyen meghatároztuk a párok összeadásának és szorzásának műveletét, melyek a (2), (3) képletek által megadottak, a *komplex számok halmazának* nevezzük, ezen halmaz elemeit pedig *komplex számoknak*.

A 2. tételből az következik, hogy a komplex számok összeadásának és a szorzásának műveleteire léteznek ellentétes műveletek. Ezeket megfelelően *kivonásnak* és *osztásnak* fogjuk nevezni és a következőképpen fejezhetők ki:

$$(a, b) - (c, d) = (a, b) + [-(c, d)] ,$$

$$\frac{(a, b)}{(c, d)} = (a, b) \cdot (c, d)^{-1} ((c, d) \neq 0) .$$

Megvizsgáljuk az $R = \{(a, 0) | a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ részhalmazt. Minden $(a, 0)$ komplex számnak ebből a halmazból megfeleltetünk egy valós a számot $((a, 0) \rightarrow a)$. Nyilvánvaló, hogy ez a megfeleltetés az R halmaz bijektív leképezése az $\mathbb{R}$ halmazba és tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ számokra

$$(a, 0) + (b, 0) \rightarrow a + b , \quad (a, 0) \cdot (b, 0) \rightarrow a \cdot b .$$

Tehát az $(a, 0)$ alakú komplex számok, hasonlóan a valós számokhoz, összeadhatóak és összeszorozhatóak egymással. Tehát a vizsgált R részhalmaz az algebrai tulajdonságait tekintve semmivel sem különbözik a valós számok $\mathbb{R}$ halmazától. Ez pedig engedélyt nyújt az $(a, 0)$ a komplex szám azonosítására a valós a számmal, vagyis értelemszerűen, hogy a komplex számok halmaza a valós számok halmazát mint részhalmazt tartalmazza.

Most megvizsgáljuk a $(0, 1)$ komplex számot és megkeressük a négyzetét: $(0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$. Végeredményül a $(-1, 0)$ komplex számot kaptuk, amely a -1 valós számnak felel meg. Ezek szerint, a valós számok halmazától eltérően a komplex számok halmazában az $x^2 + 1 = 0$ egyenletnek létezik megoldása.

Amennyiben $(b, 0) \cdot (0, 1) = (0, b)$, akkor a tetszőleges (a, b) komplex szám felírható a következőképpen:

$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) . \tag{4}$$

Megjelöljük a $(0,1)$ komplex számot i -vel, melyet a következőkben *imagináriusnak* vagy *képzetes egységnek* fogunk nevezni, a (4) egyenlőséget pedig átírhatjuk a következő alakban: $(a, b) = a + b \cdot i$ vagy $(a, b) = a + bi$.

Az $a + bi$ jelölést a $z = (a, b)$ komplex szám *algebrai alakjának* nevezzük. Ebben a felírásban az a számot a z komplex szám *valós részének*, a b számot pedig a z komplex szám *képzetes részének* nevezzük.

Az $a - bi$ komplex számot az $a + bi$ komplex szám *komplex konjugáltjának* nevezzük. A z komplex szám komplex konjugáltjának jelölése $\bar{z}$.

Tétel 3. A komplex számok összeadása, kivonása, szorzása és osztása algebrai alakban felírható a következőképpen:

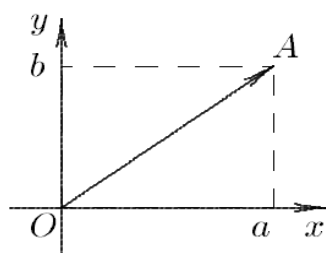
$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i,$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i \quad (c + di \neq 0).$$

Hasonlóan ahhoz, hogy a valós számokat egy számegyenes pontjaival lehet ábrázolni, a komplex számokat egy sík pontjai által lehet ábrázolni. Valóban, ha megvizsgálunk egy síkot, amelyen megadott az xOy koordináta-rendszer, akkor minden $a + bi$ komplex számra megfeleltethetünk ezen a síkon egy pontot (a, b) koordináttal. Ezt a megfeleltetést a $\mathbb{C}$ halmaz



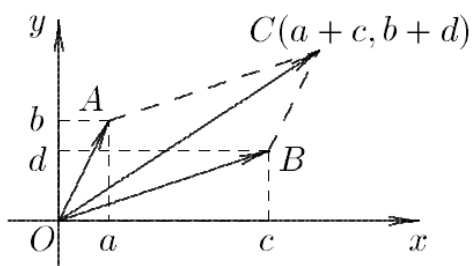
bijektív leképezésének nevezzük az xOy síkra.

Továbbá az xOy koordináta sík minden A pontját kapcsolatba lehet hozni egy $\overrightarrow{OA}$ vektorral (helyvektorral), amely a koordináta-rendszer kezdőpontjából indul ki, végpontja pedig az A pont. Ezért a komplex számok még egy mértani interpretációt engedélyeznek: minden $a + bi$ komplex szám mértanilag

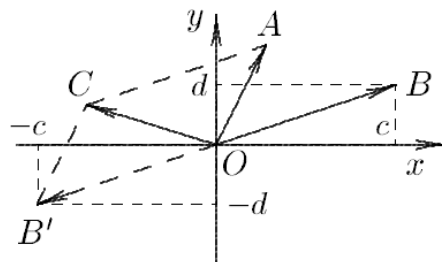
interpretálható, mint (a, b) koordinátákkal rendelkező $\overrightarrow{OA}$ vektor (1. ábra).

A komplex számok mértani interpretációja lehetővé teszi két komplex szám összeadásának és kivonásának szemléletes értelmezését. Legyen adott $\alpha = a + bi$ és $\beta = c + di$ két komplex szám. Az összegük az $\alpha + \beta = (a + c) + (b + d)i$ komplex szám lesz. Más részről pedig ismert, hogy a vektorok összeadása során a megfelelő koordináták adódnak össze. Ezért, ha az $\overrightarrow{OA}$ vektor koordinátái (a, b) (2. ábra), az $\overrightarrow{OB}$ vektor koordinátái pedig (c, d) , akkor az összegük

($\overrightarrow{OC}$ vektor) koordinátái $(a + c, b + d)$. Az $\overrightarrow{OC}$ vektor az α és β komplex számok összegének mértani ábrázolása lesz.



2. ábra

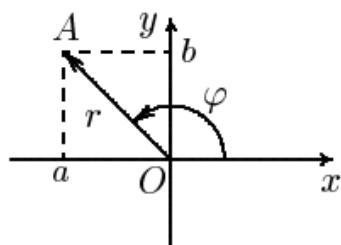


3. ábra

Amennyiben az $\alpha = a + bi$ és $\beta = c + di$ komplex számok különbsége az α komplex szám és a β komplex szám ellentettjének összege, akkor mértanilag ezt az (a, b) koordinátájú $\overrightarrow{OA}$ vektor és a $(-c, -d)$ koordinátájú $\overrightarrow{OB'}$ vektor összegeként ábrázolhatjuk (3. ábra), vagyis mint $(a - c, b - d)$ koordinátákkal rendelkező $\overrightarrow{OC}$ vektort.

3. A komplex számok trigonometrikus alakja

Legyen $\gamma = a + bi \neq 0$ komplex szám az (a, b) koordinátákkal rendelkező $\overrightarrow{OA}$ vektorral ábrázolva (4. ábra). Az $\overrightarrow{OA}$ vektor hosszát megjelöljük r -rel, a szöget pedig, amelyet a pozitív Ox tengellyel alkot φ -vel.



Akkor

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi \quad (1)$$

és a $\gamma = a + bi$ komplex szám felírható a következő formában

$$\gamma = a + bi = r \cos \varphi + (r \sin \varphi)i = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (2)$$

Az (1) képletből következik, hogy $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, a φ szög pedig a következő feltételekkel adható meg

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (3)$$

A komplex szám (2) formában felírt kifejezését a komplex szám *trigonometrikus alakjának* nevezzük. Az r valós számot a γ komplex szám *abszolút értékének* nevezzük és a következőképpen jelöljük: $|\gamma|$, a φ szöget pedig a γ komplex szám *argumentumának* nevezzük. A γ komplex szám argumentumát a következőképpen jelöljük: $\arg \gamma$.

Ha a komplex szám nem egyenlő nullával, akkor az abszolút értéke egy valós pozitív szám; hogyha $\gamma = a + bi = 0$, akkor az abszolút értéke egyenlő nullával. Bármelyik komplex szám abszolút értéke egyértelműen meghatározható.

Ha a $\gamma = a + bi$ komplex szám nem egyenlő nullával, akkor az argumentuma a (3) képletekkel határozható meg a szöghöz viszonyított pontosságával, 2π többszörössel. Ha $\gamma = 0$, akkor az argumentuma nem meghatározható.

Tétel 1. *Tetszőleges, trigonometrikus formában megadott, nem nulla $\alpha = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $\beta = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ komplex számokra igaz, hogy*

$$\alpha\beta = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \quad (4)$$

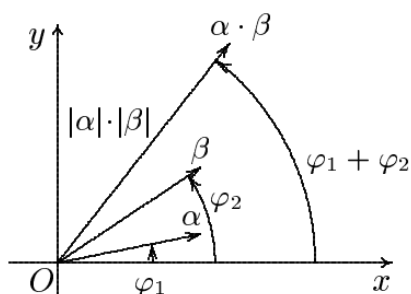
Tehát a komplex számok szorzatának abszolút értéke egyenlő az abszolút értékek szorzatával; a komplex számok szorzatának argumentuma egyenlő az argumentumok összegével (2π többszörös pontossággal).

Tétel 2. *Tetszőleges, trigonometrikus formában megadott, nem nulla $\alpha = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $\beta = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ komplex számokra igaz, hogy*

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \quad (5)$$

Tehát két komplex szám hányadosának abszolút értéke egyenlő a komplex számok az abszolút értékeinek hányadosával, két komplex szám hányadosának az argumentuma egyenlő az argumentumok különbségével.

A komplex számok szorzásának és osztásának mértani jelentése könnyen megmagyarázható.



5. ábra

Valóban, mivel α és β komplex számok szorzatát (hányadosát) ábrázoló vektort úgy kaphatjuk meg, ha az α számnak megfelelő vektort elforgatjuk az óramutató járásával ellentétesen (megegyezően) φ_2 szögre és $|\beta|$ -szorosan széthúzzuk (összenyomjuk) (lásd 5. ábra). Biztos, hogy az utolsó műveletet abban az esetben szükséges elvégezni, ha $|\beta| > 1$. Ha $|\beta| < 1$, akkor az α vektort $|\beta|$ -szorosan szét kell húzni (összenyomni).

Az (5) képletből az következik, hogy az $\alpha = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \neq 0$ komplex szám inverze a következő szám lesz

$$\alpha^{-1} = r^{-1}[\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)], \quad (6)$$

vagyis $|\alpha^{-1}| = |\alpha|^{-1}$, $\arg(\alpha^{-1}) = -\arg \alpha$.

Legyen n egy tetszőleges természetes szám. Az α komplex szám n -edik hatványának egy olyan ω komplex számot nevezünk, amelyet az α szám önmagára való n -szeres szorzatának eredményeként kapunk meg, vagyis

$$\omega = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_{n\text{-szer}}.$$

Az α komplex szám n -edik hatványát α^n -nel jelöljük. A természetes hatvány fogalmát kibővíthetjük az egész hatvány fogalmához. A definíciónak megfelelően $\alpha^0 = 1$, $\alpha^{-n} = (\alpha^{-1})^n$, ahol $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Tétel 3. Tetszőleges, trigonometrikus alakban megadott, nem nulla $\alpha = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ komplex számra, valamint tetszőleges n egész számra igaz a következő képlet

$$\alpha^n = r^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)). \quad (7)$$

A (7) képletet Moivre-képletének nevezzük.

Legyen n egy tetszőleges természetes szám, α pedig egy tetszőleges komplex szám. Az α szám n -edik gyökének egy olyan β komplex számot nevezünk, amelynek az n -edik hatványa egyenlő α -val, vagyis $\beta^n = \alpha$. Az α komplex szám n -edik gyökét a következőképpen jelöljük:

$\sqrt[n]{\alpha}$. Például, az $1, -1, i, -i$ számok az 1 szám negyedik gyökei. Vagyis $\sqrt[4]{1} = 1$ vagy $\sqrt[4]{1} = -1$ vagy $\sqrt[4]{1} = i$ vagy $\sqrt[4]{1} = -i$.

Megjegyzés 1. Ha α egy tetszőleges pozitív valós szám, akkor az $\sqrt[n]{\alpha}$ jelölés az α szám számtani n -edik gyökére is utalhat. Ezért a továbbiakban a nem egyértelmű szövegrészek esetében az $\sqrt[n]{\alpha}$ jelölésnél utalni fogunk annak értelmére.

Megjegyzés 2. Mivel az α komplex számnak több n -edik gyöke is létezhet, ezért az $\sqrt[n]{\alpha}$ jelölés néha az α szám összes n -edik gyökének halmazára utal.

Tétel 4. Tetszőleges, nem nulla α komplex számra és egy tetszőleges n természetes számra az α számnak pontosan n különböző n -edik gyöke létezik. Mivel, ha az α szám trigonometrikus alakja az $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, akkor

$$(\sqrt[n]{\alpha})_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1), \quad (8)$$

ahol $\sqrt[n]{r}$ az r szám számtani n -edik gyöke.

Következmény 1. Az 1 szám n -edik gyökei a következő képlet segítségével számíthatóak ki

$$(\sqrt[n]{1})_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Tétel 5. Legyenek $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ az 1 szám összes n -dik gyökei, β az α komplex szám valamely n -edik gyöke. Akkor a $\beta\varepsilon_0, \beta\varepsilon_1, \dots, \beta\varepsilon_{n-1}$ az α komplex szám összes n -edik gyökei.

Tétel 6. Az 1 szám két n -edik gyökének a szorzata az 1 szám gyöke lesz. Az 1 szám n -edik gyökének fordítottja szintén az 1 szám gyöke lesz. Az 1 szám n -edik gyökének tetszőleges hatványa szintén az 1 szám gyöke lesz.

Továbbá az 1 szám n -edik gyökeit n -edik egységgyököknek fogjuk nevezni.

Az n -edik egységgyöket *primitív n -edik egységgyököknek* nevezzük, ha az nem az m -edik egységgyök n -től kisebb természetes m szám esetére. Az ilyen egységgyökök létezését az 1. következmény eredményeként kapjuk meg, például, az $\varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ primitív n -edik egységgyök lesz.

Tétel 7. Legyen ε n -edik egységgyök. Az ε gyök akkor és csakis akkor lesz primitív n -edik egységgyök, ha az $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^{n-1}$ hatványai páronként különbözők, vagyis kimerítik az összes n -edik egységgyöket.

Tétel 8. Legyen ε primitív n -edik egységgyök. Az ε^k szám akkor és csak akkor lesz primitív n -edik egységgyök, ha k relatív prím n -hez.

Az utolsó tétel következményeként azt kapjuk, hogy a primitív n -edik egységgyökeinek száma egyenlő az n -től kisebb és az n -nel relatív prím természetes számok számával.

[illegible]

$$ahol\ r \leq n, 1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_r, a_{jk_k} \neq 0\ (j = 1, 2, \dots, t).$$

A (4) alakú egyenletrendszert *lépcsőzetes lineáris egyenletrendszernek* nevezzük.

Következmény 1. *A lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor határozott, ha ekvivalens a lépcsőzetes rendszerrel, amelyben az egyenletek száma megegyezik az ismeretlenek számával.*

5. Permutációk. Transzpozíciók

Legyen M egy véges halmaz, amely n elemből áll. Ezeket az elemeket átszámozzuk, vagyis az M halmaz mindegyik elemének megfeleltetünk egy $1, 2, \dots, n$ számot a természetes számok közül. Amennyiben az M halmaz elemeinek természete nem lényeges, vehetjük úgy is, hogy $M = \{1, 2, \dots, n\}$. Akkor az M halmaz elemeit számozási sorrendben kiírva az $1, 2, \dots, n$ természetes számok valamilyen elrendezését kapjuk. Például, az $1, 2, 3, 4$ számokat a következő módokon lehet sorba rendezni: $3, 2, 4, 1$ vagy $2, 4, 1, 3$. Az $1, 2, \dots, n$ számok bármely elrendezését n elem rendezésének nevezzük.

Jelölése $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ (olvasd: „ n -faktoriális”).

Tétel 1. Az n elem rendezéseinek száma $n!$ -sal egyenlő.

Ha valamely rendezés bármely két elemének megcseréljük az elhelyezkedését, a többit pedig a helyén hagyjuk, akkor kapunk egy újabb rendezést. Az ilyen átalakítását a rendezés *transzpozíciójának* nevezzük.

Tétel 2. Minden n elem $n!$ rendezését elrendezhetjük olyan sorrendben, hogy a soron következő rendezés mindegyikét az előző transzpozíciója által kapjuk meg, bármely rendezés kezdésével.

Következmény 1. Bármely n elem rendezése néhány transzpozíció segítségével megkapható ugyan ezen elemekből álló más tetszőleges rendezésből.

Az adott rendezés i és j elemei *inverziót* alkotnak, ha $i > j$, de az i sorszáma kisebb a j sorszámától. A rendezést *párosnak* nevezzük, ha elemei páros számú inverziót alkotnak, és *páratlannak* pedig az ellenkező esetben. Nyilvánvaló, hogy az $1, 2, \dots, n$ rendezés páros tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ számra, mivel inverzióinak száma nullával egyenlő.

Tétel 3. Bármely transzpozíció megváltoztatja a rendezés párosságát.

Következmény 2. Bármely $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ számra az n elemből álló páros rendezések száma megegyezik a páratlan rendezések számával, ami egyenlő $\frac{n!}{2}$ -vel.

Az $M = \{1, 2, \dots, n\}$ halmaz bijektív leképezését önmagára n -edrendű permutációnak nevezzük. A $\sigma: M \rightarrow M$ permutációt szétírt és szemléltetett formában a következőképpen ábrázoljuk:

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \dots & \sigma(i_n) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

ahol $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ egy n elemből álló tetszőleges rendezés. Nyilvánvaló, hogy a $(\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_n))$ szintén n elem rendezése. A σ permutációt az (1) forma szerint különböző módon lehet ábrázolni, többek között

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix},$$

ahol $j_k = \sigma(k)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Tétel 4. Az összes n -edrendű permutációk száma $n!$ -sal egyenlő.

n -ed rendű azonos (egység) permutációnak a következő permutációt nevezzük:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Tétel 5. Legyen σ tetszőleges n -edrendű permutáció. A σ permutáció (1) forma szerinti összes felírásában az első és második sorban a rendezések párossága vagy egybeesik, vagy különbözik.

Az n -edrendű permutációt *párosnak* nevezzük, ha az (1) forma szerinti felírásban a rendezések párossága az első és a második sorban egybeesnek, és *páratlannak* az ellenkező esetben.

Tétel 6. Bármely $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ számra az n -edrendű páros és páratlan permutációk száma egybeesik, ami egyenlő $\frac{n!}{2}$ - vel.

Legyen σ, δ – n -edrendű tetszőleges permutációk. Amennyiben σ, δ – az $M = \{1, 2, \dots, n\}$ halmaz bijektív leképezései önmagára, akkor a σ és δ leképezések szorzata szintén az M halmaz bijektív leképezése lesz önmagára. Ezért a $\sigma\delta$ szintén permutáció lesz, amit a σ és δ permutációk szorzatának nevezünk. Ha

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}, \quad \delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix},$$

akkor a szorzatuk

$$\sigma\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_{j_1} & i_{j_2} & \dots & i_{j_n} \end{pmatrix}.$$

Az összes n -edrendű permutáció halmazának jelölése S_n .

Tétel 7. Tetszőleges $\sigma, \delta, \mu \in S_n$ permutációkra teljesülnek a következő tulajdonságok:

- 1) $(\sigma\delta)\mu = \sigma(\delta\mu)$;
- 2) $e\sigma = \sigma e = \sigma$;
- 3) létezik egy olyan σ^{-1} permutáció, hogy $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e$.

A σ^{-1} permutációt a σ permutáció *inverzének* nevezzük. Nyilvánvaló, hogyha

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix},$$

akkor

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Azt a permutációt, amelyet az azonos permutációból az alsó sor egy transzpozíciója által kapjuk, *transzpozíciónak* nevezzük.

Tétel 8. *Bármely δ permutáció néhány transzpozíció szorzata lesz, valamint ezen transzpozíciók számának a párossága egybeesik a δ permutáció párosságával.*

Következmény 3. *Két azonos párossággal rendelkező permutáció szorzata páros permutáció, két különböző párossággal rendelkező permutáció szorzata pedig páratlan permutáció.*

Legyen μ egy n -edrendű permutáció és N_μ az $M = \{1, 2, \dots, n\}$ halmaz részhalmaza, amely mindazokból az $i \in M$ elemekből áll, amelyekre $\mu(i) \neq i$. A μ permutációt *ciklusnak* nevezzük, ha tetszőleges $i, j \in N_\mu$ elemekre létezik egy olyan természetes k szám, hogy $\mu^k(i) = j$. A $t = |N_\mu|$ számot a μ ciklus *hosszának* nevezzük. A μ ciklust az $(i_1 i_2 \dots i_t)$ szimbólummal jelöljük, ahol i_1 – az N_μ tetszőleges eleme és $i_q = \mu(i_{q-1})$ ($q = 2, 3, \dots, t$).

A $\mu, \delta \in S_n$ ciklusokat *idegeneknek* nevezzük, ha $N_\mu \cap N_\delta = \emptyset$.

Tétel 9. *Bármely permutáció a szorzók sorrendjének pontosságával egyértelműen felírható páronként idegen ciklusok szorzataként.*

Legyen k a ciklusok száma a $\mu \in S_n$ permutáció páronként idegen ciklusok szorzata általi felbontásában. A μ permutáció *csökkenésének* nevezzük a $|N_\mu| - k$ különbséget.

Tétel 10. *A permutáció párossága egybeesik ezen permutáció különbségének párosságával.*

6. n -edrendű determinánsok.

A determinánsok tulajdonságai

Hasonlóan, mint a 4. fejezetben megjelöljük F -el a következő halmazok egyikét: a $\mathbb{Q}$ racionális számok halmazát, az $\mathbb{R}$ valós számok halmazát vagy a $\mathbb{C}$ komplex számok halmazát. Az F halmaz elemeit pedig egyszerűen számoknak fogjuk nevezni.

Legyen adott az F halmazból vett elemekből álló valamely n -edrendű négyzetes mátrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Megvizsgáljuk ezen a mátrix n elemei szerinti lehetséges szorzatokat, mely elemek különböző sorokban és különböző oszlopokban helyezkednek el, vagyis a következő formájú szorzatokat

$$a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}, \quad (2)$$

ahol az $i_1, i_2, \dots, i_n$ indexek az $1, 2, 3, \dots, n$ számokból álló valamely permutációt alkotnak. Az ilyen szorzatok száma egybeesik az n elemből álló összes különböző permutáció számával, vagyis $n!$ -al.

Ha most megjelöljük σ -val a következő alakú permutációt

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix},$$

akkor a (2) szorzatot is átírhatjuk az $a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ alakban.

Az (1) mátrix n -edrendű determinánsának nevezzük az $n!$ tagok algebrai összegét, amelyek ezen mátrix minden sorának és oszlopának egyesével vett elemeinek különféle szorzatai (vagyis (2) alakú szorzatok), emellett minden ilyen tag plusz előjelet kap, ha a neki megfelelő permutáció páros, illetve mínuszt – az ellenkező esetben.

Ha az (1)-es mátrixot megjelöljük A -val, akkor mindezek után az A mátrix determinánsát a következőképpen fogjuk jelölni:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Tehát

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\text{inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}, \quad (4)$$

ahol, emlékezzünk vissza, hogy S_n az összes n -edrendű permutációk halmaza, $\text{inv}(\sigma)$ a σ permutáció inverzióinak a száma.

A következő alakú mátrixot

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (5)$$

az (1) *mátrix transzponáltjának* nevezzük. Megjelöljük az A mátrix transzponált mátrixát A^T -vel. Azt is mondhatjuk, hogy az A^T mátrixot az A mátrix *transzponálásának* segítségével kapjuk.

Tétel 1. *Az A mátrix determinánsa egyenlő az A^T transzponált mátrix determinánsával.*

Az 1. tételből az következik, hogy a mátrix soraihoz fűződő bármely állítás a mátrix determinánsáról igaz a mátrix oszlopai esetében is, és fordítva. Ezért a következő 2 – 9 tételeket csak a determináns soraira fogjuk megfogalmazni. Megjegyezzük azt is, hogy a determináns sorai vagy oszlopai alatt annak a mátrixnak a sorait vagy oszlopait értjük, amelyeknek a determinánsát számoljuk.

Tétel 2. *Ha a determináns egyik sora nullákból tevődik össze, akkor ez a determináns nullával egyenlő.*

Tétel 3. *Ha a determináns két sorának felcseréljük az elhelyezkedését, akkor a determináns előjele az ellenkezőjére változik.*

Tétel 4. *Az a determináns, amelyik két egyforma sort tartalmaz, nullával egyenlő.*

Tétel 5. *Ha a determináns valamely sorának mindegyik elemét megszorozzuk egy γ számmal, akkor maga a determináns is megszorozódik γ -val.*

Tétel 6. *Az a determináns, amelyik két egymáshoz arányos sort tartalmaz, nullával egyenlő.*

Tétel 7. *Ha egy n -edrendű determináns i -edik sorának minden egyes eleme két összeadandó összegeként írható fel*

$$a_{ij} = b_j + c_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

akkor ez a determináns egyenlő két determináns összegével, amelyeknek mindegyik sora, kivéve az i -ediket, – ugyanazok, mint az adott determinánsé, az i -edik sora pedig az egyik ilyen determinánsnak a b_j elemekből áll, a másik esetében pedig – a c_j elemekből.

A matematikai indukció módszerének felhasználásával, a 7. tétel általánosítható arra az esetre, amikor az i -edik sor minden eleme k összeadandó összegeként van felírva, ahol $k \geq 2$.

Mondhatjuk, hogy a (3) determináns i -edik sora a $k_1, \dots, k_s$ számú sorok *lineáris kombinációja*, ha léteznek olyan $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ számok, hogy

$$a_{ij} = \alpha_1 a_{k_1 j} + \cdots + \alpha_s a_{k_s j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Tétel 8. *Ha a determináns valamelyik sora egyenlő a többi sor lineáris kombinációjával, akkor a determináns nullával egyenlő.*

Tétel 9. *Ha a determináns egyik sorának elemeihez hozzáadjuk egy másik sor ugyanazon számmal megszorzott megfelelő elemeit, akkor a kapott determináns az adott determinánssal lesz egyenlő.*

7. Az aldetermináns és az elem komplementere.

Determinánsok kiszámítása

Legyen adott a következő n -edrendű determináns:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1)$$

Megvizsgálunk egy n -től kisebb k természetes számot. Legyen $i_1, i_2, \dots, i_k$ és $j_1, j_2, \dots, j_k$ – megfelelően az (1) determináns sorainak és oszlopainak sorszáma, melyek növekvő sorrendben állnak, vagyis

$$i_1 < i_2 < \cdots < i_k, \quad j_1 < j_2 < \cdots < j_k.$$

A következő k -adrendű determinánst

$$M = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix} \quad (2)$$

az $i_1, i_2, \dots, i_k$ számú soroktól és a $j_1, j_2, \dots, j_k$ számú oszlopoktól vett k -adrendű *aldeterminánsnak* nevezzük, vagy egyszerűen csak a megadott oszlopok és sorok metszetén elhelyezett aldeterminánsnak. Azt is mondhatjuk, hogy a (2) aldeterminánst az (1) determinánsból az $i_1, i_2, \dots, i_k$ -től eltérő sorszámú sorok és a $j_1, j_2, \dots, j_k$ -től eltérő oszlopok kihúzása által kapjuk. Továbbá, legyen M' a Δ determináns aldeterminánisa, amelyet az $i_1, i_2, \dots, i_k$ sorok és a $j_1, j_2, \dots, j_k$ oszlopok kihúzása segítségével kaptunk. Az M' aldeterminánst az M aldetermináns *komplementer aldeterminánsának* nevezzük. Nyilvánvaló, hogy az M aldetermináns az M' aldetermináns komplementere lesz.

Ha az (1) determináns M aldeterminánisa megfelelően az $i_1, i_2, \dots, i_k$ sorszámú sorok és a $j_1, j_2, \dots, j_k$ sorszámú oszlopok metszetén helyezkedik el, akkor a fejezet végéig az M aldetermináns összes sorának és oszlopának sorszámainak összegét s_M -mel fogjuk jelölni, vagyis

$$s_M = i_1 + \cdots + i_k + j_1 + \cdots + j_k.$$

A $(-1)^{s_M} M'$ számot az M aldetermináns *algebrai komplementerének* fogjuk nevezni.

Tétel 1. Egy tetszőleges k -adrendű M aldetermináns szorzata a Δ determinánsban lévő algebrai komplementerére egy algebrai összeg lesz, melynek tagjai (M aldetermináns tagjainak és az M' komplementer aldetermináns $(-1)^{s_M}$ előjellel vett tagjainak szorzata) a Δ determinánsnak is tagjai, és emellett előjelük az említett összegben és a Δ determinánsban megegyezik.

Tétel 2. (Laplace tétele). Legyen egy n -edrendű determinánsban tetszőlegesen kiválasztva k sor (vagy k oszlop), $1 \leq k \leq n - 1$. Akkor ez a determináns egyenlő az összes, az adott sorokban (oszlopokban) elhelyezkedő, k -adrendű aldetermináns azok algebrai komplementereikre való szorzatok összegével.

Következmény 1. A determináns egyenlő egy tetszőleges sorának (oszlopának) mindegyik elemének és azok algebrai komplementereikre való szorzatok összegével.

Tehát, ha Δ valamilyen n -edrendű determináns (lásd. (1)), és M_{ij} ezen determináns a_{ij} elemének komplementere, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, akkor

$$\Delta = a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}M_{i2} + \dots + a_{in}(-1)^{i+n}M_{in}. \quad (3)$$

A (3) képletet a Δ determináns i -edik sora általi kifejtésének nevezzük.

Következmény 2. A determináns bármely sorának összes elemének, és egy másik sorban elhelyezkedő nekik megfelelő algebrai komplementerekre való szorzatok összege nullával egyenlő, vagyis

$$a_{i1}(-1)^{i+1}M_{k1} + a_{i2}(-1)^{i+2}M_{k2} + \dots + a_{in}(-1)^{i+n}M_{kn} = 0, \quad (i \neq k).$$

8. A Cramer-szabály

Legyen adott $F \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Megvizsgálunk az F halmazból vett együtthatókat tartalmazó tetszőleges lineáris egyenletrendszer, amelyben az egyenletek n száma egyenlő az ismeretlenek számával, vagyis a következő alakú rendszert:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (1)$$

Ennek az egyenletrendszernek a mátrixának a determinánsát

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (2)$$

az (1) egyenletrendszer *determinánsának* nevezzük.

Továbbá, megvizsgálunk egy következő alakú n -edrendű determinánst

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

amelyet a Δ determinánsból kapunk meg j -edik oszlopának az (1) rendszer szabad tagjai által való helyettesítésével.

Tétel 1. Legyen $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ az (1) egyenletrendszer megoldása. Akkor $\Delta\gamma_j = \Delta_j(j = 1, 2, \dots, n)$.

Tétel 2. (Cramer). Ha az n ismeretlent tartalmazó n lineáris egyenletből álló egyenletrendszer determinánsa nullától eltérő, akkor ez az egyenletrendszer határozott. Emellett, ha Δ_j egy olyan determináns, amelyet a Δ determinánsból kapunk meg j -edik oszlopának ($j = 1, 2, \dots, n$) az egyenletrendszer szabad tagjai által való helyettesítésével, akkor a következő számok rendszere:

$$\gamma_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \gamma_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad \gamma_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

az egyenletrendszer megoldása lesz.

Következmény 1. Ha az n ismeretlent tartalmazó n lineáris egyenletből álló egyenletrendszer ellentmondó vagy határozatlan, akkor az egyenletrendszer determinánsa nullával egyenlő.

Következmény 2. Ha az n ismeretlent tartalmazó n lineáris egyenletből álló egyenletrendszer determinánsa egyenlő nullával és ha legalább egy azon determinánsok közül, melyet a Δ determinánsból kapunk meg j -edik oszlopának a rendszer szabad tagjai által való helyettesítésével nem egyenlő nullával, akkor ez a lineáris egyenletrendszer ellentmondó.

9. Mátrix-műveletek. A mátrix inverze

Legyen adott $F \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$; $F_{m \times n}$ az F halmaz elemeiből álló összes $m \times n$ -es mátrixok halmaza, ahol m és n tetszőleges természetes számok.

Az

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in F_{m \times n}$$

mátrixot a továbbiakban a következőképpen jelöljük: $\|a_{ij}\|_{m \times n}$ vagy röviden $\|a_{ij}\|$, ha egyértelműen ismeretes a szóban forgó mátrix mérete.

Az $F_{m \times n}$ halmaz $A = \|a_{ij}\|$ és $B = \|b_{ij}\|$ mátrixait *egyenlőknek* nevezzük, ha $a_{ij} = b_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$). Ebben az esetben a következőt írjuk: $A = B$.

Az $F_{m \times n}$ halmaz $A = \|a_{ij}\|$ és $B = \|b_{ij}\|$ mátrixainak *összegének* egy olyan $C = \|c_{ij}\| \in F_{m \times n}$ mátrixot nevezünk, amelyre igaz, hogy

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n).$$

Az A és B halmazok C összegét a következőképpen jelöljük: $A + B$.

Az $A = \|a_{ij}\| \in F_{m \times n}$ mátrix $\gamma \in F$ számra való szorzatának egy olyan $D = \|d_{ij}\| \in F_{m \times n}$ mátrixot nevezünk, amelyre igaz, hogy

$$d_{ij} = \gamma a_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n).$$

Az A mátrix γ számra való D szorzatát a következőképpen jelöljük: γA .

Tétel 1. Tetszőleges $\alpha, \beta \in F$ elemekre és $A, B, C \in F_{m \times n}$ mátrixokra teljesülnek a következő egyenlőségek:

- 1) $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- 2) $A + B = B + A$;
- 3) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
- 4) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
- 5) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;
- 6) $1 \cdot A = A$.

A $0 \in F_{m \times n}$ mátrixot *nullmátrixnak* nevezzük, ha tetszőleges $A \in F_{m \times n}$ mátrixra igaz a $0 + A = A$ egyenlőség.

Tétel 2. Egyetlen $0 \in F_{m \times n}$ nullmátrix létezik, emellett, a 0 mátrix minden eleme nulla.

A $(-A)$ mátrixot az A mátrix *ellentétes mátrixának* nevezzük, ha $(-A) + A = 0$.

Tétel 3. Tetszőleges $A \in F_{m \times n}$ mátrixra egyetlen ellentétes $(-A)$ mátrix létezik, emellett, ha $A = \|a_{ij}\|$, akkor $(-A) = \|-a_{ij}\|$.

Legyen $A = \|a_{ij}\|$ egy tetszőleges $m \times n$ -es mátrix, $B = \|b_{ij}\|$ tetszőleges $n \times r$ -es mátrix ($m, n, r \in \mathbb{N}$, $a_{ij}, b_{ij} \in F$). Az A és B mátrixok szorzatának egy olyan $m \times r$ -es $C = \|c_{ij}\|$ mátrixot nevezünk, amelyre igaz, hogy

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, r).$$

Az A és B mátrixok C szorzatát az AB mátrixsal jelöljük.

Megjegyzés 1. Az A mátrix és a B mátrix szorzata csak abban az esetben határozható meg, ha az A mátrix oszlopainak száma egybeesik a B mátrix sorainak számával. Ezért, ha az A mátrix szorzata a B mátrixra meghatározható, a B mátrix szorzata az A mátrixra nem biztos, hogy meghatározható.

Tétel 4. Tetszőleges $A, A' \in F_{m \times n}$, $B, B' \in F_{n \times r}$, $C \in F_{r \times s}$ mátrixokra és tetszőleges $\gamma \in F$ számra teljesülnek a következő egyenlőségek:

- 1) $(AB)C = A(BC)$;
- 2) $A(B + B') = AB + AB'$;
- 3) $(A + A')B = AB + A'B$;
- 4) $(\gamma A)B = A(\gamma B) = \gamma(AB)$.

Megjegyzés 2. Ha $n \geq 2$, akkor léteznek olyan $A, B \in F_{n \times n}$ mátrixok, hogy $AB \neq BA$.

Például az $n = 2$ esetben:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Az $E \in F_{n \times n}$ mátrixot *n-edrendű egységmátrixnak* nevezzük, ha tetszőleges $A \in F_{n \times n}$ mátrixra igaz az

$$EA = AE = A$$

egyenlőség.

Tétel 5. Egyetlen n -edrendű E egységmátrix létezik, mindemellett

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tétel 6. Az n -edrendű mátrixok szorzatának determinánsa egyenlő ezen mátrixok determinánsainak szorzatával.

Az n -edrendű mátrixot *nem elfajulónak* nevezzük, ha annak determinánsa nem egyenlő nullával.

Tétel 7. Az n -edrendű mátrixok szorzata akkor és csak akkor *nem elfajuló mátrix*, ha a szorzandó mátrixok egyike sem *nem elfajuló*.

A $B \in F_{n \times n}$ mátrixot az $A \in F_{n \times n}$ mátrix *baloldali inverzének* (jobboldali inverzének) nevezzük, ha $BA = E$ ($AB = E$) (ahol E n -edrendű egységmátrix).

Az A^{-1} mátrixot az $A \in F_{n \times n}$ mátrix *inverzének* nevezzük, ha az egyidejűleg az A mátrix baloldali és jobboldali inverze is. Ha az $A \in F_{n \times n}$ mátrixnak létezik inverz mátrixa, akkor azt mondhatjuk, hogy az A *invertálható mátrix*.

Tétel 8. Az n -edrendű mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha az *nem elfajuló*. Emellett, ha $A = \|a_{ij}\|$ egy n -edrendű invertálható mátrix, akkor számára csak egyetlen inverzmátrix létezik, amely a következő mátrixsal egyenlő:

$$A^{-1} = |A|^{-1} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

ahol A_{ij} az A mátrix a_{ij} elemének algebrai kkomplementere.

Következmény 1. Ha az n -edrendű A mátrixnak létezik jobboldali (baloldali) inverzmátrixa, akkor az A mátrixnak megfelelően létezik baloldali (jobboldali) inverzmátrixa is, ezért az A mátrix invertálható.

Tétel 9. Tetszőleges n -edrendű invertálható A és B mátrixokra teljesülnek a következő egyenlőségek:

- 1) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$;
- 2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
- 3) $(A^{-1})^{-1} = A$;
- 4) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

10. Az n -dimenziós számtani vektortér.

Vektorrendszerek lineáris összefüggősége

Az n valós számok bármely rendszerét, vagyis rendezett összességét, az $\mathbb{R}$ halmaz feletti n -dimenziós vektornak nevezzük. Az $\mathbb{R}$ halmaz $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ elemeiből álló $\mathbb{R}$ feletti n -dimenziós vektort a következőképpen fogjuk jelölni: $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ és α_1 az első, α_2 a második, és így tovább, α_n ezen vektor n -edik komponensének nevezzük. Két $\mathbb{R}$ feletti n -dimenziós vektort egyenlőnek nevezünk, ha ezen vektorok megfelelő komponensei egyenlők. Jelöljük $\mathbb{R}^n$ -nel az összes n -dimenziós vektor halmazát az $\mathbb{R}$ felett.

Az $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ és $b = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ vektorok összegének az $\mathbb{R}^n$ következő vektorát nevezzük

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n).$$

Az $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ vektor $\gamma \in \mathbb{R}$ számra való szorzatának a következő vektort nevezzük:

$$\gamma a = (\gamma \alpha_1, \gamma \alpha_2, \dots, \gamma \alpha_n).$$

Tétel 1. Tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ számokra és tetszőleges n -dimenziós $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ vektorokra teljesülnek a következő egyenlőségek:

- 1) $(a + b) + c = a + (b + c)$;
- 2) $a + b = b + a$;
- 3) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$;
- 4) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$;
- 5) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$;
- 6) $1 \cdot a = a$.

A $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ vektort nullvektornak nevezzük, ha tetszőleges $a \in \mathbb{R}^n$ vektorra igaz a $\bar{0} + a = a$ egyenlőség.

Tétel 2. Egyetlen $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ nullvektor létezik. Emellett $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

A $(-a)$ vektort az a vektor ellentétének nevezzük, ha $(-a) + a = \bar{0}$.

Tétel 3. Tetszőleges $a \in \mathbb{R}^n$ vektornak egyetlen ellentétes $(-a)$ vektora létezik. Mindemellett, ha $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, akkor $(-a) = (-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n)$.

Tétel 4. Legyen α tetszőleges valós szám, a pedig egy tetszőleges n -dimenziós vektor. Az $\alpha a = \bar{0}$ egyenlőség akkor és csak akkor igaz, ha $\alpha = 0$, vagy $a = \bar{0}$.

Az $\mathbb{R}$ feletti összes n -dimenziós vektor $\mathbb{R}^n$ halmazát, amelyen bevezetjük a vektorok összeadásának és a vektorok számmal való szorzásának műveletét, *valós n -dimenziós számtani vektortérnek* nevezzük.

Hasonlóan határozódik meg a $\mathbb{Q}^n$ *racióális n -dimenziós vektortér* és a $\mathbb{C}^n$ *komplex n -dimenziós vektortér is*.

A $b \in \mathbb{R}^n$ vektort az $a \in \mathbb{R}^n$ vektorhoz képest *arányosnak* nevezzük, ha létezik olyan γ valós szám, hogy $b = \gamma a$.

A $b \in \mathbb{R}^n$ vektort az $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{R}^n$ vektorok *lineáris kombinációjának* nevezzük, ha léteznek olyan $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ valós számok, hogy

$$b = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_s a_s.$$

Az $a_1, a_2, \dots, a_s \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszert *lineárisan összefüggőnek* nevezzük, ha létezik olyan nem mindegyik nullával egyenlő $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ valós szám, hogy

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_s a_s = \vec{0}.$$

Az $a_1, a_2, \dots, a_s \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszert *lineárisan függetlennek* nevezzük, ha az nem lineárisan összefüggő.

Tétel 5. *Az n -dimenziós vektorrendszer akkor és csak akkor lineárisan összefüggő, ha legalább egy vektora ennek a rendszernek a többi vektor lineáris kombinációja.*

Legyen adott $a_1, a_2, \dots, a_s$ az n -dimenziós vektortér valamely vektorrendszere. Az $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ vektorrendszert, ahol $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq s$, az $a_1, a_2, \dots, a_s$ rendszer *részrendszerének* nevezzük.

Tétel 6. *Ha az n -dimenziós vektorrendszer valamely részrendszere lineárisan összefüggő, akkor az egész rendszer is lineárisan összefüggő. Ha az n -dimenziós vektorrendszer lineárisan független, akkor bármely részrendszere lineárisan független lesz.*

Az n -dimenziós vektorrendszert az n -dimenziós vektortér *bázisának* nevezzük, ha az először is, lineárisan független, és másodszor, bármely n -dimenziós vektor ezen rendszer vektorainak lineáris kombinációja.

Tétel 7. *A következő n -dimenziós vektorrendszer:*

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, 0, \dots, 1) \quad (1)$$

az $\mathbb{R}^n$ n -dimenziós vektortér bázisa.

Az $\mathbb{R}^n$ n -dimenziós vektortér (1) bázisát *kanonikus bázisnak* nevezzük.

Tétel 8. *Tetszőleges $a_1, \dots, a_s$ n -dimenziós vektorrendszerre a következő állítások közül egyszerre csak az egyik lehet igaz:*

- 1) az $a_1, \dots, a_s$ vektorrendszer lineárisan összefüggő;
- 2) az $a_1, \dots, a_s$ vektorrendszer az $\mathbb{R}^n$ n -dimenziós vektortér bázisa;
- 3) létezik olyan $b \in \mathbb{R}^n$ vektor, hogy az $a_1, \dots, a_s, b$ vektorrendszer lineárisan független lesz.

Tétel 9. Az s vektorból álló bármely n -dimenziós vektorrendszer az $s > n$ feltétel mellett lineárisan összefüggő.

Az $a_1, a_2, \dots, a_r \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszer lineárisan kifejezhetőnek nevezzük a $b_1, b_2, \dots, b_s \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszer által, ha az első rendszer minden vektora a második rendszer vektorainak lineáris kombinációja.

Az $\mathbb{R}^n$ n -dimenziós vektortér két vektorrendszerét ekvivalensnek nevezzük, ha közülük mindegyik lineárisan kifejezhető a másik által.

Tétel 10. Ha az $a_1, a_2, \dots, a_r \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszer lineárisan kifejezhető a $b_1, b_2, \dots, b_s \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszer által, amely szintén lineárisan kifejezhető egy $c_1, c_2, \dots, c_t \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszer által, akkor az $a_1, a_2, \dots, a_r$ vektorrendszer is lineárisan kifejezhető a $c_1, c_2, \dots, c_t$ vektorrendszer által.

Tétel 11. Legyen $a_1, a_2, \dots, a_r$ és $b_1, b_2, \dots, b_s$ két n -dimenziós vektorrendszer, melyek közül az első lineárisan független és lineárisan kifejezhető a másik rendszer által. Akkor az első rendszer vektorainak száma nem haladja meg a másik rendszer vektorainak számát, vagyis $r \leq s$.

Következmény 1. Bármely két ekvivalens lineárisan független vektorrendszer azonos számú vektorokból állnak.

Következmény 2. Az $\mathbb{R}^n$ n -dimenziós vektortér bármely bázisa n vektorból áll.

Az $a_1, a_2, \dots, a_s$ n -dimenziós vektorrendszer bázisának egy olyan lineárisan független részrendszert nevezünk, hogy az $a_1, a_2, \dots, a_s$ rendszer minden vektora ezen részrendszer vektorainak lineáris kombinációja.

Tétel 12. Az n -dimenziós vektorrendszer bármely két bázisa azonos számú vektorokból áll.

A vektorrendszer bázisának vektorai számát a rendszer rangjának nevezzük.

Tétel 13. Legyen $a_1, a_2, \dots, a_r$ és $b_1, b_2, \dots, b_s$ két n -dimenziós vektorrendszer, emellett az első rendszer rangja egyenlő egy k számmal, a másik rendszer rangja pedig egy l számmal. Ha az első vektorrendszer lineárisan kifejezhető a másik által, akkor $k \leq l$. Ha pedig ezek a rendszerek ekvivalensek, akkor $k = l$.

11. A mátrix rangja

Legyen adott

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1t} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{s1} & \alpha_{s2} & \dots & \alpha_{st} \end{pmatrix} \quad (1)$$

egy tetszőleges $s \times t$ méretű mátrix az $\mathbb{R}$ valós számok halmazának elemeiből, ahol s és t tetszőleges természetes számok. Akkor ennek a mátrixnak az oszlopaira úgy tekinthetünk, mint s -dimenziós vektorokra, soraira pedig mint t -dimenziós vektorokra. Megvizsgáljuk az A mátrix vektor-oszlopainak rendszerét:

$$c_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{s1}), \dots, c_t = (\alpha_{1t}, \alpha_{2t}, \dots, \alpha_{st}).$$

Az A mátrix rangjának vektor-oszlopainak rendszerének rangját nevezzük. Az A mátrix rangját a következőképpen jelöljük: $\text{rank } A$.

Tétel 1. Ha az A mátrix minden k -adrendű aldeterminánsa egyenlő nullával, akkor az összes k -tól nagyobb rendű aldeterminánsa is nullával egyenlő.

Legyen M az A mátrix tetszőleges aldeterminánsa, amely az $i_1, \dots, i_k$ számú sorokban és $j_1, \dots, j_k$ számú oszlopokban található. Az A mátrix M' aldeterminánsát, amely az $i'_1, \dots, i'_l$ számú sorokban és $j'_1, \dots, j'_l$ számú oszlopokban található, az M aldetermináns *beszegési aldeterminánsának* nevezzük, ha

$$\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{i'_1, \dots, i'_l\}, \quad \{j_1, \dots, j_k\} \subset \{j'_1, \dots, j'_l\}.$$

Tétel 2. Legyen M az A mátrix nem nullás k -adrendű aldeterminánsa, mindemellett, az M aldetermináns minden $(k+1)$ -edrendű beszegési aldeterminánsa egyenlő nullával. Akkor $\text{rank } A = k$.

Tétel 3. A nem nullás A mátrix rangja egyenlő a nullától eltérő aldeterminánsok maximális rendjével.

Következmény 1. Az n -edrendű determináns akkor és csak akkor egyenlő nullával, ha oszlopai lineárisan összefüggő vektorrendszert alkotnak.

Tétel 4. Az A mátrix vektor-sorainak rendszerének rangja egyenlő a vektor-oszlopainak rendszerének rangjával, vagyis egyenlő az A mátrix rangjával.

A B mátrixot az A mátrixból kapjuk az (I) típusú elemi átalakítás által, ha minden sora (oszlopa) a B mátrixnak, az i és j kívül, olyanok, mint az A mátrixnak megfelelő sorok (oszlopok), az i és j sorok (oszlopok) pedig helyet cseréltek. Ha a B mátrixban minden sor (oszlop), kivéve az i , olyanok, mint az A mátrixban, a B mátrix i -edik sora (oszlopa) pedig

egyenlő az A mátrix i -edik sorának (oszlopának) és valamely tetszőleges valós számmal megszorított más sorának (oszlopának) összegével, akkor a B mátrixot az A mátrixból kaptuk a (II) típusú elemi átalakítás által. Végül, a B mátrixot az A mátrixból kapjuk a (III) típusú elemi átalakítás által, ha a B mátrix minden sora (oszlopa), kivéve az i -edik sort (oszlopot), olyanok, mint az A mátrixnak megfelelő sorok (oszlopok), a B mátrix i -edik sora (oszlopa) pedig egyenlő az A mátrix nem nulla valós számmal megszorított i -edik sorával (oszlopával).

A B mátrixot ekvivalensnek nevezzük az A mátrixsal, ha megkaphatjuk az A mátrixból véges számú elem átalakítások által az A mátrix sorai vagy oszlopai felett. Ha az A és B mátrixok ekvivalensek, akkor felírhatjuk, hogy $A \sim B$.

Tétel 5. Bármely $s \times t$, r -ed rangú A mátrix ekvivalens egy lépcsős alakú mátrixsal, amely pontosan r nem nullás sort tartalmaz, vagyis a következő alakú mátrixsal

$$\begin{pmatrix} 0 \dots 0 & b_{1j_1} \dots b_{1j_{r-1}} & b_{1j_r} \dots b_{1t} \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & b_{2j_r} \dots b_{2t} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & b_{rj_r} \dots b_{rt} \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

ahol $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq t$, b_{kj_k} nem nullás szám ($k = 1, 2, \dots, r$).

Megjegyzés 1. Bármely $s \times t$ mátrix (2) alakú lépcsős mátrixhoz hozható véges számú (I) vagy (II) típusú elemi átalakítások által a mátrix sorai felett.

Az $s \times t$ A mátrix (lásd. (1)) átlós alakú (diagonális), ha tetszőleges $i \in \{1, \dots, s\}$ és $j \in \{1, \dots, t\}$ értékekre az a_{ij} elem egyenlő nullával, amennyiben $i \neq j$. Az átlós alakú A mátrixot a következőképpen jelöljük: $\text{diag}[a_{11}, a_{22}, \dots, a_{qq}]_{s \times t}$ (q minimális az s és t számok közül).

Tétel 6. Tetszőleges r -ed rangú $s \times t$ -mátrix ekvivalens a következő átlós alakú mátrixsal:

$$\text{diag} \left[\underbrace{1, 1, \dots, 1}_r, 0, \dots, 0 \right]_{s \times t}.$$

Tétel 7. Az A és B mátrixok szorzatának rangja nem nagyobb, mint külön az A és B mátrixok rangjai, vagyis

$$\text{rank } AB \leq \text{rank } A, \quad \text{rank } AB \leq \text{rank } B.$$

Tétel 8. Legyen A egy tetszőleges $s \times t$ -mátrix; B, C megfelelően s és t rendű tetszőleges invertálható mátrixok. Akkor $\text{rank } BA = \text{rank } A$, $\text{rank } AC = \text{rank } A$.

12. Lineáris egyenletrendszer. A Kronecker-Capelli tétel

Legyen adott a következő lineáris egyenletrendszer:

[illegible]

ahol $s, n \in \mathbb{N}$; $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R} (i = 1, 2, \dots, s; j = 1, 2, \dots, n)$. Ennek a rendszernek a mátrixát megjelöljük A -val, $\bar{A}$ -val pedig a kibővített mátrixát. Tehát

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}.$$

Tétel 1. Az $\bar{A}$ mátrix rangja vagy egyenlő az A mátrix rangjával, vagy eggyel nagyobb mint az A mátrix rangja.

Tétel 2 (Kronecker-Capelli). Az (1) lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor megoldható, ha a kibővített $\bar{A}$ mátrix rangja egyenlő az A mátrix rangjával.

Tetszőleges lineáris egyenletrendszer megoldásának szabálya

Legyen adott egy megoldható (1) lineáris egyenletrendszer és ezen rendszer A mátrixának rangja legyen r . Az A mátrixban kiválasztunk r lineárisan független sort és az (1) rendszerben csak azokat az egyenleteket hagyjuk meg, melyeknek együtthatói a kiválasztott sorokban szerepelnek. Ezen egyenletek bal oldalán meghagyunk olyan r ismeretleneket, hogy az együtthatóikból alkotott determináns értéke nullától eltérő legyen, az összes többi ismeretlent pedig szabadnak nyilvánítjuk és átvisszük az egyenletek jobb oldalaira. A szabad ismeretlenek számára tetszőleges számértéket adva és Cramer szabálya szerint kiszámolva a többi ismeretlen értékét, megkapjuk az (1) rendszer megoldását.

Következmény 1. *A megoldható (1) rendszer akkor és csak akkor határozott, ha az A mátrix rangja egyenlő az ismeretlenek számával.*

13. Homogén lineáris egyenletrendszerek

Homogén lineáris egyenletrendszernek nevezzük a következő alakú egyenletrendszert

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \vdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0, \end{cases} \quad (1)$$

ahol $s, n \in \mathbb{N}$; $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R} (i = 1, 2, \dots, s; j = 1, 2, \dots, n)$. Nyilvánvaló, hogy az (1) rendszer megoldható, mivel rendelkezik $(0, 0, \dots, 0)$ null megoldással.

Tétel 1. Legyen az n ismeretlent tartalmazó (1) homogén lineáris egyenletrendszer mátrixának rangja r . Ha $r = n$, akkor az (1) rendszer határozott, vagyis a null megoldás az egyenletrendszer egyetlen megoldása. Abban az esetben, ha $r < n$, az (1) egyenletrendszer határozatlan.

Következmény 1. Az n ismeretlent tartalmazó n lineáris egyenletből álló homogén rendszernek akkor és csak akkor van nem null megoldása, ha ezen rendszer mátrixának determinánsa nullával egyenlő.

Tétel 2. Ha a homogén lineáris egyenletrendszerben az egyenletek száma kisebb az ismeretlenek számától, akkor ennek a rendszernek van a nullástól eltérő megoldása.

Tétel 3. Legyen $b = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ és $c = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$ n -dimenziós vektorok az (1) homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai. Akkor tetszőleges α valós számra az

$$ab = (\alpha\beta_1, \dots, \alpha\beta_n), \quad b + c = (\beta_1 + \gamma_1, \dots, \beta_n + \gamma_n)$$

vektorok szintén az (1) egyenletrendszer megoldásai lesznek.

Következmény 2. A homogén lineáris egyenletrendszerek megoldásainak tetszőleges lineáris kombinációja szintén ennek az egyenletrendszernek a megoldása lesz.

Az (1) homogén lineáris egyenletrendszer összes megoldásának halmazát ezen rendszer *megoldásai terének* nevezzük. Legyen S – az (1) homogén lineáris határozatlan egyenletrendszer megoldásainak tere. A 10. fejezetből következik, hogy létezik olyan $a_1, \dots, a_q \in S$ lineárisan független vektorrendszer, hogy az S bármely vektora ezen rendszer vektorainak lineáris kombinációja. Ebben az esetben az $a_1, \dots, a_q$ vektorrendszert az (1) homogén lineáris egyenletrendszer *fundamentális rendszerének* nevezzük. A homogén lineáris határozatlan egyenletrendszer megoldásainak számtalan fundamentális rendszere létezik. A megoldások bármely két fundamentális rendszere ekvivalens. Tehát azonos számú megoldásokat tartalmaznak.

14. Csoportok. Gyűrűk. Testek

Legyen M egy tetszőleges halmaz. Tetszőleges $\tau : M \times M \rightarrow M$ leképezést *binér algebrai műveletnek* nevezzünk az M halmaz felett.

A rendezett $(a, b) \in M \times M$ pár $\tau(a, b)$ képét gyakran a következőképpen jelöljük: $a\tau b$, de még gyakoribb a binér művelet jelölése néhány speciális szimbólummal: $*$, $\circ$, $+$. Az utolsó két esetben az (a, b) pár $a \cdot b$ (vagy egyszerűen ab) és $a + b$ képeit megfelelően az $a, b \in M$ elemek *szorzatának* és *összegének* fogjuk nevezni, magukat a $\cdot$ és $+$ műveleteket pedig megfelelően szorzásnak és összeadásnak.

Megjegyzés 1. A fent említett műveletek feltételesek. Az M halmazon megadható néhány algebrai művelet is.

A nem üres G halmazt, amelyen adott a szorzás binér művelete, *csoportnak* nevezzük, ha teljesülnek a következő feltételek:

- 1) az algebrai művelet asszociatív, vagyis tetszőleges $a, b, c \in G$ elemekre érvényes az $(ab)c = a(bc)$ egyenlőség;
- 2) létezik *egységelem*, vagyis létezik a G halmaznak olyan e eleme, hogy tetszőleges $a \in G$ elemre érvényes az $ae = ea = a$ egyenlőség;
- 3) minden $a \in G$ elemre létezik *inverz* a^{-1} elem a G halmazból, vagyis olyan elem, hogy: $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Megjegyzés 2. Ha a G halmaz, amelyen adott az összeadás binér algebrai művelete, csoport, akkor a G csoport egységelemét *null elemnek* nevezzük, az $a \in G$ elem inverz elemét pedig *ellentétes elemnek* nevezzük, és a következőképpen jelöljük: $(-a)$.

Ha a G csoport tetszőleges a, b elemeire teljesül az $ab = ba$ egyenlőség, akkor a G csoportot *Abel-csoportnak* nevezzük.

Ha a G halmaz véges, akkor a G csoportot *végesnek* nevezzük, a G halmaz elemeinek számát pedig a G csoport *rendjének* nevezzük. Jelölése: $|G|$.

Legyen G_1 és G_2 csoportok, amelyeken adott a szorzás binér algebrai művelete. A G_1 és G_2 csoportokat *izomorfoknak* nevezzük, ha létezik olyan $f: G_1 \rightarrow G_2$ bijektív leképezés, hogy tetszőleges $a, b \in G_1$ elemekre $f(ab) = f(a)f(b)$. A G_1 és G_2 csoportok izomorfizmusának jelölése: $G_1 \cong G_2$.

A G csoport H részhalmazát a G csoport *részcsoporthjának* nevezzük, ha a G csoporton megadott algebrai műveletet tekintve a H csoportot alkot.

Tétel 1. A G csoport H részhalmaza a G csoport részcsoportja akkor és csak akkor, ha a H halmaz tetszőleges a és b elemeire teljesülnek a következő feltételek:

- 1) $ab \in H$;
- 2) $a^{-1} \in H$.

A nem üres R halmazt, amelyen adottak az összeadás és a szorzás binér algebrai műveletei, *gyűrűnek* nevezzük, ha teljesülnek a következő feltételek:

- 1) a R halmaz az összeadásra nézve Abel-csoport (ezt a csoportot a gyűrű *additív csoportjának* nevezzük);
- 2) a szorzás binér algebrai művelete asszociatív, vagyis tetszőleges $a, b, c \in R$ elemekre érvényes az $(ab)c = a(bc)$ egyenlőség;
- 3) az összeadás és a szorzás binér algebrai műveletei kapcsolatban állnak a disztributív törvényekkel, vagyis tetszőleges $a, b, c \in R$ elemekre érvényesek az $(a + b)c = ac + bc$, $a(b + c) = ab + ac$ egyenlőségek.

Az R gyűrűt *kommutatívnak* nevezzük, ha tetszőleges $a, b \in R$ elemekre $ab = ba$.

Az R gyűrűt *egységelemes gyűrűnek* nevezzük, ha az R gyűrűben létezik egy olyan 1 elem, hogy tetszőleges $a \in R$ elemre $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.

Legyen R egy egységelemes gyűrű. Az R gyűrű a elemét *invertálhatónak* nevezzük, ha létezik olyan $a^{-1} \in R$ elem, hogy $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$.

Tétel 2. Legyen R egy egységelemes gyűrű. Az R gyűrű összes invertálható elemének halmaza a szorzás binér algebrai műveletére nézve csoport.

Az R egységelemes gyűrű összes invertálható elemének csoportját az R gyűrű *multiplikatív csoportjának* nevezzük. Jelölése: R^* .

Az R_1 és R_2 gyűrűket *izomorf*nak nevezzük, ha létezik olyan $f: R_1 \rightarrow R_2$ bijektív leképezés, hogy tetszőleges $a, b \in R_1$ elemekre

$$f(a + b) = f(a) + f(b), f(ab) = f(a)f(b).$$

A R_1 és R_2 gyűrűk izomorfizmusát szintén a következőképpen jelöljük: $R_1 \cong R_2$.

A K gyűrű R részhalmazát a K gyűrű *részgyűrűjének* nevezzük, ha K gyűrűn megadott algebrai műveletet tekintve az R gyűrű.

Tétel 3. A K gyűrű R részhalmaza a K gyűrű részgyűrűje akkor és csak akkor, ha tetszőleges $a, b \in R$ elemekre teljesülnek a következő feltételek:

- 1) $a + b \in R$,
- 2) $-a \in R$,

3) $ab \in R$.

Az F kommutatív egységelemes gyűrűt *testnek* nevezzük, ha az F gyűrű tetszőleges nem null eleme invertálható, vagyis $F^* = F \setminus \{0\}$.

Ha a P test az F test részgyűrűje, akkor a P az F test résztestje.

Az F_1 és F_2 testeket *izomorfoknak* nevezzük, ha a F_1 és F_2 gyűrűk izomorfok.

15. A polinomok gyűrűje

Legyen P egy tetszőleges test, n pedig egy nem negatív egész szám és $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ a P test tetszőleges elemei, emellett a_n a P test nem nullás eleme. A következő algebrai kifejezést (szimbólumot)

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (1)$$

a P test feletti x ismeretlentől (változótól) vett n -edrendű polinomnak nevezzük. Az a_i elemet az (1) polinom i -edik hatványú x ismeretlen (vagyis x^i) melletti együtthatónak nevezzük ($i = 1, 2, \dots, n$). Emellett az a_n együtthatót ezen polinom főegyütthatójának nevezzük.

Megjegyzés 1. A P test feletti nulladik fokú polinomok csak a P test nem null elemei.

Megvizsgáljuk a nullás polinomot is, amely egybeesik a P test null elemével. A null polinom foka meghatározás szerint nincs definiálva. Az

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \\ g(x) &= b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0. \end{aligned} \quad (2)$$

P test feletti x ismeretlentől vett megfelelően n -ed és m -edrendű polinomokat *egyenlőknek* nevezzük (jelölése: $f(x) = g(x)$), ha $n = m$ és $a_k = b_k$ tetszőleges $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ értékekre.

Az $f(x)$ és $g(x)$ polinomok (lásd (2)) *összegének* nevezzük a következő polinomot:

$$f(x) + g(x) = c_s x^s + c_{s-1} x^{s-1} + \dots + c_1 x + c_0,$$

ahol s az n és m számok közül a maximális, $c_k = a_k + b_k$ ($k = 0, 1, \dots, s$), amelyben az $a_{n+1}, \dots, a_s$ ($b_{m+1}, \dots, b_s$) mind nullával egyenlők, ha $n < s$ ($m < s$).

Az $f(x)$ és $g(x)$ polinomok (lásd(2)) *szorzatának* nevezzük a következő polinomot:

$$f(x)g(x) = d_{n+m} x^{n+m} + d_{n+m-1} x^{n+m-1} + \dots + d_1 x + d_0,$$

ahol $d_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$ ($k = 0, 1, \dots, n+m$), $a_i = 0$, ha $i > n$ és $b_j = 0$, ha $j > m$.

Megjegyzés 2. Az $f(x)$ és $g(x)$ polinomok szorzatának d_k együtthatója egyenlő megfelelően az $f(x)$ és $g(x)$ polinomok olyan különféle a_i és b_j együtthatójának szorzatának összegével, hogy $i + j = k$.

Megjegyzés 3. A polinomok összeadásának és szorzásának definícióját megfeleltethetjük arra az esetre, amikor az összeadandók vagy szorzandók egyike nullás polinom lesz.

Nyilvánvaló, hogy a fent említett polinomok összeadásának és szorzásának definíciói meghatározzák a P test feletti x ismeretlentől vett összes polinom $P[x]$ halmazán vett összeadásának és szorzásának binér algebrai műveleteit (beleértve a nullás polinomot is).

Tétel 1. A P test feletti x ismeretlentől vett összes polinom $P[x]$ halmaza az összeadás és szorzás binér algebrai műveleteit tekintve kommutatív egységelemes gyűrű. A $P[x]$ gyűrű egységeleme a P test egységeleme lesz. A $P[x]$ gyűrű tetszőleges nem null polinomjainak szorzata nem null polinom lesz.

Tétel 2. A P test feletti $f(x)$ polinom a $P[x]$ gyűrű invertálható eleme lesz akkor és csak akkor, ha $f(x)$ nulladik fokú polinom lesz.

Tétel 3. Legyen $g(x)$ egy a P test feletti tetszőleges nem null polinom. Akkor tetszőleges $f(x) \in P[x]$ polinomra egyetlen olyan $q(x), r(x) \in P[x]$ polinom pár létezik, hogy

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \quad (3)$$

mindemellett az $r(x)$ polinom foka kisebb, mint a $g(x)$ polinom foka vagy $g(x) = 0$.

A (3) egyenlőségben a $q(x)$ és $r(x)$ polinomokat az $f(x)$ polinom $g(x)$ -re való osztása során megfelelően *hányadosnak* és *maradéknak* nevezzük.

Ha a P test feletti $f(x)$ polinom maradéka a nem null $g(x) \in P[x]$ polinomra való osztása során nullával egyenlő, akkor mondhatjuk, hogy az $f(x)$ polinom $g(x)$ polinomra *osztódik*, és a $g(x)$ polinomot pedig az $f(x)$ *osztójának* nevezzük.

Tétel 4. A P test feletti $g(x)$ polinom akkor és csak akkor osztója az $f(x) \in P[x]$ polinomnak, ha létezik egy olyan $h(x) \in P[x]$ polinom, hogy $f(x) = g(x)h(x)$.

Tétel 5. Legyen P egy tetszőleges test. A P test feletti polinomokra igazak a következő állítások:

- I. Ha $f(x)$ osztódik $g(x)$ -re, és $g(x)$ osztódik $h(x)$ -re, akkor $f(x)$ is osztódik $h(x)$ -re.
- II. Hogyha az $f(x)$ és $g(x)$ polinomok osztódnak $h(x)$ -re, akkor az $f(x) + g(x)$ összegük és az $f(x) - g(x)$ különbségük is osztódik $h(x)$ -re.
- III. Ha az $f(x)$ osztódik $g(x)$ -re, akkor az $f(x)h(x)$ szorzat is osztódik $g(x)$ -re, tetszőleges $h(x)$ polinom esetére.
- IV. Ha minden $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ polinom osztódik $g(x)$ -re, akkor osztódni fognak $g(x)$ -re a következő polinomok is:

$$f_1(x)h_1(x), f_2(x)h_2(x), \dots, f_k(x)h_k(x),$$

ahol $h_1(x), h_2(x), \dots, h_k(x)$ tetszőleges polinomok.

- V. Tetszőleges $f(x)$ polinom bármilyen nullad fokú polinomra osztódik.
- VI. Az $f(x)$ és $g(x)$ polinomok akkor és csakis akkor osztódnak egymásra, amikor bármilyen nem nullás c elemére a P testnek: $g(x) = cf(x)$.

A P test feletti $f(x)$ és $g(x)$ polinomok *közös osztójának* egy $h(x) \in P[x]$ polinomot nevezünk, amely osztója mind a két $f(x)$ és $g(x)$ polinomoknak. Ha az $f(x)$ és $g(x)$ polinomoknak csak nulladik fokú polinom a közös osztója, akkor az $f(x)$ és $g(x)$ polinomokat *relatív prím polinomoknak* nevezzük.

Az $f(x), g(x) \in P[x]$ polinomok *legnagyobb közös osztójának* egy $d(x) \in P[x]$ polinomot nevezünk, amely ezen polinomok közös osztója, mindemellett, ő maga is osztódik az $f(x)$ és $g(x)$ bármely közös osztójára. Az $f(x)$ és $g(x)$ polinomok legnagyobb közös osztóját az $(f(x), g(x))$ szimbólummal jelöljük.

Megjegyzés 4. Az 5. tételből következik, hogy ha létezik az $f(x)$ és $g(x)$ polinomok legnagyobb közös osztója, akkor az ezen polinomok által nem egyértelműen határozható meg.

Tétel 6. Tetszőleges P test feletti nem nullás $f(x)$ és $g(x)$ polinomoknak létezik legnagyobb közös osztója. Legyen $d(x) = (f(x), g(x))$ az $f(x)$ és $g(x)$ valamely legnagyobb közös osztója. Akkor az $f(x)$ és $g(x)$ polinomok legnagyobb közös osztói kimerítik a $\{cd(x) | c \in P, c \neq 0\}$ polinomok halmazát.

Megjegyzés 5. Figyelembe véve az előző tételt, megjegyezhetjük, hogy a polinomok legnagyobb közös osztójának főegyütthatója eggyel egyenlő.

Tétel 7. Két polinom akkor és csak akkor lesz relatív prím, amikor a legnagyobb közös osztójuk eggyel egyenlő.

A nem nullás $f(x)$ és $g(x)$ polinomok legnagyobb közös osztójának meghatározására szolgáló Euklidesz algoritmus a következőkön alapul: $f(x)$ polinomot elosztjuk $g(x)$ -re, vagyis felírjuk az $f(x)$ -et a (3) kifejezés szerint; legyen $r_1(x)$ maradék az $f(x)$ $g(x)$ -re való osztása során; ha $r_1(x) \neq 0$, akkor a $g(x)$ -et $r_1(x)$ -re osztjuk, és megkapjuk az $r_2(x)$ maradékot; és ismét, ha $r_2(x) \neq 0$, akkor az $r_1(x)$ -et elosztjuk $r_2(x)$ -re és így tovább; amennyiben ezen folyamat során a maradék foka folyamatosan csökken, akkor valamely lépés során ez a folyamat leáll, vagyis valamely k -ra $r_{k+1} = 0$; végül az $r_k(x)$ maradék lesz az $f(x)$ és $g(x)$ polinomok legnagyobb közös osztója.

Tétel 8. Ha $d(x)$ a legnagyobb közös osztója a P test feletti $f(x)$ és $g(x)$ polinomoknak, akkor léteznek olyan $u(x), v(x) \in P[x]$ polinomok, hogy

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = d(x).$$

Következmény 1. Az $f(x), g(x) \in P[x]$ polinomok akkor és csak akkor lesznek relatív prímek, ha léteznek olyan $u(x), v(x) \in P[x]$ polinomok, hogy

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1.$$

Következmény 2. Ha az $f(x)$ polinom relatív prím a $g(x)$ és $h(x)$ polinomok mindegyikével, akkor relatív prím lesz a $g(x)h(x)$ szorzatukkal is.

Következmény 3. Ha az $f(x)$ és $g(x)$ polinomok szorzata osztódik $h(x)$ -re, de $f(x)$ és $h(x)$ relatív prímelek, akkor $g(x)$ osztódik $h(x)$ -re.

Következmény 4. Ha az $f(x)$ polinom osztódik az egymás között relatív prím $g(x)$ és $h(x)$ polinomok mindegyikére, akkor $f(x)$ osztódik a $g(x)h(x)$ szorzatra is.

16. A polinomok gyökei

Legyen P egy tetszőleges számtest, $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ a P test feletti tetszőleges n -edfokú polinom és c a P test bármely eleme. A P test $f(c) = a_n c^n + \dots + a_1 c + a_0$ elemét az $f(x)$ polinom értékének nevezzük $x = c$ -nél.

Tétel 1. Legyen $f(x)$ és $g(x)$ P test feletti tetszőleges polinomok és $u(x) = f(x) + g(x)$, $v(x) = f(x)g(x)$ megfelelően ezen polinomok összege és szorzata. Akkor a P test bármely c elemére $u(c) = f(c) + g(c)$ és $v(c) = f(c)g(c)$.

A P test c elemét az $f(x) \in P[x]$ polinom gyökének nevezzük, ha $f(c) = 0$.

Megjegyzés 1. Léteznek olyan polinomok, melynek a valós számok teste felett nincs gyöke, de a komplex számok teste felett van. Például, az $x^2 + 1$ ($\forall a \in \mathbb{R} \ a^2 + 1 \neq 0$; $i^2 + 1 = 0$) ilyen polinom.

Az első fokú polinomot *lineáris polinomnak* nevezzük.

Tétel 2. Az $f(x) \in P[x]$ polinomnak a lineáris $(x - c)$ ($c \in P$) polinomra való osztása során a maradék egyenlő az $f(x)$ polinom $f(c)$ értékével, vagyis $x = c$ -nél.

Következmény 1 (Bézout-tétele). A P test c eleme akkor és csak akkor lesz az $f(x) \in P[x]$ polinom gyöke, ha $f(x)$ osztódik $(x - c)$ -re.

Ezek szerint, az $f(x)$ polinom gyökeinek meghatározása egyenértékű lineáris osztóinak keresésével.

Legyen $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ a P test valamely polinomja és legyen

$$f(x) = (x - c)q(x) + r, \quad (1)$$

ahol $q(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \dots + b_{n-2} x + b_{n-1}$ hányados, r pedig a maradék az $f(x)$ lineáris $(x - c) \in P[x]$ polinomra való osztása során. Akkor az (1) egyenlőségből azt kapjuk, hogy

$$a_0 = b_0, \ a_1 = b_1 - cb_0, \ \dots, \ a_{n-1} = b_{n-1} - cb_{n-2}, \ a_n = r - cb_{n-1}.$$

Innen

$$b_0 = a_0, \quad b_k = cb_{k-1} + a_k \ (k = 1, 2, \dots, n-1), \quad r = cb_{n-1} + a_n,$$

vagyis a $q(x)$ hányados b_k együtthatóját az előző b_{k-1} együttható c -re való szorzatának és a megfelelő a_k együtthatóhoz való hozzáadásának eredményeként kapjuk meg. Hasonlóan számítódik ki az r maradék is, amely $f(c)$ -vel egyenlő (lásd.: Tétel 2.). A polinom lineáris $(x - c)$ polinomra való osztása során a hányados és a maradék meghatározására használt módszert Horner-elrendezésnek nevezzük.

Az $f(x)$ polinom c gyökét k -szoros gyöknek nevezzük, ha $f(x) = (x - c)^k g(x)$, ahol k valamely természetes szám, a $g(x)$ polinom pedig már osztódik $(x - c)$ -re. A k szám az $f(x)$ polinom c gyökének *multiplicitása*. Ha $k = 1$, akkor a c gyököt *egyszerűnek* nevezzük.

Legyen $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ a P test feletti valamely polinom. Az

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1$$

polinomot az $f(x)$ polinom *deriváltjának* (vagy *első rendű deriváltjának*) nevezzük. A null fokú polinom és a null polinom deriváltja egyenlő a null polinommal. Teljes indukció segítségével meghatározható az $f(x)$ polinom $f^{(k)}(x)$ k -adrendű deriváltja, vagyis

$$f^{(k)}(x) = (f^{(k-1)})'(x) \quad (k = 2, 3, \dots).$$

Tétel 3. *Bármely n -edfokú polinom $(n+1)$ -edrendű deriváltja egyenlő a null polinommal.*

Tétel 4. *Tetszőleges P test feletti $f(x)$ és $g(x)$ polinomokra igaz, hogy*

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x), \quad (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Tétel 5. *Legyen a P test c eleme az $f(x) \in P[x]$ polinom k -szoros gyöke ($k \in \mathbb{N}$). Egy tetszőleges k -tól kisebb s természetes számra a c elem az $f(x)$ polinom s -ed rendű deriváltjának $(k-s)$ -szeres gyöke. A c elem nem lesz az $f(x)$ polinom k -ad rendű deriváltjának gyöke.*

Tétel 6 (az algebra alaptétele). *Bármely természetes fokú polinomnak a komplex számok teste felett legalább egy – általában komplex – gyöke létezik.*

Következmény 2. *Bármely n -edfokú ($n \in \mathbb{N}$) $f(x)$ polinomnak a komplex számok teste felett n számú gyöke létezik, ha minden gyökét annyiszor számítjuk, amennyi a multiplicitása.*

Következmény 3. *Bármely n -edfokú ($n \in \mathbb{N}$) $f(x)$ polinom a komplex számok teste felett n lineáris tényezőre bontható, vagyis*

$$f(x) = \alpha(x - \xi_1)(x - \xi_2) \cdots (x - \xi_n), \quad (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in \mathbb{C})$$

ahol α – az $f(x)$ polinom főegyütthatója. Ez a felbontás egyértelmű a szorzandók követésének rendjének pontosságával.

Tétel 7. *Ha az $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x]$ polinomok, melyeknek foka nem nagyobb az n természetes számtól, és értékük az ismeretlennek több mint n különböző értéke mellett megegyezik, akkor $f(x) = g(x)$*

Legyen $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ – n -ed fokú polinom a komplex számok teste felett 1 főegyütthatóval és $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ a polinom összes gyöke (minden többszörös gyök előfordulásához mérten van véve). Akkor teljesülnek a következő egyenlőségek, melyeket *Viète-formuláinak* nevezünk:

17. Irreducibilis polinomok.

Polinomok a racionális számok teste felett

Legyen P egy tetszőleges számtest, $P[x]$ a P test feletti polinomok gyűrűje. Az n -edfokú $(n \in \mathbb{N}) f(x) \in P[x]$ polinomot *reducibilisnek* nevezzük a P test felett, ha van nem null n -től kisebb k -adfokú osztója. Az ellenkező esetben az $f(x)$ polinomot *irreducibilisnek* nevezzük a P test felett.

Megjegyzés 1. A fent említett irreducibilis polinom meghatározása ekvivalens az előző fejezetben szereplő irreducibilis polinom meghatározásával.

Az irreducibilis polinomok tulajdonságai a P test felett:

- I. *Tetszőleges elsőfokú polinom irreducibilis.*
- II. *Ha a $p(x)$ polinom irreducibilis, akkor a P test bármely c elemére a $cp(x)$ polinom is irreducibilis.*
- III. *Ha $f(x)$ tetszőleges polinom, $p(x)$ irreducibilis polinom, akkor az $f(x)$ vagy osztódik $p(x)$ -re, vagy ezek a polinomok relatív prímek.*
- IV. *Ha az $f(x)$ és $g(x)$ polinomok szorzata osztódik az irreducibilis $p(x)$ polinomra, akkor legalább az egyik ezen tényezők közül osztódik $p(x)$ -re.*

Tétel 1. *Tetszőleges n -edfokú $(n \in \mathbb{N}) f(x)$ polinom a $P[x]$ gyűrűből felbontható irreducibilis polinomok szorzataként (vagyis a P test felett felbontódik irreducibilis polinomok szorzatába).*

Tétel 2. *Ha az $f(x)$ polinom a $P[x]$ gyűrűből kétféle módon is felbontható irreducibilis polinomok szorzataként:*

$$f(x) = p_1(x)p_2(x) \cdots p_s(x) = q_1(x)q_2(x) \cdots q_t(x),$$

akkor $s = t$ és létezik olyan s -ed rendű δ permutáció, hogy $p_i(x) = c_i q_{\delta(i)}(x) (i = 1, \dots, s)$, ahol $c_1, \dots, c_s$ a P test valamely nem nullás elemei.

Következmény 1. *Bármely $f(x)$ polinom a $P[x]$ gyűrűből egyértelműen felbontható a szorzandók követési rendjének pontosságával irreducibilis polinomok szorzataként, melyeknek főegyütthatói eggyel egyenlők:*

$$f(x) = a_0 p_1(x)p_2(x) \cdots p_s(x), \quad (1)$$

ahol a_0 – az $f(x)$ polinom főegyütthatója.

Legyen a $p(x)$ irreducibilis polinom az $f(x)$ polinom osztója. Akkor létezik olyan k természetes szám, hogy az $f(x)$ polinom osztódik $p(x)^k$ -ra és nem osztódik a $p(x)^{k+1}$

polinomra. Ebben az esetben a $p(x)$ polinomot az $f(x)$ k -szoros szorzójának nevezzük. Ha a $p(x)$ irreducibilis polinom az $f(x)$ egyszeres szorzója, akkor *egyszerűnek* is szokták nevezni.

Legyenek adottak az (1) felbontásban a $p_1(x), p_2(x), \dots, p_l(x)$ irreducibilis szorzók páronként különbözőek és bármely másik szorzó ezek egyikével egyenlő. Ha $p_i(x)$ az $f(x)$ polinom k_i -szoros szorzója ($i = 1, 2, \dots, l$), akkor az (1) felbontást felírhatjuk a következőképpen:

$$f(x) = a_0 p_1^{k_1}(x) p_2^{k_2}(x) \cdots p_l^{k_l}(x). \quad (2)$$

Tétel 3. Ha $f(x)$ és $g(x)$ polinomok felbontása irreducibilis szorzókra van megadva, akkor ezen polinomok legnagyobb közös $d(x)$ osztója egyenlő a tényezők szorzatával, melyek egyidejűleg mind a két felbontásban megtalálhatóak, emellett a $d(x)$ polinom minden $p(x)$ szorzójának multiplicitása egyenlő az $f(x)$ és $g(x)$ polinomok $p(x)$ multiplicitásai közül a kisebbikkel.

Tétel 4. Ha $p(x)$ az $f(x)$ polinom k -szoros irreducibilis tényezője és $k \geq 2$, akkor a $p(x)$ a polinom deriváltjának $(k - 1)$ -szoros tényezője lesz. Ha $p(x)$ az $f(x)$ polinom egyszerű szorzója, akkor az $f'(x)$ és $p(x)$ polinomok relatív prímek.

Legyen adott $f(x)$ a $\mathbb{Q}$ racionális test feletti polinom. Ha az $f(x)$ polinom összes együtthatója egész szám, akkor ezek után az $f(x)$ polinomot *egész számúnak* nevezzük.

Tétel 5. (Eisenstein). Legyen adott a következő egész számú polinom:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \in \mathbb{Q}[x].$$

Ha létezik olyan egész p prím szám, hogy:

- 1) az a_0 főegyüttható nem osztható p -re,
- 2) az összes többi együttható osztható p -re,
- 3) az a_n szabad tag nem osztható p^2 -re,

akkor az $f(x)$ polinom irreducibilis a $\mathbb{Q}$ test felett.

Következmény 2. Bármely természetes n számra létezik n -edfokú irreducibilis polinom a racionális számok teste felett.

Tétel 6. Ha az α egész szám az $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ egész számú polinom gyöke, akkor az α ezen polinom szabad tagjának osztója. Mindemellett, ha $\alpha \neq \pm 1$, akkor az $\frac{f(1)}{\alpha-1}$ és $\frac{f(-1)}{\alpha+1}$ racionális számok egész számok lesznek.

Tétel 7. Ha az egész számú polinom, melynek főegyütthatója egyenlő eggyel, rendelkezik racionális gyökkel, akkor ez a gyök egy egész szám.

Tétel 8. Legyen

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n \in \mathbb{Q}[x]$$

n -edfokú egész számú polinom és $\xi_1, \dots, \xi_k$ a következő polinom összes egész gyöke $g(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$. Akkor $\frac{\xi_1}{a_0}, \dots, \frac{\xi_k}{a_0}$ az $f(x)$ összes racionális gyöke.

18. A lineáris tér axiómái. A tér bázisa és dimenziója

Legyen F egy tetszőleges test, melynek elemeit kis görög betűkkel fogjuk jelölni, 1 az F test egységeleme, 0 az F test null eleme.

Legyen L egy tetszőleges nem üres halmaz, melynek elemeit kis latin betűkkel fogjuk jelölni.

Az L halmazt *lineáris térnek* nevezzük az F test felett, ha az L halmazban teljesülnek a következő feltételek (a lineáris tér axiómái):

- I. Az összeadás művelete, mely minden rendezett a, b párnak az L halmazból megfeleltet egyetlen elemet ezen halmazból, melyet az a és b elemek *összegének* nevezünk és a következőképpen jelöljük: $a + b$.
- II. A szorzás művelete, mely minden $\alpha \in F$ elemre és $a \in L$ elemre megfeleltet egyetlen elemet az L halmazból, melyet az α és a elemek *szorzatának* nevezünk és a következőképpen jelöljük: αa .
- III. A lineáris tér axiómái:
 - 1) $(a + b) + c = a + (b + c)$;
 - 2) $a + b = b + a$;
 - 3) létezik olyan $\bar{0}$ elem az L -ből, hogy $\forall a \in L \ a + \bar{0} = a$;
 - 4) $\forall a \in L$ létezik olyan a' elem az L -ből, hogy $a + a' = \bar{0}$;
 - 5) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$;
 - 6) $1a = a$;
 - 7) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$;
 - 8) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$; $(\forall a, b, c \in L; \forall \alpha, \beta \in F).$

1. gyakorlat. Felhasználva a lineáris tér axiómáit bizonyítsuk, hogy:

- a) egyetlen $\bar{0}$ elem létezik az L halmazban, mely kielégíti a 3-as axiómát;
- b) minden a -ra az L -ből csakis egy olyan a' elem létezik az L halmazban, mely kielégíti a 4-es axiómát.

Az L lineáris tér elemeit *vektoroknak* fogjuk nevezni (függetlenül azok természetétől). Az egyetlen $\bar{0}$ elemet az L -ben az L tér *null vektorának* nevezzük. Minden a elemre az L -ből az egyetlen a' elemet, amely kielégíti a 4-es axiómát az a vektor *inverz vektorának* nevezzük és $(-a)$ -val jelöljük.

2. gyakorlat. Felhasználva a lineáris tér axiómáit bizonyítsuk, hogy:

- 1) $0a = \bar{0}$;
- 2) $\alpha\bar{0} = \bar{0}$;
- 3) $\alpha a = \bar{0} \Leftrightarrow \alpha = 0$ vagy $a = \bar{0}$;
- 4) $(-1)a = -a$.

Két vektor különbségét, három vagy négy vektor összegét, s í. t. a következő szabályok alapján fejezhetjük ki:

$$a - b = a + (-b) \quad (a + (-b) = a + (-1)b);$$

$$a + b + c = (a + b) + c;$$

$$a + b + c + d = (a + b + c) + d;$$

s í. t.

Az L lineáris tér bármely rendezett vektorok halmazát *vektorrendszernek* fogjuk nevezni. Legyen adott az $a_1, \dots, a_s$ vektorrendszer az L -ből, $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ az F test tetszőleges elemei. Az L tér $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_s a_s$ vektorát az $a_1, \dots, a_s$ vektorok *lineáris kombinációjának* nevezzük a megfelelő $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ együtthatókkal.

Példák lineáris térre

1. Az $L = \{a\}$ null tér egyetlen vektorból áll, melyre a következő tulajdonságok teljesülnek:

$$a + a = a, \quad \alpha a = a \quad (\forall \alpha \in F).$$

Nyilvánvaló, hogy az a elem null vektor.

2. F^n tér. Az F test bármely rendezett n elemeinek összességét n -dimenziós vektornak nevezzük az F test felett. Az n -dimenziós vektort az F test felett $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ -nel jelöljük, ahol α_1 az első komponense, α_2 a második komponense, s í. t., α_n pedig az n -edik komponense ennek a vektornak. Két n -dimenziós vektort az F test felett akkor nevezünk egyenlőnek, ha a megfelelő komponensek egyenlők. Jelöljük F^n -nel az összes n -dimenziós vektort az F test felett. Bevezetjük az F^n -en a következő műveleteket:

I. Ha $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in F^n$ és $b = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in F^n$, akkor az $a + b$ összeget a következő szabály szerint adjuk meg:

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n).$$

Nyilvánvaló, hogy $a + b \in F^n$.

II. Ha $\gamma \in F$ és $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in F^n$, akkor a γa szorzatot a következő szabály szerint adjuk meg:

$$\gamma a = (\gamma \alpha_1, \dots, \gamma \alpha_n).$$

Nyilvánvaló, hogy $\gamma a \in F^n$.

3. gyakorlat. Felhasználva az F test axiómáit mutassuk meg, hogy a bemutatott műveletek az F^n elemein kielégítik a lineáris tér 1) – 8) axiómáit.

Az F^n teret az adott műveletekkel n -dimenziós vektortérnek nevezzük az F test felett. A lineáris tér axiómáinak ellenőrzéséhez leszögezzük, hogy az F^n tér null vektora $(0, \dots, 0)$ n -dimenziós vektor, és az $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ n -dimenziós vektor inverz vektora pedig a $(-a)$ vektor, melynek komponensei $(-\alpha_1, \dots, -\alpha_n)$.

3. $C_{[\alpha, \beta]}$ tér. Legyen $F = \mathbb{R}$ a valós számok teste, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és $\alpha < \beta$. $C_{[\alpha, \beta]}$ -vel jelöljük az összes $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvényt az $[\alpha, \beta]$ szakaszon. Az $f, g: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket egyenlőnek nevezzük, ha

$$f(x) = g(x) \quad (\forall x \in [\alpha, \beta]).$$

Bevezetjük a következő műveleteket a $C_{[\alpha, \beta]}$ elemei felett:

I. Ha $f, g \in C_{[\alpha, \beta]}$, akkor az $(f + g)$ összeget a következő szabály szerint adjuk meg:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad (\forall x \in [\alpha, \beta]).$$

II. Ha $\gamma \in \mathbb{R}$ és $f \in C_{[\alpha, \beta]}$, akkor a γf szorzatot a következő szabály szerint adjuk meg:

$$(\gamma f)(x) = \gamma f(x) \quad (\forall x \in [\alpha, \beta]).$$

A matematikai analízis ismert tételeiből következik, hogy $(f + g)$ és γf folytonos függvények az $[\alpha, \beta]$ szakaszon, tehát $(f + g), (\gamma f) \in C_{[\alpha, \beta]}$.

4. gyakorlat. Mutassuk meg, hogy a $C_{[\alpha, \beta]}$ lineáris teret alkot az $\mathbb{R}$ test felett a bevezetett műveletekre.

Legyen L – lineáris tér az F test felett és A az L nem üres részhalmaza. Az A halmazt zártnak fogjuk nevezni, ha teljesülnek a következő feltételek:

1) Két tetszőleges vektor összege az A -ból szintén egy vektor lesz az A -ból.

2) Az F tetszőleges elemének és az A tetszőleges vektorának a szorzata szintén egy vektor lesz az A -ból.

5. gyakorlat. Mutassuk meg, hogy az L lineáris tér nem üres A részhalmaza az F test felett akkor és csak akkor lesz lineáris tér az F test felett az L -ben megadott műveletekre, ha A zárt ezekre a műveletekre.

Legyen L egy lineáris tér az F test felett. Az L tér $a_1, \dots, a_s$ vektorrendszerét *lineárisan összefüggő* rendszernek nevezzük, ha az F testnek léteznek olyan $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ elemei, melyek közül nem mindegyik nulla és teljesül rájuk, hogy:

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_s a_s = \bar{0} \quad (\bar{0} \text{ az } L \text{ null vektora}).$$

Az L tér $a_1, \dots, a_s$ vektorrendszerét *lineárisan független* rendszernek nevezzük, ha az F test bármely $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ elemére, melyek közül nem mindegyik nulla, az $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_s a_s$ lineáris kombináció nem lesz null vektora az L térnek.

Az L tér $a_1, \dots, a_s$ vektorrendszere *lineárisan független*, ha az $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_s a_s = \bar{0}$ ($\alpha_1, \dots, \alpha_s \in F$) egyenlőség csak abban az esetben teljesül, amikor $\alpha_1 = \dots = \alpha_s = 0$.

Az L tér $a_1, \dots, a_s$ vektorrendszere *lineárisan összefüggő (független)*, ha az $x_1 a_1 + \dots + x_s a_s = \bar{0}$ egyenletnek az F test felett $x_1, \dots, x_s$ ismeretlenekkel van legalább egy nullától eltérő megoldása (nincs nullától eltérő megoldása).

Az L tér $a, b, \dots, c$ vektorait lineárisan összefüggőnek (függetlennek) fogjuk tekinteni, ha az általuk alkotott vektorrendszer lineárisan összefüggő (független).

A lineáris összefüggés kritériuma. Az L tér adott vektorrendszere lineárisan összefüggő akkor és csak akkor, ha az adott vektorrendszer egyik vektorát fel lehet írni a többi vektor lineáris kombinációjaként.

Két tétel a rendszerről és a részrendszerekről.

1. Ha az L lineáris tér adott vektorrendszerének bármely részrendszere lineárisan összefüggő, akkor az egész vektorrendszer lineárisan összefüggő.
2. Ha az L lineáris tér vektorrendszere lineárisan független, akkor bármely részrendszere ennek a rendszernek szintén lineárisan független.

Legyen L egy lineáris tér az F test felett. Az L teret *végtelen dimenziós térnek* nevezzük, ha bármely természetes n számra létezik n lineárisan független vektor az L térben. Ha valamely természetes m -re az L tér tetszőleges m vektora lineárisan összefüggő vektor, akkor az L teret *véges dimenziós térnek* nevezzük.

A véges dimenziós L lineáris tér *dimenziójának* az F test felett azt a számot nevezzük, mely az L tér lineárisan független vektorainak legnagyobb számával egyenlő. Ha L null tér, akkor a dimenziója nullával egyenlő. A végtelen dimenziós tér dimenziója ∞ -el egyenlő. Az L tér dimenzióját az F test felett a következőképpen jelöljük: $\dim_F L$ (vagy $\dim L$).

6. gyakorlat. 1) Mutassuk meg, hogy az F test lineáris teret alkot az F test felett. Határozzuk meg a $\dim_F F$ -t. 2) Mutassuk meg, hogy a komplex számok $\mathbb{C}$ halmaza lineáris teret alkot a valós számok $\mathbb{R}$ halmaza és a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza felett. Keressük meg a $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ -t és $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ -t.

Legyen L egy lineáris tér az F test felett. Az L tér $a_1, \dots, a_s$ vektorrendszerét az L tér *bázisának* nevezzük, ha teljesül a következő 2 feltétel:

- 1) az $a_1, \dots, a_s$ rendszer lineárisan független;
- 2) az L tér bármely vektora az $a_1, \dots, a_s$ rendszer lineáris kombinációja, vagyis az $a_1, \dots, a_s$ az L tér generátor(alkotó) rendszere.

Tétel a lineáris kombinációkról. Adott s vektor lineáris kombinációi között nem több mint s lineárisan független.

1. következmény (Tétel a bázisról és a dimenzióról). A véges dimenziós nem null L lineáris térben az F test felett léteznek bázisok. Bármely bázis vektorainak száma az L térben $\dim_F L$ -el egyenlő.

Az F^n tér véges dimenziós lineáris teret alkot az F test felett, $\dim_F F^n = n$. n -dimenziós vektorok rendszere:

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, \dots, 0, 0), \dots, \quad e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

az F tér bázisa. Ezt a bázist az F^n tér *kanonikus bázisának* nevezzük.

2. gyakorlat. Mutassuk meg, hogy az adott n , n -méretű vektorrendszer az F^n térnek bázis rendszerét alkotja akkor és csak akkor, ha a determináns, mely a vektorok komponenseiből van felépítve, nullától eltérő.

3. gyakorlat. Legyen $a_1, \dots, a_s$ az L tér tetszőleges vektorrendszere. Mutassuk meg, hogy a következő állítások közül csak is egy igaz:

- 1) az $a_1, \dots, a_s$ rendszer lineárisan összefüggő;
- 2) az $a_1, \dots, a_s$ rendszer az L tér bázisa;
- 3) létezik olyan a vektor az L -ből, hogy az $a_1, \dots, a_s, a$ rendszer lineárisan független.

Következmény. A véges dimenziós L tér bármely lineárisan független vektorrendszere az F test felett kiegészíthető (kibővíthető) ezen tér valamely bázisához.

19. Átmeneti mátrix egyik bázisból a másikba

Legyen L egy véges dimenziós lineáris tér az F test felett, az $a_1, \dots, a_n$ vektorrendszer pedig az L tér bázisa ($n = \dim_F L$).

Tétel a kifejezésről. Az L tér minden a vektorára létezik egy és csakis egy olyan $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ rendszer az F testből, hogy az a vektor kifejezhető a következő alakban:

$$a = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n.$$

Az a vektor kapott alakját a vektor *kifejezésének* nevezzük az L tér $a_1, \dots, a_n$ bázisa szerint. Az $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ együtthatókat az a vektor *koordinátáinak* nevezzük az $a_1, \dots, a_n$ bázisban (α_1 az *első koordináta*, α_2 a *második koordináta*, s í. t., α_n az *n-edik koordináta*). Az n -méretű $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ vektort az a vektor *koordinátasorának* nevezzük. Nyilvánvaló, hogy a vektor komponensei $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ megegyeznek annak koordinátaival a bázisban, ha a bázis rendszer az F^n -ben található kanonikus bázis $e_1, \dots, e_n$.

Tétel a koordinátaalakban lévő vektorokkal való műveletekről. *Legyen kiválasztva az L térben egy bázis és a tér vektorai legyenek kifejezve ezen bázis szerint. Akkor a vektorok összegeinek koordinátái ebben a bázisban egyenlők ezen vektorok megfelelő koordinátáinak összegével. Ahhoz, hogy megkapjuk a test eleme és a tér vektora szorzatának a koordinátáit, meg kell szoroznunk a vektor koordinátáit a test elemére.*

Legyen $L = F^n$ és $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in F^n$. Akkor $a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$. Az F^n tér $e_1, \dots, e_n$ kanonikus bázisa az egyetlen olyan bázis, melyben egy tetszőleges n -dimenziós vektor koordinátái megegyeznek ezen vektor megfelelő komponenseivel.

Legyen L egy n -dimenziós lineáris tér az F test felett, az $a_1, \dots, a_n; a'_1, \dots, a'_n$ vektorrendszerek pedig az L tér két bázisa. Kifejezzük az egyik bázis vektorait a másik bázis szerint:

$$a'_1 = \tau_{11}a_1 + \tau_{21}a_2 + \cdots + \tau_{n1}a_n,$$

$$a'_2 = \tau_{12}a_1 + \tau_{22}a_2 + \cdots + \tau_{n2}a_n,$$

.....

$$a'_n = \tau_{1n}a_1 + \tau_{2n}a_2 + \cdots + \tau_{nn}a_n,$$

ahol $\tau_{i,j} \in F (1 \leq i, j \leq n)$. Akkor a

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \cdots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \cdots & \tau_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \cdots & \tau_{nn} \end{pmatrix} \text{ mátrixot}$$

átmeneti mátrixnak nevezzük az $a_1, \dots, a_n$ bázisból az $a'_1, \dots, a'_n$ bázisba. A T mátrix nem elfajuló, a T^{-1} pedig átmeneti mátrix az $a'_1, \dots, a'_n$ bázisból az $a_1, \dots, a_n$ bázisba. Kifejezzük az L tér tetszőleges a vektorát mindkét bázis szerint:

$$a = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n \quad (\alpha_i \in F),$$

$$a = \alpha'_1 a'_1 + \dots + \alpha'_n a'_n \quad (\alpha'_i \in F).$$

Legyen

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix}$$

– az a vektor koordinátaoszlopai. Akkor

$$X = TX'.$$

A kapott képletet a vektor koordinátáinak *transzformációs képletének* (vagy tágabb értelemben képleteinek) nevezzük, egyik bázisból a másikba.

Legyen $L = F^n$ és $a_1, \dots, a_n$ n -dimenziós vektortér tetszőleges bázisa. Ha felírjuk a vektorokat egy mátrix oszlopaiba, egy átmeneti mátrixot kapunk az $e_1, \dots, e_n$ kanonikus bázisból az $a_1, \dots, a_n$ bázisba.

20. Lineáris terek izomorfizmusa

Legyenek L és L' két lineáris tér ugyanazon F test felett. A $\varphi: L \rightarrow L'$ leképezést az L tér *lineáris leképezésének* nevezzük az L' térre, ha teljesülnek a következő feltételek:

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) \quad (\forall a, b \in L),$$

$$\varphi(\alpha a) = \alpha \varphi(a) \quad (\forall \alpha \in F, \forall a \in L).$$

Az L lineáris tér $\varphi: L \rightarrow L'$ leképezését az L' lineáris térre *izomorfizmusnak* nevezzük, ha φ ezen lineáris terek lineáris leképezése és φ az L halmaz kölcsönösen egyértelmű(bijektív) leképezése az L' halmazra. A φ kölcsönös egyértelműsége azt jelenti, hogy az L' minden vektora, képe valamely vektornak az L -ből(szürjektív) és az L különböző vektorainak képei különböző vektorok az L' -ben(injektív).

Azt mondjuk, hogy az L lineáris tér *izomorf* az L' térrel, ha létezik a lineáris terek $\varphi: L \rightarrow L'$ izomorfizmusa. Az $L \cong L'$ kifejezés azt jelenti, hogy az L tér izomorf az L' térrel. Az izomorfizmus tulajdonságai:

- 1) $L \cong L$ (reflexivitás);
- 2) $L \cong L' \Leftrightarrow L' \cong L$ (szimmetria);
- 3) $L \cong L', L' \cong L'' \Rightarrow L \cong L''$ (tranzitivitás).

(L'' is egy lineáris tér az F test felett).

Osztályozási tétel. Legyen L egy véges dimenziós lineáris tér az F test felett és $\dim_F L > 0$. Akkor $L \cong F^{\dim_F L}$. Ha $n \neq m$, akkor az F^n tér nem izomorf az F^m térrel.

1. gyakorlat. Legyen a $\varphi: L \rightarrow L'$ az L és L' lineáris terek izomorfizmusa az F test felett és $a_1, \dots, a_s$ az L tér vektorrendszere. Mutassuk meg, hogy ez a rendszer lineárisan összefüggő, lineárisan független vagy bázis az L -ben akkor és csak akkor, ha a $\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_s)$ képek rendszere lineárisan összefüggő, lineárisan független vagy bázis az L' -ben megfelelően.

2. gyakorlat. Legyen $\mathbb{R}^{n*}$ az összes n -dimenziós vektorok halmaza az $\mathbb{R}$ test felett, melynek komponensei mind pozitív valós számok. Bevezetjük az $\mathbb{R}^{n*}$ -ban a következő műveleteket:

I) ha $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), b = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{n*}$, akkor $a + b = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$;

II) ha $\gamma \in \mathbb{R}$ és $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n*}$, akkor $\gamma a = (\gamma \alpha_1, \dots, \gamma \alpha_n)$.

- 1) Mutassuk meg, hogy az $\mathbb{R}^{n*}$ lineáris tér az $\mathbb{R}$ test felett a fenti műveletekre.
- 2) Mi az $\mathbb{R}^{n*}$ null vektora?
- 3) Melyik az $\mathbb{R}^{n*}$ tér $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ vektorának inverz vektora?
- 4) Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^{n*} \cong \mathbb{R}^n$.

21. A lineáris tér alterei. Műveletek alterekkel

Legyen adott L egy lineáris tér az F test felett. Az L tér nem üres A részhalmazát az L tér *alterének* nevezzük, ha az A halmaz lineáris tér az F test felett az L -ben bevezetett műveletekre.

1. gyakorlat. Az L nem üres A részhalmaza akkor és csak akkor lesz az L altere, ha az A halmaz zárt a vektorok feletti műveletekre.

Az altér kritériuma. Az L lineáris tér nem üres A részhalmaza az F test felett akkor és csak akkor lesz az L altere, ha bármely a és b vektorokra az A -ból és bármely α és β elemre az F -ből az $\alpha a + \beta b$ vektor az A eleme.

Példák alterekre.

1. $A = \{\vec{0}\}$ és $A = L$ alterei az L -nek (ezek úgy nevezett *triviális alterek*).

2. Legyen adott az $a_1, \dots, a_s$ vektorrendszer az L -ben. Jelöljük az $a_1, \dots, a_s$ rendszer összes lehetséges lineáris kombinációjának halmazát a következőképpen:

$$\langle a_1, \dots, a_s \rangle = \{ \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_s a_s \mid \alpha_1, \dots, \alpha_s \in F \}.$$

Akkor az $\langle a_1, \dots, a_s \rangle$ halmaz altere az L -nek. Ezt az alteret az $a_1, \dots, a_s$ vektorokra húzott *lineáris buroknak* nevezzük.

3. Az n -ismeretlenes lineáris homogén egyenletrendszer megoldásainak tere az F test felett, altere az F^n -nek.

2. gyakorlat. Legyen L véges dimenziós lineáris tér az F test felett. Mutassuk meg, hogy az L bármely altere az L tér valamely vektorrendszerére húzott lineáris burok lesz.

3. gyakorlat. Mutassuk meg, hogy az F^n bármely altere egy n -ismeretlenes lineáris homogén egyenletrendszer megoldásainak tere az F test felett.

4. gyakorlat. Adott $a_1, \dots, a_s$ n -dimenziós vektor az F test felett. Keressük meg azt az n -ismeretlenes lineáris homogén egyenletrendszert az F felett melynek megoldásainak tere $\langle a_1, \dots, a_s \rangle$.

Megoldás. Felírjuk az n -ismeretlenes lineáris homogén egyenletrendszert, melynek mátrixa $a_1, \dots, a_s$ vektorok koordinátáinak soraiból áll. Megkeressük ezen egyenletrendszer fundamentális rendszerét.

Legyen $b_1, \dots, b_k$ egyike a megoldások fundamentális rendszerének. Felírjuk a $b_1, \dots, b_k$ vektorokat egy mátrix soraiként. A lineáris homogén egyenletrendszer a kapott mátrixszal lesz a keresett egyenletrendszer mátrixa.

Műveletek az alterekkel. Legyenek A és B nem üres részhalmazai az L lineáris térnek az F test felett. $(A + B)$ -vel jelöljük az összes $(x + y)$ vektor halmazát, ahol x az A halmazt, y

pedig a B halmazt futja át. Az $(A + B)$ -t az A és B halmazok *összegének* nevezzük. Az A és B halmazok összes közös vektorát A és B *metszetének* nevezzük és a következőképpen jelöljük: $A \cap B$.

Tétel az alterek összegéről és metszetéről. Az L tér altereinek összege és metszete az L tér alterei lesznek. Ha A és B véges dimenziós alterei az L -nek, akkor

$$\dim_F(A + B) = \dim_F A + \dim_F B - \dim_F(A \cap B).$$

Az A és B alterek $A + B$ összegét az L -ben *direkt összegnek* nevezzük, ha minden $z \in A + B$ vektorra csak egy olyan $x \in A$ és egy olyan $y \in B$ vektor létezik, hogy $z = x + y$.

A direkt összeg kritériuma. Az A és B alterek $A + B$ összege akkor és csak akkor *direkt összeg*, ha ezen alterek $A \cap B$ metszete null altér.

5. gyakorlat. Bizonyítsuk be, hogy az A és B alterek $A + B$ összege akkor és csak akkor lesz direkt összeg, ha egyetlen olyan a vektor létezik az A -ból és egyetlen olyan b vektor létezik a B -ből, hogy $a + b = \vec{0}$.

6. gyakorlat. Legyenek A és B az L tér véges dimenziós alterei. Bizonyítsuk be, hogy az $A + B$ összeg akkor és csak akkor lesz direkt összeg, ha a következő feltételek közül legalább az egyik teljesül: 1) $\dim(A \cap B) = 0$; 2) $\dim(A + B) = \dim A + \dim B$.

7. gyakorlat. Bizonyítsuk be, hogy az L tér direkt összege az A és B altereinek, ha teljesülnek a következő feltételek: 1) $A + B = L$; 2) $A \cap B = \{\vec{0}\}$.

8. gyakorlat. Legyen A nem triviális altere a véges dimenziós lineáris L térnek az F test felett. Bizonyítsuk be, hogy létezik az L -nek olyan B altere, hogy az L az A és B alterek direkt összege lesz.

9. gyakorlat. Legyen adott egy n -ismeretlenes lineáris homogén egyenletrendszer a valós számok $\mathbb{R}$ teste felett és ezen rendszer nem nulla A mátrixa. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbb{R}^n$ tér direkt összege lesz ezen rendszer megoldásai terének és az A mátrix soraira húzott lineáris buroknak.

Azt mondjuk, hogy az F test feletti L lineáris tér *direkt összege* lesz a saját $A_1, \dots, A_s$ nem null altereinek, ha minden $x \in A$ vektorra egyetlen olyan $x_1 \in A_1, \dots, x_s \in A_s$ vektorok készlete létezik, hogy: $x = x_1 + \dots + x_s$.

22. Alterek szerinti mellékosztályok. Faktor-terek

Legyen adott az L lineáris tér az F test felett, A az L altere és $x \in L$.

Az $x + A = \{x + a \mid a \in A\}$ halmazt az L tér A altér szerinti *mellékosztályának* nevezzük, x pedig *a mellékosztály képviselője (reprezentánsa)*.

Példa a mellékosztályokra.

Legyen adott egy n -ismeretlenes megoldható lineáris inhomogén egyenletrendszer az F test felett és egy n -dimenziós b vektor, mely annak megoldása. Legyen A a megfelelő lineáris homogén (redukált) egyenletrendszer megoldásainak a tere. Akkor A az F^n altere, a $b + A$ mellékosztály pedig az adott egyenletrendszer megoldásainak halmaza.

1. gyakorlat. Legyen adott A nem triviális altere az F^n -nek és b egy tetszőleges n -dimenziós vektor az F^n -ből. Keressünk olyan n -ismeretlenes lineáris inhomogén egyenletrendszert az F test felett, hogy ezen rendszer megoldásainak halmaza megegyezzen a $b + A$ mellékosztállyal.

Megoldás. Megkeressük az n -ismeretlenes lineáris homogén egyenletrendszert az F test felett, melynek megoldásainak halmaza megegyezik A -val. A kapott homogén egyenletrendszer mátrixa azonos lesz a keresett inhomogén egyenletrendszer mátrixával. Most már csak meg kell keresnünk ezen egyenletek szabad tagjait. Ehhez a megtalált egyenletek mindegyikébe behelyettesítjük a b vektort (az ismeretlenek helyett a b vektor megfelelő komponenseit). Az F test ezáltal kapott eleme lesz a keresett egyenletrendszer megfelelő inhomogén egyenletének szabad tagja.

A mellékosztályok tulajdonságai az adott altérben. Legyen adott A az L lineáris tér altere, és $x, y \in L$. Akkor:

- 1) ha $x \in A$, akkor $x + A = A$;
- 2) ha $x + A \neq y + A$, akkor $(x + A) \cap (y + A) = \emptyset$;
- 3) $x + A = y + A \Leftrightarrow x - y \in A$;
- 4) $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$, tehát az A altér mellékosztályainak összege ezen altér mellékosztálya lesz;
- 5) $\gamma(x + A) \subseteq \gamma x + A$ ($\forall \gamma \in F$) és ha $\gamma \neq 0$, akkor $\gamma(x + A) = \gamma x + A$.

Bevezetjük az $L/A = \{x + A \mid x \in L\}$ jelölést, mely az L tér A altér szerinti összes mellékosztályának halmazát jelöli.

Tétel. Az L/A halmaz lineáris teret alkot az F test felett a mellékosztályok összeadásának műveletére

$$(x + A) + (y + B) = (x + y) + A \quad (\forall x, y \in L),$$

és a mellékosztályok F test elemére való szorzására, mely a következő szabály szerint van meghatározva:

$$\gamma(x + A) = \gamma x + A \quad (\forall \gamma \in F, \forall x \in L).$$

Az F test feletti L/A lineáris teret az L tér A altér szerinti faktor-terének nevezzük.

Tétel a három tér dimenziójáról. Legyen adott L egy véges dimenziós lineáris tér az F test felett, A pedig az L altere és L/A az L tér A altér szerinti faktortere. Akkor $\dim_F L = \dim_F A + \dim_F (L/A)$.

2. gyakorlat. Legyen az előző tétel feltételében a $B_1, \dots, B_s$ mellékosztályok rendszere az L/A bázisa és $b_1, \dots, b_s$ ezen osztályok képviselőinek rendszere ($b_i \in L, B_i = b_i + A$ ($i = 1, \dots, s$)). Bizonyítsuk be, hogy ha a $b_1, \dots, b_s$ rendszert kiegészítjük az A tér bázisával, akkor az L tér bizonyos bázisát kapjuk.

Megjegyezzük, hogy $L/\{0\} = L$ és L/L null tér lesz.

23. Lineáris terek lineáris leképezése

1. gyakorlat. Az F test feletti L térnek $\varphi: L \rightarrow L'$ leképezése ugyanezen test feletti L térre akkor és csak akkor lineáris leképezés, ha $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$ az L tér tetszőleges x, y vektoraira és az F test tetszőleges α, β elemeire.

A lineáris leképezés alapvető tulajdonságai. Legyen $\varphi: L \rightarrow L'$ lineáris leképezése az L lineáris térnek az L' lineáris térre az F test felett. Akkor:

- 1) $\varphi(0) = 0'$ (0 az L nullája, $0'$ az L' nullája);
- 2) $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ ($\forall x \in L$);
- 3) ha $a_1, \dots, a_s \in L$ és $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in F$, akkor $\varphi(\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_s a_s) = \alpha_1 \varphi(a_1) + \dots + \alpha_s \varphi(a_s)$;
- 4) ha $a_1, \dots, a_s$ lineárisan összefüggő vektorrendszer az L -ben, akkor ezek képeinek $\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_s)$ rendszere is lineárisan összefüggő az L' -ben;
- 5) az $a_1, \dots, a_s$ rendszer az L -ből lineárisan független, ha azok képeinek $\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_s)$ rendszere lineárisan független.

Legyen $\varphi: L \rightarrow L'$ lineáris leképezése az L lineáris térnek az L' lineáris térre. A

$$\text{Ker}\varphi = \{x \in L \mid \varphi(x) = \bar{0}'\}$$

halmazt (azaz minden olyan vektorok halmazát az L -ből melynek képe az L' -ben null vektorral egyenlő) a φ leképezés *magjának* nevezzük, míg az

$$\text{Im}\varphi = \{\varphi(x) \mid x \in L\}$$

halmazt (azaz minden olyan vektorok halmazát az L' -ből, melyek képei az L -ből vett vektoroknak) a φ leképezés *képének* nevezzük.

Alaptétel a lineáris leképezések homomorfizmusáról. Legyen $\varphi: L \rightarrow L'$ lineáris leképezése az L lineáris térnek az L' lineáris térre az F test felett. Akkor:

- 1) $\text{Ker}\varphi$ az L altere;
- 2) $\text{Im}\varphi$ az L' altere;
- 3) $L/\text{Ker}\varphi \cong \text{Im}\varphi$.

A $\text{Ker}\varphi$ és $\text{Im}\varphi$ altereket megfelelően *nulltérnek* és *képtérnek* nevezzük.

2. gyakorlat. Legyen L véges dimenziós lineáris tér az F test felett, L' egy tetszőleges lineáris tér az F test felett és $\varphi: L \rightarrow L'$ lineáris leképezés. Mutassuk meg, hogy:

$$\dim_F L = \dim_F \text{Ker}\varphi + \dim_F \text{Im}\varphi.$$

Tétel a lineáris leképezés egzisztencia és unicitásáról. Legyen L véges dimenziós lineáris tér az F test felett az $a_1, \dots, a_n$ bázissal és L' tetszőleges lineáris tér az F test felett.

Bizonyítás. Kifejezzük az L tér minden vektorát az $a_1, \dots, a_n$ bázis szerint. Legyen $a \in L$ és $a = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$ ($\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$). Legyen $\varphi(a) = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$. Ellenőriznünk kell még, hogy a φ megfelel-e a tétel feltételeinek. Ehhez (mint külön feladat) meg kell mutatni, hogy:

- Megjegyezzük, hogy nem megengedett a 2) bizonyítása az 1) ellenőrzése nélkül. A φ leképezés unicitásának bizonyítása során nem kell használni a leképezések egyenlőségéről szóló fogalmat. Két leképezés, φ és ψ akkor egyenlőek, ha van közös értelmezési tartományuk, közös értékkészletük és kielégítik a $\varphi(x) = \psi(x)$ feltételt minden x -re az értelmezési tartományból.

[illegible]
$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$
$$x = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n \quad (x_i \in F, i = 1, \dots, n)$$

az x vektor $a_1, \dots, a_n$ bázis szerinti kifejezése. Kifejezzük a $\varphi(x)$ képet az L , $b_1, \dots, b_m$ bázisa szerint: $\varphi(x) = y_1 b_1 + \dots + y_m b_m$ ($y_i \in F, i = 1, \dots, m$). Legyen X az x vektor koordinátaoszlopa, Y pedig a $\varphi(x)$ kép koordinátaoszlopa. Akkor

$$Y = AX.$$

Ezt a képletet a *vektor képe*nek *koordinátaképletének* nevezzük a φ lineáris leképezés esetén.

A lineáris leképezés mátrixainak kapcsolata a bázisok behelyettesítése esetén.

Legyen L és L' terekben az $a_1, \dots, a_n$ és $b_1, \dots, b_m$ bázisokból új bázisok kiválasztva: $a'_1, \dots, a'_n$ és $b'_1, \dots, b'_m$. Legyen A' a φ leképezés mátrixa ezen bázisokban. Akkor:

$$A' = S^{-1}AT,$$

ahol S átmeneti mátrix a $b_1, \dots, b_m$ bázisból a $b'_1, \dots, b'_m$ bázisba az L' térben, T pedig – átmeneti mátrix az $a_1, \dots, a_n$ bázisból az $a'_1, \dots, a'_n$ bázisba az L térben.

3. gyakorlat. Legyenek L és L' lineáris terek az F test felett, $n = \dim L$, $m = \dim L'$ és adott egy tetszőleges $m \times n$ méretű A mátrix az F test felett (m a sorok száma, n az oszlopok száma). Építsük fel azt a $\varphi: L \rightarrow L'$ lineáris leképezést, mely az L és L' terek előre kiválasztott bázisaiban az A mátrixot alkotja meg.

Megoldás. Legyenek az L és L' terekben kiválasztva a következő bázisok: $a_1, \dots, a_n$ az L bázisa, $b_1, \dots, b_m$ az L' bázisa. Először is adjuk meg a bázisvektorok képeit, és legyen

$$\varphi(a_i) = \alpha_{1i} b_1 + \dots + \alpha_{mi} b_m,$$

ahol $\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{mi}$ az A mátrix i -edik oszlopa ($i = 1, \dots, n$). Kifejezzük az L tér vektorait a bázis szerint. Legyen $x \in L$ és $x = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$ ($x_i \in F, i = 1, \dots, n$). Legyen $\varphi(x) = x_1 \varphi(a_1) + \dots + x_n \varphi(a_n)$ ($x \in L$). A φ leképezés az L tér minden vektorán meg van adva. Most már csak azt kell megmutatni, hogy φ lineáris leképezés $L \rightarrow L'$, és hogy a φ mátrixa az adott bázisokban megegyezik az A mátrixszal.

4. gyakorlat. A $\varphi: F^n \rightarrow F^m$ lineáris leképezés az F^n és F^m terek kanonikus bázisaiban A mátrixszal bír. Keressük meg a $\text{Ker } \varphi$ -t és az $\text{Im } \varphi$ -t.

Megoldás. $\text{Im } \varphi$ egybeesik a lineáris burokkal, mely az A mátrix oszlopaira van húzva, míg a $\text{Ker } \varphi$ egybeesik az A mátrixos lineáris homogén egyenletrendszer megoldásainak terével.

24. Műveletek lineáris leképezésekkel

Legyenek L és L' tetszőleges lineáris terek az F test felett. Az összes olyan lineáris leképezés halmazát, mely az L lineáris teret képezi le az L' lineáris térre $\text{Hom}_F(L, L')$ -el jelöljük. Bevezetjük ezen halmazon a leképezések összeadását és a leképezések szorzását az F test elemére. Legyenek φ és ψ az L tér leképezései az L' térre. A $\varphi + \psi$ összeget leképezésként határozzuk meg a következő szabály szerint:

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x) \quad (\forall x \in L).$$

Legyen $\alpha \in F$. Az $\alpha\varphi$ szorzatot leképezésként határozzuk meg, mely a következő szabály szerint határozódik meg:

$$(\alpha\varphi)(x) = \alpha\varphi(x) \quad (\forall x \in L).$$

1. gyakorlat. Mutassuk meg, hogy $\varphi + \psi$ és $\alpha\varphi$ lineáris leképezései az L térnek az L' térre.

Tétel a leképezések teréről. Az L tér L' térre való összes lineáris leképezésének $\text{Hom}_F(L, L')$ halmaza lineáris teret alkot az F test felett a lineáris leképezések összeadásának és az F test elemére való szorzásának műveleteire.

A bizonyítás a lineáris tér 8 axiómájának ellenőrzéséből áll. Például legyenek $\varphi, \psi \in \text{Hom}_F(L, L')$. Akkor

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x) = \psi(x) + \varphi(x) = (\psi + \varphi)(x) \quad (\forall x \in L).$$

Tehát $\varphi + \psi = \psi + \varphi$. Megállunk a 3. és 4. axiómáknál. A $\text{Hom}_F(L, L')$ null eleme nem más, mint egy null leképezés. A meghatározás szerint ez a leképezés az L tér minden vektorát az L' tér null vektorává alakítja. A $\varphi \in \text{Hom}_F(L, L')$ leképezés inverz leképezése (a definíció szerint) egy olyan φ' leképezés, hogy $\varphi'(x) = -\varphi(x)$ ($x \in L$) (a továbbiakban a φ' leképezést $(-\varphi)$ -vel fogjuk jelölni).

Legyen L'' egy újabb lineáris leképezés az F test felett és $\varphi: L \rightarrow L'$, $\psi: L' \rightarrow L''$ a terek leképezése. Minden $x \in L$ vektornak megfeleltetünk egy $\psi(\varphi(x))$ vektort az L'' -ből. Ez a megfeleltetés lesz az L tér leképezése az L'' térre. Ezt a leképezést a ψ és φ leképezések szorzatának nevezzük és $\psi\varphi$ -vel jelöljük. Tehát a definíció szerint:

$$(\psi\varphi)(x) = \psi(\varphi(x)) \quad (\forall x \in L).$$

Tétel a lineáris leképezések szorzatáról. Ha $\varphi: L \rightarrow L'$, $\psi: L' \rightarrow L''$ lineáris terek lineáris leképezései, akkor $\psi\varphi: L \rightarrow L''$ az L lineáris tér lineáris leképezése az L'' lineáris térre.

Legyenek L és L' véges dimenziós lineáris terek az F test felett és $\text{Hom}_F(L, L')$ az $L \rightarrow L'$ lineáris leképezések lineáris tere. Kiválasztjuk az L és L' terekben a következő bázisokat: $a_1, \dots, a_n$ az L tér bázisa ($n = \dim_F L$), $b_1, \dots, b_m$ az L' tér bázisa ($m = \dim_F L'$). Minden $\varphi: L \rightarrow L'$ lineáris leképezés mátrixát az L és L' terek kiválasztott bázisaiban A_φ -vel jelöljük. Tehát, ha φ és ψ lineáris leképezései az L térnek az L' térre, akkor:

$$A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi, \quad A_{\alpha\varphi} = \alpha A_\varphi \quad (\alpha \in F).$$

Ezek az egyenlőségek határozzák meg a lineáris leképezések műveleteinek és a mátrixműveletek közötti összefüggést.

Legyen L'' véges dimenziós tér az F test felett és $\varphi: L \rightarrow L'$, $\psi: L' \rightarrow L''$ lineáris leképezések. Kiválasztunk az L'' -ből egy $c_1, \dots, c_k$ bázist ($k = \dim_F L''$). Legyen A_φ a φ leképezés mátrixa az L és L' terek $a_1, \dots, a_n$ és $b_1, \dots, b_m$ bázisaiban, A_ψ pedig a ψ leképezés mátrixa az L' és L'' terek $b_1, \dots, b_m$ és $c_1, \dots, c_k$ bázisaiban. Akkor $A_{\psi\varphi} = A_\psi A_\varphi$.

2. gyakorlat. 1) Legyen $M_{m \times n}(F)$ az összes $m \times n$ -méretű mátrixok halmaza az F test felett. Mutassuk meg, hogy $M_{m \times n}(F)$ lineáris teret alkot az F test felett a mátrixok összeadása és a test elemére való szorzása szerint. 2) Legyenek L és L' lineáris terek az F test felett, $n = \dim_F L$, $m = \dim_F L'$. Mutassuk meg, hogy megállja a helyét a lineáris terek

$$\text{Hom}_F(L, L') \cong M_{m \times n}(F)$$

homomorfizmusa. Építsünk fel legalább egyet ezen homomorfizmusok közül.

3. gyakorlat. Legyen L lineáris tér az F test felett és $n = \dim_F L$. Mutassuk meg, hogy $\text{Hom}_F(L, F) \cong F^n$.

Megoldás. Kiválasztunk egy $a_1, \dots, a_n$ bázist az L térben. Minden $\varphi: L \rightarrow F$ lineáris leképezésnek megfeleltetünk egy n -dimenziós $(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n))$ vektort az F test felett. Ez a megfeleltetés nem más, mint lineáris terek izomorfizmusa.

A $\text{Hom}_F(L, F)$ teret az L tér *adjungált terének* nevezzük és L^* -gal jelöljük. Az L^* tér elemeit *lineáris funkcionáloknak* nevezzük az L térben.

25. Lineáris transzformáció

Az L lineáris tér $\varphi: L \rightarrow L$ leképezését saját magára az L tér *transzformációjának* nevezzük. Tehát, az L lineáris tér $\varphi: L \rightarrow L$ leképezését az F test felett az L tér lineáris *transzformációjának* nevezzük, ha teljesülnek a következő feltételek:

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad \varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x) \quad (\forall x, y \in L; \forall \alpha \in F).$$

Így az L lineáris tér lineáris transzformációja nem más, mint az L tér lineáris leképezése saját magára. A lineáris terek 18. fejezetben taglalt tulajdonságai átvihetők a lineáris terek lineáris transzformációira. Megjegyezzük, hogy ha $\varphi: L \rightarrow L$ lineáris transzformáció az L térnek, akkor a φ lineáris transzformáció $\text{Ker}\varphi$ nulltere és $\text{Im}\varphi$ képtere alterei az L térnek, és az $L/\text{Ker}\varphi$ faktortér izomorf az $\text{Im}\varphi$ térrel.

Ha $\varphi, \psi: L \rightarrow L$ lineáris transzformációi az L térnek, akkor a $\varphi + \psi$ összeg és az $\alpha\varphi$ ($\alpha \in F$), $\varphi\psi$ és $\psi\varphi$ szorzatok is lineáris transzformációi az L térnek.

Az L lineáris tér összes transzformációjának $\text{Hom}_F(L, L)$ halmaza az F test felett algebrát alkot az F test felett a következő definíció értelmében.

A nem üres A halmazt *algebrának* nevezzük az F test felett, ha meg van rajta adva a két bináris algebrai művelet az összeadás és szorzás (az F test elemének az A halmaz elemére való szorzásának művelete) és teljesülnek a következő feltételek: 1) A gyűrűt alkot az összeadás és a szorzás bináris algebrai műveletekre; 2) A lineáris teret alkot az F test felett az összeadás és a szorzás bináris algebrai műveletekre (az F test elemének az A halmaz elemére való szorzás); 3) Az A elemeinek összeszorozása és az A elemeinek szorzása az F test elemeire a következő relációkkal vannak összefüggésben:

$$(\alpha a)b = a(\alpha b) = \alpha(ab) \quad (\forall \alpha \in F; \forall a, b \in A).$$

1. gyakorlat. Mutassuk meg, hogy az összes n -edrendű $M_{n \times n}(F)$ négyzetmátrixok halmaza az F test felett algebrát alkot a következő műveletekre: mátrixok összeadása, összeszorozása és mátrix szorzása az F test elemére.

Legyen L lineáris tér az F test felett. Az L lineáris tér azon lineáris transzformációját, mely leképezi az összes vektort az L -ből saját magába az L tér *egységtranszformációjának* nevezzük. Jelöljük ezt a transzformációt Id -vel. Tehát:

$$\text{Id}(x) = x \quad (\forall x \in L).$$

Legyen $\varphi: L \rightarrow L$ az L tér lineáris transzformációja. Ha létezik olyan $\varphi': L \rightarrow L$ lineáris transzformáció, hogy $\varphi'\varphi = \text{Id}$ (megfelelően $\varphi\varphi' = \text{Id}$), akkor a φ' -et a φ transzformáció *bal inverzének* (megfelelően *jobb inverzének*) nevezzük.

négyzetes mátrixot, mely a $\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)$ vektorok koordináta oszlopaiból áll, a φ *lineáris transzformáció mátrixának* nevezzük az L tér $a_1, \dots, a_n$ bázisában.

Az

$$Y = AX$$

képlet az L tetszőleges x vektorának $\varphi(x)$ képének koordinátaképlete, X az x vektor koordináta oszlopa; Y pedig a $\varphi(x)$ vektor koordináta oszlopa (az $a_1, \dots, a_n$ bázisban). Ha az L térben kiválasztunk egy új $a'_1, \dots, a'_n$ bázist, akkor a φ transzformáció A' mátrixát ebben a bázisban a következő képlettel kereshetjük meg:

$$A' = T^{-1}AT,$$

ahol T átmeneti mátrix az L tér $a_1, \dots, a_n$ bázisából annak az $a'_1, \dots, a'_n$ bázisába.

Megjegyezzük, hogy az egységmátrix az egységtranszformáció mátrixa az L tér bármely bázisában. Ha a φ transzformáció invertálható, akkor a φ és φ^{-1} transzformáció mátrixai kölcsönösen inverzek (az L tér bármely bázisában).

5. gyakorlat. Legyen L véges dimenziós lineáris tér az F test felett. Bizonyítsuk be, hogy a $\varphi: L \rightarrow L$ lineáris transzformáció akkor és csak akkor invertálható, ha a következő feltételek közül egy teljesül: 1) $\text{Ker}\varphi = \{0\}$; 2) $\text{Im}\varphi = L$; 3) a φ transzformáció mátrixa nem elfajuló (a bázis kiválasztásától függetlenül).

26. A mátrix és a lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja

Legyen

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

n -edrendű négyzetes mátrix az F test felett, λ egy ismeretlen az F testből. Az

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

mátrixot az A mátrix *karakterisztikus mátrixának* nevezzük (E n -edrendű egységmátrix). Az $A - \lambda E$ mátrix $|A - \lambda E|$ determinánsát az A mátrix *karakterisztikus polinomjának* nevezzük. Ez egy n -edfokú polinom a λ ismeretlentől az F test felett:

$$|A - \lambda E| = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \gamma_1 \lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-k} \gamma_k \lambda^k + \cdots + \gamma_n.$$

Megjegyezzük, hogy $\gamma_n = |A|$, $\gamma_1 = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \cdots + \alpha_{nn}$ pedig az A mátrix *nyoma* (angolul trace) és $\text{tr}A$ -val jelöljük. $n = 2$ és $n = 3$ esetén a karakterisztikus polinom a következőképpen határozható meg:

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22})\lambda + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \\ |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + (\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33})\lambda^2 - \\ &\quad - \left(\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda + |A|. \end{aligned}$$

Az n -edrendű A és B négyzetes mátrixokat az F test felett *hasonló mátrixoknak* nevezzük, ha létezik olyan n -edrendű nem elfajuló T mátrix az F test felett, hogy $B = T^{-1}AT$.

Tétel. *A hasonló mátrixok karakterisztikus polinomjai megegyeznek.*

Legyen L egy véges dimenziós lineáris tér az F test felett. $\varphi: L \rightarrow L$ ezen tér lineáris transzformációja és A a φ transzformáció mátrixa az L tér valamely bázisában. Az A mátrix $|A - \lambda E|$ karakterisztikus polinomját a φ transzformáció *karakterisztikus polinomjának* nevezzük.

1. gyakorlat. Bizonyítsuk be, hogy a φ transzformáció karakterisztikus polinomja független az A mátrix kiválasztásától (pontosabban az L tér bázisának kiválasztásától ezen mátrix meghatározásához).

Legyen A egy n -edrendű négyzetes mátrix az F test felett, φ egy tetszőleges L lineáris tér lineáris transzformációja egy test felett és

$$f(\lambda) = \alpha_0 \lambda^t + \alpha_1 \lambda^{t-1} + \dots + \alpha_t \quad (\alpha_i \in F)$$

egy polinom az F test felett. Akkor

$$f(A) = \alpha_0 A^t + \alpha_1 A^{t-1} + \dots + \alpha_t E$$

n -edrendű négyzetes mátrix az F test felett,

$$f(\varphi) = \alpha_0 \varphi^t + \alpha_1 \varphi^{t-1} + \dots + \alpha_t Id$$

pedig az L tér lineáris transzformációja. Az $f(A)$ kifejezést az A mátrix polinomjának nevezzük (vagy az $f(\lambda)$ polinom értékének az A mátrixnál) az $f(\varphi)$ kifejezést pedig a φ transzformáció polinomjának (vagy az $f(\lambda)$ polinom értékének a φ transzformációnál).

Cayley-Hamilton-Kelly-tétel (mátrixra). Legyen A n -edrendű négyzetes mátrix az F test felett és $f(\lambda)$ a karakterisztikus polinomja. Akkor $f(A)$ null mátrix.

Cayley-Hamilton-Kelly-tétel (transzformációra). Legyen $\varphi: L \rightarrow L$ a véges dimenziós lineáris L tér lineáris transzformációja az F test felett és $f(\lambda)$ a φ transzformáció karakterisztikus polinomja. Akkor az $f(\varphi)$ az L tér null transzformációja.

27. Lineáris transzformáció sajátvektora és sajátértéke

Legyen L lineáris tér az F test felett és $\varphi: L \rightarrow L$ az L tér lineáris transzformációja. Az L tér nem nulla a vektorát a φ transzformáció *sajátvektorának* nevezzük, ha létezik olyan α eleme az F testnek, hogy $\varphi(a) = \alpha a$. Az F test α elemét a φ transzformáció *sajátértékének* nevezzük, ha létezik olyan nem nulla a eleme az L térnek, hogy $\varphi(a) = \alpha a$. Azt fogjuk mondani, hogy a φ transzformáció $a \in L$ sajátvektora ezen transzformáció $\alpha \in F$ sajátértékéhez tartozik, ha $\varphi(a) = \alpha a$. Tehát, a φ transzformáció sajátvektorai csak az L tér nem nulla vektorai lehetnek. A φ transzformáció sajátértéke az F test null eleme is lehet.

1. gyakorlat. Mutassuk meg, hogy a φ transzformáció sajátvektora csak egyetlen sajátértékéhez tartozik ezen transzformációnak.

Két tétel a sajátvektorokról és a sajátértékekről.

1. Legyen $\varphi: L \rightarrow L$ az L lineáris tér lineáris transzformációja az F test felett, α a φ transzformáció sajátértéke ($\alpha \in F$) és L_α az összes az α sajátértékéhez tartozó sajátvektorok halmazának együtt az L tér null vektorával. Akkor L_α az L tér φ -invariáns altere az L lineáris térnek.

2. A $\varphi: L \rightarrow L$ lineáris transzformáció sajátvektorainak rendszere, melyek ezen transzformáció páronként különböző sajátértékeihez tartoznak, lineárisan független rendszert alkotnak.

2. gyakorlat. Legyenek α és β a $\varphi: L \rightarrow L$ lineáris transzformáció különböző sajátértékei. Mutassuk meg, hogy $L_\alpha + L_\beta = L_\alpha \oplus L_\beta$.

Tétel a lineáris transzformáció sajátértékeiről a véges dimenziós lineáris térben. Legyen L véges dimenziós nem null lineáris tér az F test felett és $\varphi: L \rightarrow L$ ezen tér lineáris transzformációja. Ha az F test α eleme a φ transzformáció sajátértéke, akkor α a φ transzformáció karakterisztikus polinomjának a gyöke. És fordítva, ha az F test α eleme a φ transzformáció karakterisztikus polinomjának a gyöke, akkor α ezen transzformáció sajátértéke.

3. gyakorlat. Legyen $L = C_{[0,1]}^\infty$ lineáris tér a $[0,1]$ szakasz végtelenül deriválható függvényeinek $\mathbb{R}$ teste felett, és D a deriválás transzformációja:

$$D(f)(x) = \frac{df(x)}{dx} \quad (x \in C_{[0,1]}^\infty).$$

Mutassuk meg, hogy bármely valós szám sajátértéke a D transzformációnak.

4. gyakorlat. Legyen $L = F^2$ és a $\varphi: L \rightarrow L$ lineáris transzformáció az L tér valamely bázisában a következő mátrixszal rendelkezik:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mutassuk meg hogy:

- 1) ha $F = \mathbb{R}$, akkor a φ transzformációnak nincs sajátértéke;
- 2) ha $F = \mathbb{C}$, akkor a φ transzformációnak két sajátértéke van.

Szabály a véges dimenziós tér sajátvektorának meghatározásáról. Legyen $\varphi: L \rightarrow L$ az L lineáris tér lineáris transzformációja az F test felett. Megkeressük a φ transzformáció sajátvektorait. Ehhez:

Első lépés. Kiválasztunk az L térben egy $a_1, \dots, a_n$ bázist és megkeressük a φ transzformáció A mátrixát ebben a bázisban.

Második lépés. Megkeressük a φ transzformáció $|A - \lambda E|$ karakterisztikus polinomját.

Harmadik lépés. Megkeressük az $|A - \lambda E|$ polinom összes olyan $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ gyökét, melyek az F test elemei.

Negyedik lépés. Minden $\alpha = \alpha_i$ ($1 \leq i \leq s$) sajátértékre lineáris homogén egyenletrendszerét állítjuk fel $x_1, \dots, x_n$ ismeretlentől és $(A - \alpha E)$ mátrixszal:

$$(A - \alpha E)X = \bar{0}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Megkeressük ezen egyenletrendszer fundamentális rendszerét. Minden $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ ($\gamma_1, \dots, \gamma_n \in F$) megoldásra a megoldások fundamentális rendszeréből szerkesztünk egy $b = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_n a_n$ vektort. Legyen $b_1, \dots, b_r$ az L tér vektorainak rendszere, melyeket ezen szabály szerint a fundamentális rendszer összes megoldásából kapunk. Akkor a φ transzformáció összes olyan sajátvektorának halmaza, melyek az $\alpha = \alpha_i$ sajátértékhez tartoznak, megegyezik az összes $\beta_1 b_1 + \dots + \beta_r b_r$ lineáris kombináció halmazával, ahol $\beta_1, \dots, \beta_r$ az F test tetszőleges nem nulla elemei.

28. Euklideszi tér

Az L lineáris teret a valós $\mathbb{R}$ számok teste felett *euklideszi térnek* nevezzük, ha az L térben a vektorok feletti lineáris műveleteken kívül még egy művelet értelmezve van. Az új művelet minden rendezett x, y vektorpárnak az L térben megfeleltet egy valós számot, melyet (x, y) jelölünk és az x, y *skaláris szorzatának* nevezzük, valamint kielégíti a következő feltételeket (skaláris szorzat axiómáit):

- 1) $(x, y) = (y, x)$,
- 2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$,
- 3) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$,
- 4) $(x, x) > 0$ ($x \neq 0$)

($\forall x, x_1, x_2, y \in L; \forall \alpha \in \mathbb{R}$). Példákat az euklideszi térre a következő gyakorlatokban adunk.

1. gyakorlat. Mutassuk meg, hogy az $\mathbb{R}^n$ euklideszi teret alkot a megadott skaláris szorzat műveletre

$$(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \quad (\forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n).$$

2. gyakorlat. Mutassuk meg, hogy a $C_{[0,1]}$ a $[0,1]$ intervallumon folytonos függvények tere euklideszi tér lesz a megadott skaláris szorzatra

$$(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt \quad (\forall f, g \in C_{[0,1]}).$$

Megoldás. Mindkét feladatban az (x, y) , (f, g) függvények skaláris szorzatok. Ellenőrizzük, hogy a skaláris szorzat axiómái teljesülnek-e, ezután a „skaláris szorzat” cím elnyeri hitelességét.

Legyen L euklideszi tér, $a_1, \dots, a_n$ tetszőleges vektorrendszer az L -ből és

$$x = x_1 a_1 + \dots + x_s a_s, \quad y = y_1 a_1 + \dots + y_s a_s$$

($x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s \in \mathbb{R}$).

3. gyakorlat. Mutassuk meg, hogy

$$(x, y) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s x_i y_j (a_i, a_j).$$

Az

$$\begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \cdots & (a_1, a_s) \\ (a_2, a_1) & (a_i, a_j) & \cdots & (a_2, a_s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_s, a_1) & (a_s, a_2) & \cdots & (a_s, a_s) \end{pmatrix}$$

mátrixot *Gram-féle mátrixnak* nevezzük az $a_1, \dots, a_s$ vektorrendszernek.

Ha a rendszer az L tér bázisa, akkor az (x, y) -ra a képlet a 3. gyakorlatban felállítja a vektorok skaláris szorzatát koordináta formában.

Ha az $a_1, \dots, a_s$ bázis az L térben olyan, hogy

$$(a_i, a_j) = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j; \\ 0, & \text{ha } i \neq j; \end{cases}$$

akkor azt *ortonormált bázisnak* nevezzük.

Tétel. Ha $a_1, \dots, a_n$ ortonormált bázis az L euklideszi térben, $x, y \in L$, akkor az x, y skaláris szorzat koordináta formája az L térben

$$(x, y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

($x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ az x, y koordinátái az $a_1, \dots, a_n$ bázisban).

Az 1. gyakorlatban leírt $\mathbb{R}^n$ euklideszi teret *n-dimenziós euklideszi térnek* nevezzük.

Legyen L euklideszi tér. Az a és b vektort az L térből *ortogonálisnak* nevezzük, ha $(a, b) = 0$. A páronkénti ortogonális vektorrendszert *ortogonális rendszernek* nevezzük.

Tétel az ortogonális rendszerről. Nem null vektorok ortogonális rendszere az L térben lineárisan független rendszert alkot.

Legyen A egy nem üres vektorhalmaz az L -ben. Megjelöljük $A^\perp$ -val az összes olyan $x \in L$ vektorból álló halmazt, melyek ortogonálisak az A halmazból vett összes vektorokkal. Az $A^\perp$ halmazt az A *ortogonális komplementerének* nevezzük.

4. gyakorlat. Legyen A, B nem üres részhalmazok az L -nek. Mutassuk meg, hogy

- 1) az $A^\perp$ ortogonális komplementere az A halmaznak lineáris altere lesz az L -nek;
- 2) $(A + B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$;
- 3) $(A \cap B)^\perp = A^\perp + B^\perp$ ($A \cap B \neq \emptyset$);
- 4) $\{\bar{0}\}^\perp = L$;
- 5) $L^\perp = \{\bar{0}\}$.

5. gyakorlat. Mutassák meg, hogy

- 1) a $b_1, \dots, b_s$ rendszer ortogonális rendszert alkot;
- 2) lineáris burkok, amelyek az $a_1, \dots, a_s$ rendszerre és a $b_1, \dots, b_s$ rendszerre vannak huzva egybeesnek.

A $b_1, \dots, b_s$ rendszer felépítését *Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárásnak* nevezzük.

Ortonormált bázisok felépítése. Legyen L véges euklideszi tér és $a_1, \dots, a_n$ az L tér bázisa. Felhasználjuk ehhez a bázishoz az ortogonalizációs műveletet. Végeredménybe kapunk egy ortogonális bázist, $b_1, \dots, b_s$ -t az L -ből. Megkeressük minden vektor normáját ennek a bázisnak:

$$c_1 = \frac{1}{\|b_1\|} b_1, c_2 = \frac{1}{\|b_2\|} b_2, \dots, c_n = \frac{1}{\|b_n\|} b_n.$$

A $c_1, c_2, \dots, c_n$ vektorrendszert *ortonormált* bázisnak nevezzük az L -ben.

29. Az euklideszi tér ortogonális transzformációja

Legyen L euklideszi tér. A $\varphi: L \rightarrow L$ lineáris transzformáció az L euklideszi térben *ortogonális transzformációnak* nevezzük, ha ez a transzformáció megtartja a skaláris négyzetét tetszőleges vektornak az L térből, vagyis

$$(\varphi(x), \varphi(x)) = (x, x) \quad (\forall x \in L).$$

Mivel $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ ($\forall x \in L$), az ortogonális transzformációt az L euklideszi térben meglehetne jelölni, mint olyan $\varphi: L \rightarrow L$ lineáris transzformációt, amely megtartja a vektorok normáit, vagyis

$$\|\varphi(x)\| = \|x\| \quad (\forall x \in L).$$

1. gyakorlat.(Transzformáció ortogonalitásának kritériuma) A $\varphi: L \rightarrow L$ lineáris transzformáció az L euklideszi térben ortogonális transzformáció éppen az L térben akkor, és csak akkor, ha a φ transzformáció megtartja a vektorok skaláris szorzatát, vagyis $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$ ($\forall x, y \in L$).

Megoldás. Bebizonyítjuk először az $(x, y) = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$ ($\forall x, y \in L$) egyenlőséget és ezután felhasználjuk azt.

2. gyakorlat. Legyen L euklideszi tér és $\varphi: L \rightarrow L$ ortogonális transzformációja az L -nek. Mutassuk meg, hogy

- 1) ha valós α szám sajátértéke a φ transzformációnak, akkor $\alpha = \pm 1$,
- 2) a φ transzformáció sajátvektorai, melyek különböző valós saját értékeknek felelnek meg, ortogonális vektorok.

A következő két feladatban példákat hozunk fel az ortogonális transzformációkra.

3. gyakorlat. Legyen $\mathbb{R}^2$ 2-dimenziós euklideszi tér, α pedig egy valós szám és

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Bizonyítsuk be, hogy a $\varphi_\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transzformáció ortogonális, mely a következő szabállyal van megadva: ha $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, akkor $\varphi_\alpha(x) = (y_1, y_2)$, ahol

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A_\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

A φ_α transzformációt az α szögre vonatkozó *rotáció transzformációnak* nevezzük. Mutassuk meg, ha

$$\alpha \neq \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

akkor a φ_α rotáció transzformációnak nincs sajátértéke.

Tétel (az ortogonális transzformációk és ortogonális mátrixok közötti kapcsolatról).

Ortogonális transzformációja a véges dimenziós L euklideszi térnek tetszőleges ortogonális

bázisban ortogonális mátrixszal rendelkezik. Ellenkezőleg, ha lineáris transzformációja az L térnek valamely ortogonális bázisban ortogonális mátrixszal rendelkezik, akkor ez a transzformáció ortogonális transzformációja az L térnek.

Tétel az ortonormált bázis képéről. Az ortonormált bázis képe az ortogonális transzformációban a véges euklideszi L térben szintén ortonormált bázis ebben a térben. Ellenkezőleg, ha a lineáris transzformációja az L térnek leképez bizonyos ortonormált bázist szintén az L tér ortonormált bázisába, akkor ez a transzformáció ortogonális transzformáció az L -ben.

Tétel az ortogonális transzformáció mátrixának kanonikus alakjáról. Legyen $\varphi: L \rightarrow L$ ortogonális transzformációja a véges dimenziós euklideszi L térnek. Akkor az L térben létezik olyan ortonormált bázis, melyben az A mátrix φ transzformációnak az alakja

$$A = \begin{pmatrix} \pm 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \pm 1 & & & \\ & & & A_{\alpha_1} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & A_{\alpha_s} \end{pmatrix},$$

ahol

$$A_{\alpha_j} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_j & -\sin \alpha_j \\ \sin \alpha_j & \cos \alpha_j \end{pmatrix} \quad (\alpha_j \neq \pi k \ (k \in \mathbb{Z})).$$

30. Az euklideszi tér szimmetrikus transzformációja

A $\varphi: L \rightarrow L$ lineáris transzformációt az L euklideszi térnek szimmetrikus transzformációnak nevezzük az L térnek, ha bármilyen x, y -ra az L -ből teljesül a

$$(\varphi(x), y) = (x, \varphi(y))$$

egyenlőség.

Tétel a szimmetrikus transzformáció mátrixáról. A $\varphi: L \rightarrow L$ szimmetrikus transzformáció a véges dimenziós L euklideszi térnek tetszőleges az L tér ortonormált bázisban szimmetrikus $A(A^T = A)$ mátrixszal rendelkezik. Ellenkezőleg, ha a $\varphi: L \rightarrow L$ lineáris transzformációja az L térnek bizonyos ortonormált bázisban szimmetrikus mátrixszal rendelkezik, akkor ez az transzformáció is szimmetrikus.

Tétel a szimmetrikus mátrix karakterisztikus polinomjának gyökeiről. A valós, szimmetrikus mátrix karakterisztikus polinomjának gyökei (a $\mathbb{C}$ testben) valós számok.

Következmény. Véges euklideszi tér szimmetrikus transzformációjának legálabb egy valós sajátértéke van.

Alaptétel a szimmetrikus transzformációról. Lineáris $\varphi: L \rightarrow L$ transzformáció véges L euklideszi térnek szimmetrikus transzformáció akkor, és csak akkor, ha az L térben létezik olyan ortonormált bázis, amely a φ transzformáció saját vektoraiból áll.

1. gyakorlat. (Következmények az alaptételből). Legyen A valós szimmetrikus mátrix. Mutassuk meg, hogy

- 1) létezik olyan nem elfajuló valós Q mátrix, hogy $Q^{-1}AQ$ diagonális mátrix;
- 2) létezik olyan nem elfajuló valós Q mátrix, hogy $Q^T AQ$ diagonális mátrix;
- 3) létezik olyan ortogonális Q mátrix, hogy $Q^{-1}AQ$ diagonális mátrix;
- 4) létezik olyan ortogonális Q mátrix, hogy $Q^T AQ$ diagonális mátrix.

Megoldás. Minden szimmetrikus valós n -edrendű A mátrixra úgy nézünk, mint az n dimenziós L euklideszi térnek valamilyen szimmetrikus transzformáció mátrixára bizonyos ortonormált bázisban ennek a térnek (például L helyett vehetjük az $\mathbb{R}^n$ -t, és a bázis helyett az $\mathbb{R}^n$ tér kanonikus bázisát).

Az 1. gyakorlat második állítása a valós kvadratikus alak alaptétele: tetszőleges kvadratikus valós alak az ismeretlenek nem elfajuló lineáris átalakításával kanonikus alakhoz hozható.

A gyakorlat negyedik állítása az **tétele a valós kvadratikus alak főtétele-transzformációjáról**. Megfogalmazzuk ezt a tételt.

Tetszőleges n ismeretlenes kvadratikus alakot az A mátrixszal az ismeretlenek bizonyos ortogonális átalakításával kanonikus alakhoz hozhatjuk

$$\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \cdots + \alpha_n y_n^2.$$

Ennek a kifejezésnek az együtthatói az A mátrix karakterisztikus polinom $|A - \lambda E|$ gyökeiként funkcionálnak, mindegyik annyiszor ismétlődik meg a kanonikus alakban, amennyi a multiplicitása a karakterisztikus polinomban.

Megjegyezzük, hogy az ismeretlenek lineáris átalakítását azok *ortogonális átalakításának* nevezzük, ha ennek az átalakításnak a mátrixa ortogonális mátrix.

31. Kvadratikus alak

Legyen F tetszőleges test és $x_1, \dots, x_n$ ($n \in \mathbb{N}$) az F test ismeretlen elemei. Legyen adva n^2 elemű olyan α_{ij} együttható az F testből, hogy $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ ($1 \leq i, j \leq n$).

Az

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_i x_j$$

kifejezést *kvadratikus alaknak* nevezzük az adott n elemből álló $x_1, \dots, x_n$ ismeretlentől, az α_{ij} F test feletti együtthatókkal. Ha az $x_1, \dots, x_n$ ismeretlenek helyébe behelyettesítjük a $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ elemeket az F testből, akkor az F test elemét

$$f(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \gamma_i \gamma_j$$

a *kvadratikus alak értékének* nevezzük az adott ismeretlenek értékein. Az α_{ji} ($1 \leq i, j \leq n$) együtthatókból az $f(x_1, \dots, x_n)$ kvadratikus alakra felírhatunk egy négyzetes mátrixot

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Az A mátrixot az $f(x_1, \dots, x_n)$ kvadratikus alak mátrixának nevezzük.

Ha $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ ($1 \leq i, j \leq n$), akkor az A mátrix szimmetrikus: $A^T = A$ (A^T az A mátrix transzponáltja).

Legyen

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ akkor } X^T = (x_1 \dots x_n).$$

Tehát, az $f(x_1, \dots, x_n)$ kvadratikus alakot felírhatjuk mátrixok szorzataként

$$f(x_1, \dots, x_n) = X^T A X.$$

Ezt a felírást az $f(x_1, \dots, x_n)$ kvadratikus alak *mátrixos felírásának* nevezzük. Az $f(x_1, \dots, x_n)$ kvadratikus alak rangjának az adott alak A mátrixának rangját nevezzük. Az $(x_1, \dots, x_n)$ ismeretlenek mellett más ismeretlenek rendszerét is használunk az F test felett.

Az $(x_1, \dots, x_n)$ ismeretlenek *lineáris átalakításának* az új $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ ismeretlenekhez az F test felett olyan átmenetet nevezünk az új ismeretlenekhez, amikor a régi ismeretlenek felírhatók az új ismeretlenek lineáris kombinációjaként, az F test feletti együtthatókkal:

Ez a törvény bevezeti a következő relációt a kvadratikus alakok között.

Az $f_1(x_1, \dots, x_n)$ kvadratikus alakot az $x_1, \dots, x_n$ ismeretlenektől az F test felett *ekvivalensnek* nevezzük az $f_2(x_1, \dots, x_n)$ kvadratikus alakkal ugyanazoktól az ismeretlenektől, ha létezik olyan nem elfajuló lineáris átalakítása az $x_1, \dots, x_n$ ismeretlenektől az $y_1, \dots, y_n$ ismeretlenekhez, hogy

$$f_2(y_1, \dots, y_n) = f_1(x_1, \dots, x_n).$$

2. gyakorlat. Legyenek adottak A és B n -edrendű szimmetrikus mátrixok az F test felett. Mutassuk meg, hogy az A mátrix kvadratikus alakja ekvivalens a B mátrix kvadratikus alakjával, akkor, és csak is akkor, ha létezik olyan nem elfajuló S mátrix az F test felett, hogy $B = S^T A S$.

A kvadratikus alakok ekvivalencia relációja a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- 1) $f(x_1, \dots, x_n) \sim f(x_1, \dots, x_n)$;
- 2) $f_1(x_1, \dots, x_n) \sim f_2(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow f_2(x_1, \dots, x_n) \sim f_1(x_1, \dots, x_n)$;
- 3) $f_1(x_1, \dots, x_n) \sim f_2(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n) \sim f_3(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow$
 $f_1(x_1, \dots, x_n) \sim f_3(x_1, \dots, x_n)$;

(a $\sim$ szimbólum az alakok ekvivalenciáját jelöli).

A következő tétel szükséges feltétele a kvadratikus alakok ekvivalenciájának.

Tétel a rang invariáns jellegéről. Az *ekvivalens kvadratikus alakok rangja egyenlő*.

Az összes kvadratikus alak n -ismeretlentől való összessége az F test felett feloszlik ekvivalens kvadratikus alakok osztályaira. Az ekvivalens kvadratikus alakok osztálya az összes olyan kvadratikus alakokból áll, melyek párosával ekvivalensek. Az ekvivalens kvadratikus alakok különböző osztályai nem metszik egymást. A kvadratikus alakok osztályozása azt jelenti, hogy minden osztályból kiválasztunk egy kvadratikus alakot, melynek legegyszerűbb az alakja, és egyszerű kritériumokat lehet felállítani azok ekvivalencia meghatározására. A legegyszerűbb kvadratikus alak az

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_n^2,$$

ahol $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ az F test tetszőleges elemei, melyek között null elemek is szerepelhetnek. Az adott alakot *kanonikus alaknak* nevezzük.

A kanonikus alak A mátrixa diagonális mátrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

A kanonikus alak rangja egyenlő az A mátrix nem null átlós elemeinek számával és egyenlő az alak négyzeteinek számával nem null együtthatókkal.

Alaptétel a kvadratikus alakokról. *Tetszőleges n -ismeretlenes kvadratikus alakot az F számtani test felett átalakíthatunk kanonikus alakú kvadratikus alakúvá az ismeretlenek valamilyen nem elfajuló lineáris átalakításával ezen test felett.*

Ez a tétel igaz marad tetszőleges F testre is, melynek karakterisztikája eltérő a 2-től.

Az alaptétel másképp is megfogalmazható.

Tetszőleges kvadratikus alak az F test felett ekvivalens egy kanonikus alakú kvadratikus alakkal.

A kvadratikus alakról szóló alaptétel nem ad véglegesített osztályozást a kvadratikus alakokról. Tény, hogy a kvadratikus alak különböző kanonikus alakjai ekvivalens alakok lehetnek. Másképp kifejezve: ugyanazt a kvadratikus alakot felírhatjuk bármennyi kanonikus alakban az ismeretlenek nem elfajuló lineáris átalakításoknak segítségével. Megjegyezzük, hogy az összes kanonikus alakban közös lesz a négyzetek száma a nem null együtthatókkal.

A kvadratikus alakok osztályozásának folytatása az F test felett függ az F test sajátosságától.

32. Komplex kvadratikus alakok

Kanonikus alakja a komplex (vagyis a $\mathbb{C}$ test felett) kvadratikus alaknak n ismeretlentől $x_1, \dots, x_n$: $f = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$, ahol $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tetszőleges komplex számok. Legyen az f alak rangja egyenlő r -el ($r \leq n$) és legyen $\alpha_1 \neq 0, \dots, \alpha_r \neq 0$. Akkor

$$f = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_r x_r^2.$$

Elvégezzük az ismeretlenek alábbi lineáris átalakítását

$$\begin{aligned} x_1 &= (\sqrt{\alpha_1})^{-1} y_1, \\ &\dots\dots\dots \\ x_r &= (\sqrt{\alpha_r})^{-1} y_r, \\ x_{r+1} &= y_{r+1} \text{ (ha } r < n), \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= y_n, \end{aligned}$$

ahol a $\sqrt{\alpha}$ az α komplex számból a két gyök egyikét jelenti.

Ez az átalakítás nem elfajuló. Ezután az f kvadratikus alak a következő alakot ölti:

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_r^2.$$

A kvadratikus alak ilyen alakját *normál alaknak* nevezzük.

Alaptétel a komplex kvadratikus alakokról. *Tetszőleges, n ismeretlenes komplex kvadratikus alak ekvivalens a $\mathbb{C}$ test felett valamilyen kvadratikus alak normál alakjával, amely összege r ismeretlen négyzeteinek (r az adott alak rangja).*

Tétel az osztályozásról. *A komplex kvadratikus alakok az egyforma számú ismeretlenektől ekvivalensek akkor, és csak akkor, ha a rangjaik egybeesnek.*

33. Valós kvadratikus alakok

Kanonikus alakja a valós (vagyis az $\mathbb{R}$ test felett) kvadratikus alaknak n ismeretlentől $x_1, \dots, x_n$: $f = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$, ahol $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tetszőleges valós számok. Legyen az f alak rangja egyenlő r -el ($r \leq n$), az első r együttható nullától eltérő. Akkor az f alakot felírhatjuk, mint

$$f = \beta_1 x_1^2 + \dots + \beta_p x_p^2 - \beta_{p+1} x_{p+1}^2 - \dots - \beta_{p+q} x_{p+q}^2,$$

ahol $\beta_1, \dots, \beta_{p+q}$ pozitív számok és $p + q = r$.

Elvégezzük az alábbi ismeretlenek lineáris átalakítását:

$$x_1 = (\sqrt{\beta_1})^{-1} y_1,$$

$$x_r = x_{p+q} = (\sqrt{\beta_{p+q}})^{-1} y_{p+q},$$

$$x_{r+1} = y_{r+1} \text{ (ha } r < n),$$

$$x_n = y_n,$$

Ennek az átalakításnak nem elfajuló és valós együtthatói vannak. Akkor az f kvadratikus alak az alábbi alakot ölti:

$$f = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_{p+q}^2,$$

vagyis az ismeretlenek p pozitív négyzetek és q negatív négyzetek összegét kapjuk ($p \geq 0, q \geq 0, p + q = r$). A kvadratikus alak ilyen alakját a valós kvadratikus alak *normál alakjának* nevezzük.

Alap tétel a valós kvadratikus alakokról. *Tetszőleges valós kvadratikus alak ekvivalens az $\mathbb{R}$ test felett valamilyen kvadratikus alak normál alakjával, mely pozitív és negatív ismeretlenek négyzeteinek összege.*

A következő tétel rámutat, mi a közös a normál alakoknál, melyekhez az adott valós kvadratikus alak átalakul az ismeretlenek nem elfajuló lineáris átalakításának segítségével.

Tehetetlenségi törvény. *Ha az adott valós kvadratikus alak két valós, nem elfajuló lineáris átalakítás segítségével két normál alakú kvadratikus alakhoz hozott, akkor az egyik normál alakú kvadratikus alak pozitív (negatív) négyzeteinek száma egyenlő a másik normál alakú kvadratikus alak pozitív (negatív) négyzeteinek számával.*

Legyen adva $g(x_1, \dots, x_n)$ valós kvadratikus alak, melynek normál alakja

$$g = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_{p+q}^2.$$

Akkor az adott $g(x_1, \dots, x_n)$ alak p pozitív négyzetek számát a *tehetetlenség pozitív indexének* nevezzük. Az adott $g(x_1, \dots, x_n)$ alak q negatív négyzetek számát a *tehetetlenség negatív indexének* nevezzük. A rendezett (p, q) párt az adott $g(x_1, \dots, x_n)$ alak *szignumjának* nevezzük (néha a szignum a $(p - q)$ különbségét fejezi ki).

Osztályozási tétel. *Két valós kvadratikus alak egyforma számú ismeretlentől ekvivalens akkor, és csak akkor, ha az alakok rangjai és szignumjai egybeesnek.*

34. Pozitív definit valós kvadratikus alakok

A valós kvadratikus

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_i x_j \quad (\alpha_{ij} \in \mathbb{R})$$

alakot *pozitív definitnek* nevezzük, ha

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) > 0$$

minden $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$ $(\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R})$ esetén.

A pozitív definitség kritériuma. n ismeretlenes valós kvadratikus alak pozitív definit akkor, és csak is akkor, ha egybeesik a következő három szám: n az ismeretlenek száma, az alak rangja és a tehetetlenség pozitív indexe.

Legyen $f = X^T A X$ egy valós kvadratikus alak a következő mátrixszal megadva:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Az f alak *sarok-aldeterminánsainak* az A mátrix alábbi aldeterminánsait nevezzük:

$$\Delta_1 = \alpha_{11}, \dots, \Delta_k = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \cdots & \alpha_{kk} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = |A|.$$

Sylvester-féle kritérium a pozitív definitiségről. A valós kvadratikus alak pozitív definit akkor, és csak akkor, ha az összes sarok-aldeterminánsa pozitív.

1. gyakorlat. Legyen $f(x_1, \dots, x_n)$ olyan valós kvadratikus alak, hogy $-f(x_1, \dots, x_n)$ pozitív definit. Milyenek lesznek az $f(x_1, \dots, x_n)$ alak sarok-aldeterminánsai?

2. gyakorlat. Fogalmazzuk meg a negatív definit valós kvadratikus alak kritériumát.

Irodalomjegyzék

1. *Fried Ervin* Algebra I. Elemi és lineáris algebra. – Budapest: Nemzeti tankönyvkiadó, 2000.
2. *D.K. Fagyev, I.Sz. Szominszkij* Felsőfokú algebrai példatár. – Budapest: Typotex, 2006.
3. *A.G. Kuros* Felsőbb algebra.– Budapest: Tankönyvkiadó, 1967.
4. *B. Bódi* Az algebra alapjai. – Ungvár: PoliPrint, 2010.
5. *Баранник В.Ф., Погоріляк Є.Я., Рудько В.П., Шапочка І.В.* Лінійна алгебра. – Ужгород: Ужгород. держ. ун-т, 2000.
6. *Гудивок П.М., Погоріляк Є.Я., Шапочка І.В.* Практикум з алгебри і теорії чисел для студентів першого курсу. – Ужгород: Ужгород. держ. ун-т, 2002.

Посібник з лінійної алгебри для математиків призначений для студентів I курсу Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці спеціальності А 4.04 Середня освіта (Математика) денної та заочної форми навчання з метою організації лекційних занять з курсу "Лінійна алгебра".

Матеріал призначений для використання як навчально-методичний посібник з дисципліни "Лінійна алгебра".

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики
(протокол № 10 від «23» червня 2025 року)

Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості вищої освіти
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол №7 від 26 серпня 2025 року)

Рекомендовано до видання у електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту імені Ференца
Ракоці II
(протокол №8 від 28 серпня 2025 року)

Підготовлено до видання у електронній формі (PDF) кафедрою математики та
інформатики з Видавничим відділом Закарпатського угорського інституту імені
Ференца Ракоці II