

Кафедра математики та інформатики
Matematika és Informatika Tanszék

«ЛІНІЙНА АЛГЕБРА»
(МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ)

(для студентів 1-го курсу спеціальності А 4.04 Середня освіта (Математика))

LINEÁRIS ALGEBRA

(Módszertani útmutató önálló munkákhoz)

Перший (бакалаврський) / Alapképzés (BA)
(ступінь вищої освіти / a felsőoktatás szintje)

A Osztály / A Oktatás
(галузь знань / képzési ág)

"Математика"
"Matematika"
(освітня програма / képzési program)



Берегове / Beregszász
2025 р. / 2025

Посібник з лінійної алгебри для математиків призначений для студентів I курсу Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці спеціальності А 4.04 Середня освіта (Математика) денної та заочної форми навчання з метою організації самостійної роботи з курсу "Лінійна алгебра".

Матеріал призначений для використання як навчально-методичний посібник з дисципліни "Лінійна алгебра".

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики
(протокол № 10 від «23» червня 2025 року)

Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості вищої освіти
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол №7 від 26 серпня 2025 року)

Рекомендовано до видання у електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту імені Ференца
Ракоці II

(протокол №8 від 28 серпня 2025 року)

Підготовлено до видання у електронній формі (PDF) кафедрою математики та інформатики з
Видавничим відділом Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Укладач:

СТОЙКА МИРОСЛАВ ВІКТОРОВИЧ – доцент кафедри математики та інформатики
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II

Рецензенти:

БОРТОШ МАРІЯ ЮЛІЇВНА – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри
та диференціальних рівнянь ДВНЗ «УжНУ»;

МЕСАРОШ ЛІВІА ВАСИЛІВНА – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри
математики та інформатики ЗУІ.

Відповідальний за випуск:

Олександр ДОБОШ – начальник Видавничого відділу ЗУІ ім. Ф.Ракоці II

За зміст посібника відповідальність несуть розробники.

Видавництво: Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II (адреса: пл.
Кошута 6, м. Берегове, 90202. Електронна пошта: foiskola@kmf.uz.ua)

© Мирослав Стойка, 2025

© Кафедра математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II, 2025

A Lineáris algebra jegyzet a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola elsőéves, matematika szakos, nappali és levelező tagozatos hallgatói számára készült, és a Lineáris algebra című tantárgy önálló feladatait tartalmazza.

Az oktatási folyamatban történő felhasználását jóváhagyta
a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Matematika és Informatika Tanszéke
(2025. június 23, 10. számú jegyzőkönyv).

Megjelentetésre javasolta a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Minőségbiztosítási Tanácsa
(2025. augusztus 26, 7. számú jegyzőkönyv).

Elektronikus formában (PDF fájlformátumban) történő kiadásra javasolta
a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Tudományos Tanácsa
(2025. augusztus 28, 8. számú jegyzőkönyv).

Kiadásra előkészítette a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Matematika és Informatika Tanszéke és Kiadói Részlege.

Szerkesztő:

SZTOJKA MIROSZLÁV – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Matematika és Informatika Tanszékének docense

Szakmai lektorok:

BARTOS MÁRIA – fizika és matematika tudományok kandidátusa, docens, az
Ungvári Nemzeti Egyetem Algebra és Diferenciál Egyenletek Tanszékének docense;
MÉSZÁROS LÍVIA – fizika és matematika tudományok kandidátusa, II. Rákóczi
Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Matematika és Informatika Tanszékének docense.

A kiadásért felel:

DOBOS Sándor – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola Kiadói Részlegének
vezetője

A tartalomért kizárólag a jegyzet szerkesztője felel.

Kiadó: a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola (cím: 90 202, Beregszász,
Kossuth tér 6. E-mail: foiskola@kmf.uz.ua)

© Sztojka Mirosláv, 2025

© A II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola
Matematika és Informatika Tanszéke, 2025

Tartalomjegyzék

1.	Komplex számok.	
	A komplex számok algebrai alakja	6
2.	A komplex számok trigonometrikus alakja.....	8
3.	Lineáris egyenletrendszerek. A Gauss-elimináció	10
4.	Permutációk. Transzpozíciók.....	11
5.	n -edrendű determinánsok.	
	A determinánsok tulajdonságai	13
6.	Az aldetermináns és az elem komplementere.	
	Determinánsok kiszámítása.....	15
7.	A Cramer-szabály	17
8.	Mátrix-műveletek. A mátrix inverze	18
9.	Az n -dimenziós számtani vektortér.	
	Vektorrendszerek lineáris összefüggősége.....	20
10.	A mátrix rangja.....	22
11.	Lineáris egyenletrendszer. A Kronecker-Capelli tétel	23
12.	Homogén lineáris egyenletrendszerek	25
13.	Csoportok. Gyűrűk. Testek.....	27
14.	A polinomok gyűrűje.....	30
15.	A polinomok gyökei	32
16.	Irreducibilis polinomok.	
	Polinomok a racionális számok teste felett	35
17.	A lineáris tér bázisa.....	37
18.	Átmeneti mátrix egyik bázisból a másikba	38
19.	Műveletek lineáris alterekkel	39
20.	Lineáris transzformáció.....	40
21.	Lineáris transzformáció mátrixa egy bázisban.....	41
22.	Műveletek lineáris transzformációkkal	42
23.	Lineáris transzformáció nulltere és képtere	43
24.	Lineáris transzformáció sajátvektora és sajátértéke.....	44

25. Lineáris transzformáció sajátvektoraiból álló bázisok.....	45
26. Lineáris altér ortogonális komplementere.....	47
27. Gram-Schmidt-féle ortonormalizációs eljárás	48
28. Kvadratikus alak normálalakja.....	49
29. Pozitív és negatív definit kvadratikus alakok	50
Irodalomjegyzék	51

1. Komplex számok. Komplex számok algebrai alakja

1. Számítsa ki a kifejezések értékét:

a) $(4 + 3i) + (1 - 4i) + (5 + 7i)(3 - 5i)$; b) $\frac{(2+i)(4-3i)}{1+2i}$;

c) $(1 - 3i)(2 + i) + (-3 + i)(8 + 3i)$; d) $\frac{(7-i)(5-4i)}{2-i}$;

e) $(7 - 5i)(3 + 7i) + (3 + 2i)(1 + 2i)$; f) $\frac{(3+3i)(6-i)}{(2+i)^2}$!

2. Számítsa ki az i^{45} ; i^{112} ; i^n kifejezések értékét, ahol n egy természetes szám!

3. Bizonyítsa be az alábbi egyenlőségeket:

a) $(1 + i)^{8n} = 2^{4n}$ ($n \in \mathbb{Z}$); b) $(1 + i)^{4n} = (-1)^n 2^{2n}$ ($n \in \mathbb{Z}$) !

4. Keresse meg az x és y valós számokat, amelyek kielégítik a következő egyenleteket:

a) $(2 + i)x + (1 + 2i)y = 1 - 4i$;

b) $(3 + 2i)x + (1 + 3i)y = 4 - 9i$!

5. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket:

a) $\begin{cases} (3 - i)x + (4 + 2i)y = 2 + 6i, \\ (4 + 2i)x - (2 + 3i)y = 5 + 4i; \end{cases}$

b) $\begin{cases} (2 + i)x + (2 - i)y = 6, \\ (3 + 2i)x + (3 - 2i)y = 8; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + iy - 2z = 10, \\ x - y + 2iz = 20, \\ ix + 3iy - (1 + i)z = 30! \end{cases}$

6. Legyen $\alpha \in \mathbb{C}$ és $\sqrt{\alpha}$ — olyan komplex szám, hogy $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$. Számítsa ki:

a) $\sqrt{2i}$; b) $\sqrt{-15 + 8i}$; c) $\sqrt{-3 - 4i}$; d) $\sqrt{-11 + 60i}$;

e) $\sqrt[4]{-1}$; f) $\sqrt{8 + 6i}$; g) $\sqrt{1 - i\sqrt{3}}$; h) $\sqrt[4]{2 - i\sqrt{12}}$!

7. Oldja meg az alábbi egyenleteket:

a) $x^2 - (2 + i)x - 1 + 7i = 0$;

b) $x^2 - (3 - 2i)x + 5 - 5i = 0$;

c) $(2 + i)x^2 - (5 - i)x + 2 - 2i = 0$;

d) $(1 - i)x^2 - (2 - 16i)x - 23 - 39i = 0$!

8. Bizonyítsa be, hogy:

a) a z komplex szám akkor és csak akkor lesz valós, ha $\bar{z} = z$;

b) a z komplex szám akkor és csak akkor lesz tiszta képzetes, ha $\bar{z} = -z$!

9. Bizonyítsa be, hogy a tetszőleges x és y komplex számokra teljesülnek a következők:

a) $\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$; b) $\overline{x \cdot y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$; c) $\overline{-x} = -\bar{x}$; d) $\overline{y^{-1}} = (\bar{y})^{-1}$ ($y \neq 0$)!

10. Keresse meg az összes olyan komplex számot, amely saját négyzetének konjugáltja!

11. Tüntesse fel a komplex síkon azokat a pontokat, amelyek megfelelnek az alábbi számoknak:

$$5, \quad -2, \quad -3i, \quad \pm 1 \pm \sqrt{3}i !$$

12. Keresse meg azokat a komplex számokat, amelyek megfelelnek:

a) egy négyzet csúcspontjainak, melynek középpontja a koordinátarendszer kezdőpontja, oldalai 1 egységnyi hosszúak, és párhuzamosak a koordinátarendszer tengelyeivel;

b) egy szabályos háromszög csúcspontjainak, melynek középpontja a koordinátarendszer kezdőpontja, oldala párhuzamos az képzetes tengellyel, egyik csúcspontja a negatív valós féltengelyen helyezkedik el és a körülírt kör sugara 1 egységgel egyenlő!

13. Hogyan helyezkednek el a komplex síkon azok a pontok, amelyek megfelelnek az x , y és z komplex számoknak, és melyekre teljesülnek a következők:

$$x + y + z = 0, \quad x\bar{x} = y\bar{y} = z\bar{z} \neq 0 ?$$

2. A komplex számok trigonometrikus alakja

1. Keresse meg az alábbi komplex számok trigonometrikus alakját!

- a) -3 ; b) $1 - i$; c) $\sqrt{3} - i$; d) $\sqrt{5} - \sqrt{5}i$; e) $2 + \sqrt{3} + i$;
f) $5i$; g) $1 - i$; h) $1 + \sqrt{3}i$; i) $2 + \frac{\sqrt{3}}{3}i$; j) $\cos \varphi + i \sin \varphi$.

2. Oldja meg az alábbi egyenleteket!

- a) $|z| + z = 8 + 4i$; b) $|z| - z = 8 + 12i$.

3. Határozza meg azon pontok mértani helyét a komplex síkon, melyek megfelelnek azoknak a z számoknak, melyek kielégítik az alábbi feltételeket:

- a) $1 \leq |z| \leq 2$; b) $|z - 1 - i| < 1$; c) $\frac{\pi}{6} < \operatorname{Arg} z \leq \frac{\pi}{3}$;
d) $|z - 2| \leq 1$; e) $0 < \operatorname{Re} iz < 1$; f) $|z - 1| + |z - 1| = 3$.

4. Számítsa ki az alábbi kifejezések értékét!

- a) $(1 + i)^{100}$; b) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}$; c) $\left(1 - \frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$; d) $(2 - \sqrt{2} + i)^{12}$.

5. Bizonyítsa be, hogy $(\sqrt{3} - i)^n = 2^n \left(\cos \frac{\pi n}{6} - i \sin \frac{\pi n}{6}\right)$, ahol $n \in \mathbb{N}$!

6. Írja fel a $\sin x$ -től és $\cos x$ -től függő polinom alakjában az alábbi függvényeket:

- a) $\sin 4x$; b) $\cos 6x$; c) $\sin 7x$!

7. Írja ki trigonometrikus alakban az alábbi kifejezések összes gyökeit:

- a) $\sqrt[10]{512(1 - \sqrt{3}i)}$; b) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$!

8. Írja ki algebrai alakban az alábbi kifejezéseknek a megfelelő gyökeit:

- a) $\sqrt[3]{i}$; b) $\sqrt[4]{8\sqrt{3}i - 8}$; c) $\sqrt[4]{-72(1 - i\sqrt{3})}$; d) $\sqrt{2 - 2i}$;

$$\text{e) } \sqrt[4]{-4}; \quad \text{f) } \sqrt[3]{\frac{8+24i}{3-i}}; \quad \text{g) } \sqrt[3]{\frac{27-54i}{2+i}}; \quad \text{h) } \sqrt[4]{-\frac{18}{1+i\sqrt{3}}}$$

9. Oldja meg az alábbi egyenleteket:

$$\text{a) } (z+1)^n - (z-1)^n = 0; \quad \text{b) } (z+i)^n - (z-i)^n = 0, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

10. Írja ki az 1-es szám összes alábbi fokú gyökét:

$$\text{a) } 3; \quad \text{b) } 4; \quad \text{c) } 8; \quad \text{d) } 12!$$

11. Írja ki az 1-es szám összes alábbi fokú primitív gyökét:

$$\text{a) } 3; \quad \text{b) } 4; \quad \text{c) } 8; \quad \text{d) } 12!$$

12. Mutassa meg az 1-es szám összes a) 16-odik ; b) 24-edik gyökei közül melyik primitív!

13. Határozza meg az 1-es szám összes n -edik gyökeinek összegét!

14. Legyen ε az 1-es primitív $2n$ -edik gyöke. Számolja ki az $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^{n-1}$ összeget!

15. Keresse meg az 1-es szám összes n -edik gyökének k -ad fokainak összegét!

16. Számítsa ki az 1-es szám összes a) 16-odik ; b) 24-edik primitív gyökeinek összegét!

17. Legyen k és l — természetes relatív prím számok, ε — az 1-es szám k -edik gyöke, és a ξ — pedig az 1-es szám l -edik primitív gyöke. Bizonyítsa be, hogy $\varepsilon\xi$ — az 1-es szám kl -edik primitív gyöke!

18. Megjelöljük $\varphi(n)$ -el az 1-es szám összes n -edik primitív gyökeinek a számát. Bizonyítsa be, hogy a $\varphi(kl) = \varphi(k)\varphi(l)$, hogyha k és l relatív prím számok!

19. Jelölje $\varphi(n)$ ugyan azt, mint az előző feladatban. Bizonyítsa be, hogy ha $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}$, ahol $p_1, p_2, \dots, p_s$ — különböző relatív prím számok, akkor

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right) !$$

3. Lineáris egyenletrendszerek. A Gauss-elimináció

Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket:

$$1. \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} -9x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7, \\ -4x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 7x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 13, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 3. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 7 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 14 = 0. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 1 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 1 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 1 = 0! \end{cases}$$

Vizsgálja meg az alábbi egyenletrendszerek megoldhatóságát és keresse meg azok általános megoldását a λ paramétertől függően:

$$11. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = 7. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9, \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 - 10x_4 = 11. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} (1 + \lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1 + \lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + (1 + \lambda)x_3 = \lambda^2! \end{cases}$$

15. Keresse meg azokat a homogén lineáris egyenletrendszereket, melyeknek az alábbi számrendszerek lesznek a megoldásai:

$$(1, 1, 0, -3, -1), (1, -1, 2, -1, 0), (4, -2, 6, 3, -4), (2, 4, -2, 4, -7)!$$

4. Permutációk. Transzpozíciók

1. Írja ki azokat a transzpozíciókat, melyek segítségével az $1, 2, 3, 4, 5$ permutációtól eljuthatunk a $2, 5, 3, 4, 1$ permutációhoz!

2. Bizonyítsa be, hogy bármilyen $i_1, i_2, \dots, i_n$ rendezést meg lehet kapni egy bármilyen másik $j_1, j_2, \dots, j_n$ rendezésből nem több, mint $n - 1$ transzpozíció segítségével!

3. Határozza meg az alábbi rendezések paritását:

a) $7, 5, 6, 4, 1, 3, 2$; b) $1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8$;

c) $2, 4, 6, 8, \dots, 2n, 1, 3, 5, 7, \dots, 2n - 1$!

4. Az $1, 2, 3, \dots, n$ számok melyik rendezésében lesz a legnagyobb az inverziók száma és mennyivel lesz egyenlő?

5. Az $i_1, i_2, \dots, i_n$ rendezésben az inverziók száma egyenlő k -val. Mennyivel egyenlő az inverziók száma az $i_n, i_{n-1}, \dots, i_2, i_1$ rendezésben?

6. Bizonyítsa be, hogy bármely k ($0 \leq k \leq C_n^2$) egész számra létezik az $1, 2, 3, \dots, n$ számok rendezése, amelyben az inverziók száma k -val egyenlő!

7. Határozza meg az alábbi permutációk szorzatát:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}!$$

8. Adja meg páronként idegen ciklusok szorzataként az alábbi permutációkat és határozza meg azok párosságát:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \dots & 2n & 2n-1 \end{pmatrix}; \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & \dots & 3n-1 & 3n & 3n-2 \end{pmatrix}!$$

9. Írja ki az összes heted rendű permutációt, amelyek az alábbi páronként idegen ciklusok szorzataként vannak megadva:

$$\text{a) } (1\ 5)(2\ 3\ 4); \quad \text{b) } (1\ 3)(2\ 5)(4\ 7); \quad \text{c) } (7\ 5\ 3\ 1)(2\ 4\ 6)!$$

10. Írja fel azt a $2n$ -edrendű permutációt, mely $(1\ 2\ 3\ \dots\ 2n-1\ 2n)$ ciklus által van megadva!

11. Határozza meg az alábbi hetedrendű permutációk szorzatát:

a) $[(1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6\ 7)] \cdot [(1\ 4\ 7)(2\ 3\ 5\ 6)]$;

b) $[(1\ 3)(5\ 7)(2\ 4\ 6)] \cdot [(1\ 3\ 5)(2\ 4)(6\ 7)]$!

12. Bizonyítsa be, hogy bármely $\delta \in S_n$ ciklusra, melynek hossza k , teljesül a következő egyenlőség: $\delta^k = e$ (e – egységpermutáció az S_n -ből)!

13. Legyen $\delta \in S_n$ – k hosszúságú ciklus és l – olyan természetes szám, hogy $\delta^l = e$. Bizonyítsa be, hogy l osztódik k -ra!

14. Legyen

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Oldja meg az alábbi egyenleteket: a) $\alpha\beta x = \gamma$; b) $\beta = \gamma x \alpha$, ahol x – valamilyen ötöd rendű permutáció!

15. Bizonyítsa be, hogy bármely n -edrendű permutáció felírható az alábbi permutációk szorzataként:

a) $(1\ 2), (1\ 3), \dots, (1\ n)$; b) $(1\ 2), (2\ 3), \dots, (n-1\ n)$!

5. n -edrendű determinánsok.

A determinánsok tulajdonságai

1. Határozza meg, hogy az alábbi szorzatok közül melyek tartoznak a megfelelő rendű determinánsokba és milyen előjellel rendelkeznek:

a) $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$;

b) $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$;

c) $a_{12}a_{23}a_{34} \cdots a_{n-1,n}a_{kk} \ (1 \leq k \leq n)$;

d) $a_{12}a_{23}a_{34} \cdots a_{n-1,n}a_{n1}$!

2. Válassza ki az i, j, k értékeit úgy, hogy az $a_{51}a_{i6}a_{1j}a_{35}a_{44}a_{6k}$ szorzat negatív előjellel kerüljön bele egy hatod rendű determinánsba!

3. Keresse meg a negyed rendű determináns összes tagját, amely tartalmazza az a_{32} elemet és negatív előjellel kerül a determinánsba!

4. Keresse meg az

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$$

determináns összes olyan elemét, amely tartalmazza az : a) x^4 és x^2 ; b) x^3 és x tényezőket!

5. A determináns meghatározása alapján számítsa ki az alábbi determinánsok értékét:

a) $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-2} & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 2 & a \\ d & 0 & 0 & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & -\lambda & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & -\lambda & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda + a_4 \end{vmatrix}$!

6. Hogyan változik a determináns, ha:

a) az első oszlopát az utolsó helyére tesszük, az összes többi pedig balra toljuk, megőrizve kölcsönös elhelyezkedésüket;

b) a sorait fordított sorrendben írjuk fel?

7. Hogyan változik a determináns, ha:

a) az összes oszlopához, kezdve a másodikkal, hozzáadjuk az előzőt;

b) az összes sorához, kezdve a másodiktól, hozzáadjuk az összes előzőt?

8. Legyen $\Delta = |a_{jk}|$ ($a_{jk} \in \mathbb{C}$) – n -edrendű determináns, mely elemei kielégítik a következő feltételeket: 1) $a_{jk} \in \mathbb{R}$, ha $j > k$; 2) $a_{kj} = ia_{jk}$, ha $j \geq k$ (i – imaginárius). Az n milyen értékeinél lesz a Δ determináns valós szám?

9. Hogyan változik a determináns, ha az összes a_{jk} elemét megszorozzuk c^{j-k} -ra, ahol $c \neq 0$?

10. A 20604, 53227, 25755, 20927 és 289 számok osztódnak 17-re. Bizonyítsa be, hogy a

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

determináns osztható 17-re!

11. Mennyivel egyenlő az a determináns, melyben a páros számú sorok összege egyenlő a páratlan számú sorok összegével?

12. Bizonyítsa be, hogy

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}!$$

13. Számítsa ki a következő determinánst:

$$\begin{vmatrix} a_1+x & x & \dots & x \\ x & a_2+x & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \dots & a_n+x \end{vmatrix}!$$

6. Az aldetermináns és az elem komplementere.

Determinánsok kiszámítása

Számítsa ki az alábbi determinánsok értékét:

$$1. \begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}!$$

$$2. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}!$$

$$3. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}!$$

$$4. \begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}!$$

$$5. \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}!$$

$$6. \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}!$$

$$7. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}!$$

$$8. \begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}!$$

$$9. \begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}!$$

$$10. \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}!$$

$$11. \begin{vmatrix} 2 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}!$$

$$12. \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}!$$

$$13. \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}!$$

$$14. \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & z \end{vmatrix}!$$

$$15. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ y_1 & y_2 & \cos \beta & \sin \beta \\ z_1 & z_2 & \cos \gamma & \sin \gamma \end{vmatrix}!$$

$$16. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 9 & 4 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}!$$

$$17. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 27 & 0 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 10 \end{vmatrix}!$$

$$18. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}!$$

$$19. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}!$$

$$20. \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}!$$

$$21. \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & x \end{vmatrix}!$$

$$22. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix} !$$

$$23. \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ a_{11} & 1 & x & \dots & x^{n-1} \\ a_{21} & a_{22} & 1 & \dots & x^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 1 \end{vmatrix} !$$

7. A Cramer-szabály

Oldja meg az alábbi egyenletrendszereket a Cramer-szabály szerint:

$$1. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3! \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37! \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x - 5y + 3z + t - 5 = 0, \\ 3x - 7y + 6z - t + 1 = 0, \\ 5x - 9y + 3z + 4t - 7 = 0, \\ 4x - 6y + 3z + t - 8 = 0! \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6 = 0, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 + 8 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8 = 0! \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0! \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 6x + 5y - 2z + 4t + 4 = 0, \\ 9x - y + 4z - t - 13 = 0, \\ 3x + 4y + 2z - 2t - 1 = 0, \\ 3x - 9y + 2t - 11 = 0! \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x - y - 6z + 3t + 1 = 0, \\ 7x - 4y + 2z - 15t + 32 = 0, \\ x - 2y - 4z + 9t - 5 = 0, \\ x - y + 2z - 6t + 8 = 0! \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 2x + y + 4z + 8t = -1, \\ x + 3y - 6z + 2t = 3, \\ 3x - 2y + 2z - 2t = 8, \\ 2x - y + 2z = 4! \end{cases}$$

9. Ellenőrizze le, hogy az 1,1,1,1 számrendszer megoldása lesz-e a következő egyenletrendszernek:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 11x_3 - 13x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 0, \\ 13x_1 - 25x_2 + x_3 + 11x_4 = 0! \end{cases}$$

Számítsa ki az egyenletrendszer determinánsát!

10. Oldja meg az x_1, x_2, x_3 ismeretlenektől függő alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_1^2 x_3 = \beta_1, \\ x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_2^2 x_3 = \beta_2, \\ x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_3^2 x_3 = \beta_3, \end{cases}$$

ahol $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – páronként különböző valós számok; $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$.

8. Mátrix-műveletek. A mátrix inverze

Számítsa ki az alábbi mátrixok szorzatát:

1. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}!$

2. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}!$

3. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}!$

4. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 13 \\ 3 & -16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}!$

5. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}!$

6. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}!$

7. $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^5!$

8. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^n!$

9. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n!$

10. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n!$

11. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n!$

12. Hogyan változik az A és B mátrixok AB szorzata, ha:

- a) az A mátrix i -edik és j -edik sorát megcseréljük;
- b) az A mátrix i -edik sorához hozzáadjuk a j -edik sor α -szorosát;
- c) a B mátrix i -edik és j -edik oszlopát megcseréljük;
- d) a B mátrix i -edik oszlopához hozzáadjuk j -edik oszlop α -szorosát?

13. A négyzetes mátrix *spurjának*(*nyomának*) nevezzük azon elemeinek összegét, melyek a mátrix főátlóján helyezkednek el. Bizonyítsa be, hogy az AB szorzat spurja egyenlő a BA szorzat spurjával!

14. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges n -edrendű A és B négyzetes mátrixokra $AB - BA \neq E$, ahol E – n -edrendű egységmátrix!

15. Legyenek A és B – azonos rendű mátrixok. Bizonyítsa be, hogy $AB = BA$ akkor és csak akkor, ha a következő egyenlőségek közül az egyik igaz:

a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$; b) $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)!$

16. Legyen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Bizonyítsa be, hogy

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = O,$$

ahol E , O – megfelelően másodrendű egység- és nullás mátrixok!

17. Keresse meg az összes olyan másodrendű mátrixot, melyeknek négyzete nullás mátrixszal egyenlő!

18. Keresse meg az összes olyan másodrendű mátrixot, melyeknek négyzete egységmátrixszal egyenlő!

19. Keresse meg az összes olyan mátrixot, melyek kommutálnak az A mátrixszal, ha:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix};$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}!$

Keresse meg az alábbi mátrixok inverzét:

20. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}!$

21. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}!$

22. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}!$

23. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}!$

24. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}!$

25. Oldja meg az alábbi mátrixegyenletet:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}!$$

9. Az n -dimenziós számtani vektortér. Vektorrendszerek lineáris összefüggősége

1. Keresse meg az alábbi vektorok $3a_1 + 5a_2 - a_3$ lineáris kombinációját

$$a_1 = (4, 1, 3, -2), \quad a_2 = (1, 2, -3, 2), \quad a_3 = (16, 9, 1, -3)!$$

2. Határozza meg az x és y vektorokat az alábbi egyenletekből:

$$\text{a) } a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4x = \vec{0}, \quad \text{b) } 3(a_1 - y) + 2(a_2 + y) = 4(a_3 - y),$$

ahol $a_1 = (5, -8, -1, 2)$, $a_2 = (2, -1, 4, -3)$, $a_3 = (-3, 2, -5, 4)$.

Határozza meg, hogy lineárisan összefüggőek-e az alábbi vektorrendszerek:

3. $a_1 = (5, 4, 3)$, $a_2 = (3, 3, 2)$, $a_3 = (8, 1, 3)$.

4. $b_1 = (2, -4, 1)$, $b_2 = (0, 5, -6)$, $b_3 = (1, -2, 4)$.

5. $c_1 = (4, -5, 2, 6)$, 6. $d_1 = (1, 0, 0, 2, 5)$,

$c_2 = (2, -2, 1, 3)$, $d_2 = (0, 1, 0, 3, 4)$,

$c_3 = (6, -3, 3, 9)$, $d_3 = (0, 0, 1, 4, 7)$,

$c_4 = (4, -1, 5, 6)$. $d_4 = (2, -3, 4, 11, 12)$.

7. Bizonyítsa be, hogy két arányos vektort tartalmazó vektorrendszer lineárisan összefüggő!

8. Bizonyítsa be, hogy nullás vektort tartalmazó vektorrendszer lineárisan összefüggő!

9. Bizonyítsa be, hogy ha az a_1, a_2, a_3 vektorrendszer lineárisan összefüggő és az a_3 vektor az a_1, a_2 vektorok lineáris kombinációja, akkor vagy az a_1 vektor lesz arányos az a_2 vektorral, vagy fordítva, az a_2 lesz arányos az a_1 vektorral!

10. Legyen $a_1, a_2, \dots, a_s - k$ -adrangú n -dimenziós vektorrendszer. Bizonyítsa be, hogy bármelyik lineárisan független részrendszere, amely k vektorból áll, bázisa lesz ennek a rendszernek!

11. Bizonyítsa be, hogy az adott vektorrendszer bármelyik lineárisan független részrendszere kibővíthető ezen rendszer bázisává!

12. Milyen esetben lesz a vektorrendszernek egyetlen bázisa?

13. Ekvivalens lesz-e két vektorrendszer, ha egyforma ranggal rendelkeznek?

14. Legyen $a_1 = (0, 1, 0, 2, 0)$, $a_2 = (7, 4, 1, 8, 3)$, $a_3 = (0, 3, 0, 4, 0)$, $a_4 = (1, 9, 5, 7, 1)$, $a_5 = (0, 1, 0, 5, 0)$. Kiválasztható-e a γ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4, 5$) szám úgy, hogy a

$$b_1 = \sum_{k=1}^5 \gamma_{1k} a_k, \quad b_2 = \sum_{k=1}^5 \gamma_{2k} a_k, \quad \dots, \quad b_5 = \sum_{k=1}^5 \gamma_{5k} a_k$$

vektorrendszer lineárisan összefüggő legyen?

Keresse meg a λ paraméter minden olyan értékét, amelynél a b vektor az a_1, a_2, a_3 vektorok lineáris kombinációja lesz, ha:

15. $a_1 = (2, 3, 5)$,

16. $a_1 = (4, 4, 3)$,

$$a_2 = (3, 7, 8),$$

$$a_3 = (1, -6, 1),$$

$$b = (7, -2, \lambda).$$

$$a_2 = (7, 2, 1),$$

$$a_3 = (4, 1, 6),$$

$$b = (5, 9, \lambda).$$

$$17. \quad a_1 = (3, 2, 5),$$

$$a_2 = (2, 4, 7),$$

$$a_3 = (5, 6, \lambda),$$

$$b = (1, 3, 5).$$

$$18. \quad a_1 = (3, 2, 6),$$

$$a_2 = (7, 3, 9),$$

$$a_3 = (5, 1, 3),$$

$$b = (\lambda, 2, 5).$$

Keresse meg az alábbi vektorrendszerek összes bázisát:

$$19. \quad a_1 = (1, 2, 3, 4),$$

$$a_2 = (2, 3, 4, 5),$$

$$a_3 = (3, 4, 5, 6),$$

$$a_4 = (4, 5, 6, 7).$$

$$20. \quad a_1 = (1, 2, 3),$$

$$a_2 = (2, 3, 4),$$

$$a_3 = (3, 2, 3),$$

$$a_4 = (4, 3, 4),$$

$$a_5 = (1, 1, 1).$$

21. Hány bázisa lesz a $k + 1$ vektorból álló k -adrangú rendszernek, amely a nullás vektortól eltérő arányos vektorokat tartalmaz?

10. A mátrix rangja

1. Számítsa ki az alábbi mátrixok rangját a beszegési aldeterminánsok módszerével:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 11 \\ 3 & 3 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}!$$

2. Keresse meg a λ paraméter értékét, melyre az alábbi mátrixnak a legkisebb a rangja:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}!$$

3. Mivel lesz egyenlő az alábbi mátrixok rangja a λ paraméter különböző értékeinél:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 - \lambda^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9 - \lambda^2 \end{pmatrix}?$$

4. Számítsa ki az alábbi mátrixok rangját az elemi átalakítások segítségével:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix};$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 75 & 0 & 116 & 39 & 0 \\ 171 & -69 & 402 & 123 & 45 \\ 301 & 0 & 87 & -417 & -169 \\ 114 & -46 & 268 & 82 & 30 \end{pmatrix};$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}!$$

5. Bizonyítsa be, hogy ha a mátrixhoz hozzácsatolnak egy sort (vagy egy oszlopot), vagy nem változik a rangja, vagy megnövekedik eggyel!

6. Bizonyítsa be, hogy egy r -edrangú tetszőleges mátrix felírható elsőrangú r számú mátrixok összegeként, de nem írható fel kevesebb, mint r ilyen mátrix összegeként!

7. Legyen $A = \|a_{ij}\| - n > 1$ -edrendű mátrix és r – ezen mátrix rangja. Határozza meg az adjungált $A^* = \|A_{ij}\|$ mátrix rangját, ahol A_{ij} – az A mátrix a_{ji} elemének algebrai komplementere!

11. Lineáris egyenletrendszer. A Kronecker-Capelli tétel

1. Vizsgálja meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket megoldhatóságukra és keresse meg általános és egy konkrét megoldásukat:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1; \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4; \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3; \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12; \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7; \end{cases}$$

$$\text{g) } \begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18; \end{cases}$$

$$\text{h) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 7; \end{cases}$$

$$\text{i) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1; \end{cases}$$

$$\text{j) } \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1! \end{cases}$$

2. Vizsgálja meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket megoldhatóságukra és a λ paraméter értékétől függően keresse meg az általános megoldásukat:

$$\text{a) } \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5, \\ -x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 20x_4 = 11, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 2; \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9, \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11; \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + \lambda x_4 = 9; \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1; \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} (1 + \lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1 + \lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + (1 + \lambda)x_3 = \lambda^2! \end{cases}$$

3. Vizsgálja meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket megoldhatóságukra és az a, b, c, d paraméterek értékétől függően keresse meg az általános megoldásaikat:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 1, \\ ax + by + cz = d, \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} ax + y + z = 1, \\ x + by + z = 1, \\ x + y + cz = 1! \end{cases}$$

12. Homogén lineáris egyenletrendszerek

1. Keresse meg az egyenletrendszerek fundamentális rendszerét és általános megoldásait:

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0; \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0; \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0, \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0, \\ -x_3 + x_5 = 0, \\ -x_4 + x_6 = 0; \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0! \end{cases}$$

2. Az

$$A = \begin{pmatrix} 30 & -24 & 43 & -50 & -5 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

mátrixok sorai fundamentális rendszerét alkotják-e az alábbi egyenletrendszernek

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 11x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 0? \end{cases}$$

3. Az alábbi mátrix mely sorai alkotják

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 & -7 \\ 5 & 3 & 7 & -6 & -14 \\ 8 & 0 & -5 & 6 & 13 \\ 4 & -2 & -7 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

a

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszer fundamentális rendszerét?

4. Keresse meg azokat a homogén lineáris egyenletrendszereket, melyek számára az alábbi vektorrendszerek a fundamentális rendszerei lehetnének:

$$\text{a) } (3, 4, 2, 1, 6), (5, 9, 7, 4, 7); \quad \text{b) } (4, 3, -1, -1, 11), (1, 6, 8, 5, -4)!$$

5. Bizonyítsa be, hogy ha a homogén lineáris egyenletrendszer rangjának értéke eggyel kevesebb az ismeretlenek számánál, akkor a rendszer tetszőleges két megoldása arányos lesz egymással!

6. Legyen A – n ismeretlentől vett $n - 1$ homogén lineáris egyenletből álló rendszer mátrixa, M_i – az A mátrix aldeterminánsa, amely az A mátrix i -edik sora kihúzásával kapható meg. Bizonyítsa be, hogy a lineáris egyenletrendszer megoldásai közül az egyik az alábbi számrendszer

$$M_1, -M_2, M_3, -M_4, \dots, (-1)^{n-1}M_n,$$

emellett, ha ez a megoldás nem nulla, akkor bármelyik másik megoldás arányos lesz vele!

7. Felhasználva az előző feladat eredményeit, keresse meg az alábbi egyenletrendszerek általános megoldását:

$$\text{a) } \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 6x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0! \end{cases}$$

8. Bizonyítsa be, hogy a homogén lineáris egyenletrendszer tetszőleges megoldásának k -adik komponense akkor és csak akkor lesz egyenlő nullával, ha a rendszer mátrixának rangja a k -adik oszlop kihúzása esetén eggyel csökken!

9. Milyen feltételek mellett lesz az inhomogén lineáris egyenletrendszer tetszőleges megoldásainak adott lineáris kombinációja ismét megoldása ennek a rendszernek?

13. Csoportok. Gyűrűk. Testek

1. Az alábbi halmazok közül melyek alkotnak csoportot a megadott műveletre nézve:
 - a) a racionális számok halmaza az összeadás műveletét tekintve;
 - b) a racionális számok halmaza az szorzás műveletét tekintve;
 - c) az összes pozitív racionális szám halmaza az szorzás műveletét tekintve;
 - d) egy adott $a \neq 0$ valós szám egész kitevőjű hatványainak halmaza a szorzás műveletét tekintve;
 - e) az egész számok halmaza, hogyha a művelet a következőképpen van meghatározva: $a * b = a^b$;
 - f) az egész számok halmaza, hogyha a művelet a következőképpen van meghatározva: $a * b = a^2 b^2$;
 - g) a komplex számok halmaza adott φ argumentummal a szorzás műveletét tekintve;
 - h) az összes komplex n -edik egységgyökök halmaza a szorzás műveletét tekintve;
 - i) a nullától eltérő összes komplex szám halmaza, melyeknek abszolút értéke nem nagyobb egy rögzített r számtól, a szorzás műveletét tekintve;
 - j) az összes n -ed rendű páros permutációk halmaza a szorzás műveletét tekintve;
 - k) az összes n -ed rendű páratlan permutációk halmaza a szorzás műveletét tekintve;
 - l) az $\mathbb{R}^n$ halmaz összes n -dimenziós vektora az összeadás műveletét tekintve az $\mathbb{R}$ felett;
 - m) a sík összes elforgatásának halmaza egy rögzített pont körül az elforgatások folyamatos műveletét tekintve;
 - n) a sík összes párhuzamos eltolásának halmaza a párhuzamos eltolások folyamatos műveletét tekintve!
2. Bizonyítsa be, hogy egy tetszőleges G csoportban egyetlen egységelem és egyetlen inverz elem létezik a G csoport tetszőleges elemére!
3. Legyen $G - e$ egységelemet tartalmazó csoport a szorzás műveletét nézve. Bizonyítsa be, hogyha tetszőleges $a \in G$ elemre $a^2 = e$, akkor a $G - \text{Abel-csoport}$!
4. Legyen G_1, G_2 – megfelelően e_1 és e_2 egységelemeket tartalmazó izomorf csoportok és $f : G_1 \rightarrow G_2$ – olyan bijektív leképezés, hogy tetszőleges $a, b \in G_1$ elemekre $f(ab) = f(a)f(b)$. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $a \in G_1$ elemre $f(e_1) = e_2$ és $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$!
5. Bizonyítsa be, hogy az egész számok $\mathbb{Z}$ csoportja az összeadás műveletére nézve izomorf lesz egy adott természetes n szám egész többszöröseinek $n\mathbb{Z}$ csoportjával az összeadás műveletét tekintve!

6. Bizonyítsa be, hogy a valós számok csoportja az összeadásra nézve izomorf lesz pozitív egész számok csoportjával a szorzás műveletét tekintve!

7. Bizonyítsa be, hogy egy tetszőleges n -edrendű csoport izomorf lesz az n -edfokú permutációk S_n csoportjának valamely részcsoportjával!

8. Keresse meg az összes 3-adrendű csoportot (az izomorfizmus pontosságával)!

9. Keresse meg a $\mathbb{Z}^+$ egész számok csoportjának összes részcsoportját az összeadás műveletére nézve!

10. Írja ki a 3-adrendű permutációk S_3 csoportjának összes részcsoportját!

11. Az alábbi halmazok közül melyek alkotnak gyűrűt (testet) a megadott műveletre nézve:

a) az összes páros egész szám halmaza az összeadás és szorzás műveletét tekintve;
b) egy adott természetes n szám egész többszöröseinek halmaza az összeadás és szorzás műveletét tekintve;

c) az összes racionális szám halmaza az összeadás és szorzás műveletét tekintve;

d) az összes valós számok halmaza az összeadás és szorzás műveletét tekintve;

e) az összes komplex szám halmaza az összeadás és szorzás műveletét tekintve;

f) az $a + b\sqrt{2}$ alakú valós számok halmaza, ahol a, b – egész számok, az összeadás és szorzás műveletét tekintve;

g) az $a + b\sqrt[3]{3}$ alakú valós számok halmaza, ahol a, b – racionális számok, az összeadás és szorzás műveletét tekintve;

h) az $a + bi$ alakú komplex számok halmaza, ahol a, b – egész számok, az összeadás és szorzás műveletét tekintve;

i) az $a + bi$ alakú komplex számok halmaza, ahol a, b – racionális számok, az összeadás és szorzás műveletét tekintve;

j) az összes egész elemű n -es mátrixok halmaza az összeadás és szorzás műveletét tekintve;

k) az összes valós elemű n -es mátrixok halmaza az összeadás és szorzás műveletét tekintve;

l) az összes a, b racionális elemű $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ alakú mátrix halmaza az összeadás és szorzás műveletét tekintve!

12. Legyen $K - 1$ egységelemet tartalmazó gyűrű. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $a, b \in K$ elemekre igazak a $-(-a) = a$, $(-1) \cdot a = -a$, $(-a)(-b) = ab$ egyenlőségek!

13. Bizonyítsa be, hogy a valós elemű n -es mátrixok gyűrűjében csakis az elfajult mátrixok lesznek nullosztók!

14. Bizonyítsa be, hogy az összes $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ alakú mátrixok halmaza, ahol a, b – valós számok, a mátrixok összeadásának és szorzásának műveletét tekintve testet alkot, amely izomorf a komplex számok testével!

15. Bizonyítsa be, hogy az $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ alakú elemekből álló mátrixok teste izomorf az $a + b\sqrt{2}$ alakú elemekből álló számok testével (a, b racionális számok)!

14. A polinomok gyűrűje

1. Számítsa ki az alábbi polinomok szorzatát a komplex számok teste felett:

- a) $(2x^4 - x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 - 3x + 1);$
- b) $(3x^5 + 2x^2 - 1)(2x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4);$
- c) $((1 - i)x^3 + (2 + 3i)x^2 - ix + 1 + i)((1 + i)x - 3);$
- d) $(ix^3 - 4)(-x^4 + (3 - i)x^2 + 7 - i)!$

2. Ossza el az $f(x)$ polinomot a $g(x)$ polinomra a komplex számok teste felett, ha:

- a) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6, \quad g(x) = x^2 - 3x + 1;$
- b) $f(x) = 3x^5 + 2x^2 - 1, \quad g(x) = 3x^3 - 3x - 2;$
- c) $f(x) = (-1 + 5i)x^3 - (6 + 11i)x^2 + (3 + 5i)x + 2 - 5i,$
 $g(x) = (1 + i)x - 3;$
- d) $f(x) = (-1 + 3i)x^4 + 9x^3 + (-9 + 3i)x^2 + (7 + 6i)x - (2 + 2i),$
 $g(x) = ix^2 + (2 - i)x - 2 + 3i!$

3. Milyen feltételek mellett fog osztódni az $f(x)$ polinom a $g(x)$ polinomra a valós számok teste felett, ha:

- a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1, \quad g(x) = (x - 1)^2 \quad (a, b \in \mathbb{R});$
- b) $f(x) = x^4 + px^2 + q, \quad g(x) = x^2 + mx + 1 \quad (p, q, m \in \mathbb{R})?$

4. Határozza meg a polinomok legnagyobb közös osztóját:

- a) $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ és $x^3 + x^2 - x - 1;$
- b) $x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1$ és $3x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 2;$
- c) $x^6 - 7x^4 + 8x^3 - 7x + 7$ és $3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - 7;$
- d) $x^5 + x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ és $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1;$
- e) $x^4 - 10x^2 + 1$ és $x^4 - 4\sqrt{2}x^3 + 6x^2 + 4\sqrt{2}x + 1;$
- f) $x^4 - 4x^3 + 1$ és $x^3 - 3x^2 + 1!$

5. Felhasználva az Euklideszi algoritmust, határozza meg azokat az $u(x)$ és $v(x)$ polinomokat, melyekre teljesül, hogy $u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$, ahol $d(x) = (f(x), g(x))$, hogyha:

- a) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2, \quad g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2;$
- b) $f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1, \quad g(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2;$
- c) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2, \quad g(x) = x^2 - x + 1;$
- d) $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1, \quad g(x) = x^2 - x - 1!$

6. A határozatlan együtthatók módszerének segítségével határozza meg az $u(x)$ és $v(x)$ polinomokat úgy, hogy teljesüljön: $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$, hogyha:

a) $f(x) = x^3$, $g(x) = (x - 1)^2$;

b) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$!

7. Határozza meg azt a legkisebb fokszámú polinomot, mely az $(x - 1)^2$ -re való osztásakor $2x$ maradékot, az $(x - 1)^3$ -re való osztásakor pedig $3x$ maradékot ad!

8. Legyen $u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$, ahol $d(x)$ — az $f(x)$ és $g(x)$ polinomok legnagyobb közös osztója. Mivel egyenlő az $u(x)$ és $v(x)$ polinomok legnagyobb közös osztója?

15. A polinomok gyökei

1. A Horner-elrendezés algoritmusának segítségével számítsa ki az $f(x)$ polinom $f(c)$ értékét (amikor $x = c$), ha:

- a) $f(x) = 5x^4 - 19x^3 - 7x^2 + 9x + 3$, $c = 2$;
- b) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 5x^2 + x + 33$, $c = -2$;
- c) $f(x) = x^5 + (1 + 2i)x^4 - (1 + 3i)x^2 + 7$, $c = -2 - i$!

2. Bontsa fel az $f(x)$ polinomot az $x - c$ hatványai szerint, valamint keresse meg azok deriváltjainak értékét amikor $x = c$, ha:

- a) $f(x) = x^5$, $c = 1$;
- b) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 90$, $c = 2$;
- c) $f(x) = x^4 + 2ix^3 - (1 + i)x^2 - 3x + 7 + i$, $c = -i$;
- d) $f(x) = x^4 + (3 - 8i)x^3 - (21 + 18i)x^2 - (33 - 20i)x + 7 + 18i$, $c = -i + 2i$!

3. Határozza meg az $f(x)$ polinom c gyökének multiplicitását:

- a) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$, $c = 2$;
- b) $f(x) = x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 36x^2 - 27x - 54$, $c = 3$;

4. Az a milyen értéke mellett lesz az $x^5 - ax^2 - ax + 1$ polinom -1 -es gyökének multiplicitása legalább 2?

5. Az a és b melyik értékénél osztható az a) $ax^4 + bx^3 + 1$; b) $ax^n + bx^{n-1} + 1$ polinom az $(x - 1)^2$?

6. Keresse meg azt a feltételt, ami mellett az $x^5 - ax^3 - b$ polinom ($a, b \in \mathbb{R}$) rendelkezik nem nulla gyökkel, melynek multiplicitása 2!

7. Bizonyítsa be, hogy az $1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$ polinom nem rendelkezik többszörös gyökökkel!

8. Bontsa fel az $f(x)$ polinomot irreducibilis polinomok szorzatába a komplex számok teste felett, ha:

- a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$; b) $f(x) = x^4 + 10x^2 + 1$;
 c) $f(x) = x^8 + 27x^2$; d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$!

9. Bontsa fel az $f(x)$ polinomot irreducibilis polinomok szorzatába a komplex számok teste felett, ha:

- a) $f(x) = x^6 + 27$; b) $f(x) = x^{2n} - 2x^n + 2$;
 c) $f(x) = x^{2n} + x + 1$; d) $f(x) = x^4 - ax^2 + 1 \quad (-2 < a < 2)$;
 e) $f(x) = x^6 - x^3 + 1$; f) $f(x) = x^{12} + x^8 + x^4 + 1$!

10. Határozza meg a komplex számok teste felett azt a polinomot, melynek legkisebb a fokszáma a megadott gyökök alapján:

- a) 1 — kétszeres gyök, és $2, 3, 1 + i$ — egyszeres gyökök;
 b) i — háromszoros gyök, és $-1, -i$ — egyszeres gyökök!

11. Határozza meg a valós számok teste felett azt a polinomot, melynek legkisebb a fokszáma a megadott (komplex) gyökök alapján:

- a) 1 — kétszeres gyök, és $2, 3, 1 - i$ — egyszeres gyökök;
 b) $(2 - 3i)$ — háromszoros gyök, és $-i$ — egyszeres gyök!

12. Bizonyítsa be, hogy az $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+1}$ polinom osztódik az $x^2 + x + 1$ polinomra bármilyen természetes m, n, p számokra!

13. Milyen feltételek mellett osztódik az $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+1}$ polinom az $x^2 + x + 1$ polinomra?

14. $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ gyökei az $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ polinomnak. Milyen gyökei vannak az alábbi polinomoknak:

- a) $a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} - \dots + (-1)^n a_0$;
 b) $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$;

c) $a_n x^n + a_{n-1} b x^{n-1} + a_{n-2} b^2 x^{n-2} + \dots + a_0 b^n$?

15. Keresse meg az összefüggést az $x^3 + px^2 + qx + r$ polinom együtthatói között, melynek egyik gyöke egyenlő a másik két gyök összegével!

16. Határozza meg a λ -t úgy, hogy az $x^3 - 7x + \lambda$ polinom egyik gyöke egy másik gyökének kétszerese legyen!

17. Az $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda$ polinom két gyöke egyenlő 1-el. Határozza meg a λ értékét!

18. Határozza meg az a, b, c -t, hogy azok az $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ egyenlet megoldásai legyenek!

16. Irreducibilis polinomok.

Polinomok a racionális számok teste felett

1. Legyen P – az F test részteste és $g(x) \in P[x]$. Az alábbi állítások közül melyek igazak:

- a) ha $g(x)$ – irreducibilis polinom a P test felett, akkor irreducibilis lesz az F test felett is;
- b) ha $g(x)$ – irreducibilis polinom a F test felett, akkor irreducibilis lesz az P test felett is;
- c) ha $g(x)$ – reducibilis polinom a P test felett, akkor reducibilis lesz az F test felett is;
- d) ha $g(x)$ – reducibilis polinom a F test felett, akkor reducibilis lesz az P test felett is?

2. Legyen F – test. Bizonyítsa be, hogy a 2-od vagy 3-ad fokszámú polinom az F felett akkor és csak akkor lesz irreducibilis, ha létezik gyöke az F testben. Igaz lesz-e ez az állítás a 4-ed fokszámú polinomok esetére is?

3. Legyen $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ – irreducibilis polinom a $\mathbb{Q}$ felett. Bizonyítsa be, hogy az $f(x)$ polinomnak nincsenek többszörös komplex gyökei!

4. Eisenstein-féle irreducibilitási kritériumot felhasználva bizonyítsa be az alábbi polinomok irreducibilisságát a $\mathbb{Q}$ felett:

- a) $x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$; b) $x^5 - 12x^3 + 36x - 12$;
- c) $x^4 - x^3 + 2x + 1$; d) $x^{(p-1)p^k} + x^{(p-2)p^k} + \dots + x^{p^k} + 1$,

ahol p – természetes prímszám, $k \in \mathbb{N}$!

5. Bizonyítsa be, hogy az egész számú $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ polinom irreducibilis lesz a $\mathbb{Q}$ test felett, ha nincsenek egész gyökei és nem osztható egyetlen $x^2 + \frac{cm-am^2}{d-m^2}x + m$ alakú polinomra sem, ahol m – a d szám osztója!

6. Az előző feladat segítségével bontsa fel szorzatokra a következő polinomokat vagy bizonyítsa irreducibilisságukat:

- a) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 3x - 9$; b) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 6$!

7. Bizonyítsa be, hogyha az irreducibilis (egyszerűsíthetetlen) $\frac{p}{q}$ tört az egész számú $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ polinom gyöke, akkor:

- a) q az a_n szám osztója;

b) p az a_0 szám osztója;

c) $p - mq$ az $f(m)$ szám osztója tetszőleges egész m számra!

8. Keresse meg az alábbi polinomok racionális gyökeit:

a) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24$;

b) $x^5 - 7x^3 - 12x^2 + 6x + 36$;

c) $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$;

d) $24x^4 - 42x^3 - 77x^2 + 56x + 60$;

e) $10x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 18x - 24$;

f) $x^6 - 6x^5 + 11x^4 - x^3 - 18x^2 + 20x - 8$.

9. Bizonyítsa be, hogy az egész számú $f(x)$ polinomnak nincsenek egész gyökei, ha $f(0)$ és $f(1)$ – páratlan számok!

10. Keresse meg az alábbi polinomok legnagyobb közös osztóját:

a) $(x - 1)^3(x + 2)^2(x - 3)(x + 4)$ és $(x - 1)^2(x + 2)(x + 5)$;

b) $(x - 1)(x^2 - 1)(x^3 - 1)(x^4 - 1)$ és $(x + 1)(x^2 + 1)(x^3 + 1)(x^4 + 1)$;

c) $x^n - 1$ és $x^m - 1$ ($n, m \in \mathbb{N}$)!

17. A lineáris tér bázisa

Bizonyítsa be, hogy az a_1, a_2, a_3, a_4 vektorrendszer az $\mathbb{R}^4$ vektoriális tér bázisa lesz a valós számok $\mathbb{R}$ teste fölött! Keresse meg az $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) \in \mathbb{R}^4$ vektor koordinátáinak képleteit ebben a bázisban! Milyenek lesznek a $c \in \mathbb{R}^4$ vektor koordinátái az a_1, a_2, a_3, a_4 bázisban?

1. $a_1 = (-1, 2, 2, 1), a_2 = (0, 3, 2, 1), a_3 = (1, 1, 4, 2), a_4 = (1, -2, 1, 3), c = (2, -4, 5, 6).$
2. $a_1 = (3, -1, 1, 3), a_2 = (2, 0, 6, 1), a_3 = (1, -1, 1, 1), a_4 = (2, 4, 1, 1), c = (2, 4, 3, -1).$
3. $a_1 = (-2, 5, 0, 3), a_2 = (1, 3, 2, 6), a_3 = (1, 1, 1, 0), a_4 = (2, 2, 2, 2), c = (3, 6, 9, -2).$
4. $a_1 = (4, -1, 3, 2), a_2 = (2, 3, 1, 5), a_3 = (2, -3, 1, 1), a_4 = (2, 3, 2, 1), c = (2, -4, 3, 7).$
5. $a_1 = (2, 1, 3, 1), a_2 = (5, 2, 2, 5), a_3 = (3, 1, 6, 0), a_4 = (0, 6, 0, 7), c = (0, -6, -5, -11).$
6. $a_1 = (4, 3, 2, 1), a_2 = (-1, 3, 3, 3), a_3 = (2, 1, 2, 1), a_4 = (1, 5, 0, 1), c = (-1, -1, 2, 2).$
7. $a_1 = (0, 5, 1, 3), a_2 = (2, 4, 0, 1), a_3 = (1, 3, 1, 5), a_4 = (3, 6, 0, 1), c = (3, 8, -2, -10).$

18. Átmeneti mátrix egyik bázisból a másikba

Bizonyítsa be, hogy az a_1, a_2, a_3 és a b_1, b_2, b_3 vektorrendszerek az $\mathbb{R}^3$ vektoriális tér bázisai! Keresse meg az átmeneti mátrixot és a koordináták átalakításának képleteit az egyik bázisból való átmenet során a másikba. Ezután határozza meg a $c = (1, 2, 3)$ vektor koordinátáit mindkét bázisban, és ellenőrizze le a kapott eredményt a koordináták átalakítási képleteinek segítségével!

1. $a_1 = (1, -1, -1), \quad a_2 = (-1, 2, 0), \quad a_3 = (0, 1, 0);$
 $b_1 = (1, 0, 1), \quad b_2 = (1, -1, 2), \quad b_3 = (2, -1, 4).$
2. $a_1 = (0, 1, 2), \quad a_2 = (1, -2, -1), \quad a_3 = (1, -1, 2);$
 $b_1 = (-1, 1, 0), \quad b_2 = (2, -1, 1), \quad b_3 = (1, 0, 2).$
3. $a_1 = (2, 1, 1), \quad a_2 = (1, 1, 3), \quad a_3 = (3, 2, 5);$
 $b_1 = (1, 1, 1), \quad b_2 = (2, 1, 1), \quad b_3 = (3, 1, 3).$
4. $a_1 = (1, -1, 2), \quad a_2 = (2, 1, 1), \quad a_3 = (3, 0, 2);$
 $b_1 = (1, 1, 1), \quad b_2 = (-2, -1, 1), \quad b_3 = (1, 0, 3).$
5. $a_1 = (6, 4, -1), \quad a_2 = (1, -2, 2), \quad a_3 = (9, 3, 1);$
 $b_1 = (-3, 7, 8), \quad b_2 = (2, 1, 3), \quad b_3 = (0, -2, -3).$
6. $a_1 = (4, 3, 2), \quad a_2 = (1, 1, 3), \quad a_3 = (2, 2, 5);$
 $b_1 = (5, 4, 3), \quad b_2 = (2, 2, 1), \quad b_3 = (1, 6, -1).$
7. $a_1 = (8, 1, -1), \quad a_2 = (3, 2, -3), \quad a_3 = (4, -1, 2);$
 $b_1 = (1, 2, -1), \quad b_2 = (4, 4, -1), \quad b_3 = (3, 0, 2).$

19. Műveletek lineáris alterekkel

Keresse meg az $L_1 + L_2$ összeg dimenzióját és bázisát, valamint az $\mathbb{R}^5$ tér L_1 és L_2 lineáris altereinek $L_1 \cap L_2$ metszetét, ahol L_1 – az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak tere, $L_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$ – az a_1, a_2 vektorrendszerből előállított lineáris burok!

$$1. \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0; \end{cases} \quad \begin{aligned} a_1 &= (-5, 4, 1, 2, 3), \\ a_2 &= (1, 1, 1, 1, 1). \end{aligned}$$

$$2. \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 0; \end{cases} \quad \begin{aligned} a_1 &= (1, 1, 1, 1, 0), \\ a_2 &= (2, 1, -1, 1, 1). \end{aligned}$$

$$3. \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 0; \end{cases} \quad \begin{aligned} a_1 &= (1, 1, 1, 1, 1), \\ a_2 &= (0, 2, 3, 4, -6). \end{aligned}$$

$$4. \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 0; \end{cases} \quad \begin{aligned} a_1 &= (1, 1, 1, 1, 1), \\ a_2 &= (0, -7, 6, 2, 2). \end{aligned}$$

$$5. \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0; \end{cases} \quad \begin{aligned} a_1 &= (1, 1, 1, 1, 1), \\ a_2 &= (3, -6, 1, 7, 3). \end{aligned}$$

$$6. \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 0, \\ 4x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 = 0; \end{cases} \quad \begin{aligned} a_1 &= (1, 0, 1, 0, 1), \\ a_2 &= (1, 3, 7, 9, -10). \end{aligned}$$

$$7. \quad \begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_4 + 2x_5 = 0, \\ -x_1 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 11x_4 + 6x_5 = 0; \end{cases} \quad \begin{aligned} a_1 &= (1, 0, 1, 0, 1), \\ a_2 &= (-11, 6, -6, 1, -3). \end{aligned}$$

20. Lineáris transzformáció

A $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezés minden $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$ vektort $\varphi(x) \in \mathbb{R}^3$ vektorba alakít át (képez). Bizonyítsa be, hogy a φ lineáris transzformáció lesz! Keresse meg a vektor képének koordinátáinak képletét az $\mathbb{R}^3$ tér e_1, e_2, e_3 kanonikus bázisában; az $a = (1, 1, 1)$ és e_1, e_2, e_3 vektorok képét és a φ transzformáció mátrixát ugyan ebben a bázisban!

1. $\varphi(x) = (\chi_1 - \chi_2, \chi_2 - \chi_3, \chi_1 - \chi_3).$
2. $\varphi(x) = (\chi_2 + 3\chi_3, 2\chi_2 - \chi_3, \chi_2 + \chi_3).$
3. $\varphi(x) = (2\chi_1 - \chi_3, 2\chi_2 - \chi_3, \chi_1 - \chi_3).$
4. $\varphi(x) = (\chi_1 - \chi_2 + 2\chi_3, \chi_1 - \chi_2, \chi_1 + 2\chi_2).$
5. $\varphi(x) = (\chi_1 + 2\chi_2 - \chi_3, 2\chi_1 - \chi_2 + \chi_3, \chi_1 + 2\chi_2 - \chi_3).$
6. $\varphi(x) = (\chi_2 + 4\chi_3, \chi_1 + \chi_2 - 2\chi_3, 2\chi_2 - 2\chi_3).$
7. $\varphi(x) = (2\chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3, \chi_1 - \chi_3, \chi_2 + \chi_3).$

21. Lineáris transzformáció mátrixa egy bázisban

Határozza meg az $\mathbb{R}^3$ vektortér azon φ lineáris transzformációját, amely az a_1, a_2, a_3 bázis vektorokat megfelelően ezen tér b_1, b_2, b_3 vektoraiba alakítja át! Keresse meg a φ transzformáció mátrixát az a_1, a_2, a_3 bázisban!

1. $a_1 = (1, -1, 1), \quad a_2 = (2, -1, 0), \quad a_3 = (3, -2, 0);$
 $b_1 = (-1, 0, 1), \quad b_2 = (0, 0, 0), \quad b_3 = (0, 1, 1).$
2. $a_1 = (1, -1, -1), \quad a_2 = (-1, 2, 0), \quad a_3 = (0, 1, 0);$
 $b_1 = (1, -1, 1), \quad b_2 = (1, 0, -1), \quad b_3 = (2, -1, 0).$
3. $a_1 = (1, 0, 1), \quad a_2 = (1, -1, 2), \quad a_3 = (2, -1, 4);$
 $b_1 = (0, -1, 1), \quad b_2 = (1, 1, 0), \quad b_3 = (1, 0, 1).$
4. $a_1 = (1, 1, 1), \quad a_2 = (0, -1, 2), \quad a_3 = (1, 0, 2);$
 $b_1 = (1, -2, 1), \quad b_2 = (-1, 2, -1), \quad b_3 = (1, 0, 1).$
5. $a_1 = (2, 3, 5), \quad a_2 = (0, 1, 2), \quad a_3 = (1, 0, 0);$
 $b_1 = (1, 1, 1), \quad b_2 = (1, 1, -1), \quad b_3 = (2, 1, 2).$
6. $a_1 = (2, 0, 3), \quad a_2 = (4, 1, 5), \quad a_3 = (3, 1, 2);$
 $b_1 = (1, 2, -1), \quad b_2 = (4, 5, -2), \quad b_3 = (1, -1, 1).$
7. $a_1 = (1, 1, 1), \quad a_2 = (1, 1, -1), \quad a_3 = (2, 1, 2);$
 $b_1 = (1, 1, 1), \quad b_2 = (1, 1, 1), \quad b_3 = (1, 1, 0).$

22. Műveletek lineáris transzformációkkal

Legyen φ lineáris transzformációja az $\mathbb{R}^3$ vektortérnek, amely az $x = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$ vektort a $\varphi(x)$ vektorba alakítja át,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

– a ψ lineáris transzformáció mátrixa ugyan ezen tér a_1, a_2, a_3 bázisában. Keresse meg az $\mathbb{R}^3$ tér kanonikus bázisában a $\varphi, \psi, \varphi + \psi, \varphi - \psi, \varphi\psi, \psi\varphi$ lineáris transzformációk mátrixait!

1. $\varphi(x) = (2\chi_1 - \chi_2 - \chi_3, \chi_1 + \chi_3, \chi_1 + \chi_2 - 2\chi_3);$
 $a_1 = (1, 1, -1), a_2 = (-1, 2, 0), a_3 = (0, 1, 0).$
2. $\varphi(x) = (\chi_1 - \chi_2 + 2\chi_3, \chi_1 - \chi_2, \chi_1 + 2\chi_2);$
 $a_1 = (1, -1, 1), a_2 = (2, -1, -1), a_3 = (3, -2, 1).$
3. $\varphi(x) = (\chi_1 - \chi_2 - \chi_3, -\chi_1 + \chi_2 - \chi_3, -\chi_1 - \chi_2 + \chi_3);$
 $a_1 = (2, 1, 1), a_2 = (1, 1, 3), a_3 = (3, 2, 3).$
4. $\varphi(x) = (\chi_1 - \chi_2, \chi_1 + \chi_2 + \chi_3, \chi_1 + 2\chi_2 - \chi_3);$
 $a_1 = (-1, 1, -1), a_2 = (1, 0, 2), a_3 = (0, 1, 2).$
5. $\varphi(x) = (\chi_2 + 2\chi_3, 2\chi_3 - \chi_1, 3\chi_1 - \chi_2);$
 $a_1 = (1, 2, 1), a_2 = (0, 1, 1), a_3 = (1, 1, 1).$
6. $\varphi(x) = (\chi_1 + 4\chi_2 + \chi_3, 2\chi_1 - 3\chi_3, \chi_2 - 3\chi_1);$
 $a_1 = (3, 1, 1), a_2 = (1, 2, -1), a_3 = (2, 0, 1).$
7. $\varphi(x) = (2\chi_2 - 2\chi_3, 2\chi_1 - 2\chi_3, -\chi_2 - \chi_1);$
 $a_1 = (0, 1, -1), a_2 = (1, 2, -1), a_3 = (1, 1, -1).$

23. Lineáris transzformáció nulltere és képtere

Legyen A – az $\mathbb{R}^4$ vektortér φ lineáris transzformációjának mátrixa a c_1, c_2, c_3, c_4 bázisban.

Határozza meg az $\text{Im}\varphi$ és a $\text{Ker}\varphi$ alterek bázisát és dimenzióját! Győződjön meg arról, hogy $\dim \text{Im}\varphi + \dim \text{Ker}\varphi = \dim \mathbb{R}^4$!

1.
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & -1 & -5 \\ -1 & -2 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

7.
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -2 & -4 \\ 4 & -3 & 2 & -4 \\ 5 & -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

24. Lineáris transzformáció sajátvektora és sajátértéke

Legyen A – az $\mathbb{R}^4$ vektortér φ lineáris transzformáció mátrixa a kanonikus bázisban. Keresse meg a φ^2 , φ^3 , φ^4 lineáris transzformációk mátrixait ebben a bázisban és győződjön meg arról, hogy $f(\varphi) = 0$, ahol f – a φ transzformáció karakterisztikus polinomja! Határozza meg a φ transzformáció összes sajátértékét és összes sajátvektorát!

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

2. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

3. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

4. $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 7 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

6. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

7. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

25. Lineáris transzformáció sajátvektoraiból álló bázisok

Legyenek A_1, A_2, A_3 – megfelelően a $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ lineáris transzformációk mátrixai az $\mathbb{R}^3$ vektortér kanonikus bázisában. Bizonyítsa be, hogy az $\mathbb{R}^3$ térnek van két bázisa, melyek mindegyike a φ_1 és φ_2 transzformációknak megfelelő sajátvektorokból állnak! Keresse meg ezeket a bázisokat és a transzformációknak megfelelő mátrixokat ezekben a bázisokban! Bizonyítsa be, hogy az $\mathbb{R}^3$ térben nincs olyan bázis, amely a φ_3 transzformáció sajátvektoraiból áll!

$$1. \quad A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2. \quad A_1 = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & -1 \\ 9 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -5 & -1 & 3 \\ -9 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$3. \quad A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & -2 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$4. \quad A_1 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & 2 \\ -3 & -9 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 9 & -1 & -3 \\ 9 & 0 & -7 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 4 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$5. \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$6. \quad A_1 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$7. \quad A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 2 \\ -6 & 7 & 2 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -8 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

26. Lineáris altér ortogonális komplementere

Az $\mathbb{R}^4$ euklideszi tér L altére az alább megadott egyenletrendszer megoldásainak a tere.

Keresse meg az L altér $L^\perp$ ortogonális komplementerét az $\mathbb{R}^4$ térben és a c vektor vetületét az L altérre és az ő $L^\perp$ ortogonális komplementerére!

$$1. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, & c = (1, -2, -4, 5). \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0; \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, & c = (-14, -3, 5, 0). \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 0, \\ -x_1 - 6x_3 - x_4 = 0; \end{cases} \quad 3. \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, & c = (2, 8, 6, 4). \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0; \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, & c = (6, 2, 3, 0). \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 0; \end{cases} \quad 5. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, & c = (-5, -11, 3, 5). \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 14x_3 + 3x_4 = 0; \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0, & c = (-15, 29, 3, -5). \\ 4x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ -10x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 7x_4 = 0; \end{cases} \quad 7. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ -2x_1 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 0; \end{cases}$$

$$c = (14, -5, 1, -5).$$

27. Gram-Schmidt-féle ortonormalizációs eljárás

1. Az $\mathbb{R}^4$ euklideszi térben ortonormalizálja az a_1, a_2, a_3, a_4 vektorrendszert!

1.1. $a_1 = (1, 1, -1, -1), a_2 = (1, 0, 1, 0), a_3 = (1, 1, 0, 1), a_4 = (1, 1, 0, 0).$

1.2. $a_1 = (1, 1, 1, -1), a_2 = (1, 0, 0, 1), a_3 = (1, 1, 1, 0), a_4 = (0, 1, 1, 1).$

1.3. $a_1 = (-1, 1, 1, 1), a_2 = (1, 1, 0, 0), a_3 = (0, 1, 0, 1), a_4 = (0, 0, 1, 1).$

1.4. $a_1 = (1, 2, 1, 1), a_2 = (2, -1, 1, -1), a_3 = (1, 1, 2, 0), a_4 = (1, 1, 0, 0).$

1.5. $a_1 = (0, 0, 1, -1), a_2 = (0, 1, -1, 1), a_3 = (1, 1, -1, 1), a_4 = (1, 1, 1, 1).$

1.6. $a_1 = (-1, 0, 0, 1), a_2 = (0, 1, 1, 1), a_3 = (1, 1, -1, -1), a_4 = (1, 0, -1, 0).$

1.7. $a_1 = (0, 1, 1, 1), a_2 = (1, -1, 2, 0), a_3 = (0, 0, 1, 1), a_4 = (1, 1, 1, 1).$

2. A $C_{[\alpha, \beta]}^2$ euklideszi térben, mely az összes olyan függvény tere, melyek négyzete integrálható, ortogonalizálja a $p_1 = 1, p_2 = x, p_3 = x^2, p_4 = x^3$ polinomok rendszerét (a $C_{[\alpha, \beta]}^2$ tér két tetszőleges f és g függvényének skaláris szorzata a következő módon határozható meg:

$$(f, g) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx \quad)!$$

2.1. $\alpha = -2, \quad \beta = -1.$

2.2. $\alpha = 2, \quad \beta = 3. \quad 2.3. \quad \alpha = -3, \quad \beta = -2.$

2.4. $\alpha = -1, \quad \beta = 1. \quad 2.5. \quad \alpha = -2, \quad \beta = 2.$

2.6. $\alpha = -2, \quad \beta = 0. \quad 2.7. \quad \alpha = -1, \quad \beta = 2.$

28. Kvadratikus alak normálalakja

Keresse meg megfelelően a valós és komplex számok teste felett az $f(x_1, x_2, x_3)$ kvadratikus alak normálalakját valamint az ismeretlenek transzformációit, amelyek ehhez az alakhoz vezetnek az f alakot!

1. $f = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 - 6x_1x_2 - 4x_2x_3.$

2. $f = -x_1^2 + 4x_2^2 - x_3^2 + 8x_2x_3 - 4x_1x_3.$

3. $f = -x_1^2 + 3x_2^2 - 3x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_2x_3 - 4x_1x_3.$

4. $f = x_1^2 + 2x_2^2 - 8x_1x_2 + 4x_2x_3 + 2x_1x_3.$

5. $f = -2x_1^2 - 2x_2^2 - 8x_1x_2 - 4x_2x_3.$

6. $f = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 6x_2x_3 - 2x_1x_3.$

7. $f = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3 + 2x_1x_3.$

29. Pozitív és negatív definit kvadratikus alakok

A $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X^T A X$ kvadratikus alak, amely az A mátrixszal van megadva, pozitív definit, negatív definit vagy indefinit?

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$3. \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$4. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$5. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$6. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$7. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Irodalomjegyzék

1. *Fried Ervin* Algebra I. Elemi és lineáris algebra. – Budapest: Nemzeti tankönyvkiadó, 2000.
2. *D.K. Fagyev, I.Sz. Szominszkij* Felsőfokú algebrai példatár. – Budapest: Typotex, 2006.
3. *A.G. Kuros* Felsőbb algebra. – Budapest: Tankönyvkiadó, 1967.
4. *B. Bódi* Az algebra alapjai. – Ungvár: PoliPrint, 2010.
5. *Баранник В.Ф., Погоріляк Є.Я., Рудько В.П., Шапочка І.В.* Лінійна алгебра. – Ужгород: Ужгород. держ. ун-т, 2000.
6. *Гудивок П.М., Погоріляк Є.Я., Шапочка І.В.* Практикум з алгебри і теорії чисел для студентів першого курсу. – Ужгород: Ужгород. держ. ун-т, 2002.

Посібник з лінійної алгебри для математиків призначений для студентів I курсу Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці спеціальності А 4.04 Середня освіта (Математика) денної та заочної форми навчання з метою організації самостійної роботи з курсу "Лінійна алгебра".

Матеріал призначений для використання як навчально-методичний посібник з дисципліни "Лінійна алгебра".

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики
(протокол № 10 від «23» червня 2025 року)

Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості вищої освіти
Закарпатського угорського інституту імені Ференца Ракоці II
(протокол №7 від 26 серпня 2025 року)

Рекомендовано до видання у електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту імені Ференца
Ракоці II

(протокол №8 від 28 серпня 2025 року)

Підготовлено до видання у електронній формі (PDF) кафедрою математики та
інформатики з Видавничим відділом Закарпатського угорського інституту імені
Ференца Ракоці II