

Кафедра математика та інформатика

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І.

Курс лекцій
І. Модуль

Перший (бакалаврський)
(ступінь вищої освіти)

A Освіта/Педагогіка / A Oktatás/Pedagógia

A4.09 Середня освіта (Інформатика) / A4.09 Középiskolai oktatás
(Informatika)

Інформатика
(освітня програма)

Informatika
(Képzési program)



Берегове – 2026

Курс лекції «Теорія ймовірностей I.» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня, галузь знань: А Освіта/Педагогіка, А4.09 Середня освіта (Інформатика)б освітня програма: «Інформатика» / Укладач: Кучінка К.Й. Берегове: Закарпатський угорський університет ім. Ференца Ракоці II, 2026. 30 с.

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри обліку і аудиту ЗУЕ ім. Ф. Ракоці II
(протокол №7 від 16. травня 2026 року)

Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості освіти
ЗУЕ ім. Ф.Ракоці II
(протокол №5 25 травня 2026 року)

Рекомендовано до видання в електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради ЗУЕ ім. Ф.Ракоці II
(протокол №5 27 травня 2026 року)

Укладач:

Каталін Кучінка – кандидат фіз.-мат. наук, доцент, завідувач кафедри математики та інформатики ЗУЕ ім. Ференца Ракоці II

Рецензенти:

Дердь Надь– канд. фіз.-мат. наук, завідувач кафедри природничі науки Токайський університет

Адам Доровці– доктор філософії, доцент кафедри математики та інформатики ЗУЕ ім. Ференца Ракоці II

повідальні за випуск:

Мирослав СТОЙКА – завідувач кафедри математики та інформатики ЗУЕ імені Ференца Ракоці II, доцент, кандидат фізико-математичних наук

Олександр ДОБОШ – начальник Видавничого відділу ЗУЕ ім. Ф.Ракоці II

За зміст методичних вказівок відповідальність несе розробник.

Видавництво: ЗУЕ імені Ференца Ракоці II (адреса: пл. Кошута 6, м. Берегове, 90202.
Електронна пошта: foiskola@kmf.uz.ua)

© Каталін Кучінка, 2026
© Кафедра математики та інформатики ЗУЕ ім. Ф.Ракоці II, 2026

Теорія ймовірностей I

Конспект лекцій

Зміст

Вступ	2
Мета курсу	2
Компетентності, що формуються під час вивчення курсу	2
Програмні результати навчання	3
1 Випадкові експерименти та події	5
1.1 Операції над подіями	5
1.2 Властивості операцій та доведення	6
Питання для самоперевірки	7
2 Колмогоровський ймовірнісний простір	8
2.1 Алгебри подій (σ -алгебри)	8
2.2 Колмогоровський ймовірнісний простір	8
2.3 Основні теореми теорії ймовірностей та їх доведення	8
2.4 Неперервність ймовірності	9
Питання для самоперевірки	11
3 Класичні та геометричні ймовірнісні простори	12
3.1 Класичний ймовірнісний простір (Класична модель)	12
3.2 Геометрична ймовірність	13
Питання для самоперевірки	13
4 Умовна ймовірність	14
4.1 Умовна ймовірність	14
4.2 Теорема множення	14
4.3 Формула повної ймовірності	15
4.4 Формули Байєса	16
Питання для самоперевірки	17
5 Незалежність подій. Лема Бореля-Кантеллі	18
5.1 Незалежність подій	18
5.2 Лема Бореля-Кантеллі	19
Питання для самоперевірки	19
6 Схема Бернуллі (Послідовність незалежних випробувань)	21
6.1 Схема Бернуллі та формула	21
6.2 Найімовірніше число настання події A	21
Питання для самоперевірки	22
7 Локальна гранична теорема Муавра-Лапласа	23
Питання для самоперевірки	24

Вступ

Цей навчальний посібник підготовлено для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня Закарпатського угорського університету імені Ференца Ракоці II, галузі знань *А Освіта/Педагогіка*, спеціальності *A4.09 Середня освіта (Інформатика)*, освітньої програми *Інформатика*. Конспект призначений для опрацювання матеріалу дисципліни «*Теорія ймовірностей I*» і насамперед охоплює перший модуль, присвячений випадковим подіям.

Мета курсу

Метою курсу є надання здобувачам освіти цілісного, послідовного й структурованого уявлення про основні поняття та методи теорії ймовірностей, необхідні для подальшого вивчення стохастичних процесів, математичної статистики та їх застосувань в інформатиці. Особлива увага приділяється формуванню математичного апарату, достатнього для самостійного опрацювання фахової літератури, аналізу ймовірнісних моделей та розв'язування типових і прикладних задач.

Курс спрямований на ознайомлення студентів з аксіоматичним підходом до поняття ймовірності, операціями над подіями, класичними та геометричними ймовірнісними моделями, умовною ймовірністю, формулою повної ймовірності, формулами Байєса, незалежністю подій, схемою Бернуллі та локальною граничною теоремою Муавра–Лапласа.

Компетентності, що формуються під час вивчення курсу

Під час опрацювання матеріалу курсу здобувачі освіти розвивають такі загальні та фахові компетентності.

Загальні компетентності:

- **ЗК2.** Здатність до глибокого знання й розуміння предметної області та професійної діяльності, зокрема математичних основ стохастичних процесів.
- **ЗК3.** Здатність до усної та письмової комунікації державною мовою, а також до професійного спілкування іноземною мовою в межах спеціальності, з використанням термінології теорії ймовірностей.
- **ЗК5.** Здатність діяти автономно, приймати обґрунтовані рішення у професійній діяльності, відповідально виконувати завдання та дотримуватися етичних норм і чинного законодавства.

Фахові (спеціальні) компетентності:

- **ФК10.** Здатність застосовувати сучасні наукові факти, концепції, теорії та методи інформатики в освітній практиці.
- **ФК11.** Здатність використовувати методи інформаційного моделювання, реалізовувати інформаційні моделі засобами інформаційно-комунікаційних

технологій, проводити комп'ютерні експерименти, а також інтерпретувати, аналізувати й узагальнювати їх результати.

- **ФК12.** Здатність застосовувати сучасні методи розроблення та дослідження алгоритмів розв'язування задач під час моделювання об'єктів і процесів, а також реалізовувати ці алгоритми сучасними мовами програмування.
- **ФК15.** Здатність розв'язувати задачі різного рівня складності, пов'язані зі шкільним курсом інформатики, аналізувати й оцінювати ефективність розв'язань та формувати відповідні вміння в учнів.

Програмні результати навчання

Опрацювання курсу також сприяє досягненню таких програмних результатів навчання:

- **ПРН2.** Демонструвати здатність навчати учнів державною мовою та розвивати їхні комунікативні вміння засобами предметного й інтегрованого навчання.
- **ПРН8.** Формулювати обґрунтовані професійні судження у фаховій сфері для спеціалістів і широкого загалу державною та іноземною мовами.
- **ПРН9.** Застосовувати сучасні інформаційно-комунікаційні та цифрові технології у професійній діяльності.
- **ПРН10.** Використовувати сучасні технології пошуку наукової інформації з метою самоосвіти та професійного розвитку.
- **ПРН11.** Виявляти готовність до командної роботи, адаптації та дій у нових ситуаціях, забезпечуючи рівність можливостей у професійній діяльності.
- **ПРН13.** Знати правове регулювання професійної діяльності й ухвалювати рішення з повагою до прав людини.
- **ПРН14.** Визначати структуру предметної галузі інформатики, її місце в системі наук, пояснювати перспективи розвитку інформаційних технологій та їх суспільне значення.
- **ПРН15.** Знати й розуміти фізичні, логічні та математичні основи інформаційних технологій; пояснювати й застосовувати способи кодування даних.
- **ПРН18.** Визначати та застосовувати методи розроблення й дослідження алгоритмів.
- **ПРН21.** Створювати інформаційні моделі, реалізовувати їх засобами інформаційно-комунікаційних технологій, проводити дослідження, інтерпретувати та узагальнювати результати.

- **ПРН22.** Реалізовувати алгоритми мовами програмування, добирати відповідні технології та розв'язувати шкільні задачі з інформатики різних рівнів складності.
- **ПРН23.** Розуміти й реалізовувати сучасні методики навчання інформатики та освітньо-технологічні підходи відповідно до вимог навчальних програм.

Методика викладу матеріалу в цьому конспекті спрямована на досягнення зазначених результатів. Теоретичні положення, означення, теореми та доведення розвивають логічне мислення і математичну підготовку, а приклади та самостійні завдання сприяють формуванню навичок моделювання, аналізу алгоритмів і застосування ймовірнісних методів у професійній діяльності.

1 Випадкові експерименти та події

1. Основи випадкових експериментів та подій

Основним предметом теорії ймовірностей є випадкове явище (або випадковий експеримент).

Означення: Випадковим явищем називають таке явище, результат якого не визначається однозначно врахованими умовами. На відміну від цього, у детермінованих явищах умови однозначно визначають настання події.

Масові явища: Якщо випадкове явище повторюється багато разів при однакових або майже однакових умовах, ми говоримо про випадкові масові явища (наприклад, радіоактивний розпад або азартні ігри).

Простір елементарних подій та події:

- Можливі результати експерименту називаються елементарними подіями (часто позначаються ω). Їх характеристикою є те, що вони можуть настати лише одним способом.
- Множина всіх елементарних подій називається простором елементарних подій (Ω).
- Події ототожнюються з множинами: події є підмножинами простору елементарних подій ($A \subseteq \Omega$).

Існує дві особливі події:

- **Достовірна подія:** Настає завжди, позначається Ω (основна множина).
- **Неможлива подія:** Ніколи не настає, позначається $\emptyset$ (порожня множина).

1.1 Операції над подіями

Оскільки події розглядаються як множини, операції над ними відповідають теоретико-множинним та логічним операціям.

- **Сума (Об'єднання):** $A + B$ (або $A \cup B$). Настає тоді, коли настає A або B , або обидві (тобто принаймні одна з них).
- **Добуток (Переріз):** $A \cdot B$ (або $A \cap B$, AB). Настає тоді, коли настають і A , і B .
- **Протилежна подія (Доповнення):** $\bar{A}$. Настає тоді, коли A не настає.
- **Різниця:** $A - B$ (або $A \setminus B$). Настає тоді, коли A настає, а B не настає.

Несумісні події: Дві події, A і B , називаються несумісними (диз'юнктними), якщо вони не можуть настати одночасно, тобто їх добуток є неможливою подією:

$$A \cdot B = \emptyset \quad (1)$$

1.2 Властивості операцій та доведення

Для операцій над подіями діють правила алгебри множин. Нижче наведено деякі важливі властивості та їх доведення на основі джерел.

А) Добуток елементарної події та довільної події

Твердження: Якщо A – елементарна подія, а B – довільна подія, то їх добуток є або самою подією A , або неможливою подією.

Доведення: Оскільки A і B є подіями, їх добуток (AB) є частиною A ($AB \subseteq A$). Оскільки A – елементарна подія, за означенням вона не має власних підмножин (тільки вона сама та порожня множина). Тому AB може бути лише A або $\emptyset$. Якщо A є елементом B (тобто настання A тягне за собою настання B), то $AB = A$, в іншому випадку $AB = \emptyset$.

Б) Розкладання суми на несумісні події

Часто необхідно розкласти суму подій на суму попарно несумісних подій.

Твердження: Для довільних подій A і B виконується $A + B = A + \overline{A}B$, де доданки у правій частині виключають один одного.

Доведення: На основі теоретико-множинних означень:

- $A + B$ (об'єднання) містить ті елементарні події, які входять до A або до B .
- Подія $\overline{A}B$ (тобто $B - A$) містить ті елементи, які є в B , але немає в A .
- Якщо до A додати ті, що є тільки в B ($\overline{A}B$), отримаємо об'єднання.
- Очевидно, що A і $\overline{A}B$ є диз'юнктними, оскільки $A \cdot (\overline{A}B) = (A \cdot \overline{A}) \cdot B = \emptyset \cdot B = \emptyset$.

Отже, рівність виконується, і доданки є несумісними.

В) Дистрибутивність відносно віднімання

Твердження: Множення є дистрибутивним відносно віднімання, тобто $A(B - C) = AB - AC$.

Доведення (теоретико-множинним шляхом): Доведення ґрунтується на тождествах теорії множин.

- Ліва частина: $A(B - C) = A(B \cdot \overline{C}) = A \cdot B \cdot \overline{C}$. Це означає, що подія настає, якщо настають A і B , але не C .
- Права частина: $AB - AC = (A \cdot B) - (A \cdot C) = (A \cdot B) \cdot \overline{(A \cdot C)}$.

Застосовуючи правило де Моргана до правої частини:

$$(A \cdot B) \cdot (\overline{A \cdot C}) = (A \cdot B \cdot \overline{A}) + (A \cdot B \cdot \overline{C})$$

Оскільки $A \cdot \bar{A} = \emptyset$, перший доданок зникає:

$$\emptyset \cdot B + A \cdot B \cdot \bar{C} = \emptyset + A \cdot B \cdot \bar{C} = A \cdot B \cdot \bar{C}$$

Обидві частини збігаються, твердження доведено.

Г) Закони де Моргана

Ці тотожності є фундаментальними при діях з подіями.

Твердження: $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$ та $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$.

Пояснення/Доведення логічним шляхом:

- Перше твердження ($\overline{A + B}$) означає, що не настає ні A , ні B . Це рівносильно тому, що A не настає ($\bar{A}$) і B не настає ($\bar{B}$), тобто $\bar{A} \cdot \bar{B}$.
- Друге твердження ($\overline{A \cdot B}$) означає, що неправда, що настають обидві події. Це виконується тоді, коли принаймні одна з них не настає, тобто або A не відбувається ($\bar{A}$), або B не відбувається ($\bar{B}$), що і є $\bar{A} + \bar{B}$.

Узагальнення властивостей операцій

На основі джерел найважливіші властивості алгебри подій, які часто використовуються без доведення:

- **Ідемпотентність:** $A + A = A$, $A \cdot A = A$.
- **Комутативність:** $A + B = B + A$, $A \cdot B = B \cdot A$.
- **Асоціативність:** $A + (B + C) = (A + B) + C$.
- **Дистрибутивність:** $A(B + C) = AB + AC$.

Питання для самоперевірки

Дайте відповідь на наступні питання на основі матеріалу розділу:

1. У чому різниця між випадковим явищем та детермінованим явищем?
2. Дайте означення достовірної події та неможливої події, вкажіть їх позначення!
3. Коли ми говоримо про дві події, що вони несумісні? Запишіть це також за допомогою математичних позначень!
4. Сформулюйте закони де Моргана для подій!
5. Доведіть, що для довільних подій A і B виконується $A + B = A + \bar{A}B$!

2 Колмогоровський ймовірнісний простір

2.1 Алгебри подій (σ -алгебри)

Математичні основи теорії ймовірностей складають теоретико-множинні структури. Нехай Ω – непорожня множина, яку ми називаємо простором елементарних подій (множина елементарних подій). Події – це певні підмножини Ω , які належать до системи, позначеної $\mathcal{A}$ (або $\mathcal{F}$).

Означення: Систему підмножин $\mathcal{A}$ множини Ω називають σ -алгеброю (алгеброю подій), якщо виконуються наступні умови:

- Достовірна подія є елементом системи: $\Omega \in \mathcal{A}$.
- Замкненість відносно утворення доповнення: Якщо $A \in \mathcal{A}$, то його протилежна подія $\bar{A} \in \mathcal{A}$.
- Замкненість відносно зліченного об'єднання: Якщо $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ – послідовність подій, то їх сума $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

З цього означення випливає, що σ -алгебра також замкнена відносно зліченного перетину (через закони де Моргана) і містить неможливу подію ($\emptyset$).

2.2 Колмогоровський ймовірнісний простір

Аксіоматичну побудову теорії ймовірностей розробив А. М. Колмогоров. Трійку $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ називають колмогоровським ймовірнісним простором, якщо:

- Ω – простір елементарних подій.
- $\mathcal{A}$ – σ -алгебра подій.
- $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{R}$ – ймовірнісна міра (функція), для якої виконуються наступні аксіоми:

(P1) **Невід'ємність:** Для кожної $A \in \mathcal{A}$ виконується $P(A) \geq 0$.

(P2) **Нормованість:** $P(\Omega) = 1$.

(P3) **σ -адитивність (Зліченна адитивність):** Якщо $A_1, A_2, \dots$ – попарно несумісні події (тобто $A_i A_j = \emptyset$, якщо $i \neq j$), то:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

2.3 Основні теореми теорії ймовірностей та їх доведення

З аксіом безпосередньо випливають найважливіші властивості.

А) Ймовірність неможливої події

Теорема: $P(\emptyset) = 0$.

Доведення: В аксіомі σ -адитивності виберемо події $A_1 = \Omega$ та $A_i = \emptyset$ ($i \geq 2$). Вони попарно несумісні. Тоді $\sum A_i = \Omega$. Згідно з аксіомою: $P(\Omega) = P(\Omega) + \sum P(\emptyset)$. Оскільки $P(\Omega) = 1$, звідси випливає, що сума невід'ємних членів може бути скінченною і незмінною лише тоді, коли $P(\emptyset) = 0$.

Б) Скінченна адитивність

Теорема: Якщо A і B – несумісні події, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Доведення: Це окремий випадок σ -адитивності, якщо наступні члени послідовності вибрати порожньою множиною ($A_3 = A_4 = \dots = \emptyset$) і використати те, що $P(\emptyset) = 0$.

В) Ймовірність протилежної події

Теорема: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Доведення: Оскільки A і $\bar{A}$ несумісні і їх сума дорівнює Ω , через скінченну адитивність та нормованість: $P(A) + P(\bar{A}) = P(A + \bar{A}) = P(\Omega) = 1$. Звідси шляхом перестановки отримуємо твердження.

Г) Монотонність

Теорема: Якщо $B \subseteq A$, то $P(B) \leq P(A)$.

Доведення: Подію A можна розкласти на диз'юнктні частини $A = B + (A \setminus B)$. Через адитивність $P(A) = P(B) + P(A \setminus B)$. Оскільки $P(A \setminus B) \geq 0$, то $P(A) \geq P(B)$.

2.4 Неперервність ймовірності

Теорема: Функція ймовірності є неперервною. Твердження теореми (еквівалентні умови):

1. **σ -адитивність:** Якщо A_n попарно диз'юнктні, то $P(\cup A_n) = \sum P(A_n)$.
2. **Неперервність для зростаючої послідовності:** Якщо $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ (зростаюча послідовність), то $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)$.
3. **Неперервність для спадної послідовності:** Якщо $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ (спадна послідовність), то $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\cap_{n=1}^{\infty} A_n)$.
4. **Неперервність у порожній множині ("в нулі"):** Якщо $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ і $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$.

Етапи доведення на основі джерела:

Крок 1: 1) $\Rightarrow$ 2) (Із σ -адитивності впливає неперервність зростаючої послідовності)

Нехай $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ – зростаюча послідовність подій. Позначимо $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Утворимо диз'юнктні події наступним чином: Нехай $B_1 = A_1$, і $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ для кожного $n = 2, 3, \dots$. Тоді події B_n попарно несумісні, і їх об'єднання співпадає з об'єднанням початкової послідовності: $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = A$. Крім того, об'єднання перших n подій B є саме A_n : $\bigcup_{k=1}^n B_k = A_n$. Через σ -адитивність (пункт 1):

$$P(A) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(B_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P(B_k)$$

Оскільки $\sum_{k=1}^n P(B_k) = P(\bigcup_{k=1}^n B_k) = P(A_n)$ (через скінченну адитивність), то:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

Цим твердження доведено.

Крок 2: 2) $\Rightarrow$ 3) (Із зростаючої неперервності впливає спадна)

Нехай $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ – спадна послідовність. Тоді послідовність їх доповнень, $\overline{A_n}$, утворює зростаючу послідовність ($\overline{A_n} \subset \overline{A_{n+1}}$). Застосуємо пункт 2) до доповнень:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\overline{A_n}) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}\right)$$

За законами де Моргана доповнення об'єднання є перетином, тому $\bigcup \overline{A_n} = \overline{\bigcap A_n}$. Використовуючи те, що $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - P(A_n)) = 1 - P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

Перетворивши рівняння, отримуємо: $\lim P(A_n) = P(\bigcap A_n)$.

Крок 3: 3) $\Rightarrow$ 4) (Із спадної неперервності впливає неперервність в нулі)

Цей крок є окремим випадком пункту 3. Якщо перетин спадної послідовності є порожньою множиною ($\bigcap A_n = \emptyset$), то згідно з пунктом 3):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\emptyset)$$

Оскільки $P(\emptyset) = 0$, то $\lim P(A_n) = 0$.

Крок 4: 4) $\Rightarrow$ 1) (Із неперервності в нулі впливає σ -адитивність)

Нехай $A_1, A_2, \dots$ попарно несумісні події, і нехай $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Визначимо залишковий член ("хвіст" послідовності):

$$C_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k = A \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k$$

Послідовність C_n спадна ($C_n \supset C_{n+1}$), і їх спільна частина порожня ($\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$). Згідно з умовою 4), тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} P(C_n) = 0$. Через скінченну адитивність можемо записати ймовірність A :

$$P(A) = P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k \cup C_n\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k) + P(C_n)$$

Візьмемо границю обох частин при $n \rightarrow \infty$. Оскільки $P(A)$ константа і $\lim_{n \rightarrow \infty} P(C_n) = 0$:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P(A_k) + 0 = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

Цим ми повернулися до пункту 1), довівши σ -адитивність.

Питання для самоперевірки

Дайте відповідь на наступні питання на основі матеріалу розділу:

1. Яке означення σ -алгебри? Перерахуйте її три властивості!
2. Назвіть аксіоми колмогоровського ймовірнісного простору (P1, P2, P3)!
3. Доведіть на основі аксіом, що ймовірність неможливої події дорівнює 0!
4. Що стверджує теорема про монотонність?
5. Сформулюйте теорему про неперервність ймовірності для зростаючої послідовності подій!

3 Класичні та геометричні ймовірнісні простори

3.1 Класичний ймовірнісний простір (Класична модель)

Класична ймовірнісна модель застосовується для опису експериментів, де кількість можливих наслідків (елементарних подій) є скінченною, і немає підстав вважати, що якийсь із наслідків є більш імовірним за інші (тобто елементарні події є "рівноможливими").

Доведення формули $P(A) = m/n$

Ймовірність події A є відношенням кількості сприятливих наслідків (m) до загальної кількості можливих наслідків (n):

Умови: Розглянемо експеримент, який має скінченну кількість, n елементарних подій (наслідків). Позначимо простір елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$.

Рівна ймовірність: Оскільки в класичній моделі елементарні події рівноможливі, кожній з них ми приписуємо однакову ймовірність p :

$$P(\omega_i) = p$$

Нормування: Ми знаємо, що сума ймовірностей усіх елементарних подій дорівнює 1 (оскільки одна з них обов'язково настане). Тому:

$$\sum_{i=1}^n P(\omega_i) = 1 \implies \sum_{i=1}^n p = 1$$

Оскільки сума складається з n доданків p :

$$n \cdot p = 1 \implies p = \frac{1}{n}$$

Отже, ймовірність кожної окремої елементарної події дорівнює $1/n$.

Ймовірність події A : Нехай A – довільна подія, яка складається з m елементарних подій (це "сприятливі" випадки). Позначимо це:

$$A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_m}\}.$$

Підсумовування: Через адитивність ймовірності, ймовірність події A дорівнює сумі ймовірностей елементарних подій, що її складають:

$$P(A) = \sum_{k=1}^m P(\omega_{i_k}) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{n}$$

Оскільки в сумі є m доданків:

$$P(A) = m \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$$

Висновок: Згідно з класичним означенням, ймовірність події A є відношенням числа сприятливих випадків (m) до числа всіх можливих, рівноможливих випадків (n). (В інших джерелах це часто позначають як k/n або k/N).

3.2 Геометрична ймовірність

Геометричну ймовірність використовують, якщо кількість можливих наслідків експерименту є нескінченною (незліченною), і наслідки утворюють неперервну область (наприклад, відрізок, плоску фігуру або просторове тіло).

- **Означення:** Нехай простір елементарних подій Ω є областю в $\mathbb{R}^n$, що має скінченну міру (довжину, площу або об'єм). Під час експерименту ми випадково вибираємо точку з цієї області. Припускаємо, що ймовірність того, що точка потрапить у підобласть A області Ω , залежить не від розташування області, а тільки від її міри, і є пропорційною їй.
- **Формула:** Якщо $m(\Omega)$ позначає міру всього простору елементарних подій (наприклад, площу), а $m(A)$ – міру сприятливої області, то:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

де m позначає міру Лебега (довжину, площу, об'єм).

- **Приклад:** "Задача про зустріч" (прибуття двох осіб у певний інтервал часу) є типовим прикладом, який можна розв'язати за допомогою геометричної ймовірності, розглядаючи простір подій як квадрат на площині, а сприятливі події – як площу смуги всередині квадрата.

Питання для самоперевірки

Дайте відповідь на наступні питання на основі матеріалу розділу:

1. Яка основна умова класичного ймовірнісного простору стосовно елементарних подій?
2. Виведіть формулу класичної ймовірності $P(A) = m/n$!
3. У чому різниця між умовами застосування класичної та геометричної ймовірнісної моделі?
4. Запишіть формулу для обчислення геометричної ймовірності та поясніть позначення!
5. Наведіть приклад задачі, яку можна розв'язати за допомогою геометричної ймовірності!

4 Умовна ймовірність

4.1 Умовна ймовірність

Означення: Якщо A і B – дві події і $P(B) > 0$, то умовну ймовірність події A при умові B визначають наступним чином:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

де $P(AB)$ – ймовірність сумісного настання (добутку) A і B .

Інтуїтивне значення та обґрунтування: Введення цього поняття ґрунтується на поведінці відносних частот. Якщо експеримент проводиться n разів, і подія B настає k_B разів, а A і B одночасно – k_{AB} разів, то серед настань B відносна частота A дорівнює k_{AB}/k_B . Перетворивши це:

$$\frac{k_{AB}}{k_B} = \frac{k_{AB}/n}{k_B/n} \approx \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Це обґрунтовує наведене вище означення. Умовна ймовірність по суті означає "звуження" простору подій до події B .

Теорема (Умовний ймовірнісний простір): При фіксованій події B ($P(B) > 0$), умовна ймовірність $P(\cdot|B)$ має всі властивості ймовірності (аксіоми Колмогорова), тобто $P(B|B) = 1$, невід’ємна і σ -адитивна.

4.2 Теорема множення

З означення умовної ймовірності безпосередньо впливає теорема множення, яка дозволяє обчислити ймовірність сумісного настання двох або більше подій.

Для двох подій: Якщо $P(A) > 0$ і $P(B) > 0$, то:

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

Ця теорема виражає, що ймовірність сумісного настання дорівнює добутку ймовірності однієї події та умовної ймовірності іншої події (відносно першої).

Узагальнення для n подій (Загальна теорема множення): Нехай

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

– такі події, для яких $P(A_1 A_2 \dots A_{n-1}) > 0$. Тоді:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \dots A_{n-1})$$

Доведення

А) Доведення правила для двох подій: Доведення безпосередньо випливає з означення.

- Виходимо з означення умовної ймовірності: $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$.
- Помножимо обидві частини рівняння на $P(B)$ (за умови, що $P(B) > 0$).
- Отримуємо: $P(AB) = P(A|B)P(B)$.
- Аналогічно, на основі $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$, маємо $P(AB) = P(B|A)P(A)$.

Б) Доведення загального правила (для n подій): Доведення здійснюється шляхом повторного застосування означення (або повною індукцією). Запишемо праву частину, підставивши означення умовних ймовірностей:

$$P(A_1) \cdot \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_1)} \cdot \frac{P(A_1 A_2 A_3)}{P(A_1 A_2)} \cdot \dots \cdot \frac{P(A_1 \dots A_n)}{P(A_1 \dots A_{n-1})}$$

Через умови знаменники не дорівнюють нулю. У добутку проміжні члени скорочуються (телескопічний добуток):

- $P(A_1)$ скорочується зі знаменником першого дробу.
- $P(A_1 A_2)$ скорочується зі знаменником другого дробу, і так далі.
- Зрештою залишається лише останній чисельник: $P(A_1 A_2 \dots A_n)$. Цим тотожність доведено.

Приклад застосування (Витягування без повернення): Якщо ми витягуємо кулі з урни без повернення, ймовірності можна обчислити за допомогою теореми множення. Наприклад, якщо тягнемо з колоди 32 карти, ймовірність того, що червона 10-ка і червона 7-ка потраплять в одну руку (наприклад, першому гравцеві, який отримує 12 карт), можна вивести як за допомогою теореми множення, так і за допомогою комбінаторики.

4.3 Формула повної ймовірності

Передумова: Повна група подій. Систему подій

$$H = \{B_1, B_2, \dots\}$$

(або $H_1, H_2, \dots$) називають повною групою подій, якщо події попарно несумісні (тобто $B_i \cap B_j = \emptyset$, якщо $i \neq j$), і їх сума є достовірною подією ($\sum B_i = \Omega$). На практиці події B_i часто називають гіпотезами.

Теорема: Нехай $B_1, B_2, \dots$ – повна група подій з додатними ймовірностями (тобто $P(B_i) > 0$). Тоді ймовірність довільної події A можна обчислити за формулою:

$$P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i)$$

(У скінченному випадку сумування йде до n , у зліченно нескінченному випадку – до нескінченності).

Доведення

- **Розкладання:** Оскільки система $\{B_i\}$ є повною, тобто $\sum B_i = \Omega$, подію A можна записати як її перетин з достовірною подією:

$$A = A \cdot \Omega = A \cdot \left(\sum_i B_i \right) = \sum_i (A \cdot B_i)$$

Це означає, що подія A розкладається на суму добутоків (перетинів) з подіями B_i .

- **Адитивність:** Оскільки події B_i попарно несумісні ($B_i B_j = \emptyset$), то події $A \cdot B_i$ також попарно несумісні. За аксіомою σ -адитивності ймовірності (або скінченної адитивності у скінченному випадку) ймовірність суми дорівнює сумі ймовірностей:

$$P(A) = P\left(\sum_i AB_i\right) = \sum_i P(AB_i)$$

- **Теорема множення:** З означення умовної ймовірності

$$P(A|B) = P(AB)/P(B)$$

шляхом перестановки отримуємо теорему множення:

$$P(AB_i) = P(A|B_i)P(B_i).$$

Підставивши це у вищенаведену суму, отримуємо теорему:

$$P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i)$$

4.4 Формули Байєса

Ця теорема дозволяє переглянути ймовірності членів повної групи подій (гіпотез B_i) після настання події (A) (це називається апостеріорною ймовірністю).

Теорема: Нехай $B_1, B_2, \dots$ – повна група подій з додатними ймовірностями, і нехай A – подія, для якої $P(A) > 0$. Тоді для будь-якого індексу i :

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_j P(A|B_j)P(B_j)}$$

Доведення

- **Означення:** Виходимо з означення умовної ймовірності для $P(B_i|A)$:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i A)}{P(A)}$$

(У джерелах перетин часто позначають записом поруч: $P(B_i A)$ або $P(AB_i)$).

- **Перетворення чисельника:** Застосовуючи теорему множення до чисельника

$$P(AB_i) = P(A|B_i)P(B_i)$$

, рівняння набуває вигляду:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}$$

- **Розкладання знаменника:** Ймовірність $P(A)$, що знаходиться у знаменнику, розкладаємо за формулою повної ймовірності

$$P(A) = \sum_j P(A|B_j)P(B_j).$$

Підставивши це у знаменник, отримуємо формулу Байєса:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_j P(A|B_j)P(B_j)}$$

Питання для самоперевірки

Дайте відповідь на наступні питання на основі матеріалу розділу:

1. Дайте означення умовної ймовірності!
2. Запишіть теорему множення для двох подій!
3. Що ми називаємо повною групою подій?
4. Сформулюйте формулу повної ймовірності!
5. Запишіть формулу Байєса і поясніть, для чого вона використовується!

5 Незалежність подій. Лема Бореля-Кантеллі

У теорії ймовірностей незалежність відображає той інтуїтивний зміст, що настання однієї події не впливає на шанси настання іншої події.

5.1 Незалежність подій

Незалежність двох подій

Інтуїтивний підхід до незалежності двох подій A і B ґрунтується на умовній ймовірності: A не залежить від B , якщо $P(A|B) = P(A)$ (за умови, що $P(B) > 0$). Оскільки це означення не є симетричним і не охоплює події з нульовою ймовірністю, у літературі формальним означенням вважається правило множення.

Означення: Події A і B називаються незалежними, якщо:

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

де AB позначає сумісне настання (переріз) подій.

Пояснення та властивості:

- **Інтуїтивне значення:** Якщо ми отримуємо інформацію про настання однієї події, це не змінює ймовірності іншої події. Наприклад, якщо на гральному кубіку випадає 6, це не впливає на результат (герб чи цифра) підкидання монети, яке відбувається незалежно від кубика.
- **Граничні випадки:** Подія A тоді і тільки тоді незалежна від будь-якої іншої події, якщо $P(A) = 0$ або $P(A) = 1$.
- **Зв'язок з несумісністю:** Якщо A і B є подіями з додатною ймовірністю і вони виключають одна одну (тобто $AB = \emptyset$), то вони не можуть бути незалежними, оскільки $P(AB) = 0$, тоді як $P(A)P(B) > 0$. Отже, незалежність і несумісність — це різні поняття.

Незалежність кількох подій

У випадку кількох подій розрізняють попарну незалежність і незалежність у сукупності (або повну незалежність).

- **Попарна незалежність:** Події $A_1, A_2, \dots$ називаються попарно незалежними, якщо будь-які дві різні події з них є незалежними, тобто $P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j)$ для всіх $i \neq j$.
- **Незалежність у сукупності:** Події $A_1, \dots, A_n$ називаються незалежними в сукупності, якщо для будь-якого набору різних подій ймовірність їх добутку дорівнює добутку їх ймовірностей. Формально, для будь-яких k ($2 \leq k \leq n$) індексів:

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$$

Важлива відмінність: З попарної незалежності не випливає незалежність у сукупності. Можлива ситуація, коли три події попарно незалежні ($P(AB) = P(A)P(B)$ тощо), але разом вже не є такими (наприклад, $P(ABC) \neq P(A)P(B)P(C)$).

Нескінченні системи подій: Довільну (навіть нескінченну) систему подій називають незалежною, якщо будь-яка її скінченна підсистема є незалежною в сукупності.

5.2 Лема Бореля-Кантеллі

Лема Бореля-Кантеллі є одним з найважливіших результатів теорії ймовірностей, який стосується ймовірності настання нескінченної кількості подій. Теорема складається з двох тверджень.

Лема (Бореля-Кантеллі)

а) частина (Випадок збіжності): Нехай $A_1, A_2, \dots$ — довільна послідовність подій. Якщо сума ймовірностей подій скінченна, тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty,$$

то ймовірність того, що настане лише скінченна кількість подій A_n , дорівнює 1 (тобто ймовірність того, що настане нескінченна кількість подій, дорівнює 0).

б) частина (Випадок розбіжності - з незалежністю): Нехай події $A_1, A_2, \dots$ незалежні. Якщо сума їхніх ймовірностей нескінченна, тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty,$$

то ймовірність того, що настане нескінченна кількість подій A_n , дорівнює 1.

Пояснення:

- Частина а) стверджує, що якщо події "рідкісні" (сума їх ймовірностей збігається), то в "довгостроковій перспективі" вони точно не будуть відбуватися знову і знову; після певного моменту вони перестануть наставати. Це твердження не вимагає незалежності.
- Частина б) стверджує, що якщо події мають певну мінімальну "густину" (ряд розбіжний) і вони незалежні одна від одної, то вони обов'язково настануть нескінченну кількість разів. Тут умова незалежності є критично важливою.

Питання для самоперевірки

Дайте відповідь на наступні питання на основі матеріалу розділу:

1. За означенням, коли ми називаємо дві події незалежними?
2. Чи можуть дві несумісні події з додатною ймовірністю бути незалежними? Обґрунтуйте!
3. Чи впливає з попарної незалежності незалежність у сукупності?
4. Що стверджує частина а) леми Бореля-Кантеллі (випадок збіжності)?
5. У якому випадку умова незалежності є необхідною для леми Бореля-Кантеллі?

6 Схема Бернуллі (Послідовність незалежних випробувань)

6.1 Схема Бернуллі та формула

Суть послідовності випробувань: Розглянемо експеримент, у якому подія A настає з ймовірністю p (де $0 < p < 1$). Повторимо цей експеримент n разів незалежно один від одного. Це називається схемою Бернуллі (або послідовністю незалежних випробувань Бернуллі). У цій послідовності випробувань кількість настання події A часто позначають через ξ , що є випадковою величиною з біномним розподілом.

Обчислення ймовірності: Ймовірність того, що в n випробуваннях подія A настане точно k разів (позначимо це $P_n(k)$ або $P(\xi = k)$), обчислюється за такою формулою:

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

(де $C_n^k = \binom{n}{k}$), і $k = 0, 1, \dots, n$.

Пояснення формули: Структура формули ґрунтується на таких міркуваннях:

- **Ймовірність однієї конкретної послідовності:** Якщо розглянути одну конкретну послідовність результатів, у якій є k "успіхів" (подія A настанала) і $n - k$ "невдач" (насталася подія, протилежна до A), то – через незалежність – їхні ймовірності перемножуються. Таким чином, ймовірність однієї такої конкретної послідовності становить: $p^k (1 - p)^{n-k}$.
- **Кількість послідовностей:** У ході n випробувань k успішних подій можуть трапитися в різному порядку. Кількість способів, якими можна вибрати k випробувань з n , де настанала подія A , визначається числом комбінацій: C_n^k .
- **Підсумовування:** Оскільки ці послідовності є несумісними подіями, повна ймовірність дорівнює добутку кількості можливих випадків на ймовірність одного випадку.

6.2 Найімовірніше число настання події A

Значення k , при якому ймовірність $P(\xi = k)$ є найбільшою, називають модою розподілу. Ймовірності зростають, доки k не досягне певного значення, а потім спадають.

Найімовірніше число настання події (k_0) можна визначити за допомогою такої нерівності:

$$(n + 1)p - 1 < k_0 \leq (n + 1)p$$

(або в підручнику: $np - q \leq k_0 \leq np + p$, де $q = 1 - p$).

Для результату(ів) з максимальною ймовірністю можливі два випадки:

- **Одне найімовірніше значення:** Якщо $(n + 1)p$ не є цілим числом, то найімовірніше число настання події є єдиним.

- **Два найімовірніші значення:** Якщо $(n + 1)p$ є цілим числом, то існують два значення, ймовірність яких однакова і максимальна. Ці значення:

$$k_1 = (n + 1)p - 1$$

$$k_2 = (n + 1)p$$

Отже, подія A найчастіше настає кількість разів, що відповідає цілій частині значення $(n + 1)p$.

Питання для самоперевірки

Дайте відповідь на наступні питання на основі матеріалу розділу:

1. Що таке схема Бернуллі?
2. Запишіть формулу біномного розподілу та поясніть члени, що до неї входять!
3. Що називають модою розподілу ймовірностей у цьому контексті?
4. Якою нерівністю визначається найімовірніше число настання події?
5. Коли існує два найімовірніших значення кількості настання події?

7 Локальна гранична теорема Муавра-Лапласа

Теорема: Розглянемо n незалежних випробувань (схема Бернуллі), де ймовірність настання події A в кожному випробуванні дорівнює p ($0 < p < 1$), а ймовірність ненастання $q = 1 - p$. Позначимо $P_n(k)$ ймовірність того, що подія настане точно k разів.

Якщо $n \rightarrow \infty$, то для тих значень k , для яких величина $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ залишається в обмеженому інтервалі $[a, b]$, рівномірно виконується наступне наближення:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Коротко позначаючи функцію Гауса (функцію щільності стандартного нормального розподілу) через $\varphi(x)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{npq} \cdot P_n(k)}{\varphi(x)} = 1$$

де $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

Доведення

Доведення виходить із формули Бернуллі та використовує формулу Стірлінга для наближення факторіалів.

Формула Бернуллі та формула Стірлінга. Почнемо з формули Бернуллі:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

Для великих n і k застосуємо формулу Стірлінга ($n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$):

$$P_n(k) \approx \frac{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}}{\sqrt{2\pi k} k^k e^{-k} \sqrt{2\pi(n-k)} (n-k)^{n-k} e^{-(n-k)}} p^k q^{n-k}$$

Члени e^{-n} і $e^{-k} e^{-(n-k)}$ скорочуються. Після перетворення:

$$P_n(k) \approx \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}$$

Введемо змінну x для стандартизації:

$$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \implies k = np + x\sqrt{npq}$$

Звідси можна виразити $n-k$:

$$n-k = n - (np + x\sqrt{npq}) = n(1-p) - x\sqrt{npq} = nq - x\sqrt{npq}$$

Підставимо ці вирази у вираз під коренем:

$$\sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot \sqrt{\frac{np \cdot nq}{k(n-k)}} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}$$

(Оскільки при $n \rightarrow \infty$ відношення k/np та $(n-k)/nq$ прямують до 1).

Для дослідження експоненціальної частини візьмемо логарифм добутку $\left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}$. Позначимо його A :

$$\ln A = -k \ln \left(\frac{k}{np} \right) - (n-k) \ln \left(\frac{n-k}{nq} \right)$$

Підставивши вирази для k та $n-k$:

$$\frac{k}{np} = 1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}, \quad \frac{n-k}{nq} = 1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}$$

Використаємо розклад Тейлора ($\ln(1+u) \approx u - \frac{u^2}{2} + O(u^3)$):

$$\ln \left(\frac{k}{np} \right) \approx x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{x^2 q}{2np}$$

$$\ln \left(\frac{n-k}{nq} \right) \approx -x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{x^2 p}{2nq}$$

Підставимо ці вирази назад у вираз для $\ln A$:

$$\ln A \approx -(np + x\sqrt{npq}) \left(x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{x^2 q}{2np} \right) - (nq - x\sqrt{npq}) \left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{x^2 p}{2nq} \right)$$

Після виконання множення та спрощення членів (члени вищого порядку мають порядок $O(1/\sqrt{n})$ і прямують до 0) отримаємо:

$$\ln A \approx -\frac{x^2}{2}$$

Повертаючись до початкового виразу ($A = e^{\ln A}$):

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$$

Теорему доведено.

Значення

Ця теорема гарантує, що при великій кількості випробувань ймовірності біномного розподілу (гістограма) дуже добре наближаються кривою нормального розподілу (функцією Гауса).

Питання для самоперевірки

Дайте відповідь на наступні питання на основі матеріалу розділу:

1. До якого типу послідовності випробувань відноситься теорема, і які умови мають виконуватися для ймовірності p ?
2. Як визначається змінна x у наближенні, що фігурує в теоремі?
3. Яку математичну формулу ми використовуємо в доведенні для наближення факторіалів при великих n і k ?
4. Що відбувається зі зв'язком між $P_n(k)$ та щільністю нормального розподілу, коли n прямує до нескінченності?
5. Чому ця теорема є важливою з практичної точки зору для зв'язку між біномним та нормальним розподілом?

« ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ I.»

Курс лекцій

I. модуль

2026 р.

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики ЗУЕ ім. Ф.Ракоці II
(протокол №7 від «16» квітня 2025 року)

Розглянуто та рекомендовано Навчально-методичною радою
ЗУЕ ім. Ференца Ракоці II
(протокол №5 25 травня 2026 року)

Рекомендовано до видання в електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради ЗУЕ імені Ференца Ракоці II
(протокол №5 27 травня 2026 2025 року)

Підготовлено до видання в електронній формі (PDF) кафедрою математики та інформатики
спільно з Видавничим відділом ЗУЕ імені Ференца Ракоці II (30 с., угорською мовою)

Укладач:

Каталін Кучінка – кандидат фіз.-мат. наук, доцент, завідувач кафедри математики та інформатики ЗУЕ ім. Ференца Ракоці II

Рецензенти:

Дердь Надь – канд. фіз.-мат. наук, завідувач кафедри природничі науки Токайський університет

Адам Доровці – доктор філософії, доцент кафедри математики та інформатики ЗУЕ ім. Ференца Ракоці II

повідальні за випуск:

Мирослав СТОЙКА – завідувач кафедри математики та інформатики ЗУЕ імені Ференца Ракоці II, доцент, кандидат фізико-математичних наук

Олександр ДОБОШ – начальник Видавничого відділу ЗУЕ ім. Ф.Ракоці II

За зміст методичних вказівок відповідальність несе розробник.

Видавництво: ЗУЕ імені Ференца Ракоці II (адреса: пл. Кошута 6, м. Берегове, 90202.
Електронна пошта: foiskola@kmf.uz.ua) Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції Серія ДК ____ від ____ 2025 року

Розмір сторінок методичних вказівок: А4 (210х297мм)