

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Закарпатський угорський інститут
імені Ференца Ракоці II
кафедра математики та інформатики

ВІКТОРІЯ ДЗЯМКО

ВИЩА МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ

Курс лекцій (частина 2)
Для спеціальностей
D1 Облік і оподаткування
D2 Фінанси, банківська справа, страхування
та фондовий ринок (Фінансовий захист)



Берегове — 2025

Курс лекцій з навчальної дисципліни «Вища математика для економістів» (частина 2) для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня денної і заочної форми навчання для спеціальностей D1 Облік і оподаткування, D2 Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок (Фінансовий захист) / Розробник: Дзямко В.Й. Берегове: Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II, 2025. 55 с.

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики ЗУІ ім. Ференца Ракоці II
(протокол № 10 від 23 червня 2025 року.)

Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості вищої освіти
Закарпатського угорського інституту ім. Ференца Ракоці II
(протокол № 8 від «29» вересня 2025 року)

Рекомендовано до видання в електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського інституту ім. Ференца Ракоці II
(протокол № 9 від «30» вересня 2025 року)

Розробник методичної вказівки:

Вікторія ДЗЯМКО – доцент кафедри математики та інформатики
ЗУІ імені Ференца Ракоці II, кандидат педагогічних наук, доцент

Рецензенти:

Тетяна БОЯРИЩЕВА – доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу ДВНЗ УжНУ,
кандидат фізико-математичних наук, доцент (м. Ужгород)

Лівія МЕСАРОШ – доцент кафедри математики та інформатики ЗУІ імені Ференца Ракоці II, кандидат
фізик-математичних наук, доцент

За зміст методичної вказівки відповідальність несуть розробники

Відповідальний за випуск:

Каталін КУЧІНКА – завідувач кафедри математики та інформатики ЗУІ ім. Ф.Ракоці II, доцент,
кандидат фізик-математичних наук

Видавництво: Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II (адреса: пл. Кошута 6, м.
Берегове, 90202. Електронна пошта: foiskola@kmf.uz.ua)

Курс лекцій з навчальної дисципліни «Вища математика для економістів» (частина 1) для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня денної і заочної форми навчання для спеціальностей D1 Облік і оподаткування, D2 Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок (Фінансовий захист). У даному курсі лекцій коротко подано теоретичний матеріал, приклади розв'язування практичних завдань та пропонуються вправи для самостійної роботи.

ЗМІСТ

Передмова.....	4
Елементи теорії множин.....	5
1. Множини і операції над ними	5
2. Множини дійсних чисел.....	7
3. Модуль дійсного числа і його властивості.....	8
4. Точкові множини. Числові множини. Окіл точки.....	8
5. Межі числових множин.....	9
Вправи для самостійної роботи.....	10
Теорія функцій і границь.....	11
1. Сталі та змінні величини.....	11
2. Поняття функції однієї змінної.....	11
3. Способи задання функцій.....	12
4. Елементарні функції та їх класифікація.....	13
5. Окремі класи функцій	16
Вправи для самостійної роботи	18
6. Границя функції.....	19
Вправи для самостійної роботи.....	27
7. Неперервність функції.....	27
Вправи для самостійної роботи.....	29
Диференціальне числення функцій однієї змінної.....	30
1. Похідна.....	30
1.1. Означення похідної. Механічний, фізичний та геометричний зміст похідної.....	30
1.2. Односторонні похідні. Неперервність і диференційованість.....	31
1.3. Похідні елементарних функцій.....	32
1.4. Похідна оберненої функції. Диференціювання обернених тригонометричних функцій.....	34
1.5. Похідна складеної функції.....	34
1.6. Похідна неявно заданої функції.....	35
1.7. Метод логарифмічного диференціювання. Похідна показниково-степеневих функцій.....	35
Вправи для самостійної роботи	36
2. Диференціал.....	37
2.1. Означення, геометричний та механічний зміст диференціала.....	37
2.2. Основні формули та правила диференціювання.....	38
2.3. Основні теореми диференціального числення.....	39
2.4. Правило Лопіталю.....	41
2.5. Застосування диференціального числення для дослідження функцій.....	42
Вправи для самостійної роботи.....	46
Інтегральне числення функцій однієї змінної.....	47
1. Невизначений інтеграл.....	47
1.1. Поняття первісної функції та невизначеного інтеграла.....	47
1.2. Властивості невизначеного інтеграла.....	48
1.3. Таблиця основних інтегралів.....	49
1.4. Основні методи інтегрування.....	50
Вправи для самостійної роботи.....	51
2. Визначений інтеграл.....	51
2.1. Задача про площу криволінійної трапеції.....	51
2.2. Означення та умови існування визначеного інтеграла.....	52
2.3. Властивості визначеного інтеграла.....	53
Вправи для самостійної роботи.....	54
Рекомендована література.....	55

Передмова

Метою вивчення дисципліни «Вища математика для економістів» є формування у студентів базових математичних знань для вирішення завдань у професійній діяльності, вмінь аналітичного мислення та математичного формулювання економічних задач, що виникають на практиці. У процесі вивчення дисципліни студенти набувають знань з таких основних розділів вищої математики як лінійна алгебра, векторна алгебра, матричний аналіз, аналітична геометрія, диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної.

Вивчення курсу «Вища математика для економістів» забезпечує розвиток математичного та логічного мислення студентів, їх підготовку до вивчення спеціальних дисциплін і самостійної роботи над науковою та науково-технічною літературою, передбачає ознайомлення з основними поняттями, ідеями та методами сучасної математики, можливостями їх використання при розв'язуванні конкретних задач.

Дані курс лекцій допоможе студенту у практичному використанні під час самостійної роботи. Оволодіння студентом даним навчальним матеріалом допоможе йому: пояснювати моделі соціально-економічних явищ з погляду фундаментальних принципів і знань на основі розуміння основних напрямів розвитку економічної науки; застосовувати відповідні економіко-математичні методи та моделі для вирішення економічних задач; демонструвати базові навички креативного та критичного мислення у дослідженнях та професійному спілкуванні; абстрактно мислити, застосовувати аналіз та синтез для виявлення ключових характеристик економічних систем різного рівня, а також особливостей поведінки їх суб'єктів; показувати навички самостійної роботи, демонструвати критичне, креативне та самокритичне мислення.

Частина 2 є логічним продовженням частини 1 (Курсу лекцій)

Курс лекцій може бути використаний студентами при підготовці до практичних занять з даного предмету, особливо в умовах дистанційного навчання та кризових ситуацій.

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

У математиці всі поняття поділяються на дві категорії: *основні (первісні)* й *похідні*.

Похідні поняття означаються за допомогою первісних. Наприклад, „ромб” – за допомогою простішого поняття „чотирикутник”; „прямолінійний відрізок” – за допомогою поняття „пряма”.

Проте є й такі поняття, для яких не існує найпростішого поняття, за допомогою якого воно може бути означеним. Такі поняття називають *первісними*, вони не означаються. Поняття прямої є первісним поняттям. У геометрії первісним поняттям є ще точки і площини.

Множина є також поняттям первісним. Це поняття є одним із фундаментальних у математиці.

1. Множини і операції над ними.

Інтуїтивно під множиною розуміють сукупність деяких об’єктів, об’єднаних за певною ознакою чи властивістю. Так можна говорити про *множину парних чисел*, *множину натуральних чисел*, *множину студентів певного курсу*, *множину розв’язків даного рівняння* тощо.

Множини позначають великими буквами латинського і грецького алфавіту, а їх елементи – малими буквами. Якщо A – множина, x – її елемент, то це символічно записують $x \in A$ і читають: „ x належить A ”. Символічний запис $x \notin A$ означає, що „ x не належить A ”. Наприклад, якщо A є множиною натуральних чисел, що діляться на 2, то $6 \in A$, тоді як $5 \notin A$.

Означення 1.1. Множина, яка містить скінченну кількість елементів, називається *скінченною*.

Запис $A = \{a_1; a_2; \dots; a_m\}$ означає, що множина A скінченна і містить m елементів.

Означення 1.2. Множина $X = \{x_1; x_2; \dots; x_n; \dots\}$, яка містить нескінченну кількість елементів, називається *нескінченною*.

Означення 1.3. Множина, яка не містить жодного елемента, називається *порожньою* і позначається символом $\emptyset$.

Прикладом порожньої множини є множина дійсних коренів рівняння $x^2 + 4 = 0$.

Нехай маємо дві множини A і B .

Означення 1.4. Якщо кожен елемент множини A є елементом множини B , то множину A називають *підмножиною* множини B і пишуть $A \subset B$ або $B \supset A$ („ A міститься в B ” або „ B містить A ”).

Наприклад, множина натуральних чисел є підмножиною цілих чисел. Очевидно, що кожна множина є своєю підмножиною і порожня множина є підмножиною будь-якої множини.

Означення 1.5. Якщо множини A і B містять одні і ті самі елементи, тобто $A \subset B$ і $B \subset A$, то їх називають *рівними* і пишуть $A = B$.

Означення 1.6. Якщо кожному елементу множини A поставлено у відповідність один елемент множини B так, що кожний елемент із множини B при цьому є відповідним одному і тільки одному елементу з множини A , то кажуть, що між множинами A і B існує *взаємно однозначна відповідність*.

Наприклад, якщо між учнями в класі розподілено стільці так, що кожний учень має стілець і більше вільних стільців немає, то можна сказати, що між множиною учнів і множиною стільців цього класу існує взаємно однозначна відповідність. Якщо у класі за кожним столом сидять по два учні, то між множиною учнів і множиною столів цього класу не існує взаємно однозначної відповідності.

Для множини введено такі операції.

Об’єднання множин.

Означення 1.7. Множину C , що містить усі елементи множин A і B і не містить інших елементів, називають *об’єднанням (сумою)* множин A і B і записують $C = A \cup B$. Якщо є спільний елемент множин A і B , то у C він входить один раз.

Приклади.

1. Якщо $A = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$ і $B = \{1, 3, 5, \dots, 2n + 1, \dots\}$, то $C = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\}$.

2. Якщо A – множина дійсних чисел x , що задовольняють нерівність $0 \leq x \leq 3$, а B – множина дійсних чисел x , що задовольняють нерівність $1 \leq x \leq 4$, то $C = A \cup B$ є множина $0 \leq x \leq 4$.

Властивості операції об’єднання множин.

1. Переставна властивість – $A \cup B = B \cup A$.

2. Сполучна властивість – $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Операція об'єднання множин має й такі властивості, яких дія додавання чисел не має. Якщо $B \subset A$, то $A \cup B = A$, зокрема $A \cup A = A$, що при додаванні чисел не виконується.

Якщо задано множини A_α , де α може пробігати як скінченну, так і нескінченну множину значень, то об'єднання позначають так $\bigcup_\alpha A_\alpha$.

Переріз множин.

Означення 1.8. Множину D , що містить усі спільні елементи множин A і B і не містить інших елементів, називають *перерізом (добутком)* множин A і B і записують $D = A \cap B$.

Якщо маємо деякі множини A_α , то переріз цих множин позначають так: $\bigcap_\alpha A_\alpha$.

Приклади.

$$A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}, \quad B = \left\{-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1\right\}, \quad C = A \cap B = \{0; 1\}.$$

1. Якщо , то

2. Якщо A – множина дійсних чисел x , що задовольняють нерівність $0 \leq x \leq 1$, а B – множина дійсних чисел x , що задовольняють нерівність $0 \leq x \leq 2$, то $C = A \cap B$ є множина $0 \leq x \leq 1$.

Властивості операції перерізу множин.

1. Переставна властивість – $A \cap B = B \cap A$.
2. Сполучна властивість – $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
3. Розподільна (дистрибутивна) властивість – $(A \cup B) \cap C = A \cap C \cup B \cap C$.

Різниця множин.

Означення 1.9. Множину E , що містить усі ті елементи множини A , які не належать множині B , і не містить інших елементів, називають *різницею* множин A і B і записують $E = A \setminus B$.

Приклади.

$$A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}, \quad B = \left\{-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1\right\},$$

1. Якщо

$$\text{то } C = A \setminus B = \{-2; -1; 2\}.$$

2. Якщо A – множина дійсних чисел x , що задовольняють нерівність $0 \leq x \leq 2$, а B – множина дійсних чисел x , що задовольняють нерівність $1 \leq x \leq 3$, то $C = A \setminus B$ є множина $0 \leq x \leq 1$.

Властивості операції різниці множин.

Для операції віднімання множин виконується розподільна властивість множення щодо віднімання: $(A \setminus B) \cap C = A \cap C \setminus B \cap C$.

Результати операцій об'єднання, перетину і різниці над множинами добре ілюструються на діаграмі (рисунок 1: об'єднання – а; перетин – б; різниця – в).

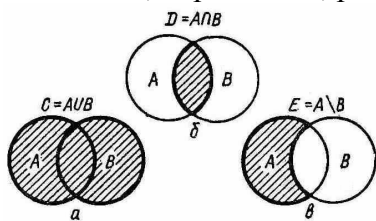


Рис. 1

Нехай X, Y і Z – довільні множини. Для цих множин мають місце рівності:

- | | |
|--|---|
| 1. $X \setminus X = \emptyset$. | 1'. $X \setminus \emptyset = X$. |
| 2. $X \cup X = X$. | 2'. $X \cap X = X$. |
| 3. $X \cup Y = Y \cup X$. | 3'. $X \cap Y = Y \cap X$. |
| 4. $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap Z$. | 4'. $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup Z$. |

$$5. X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z). \quad 5'. X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z).$$

$$6. X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap Z. \quad 6'. X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z).$$

$$7. X \cup \emptyset = X. \quad 7'. X \cap \emptyset = \emptyset.$$

Приклад 1. Перевірити які із записів є вірними:

- а) $\emptyset \in \mathbb{R}$; б) $\{1\} \in \mathbb{N}$; в) $\{1\} \subset \mathbb{N}$;
г) $\{\emptyset\} \subset \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$; д) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$.

Розв'язання. а) Запис $\emptyset \in \mathbb{R}$ невірний, оскільки множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ не містить пусту множину в якості свого елемента. Але можна записати $\emptyset \subset \mathbb{R}$.

б) Запис також $\{1\} \in \mathbb{N}$ невірний, оскільки $\{1\}$ – це множина, яка складається з елемента 1, а елементами множини $\mathbb{N}$ є натуральні числа. Можна записувати: $1 \in \mathbb{N}$.

в) Запис $\{1\} \subset \mathbb{N}$ означає, що $\{1\}$ – підмножина множини $\mathbb{N}$. Цей запис є вірним, оскільки єдиний елемент 1 множини $\{1\}$ є також елементом множини $\mathbb{N}$.

г) Запис $\{\emptyset\} \subset \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ є невірним, оскільки елемент $\emptyset$ множини $\{\emptyset\}$ не є елементом множини $\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$. Можна записувати $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ або $\{\emptyset\} \subset \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$.

д) Запис $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$ невірний, оскільки, наприклад, $0 \in \mathbb{Z}$ і $0 \notin \mathbb{N}$.

Приклад 2. Довести, що для будь-яких множин A і B вірна рівність $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$.

Доведення. Нехай $x \in (A \setminus B) \cup B$. Тоді або $x \in A \setminus B$ або $x \in B$. Якщо $x \in A \setminus B$, то $x \in A$, а отже $x \in A \cup B$. Якщо ж $x \in B$, то $x \in A \cup B$. Отже, якщо $x \in (A \setminus B) \cup B$, то $x \in A \cup B$. А це означає, що $(A \setminus B) \cup B \subset A \cup B$.

Нехай $x \in A \cup B$. Тоді, або $x \in A$ і $x \notin B$, або $x \in A$ і $x \in B$, або $x \notin A$ і $x \in B$. Якщо $x \in A$ і $x \notin B$, то $x \in (A \setminus B)$, а отже, $x \in (A \setminus B) \cup B$. У кожному з решти двох випадків $x \in B$, а тому $x \in (A \setminus B) \cup B$. Одержимо $(A \setminus B) \cup B \supset (A \setminus B) \cup B$.

Отже, $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$.

2. Множини дійсних чисел.

Означення 1.10. Множини, елементами яких є числа, називаються *числовими множинами*.

До таких множин належать множини:

- 1) множина натуральних чисел $\mathbb{N}$;
- 2) множина цілих чисел $\mathbb{Z}$;
- 3) множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$;
- 4) множина дійсних чисел $\mathbb{R}$.

Між цими множинами існує зв'язок: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Означення 1.11. Сукупність раціональних та ірраціональних чисел називають *множиною дійсних чисел*.

Всяке *раціональне число* є або цілим числом, або скінченним чи періодичним десятковим дробом. *Ірраціональне число* – це нескінченний неперіодичний десятковий дріб. Наприклад: $\frac{2}{5} = 0,4$; $\frac{1}{3} = 0,333\dots$ – раціональні числа, а $\sqrt{2} = 1,4142\dots$, $\pi = 3,1415\dots$ – ірраціональні числа.

Усі раціональні числа утворюють *множину раціональних чисел*, яка має наступні властивості.

1. Властивість впорядкованості. Для будь-яких двох раціональних чисел a і b виконується одне і тільки одне з трьох співвідношень: або $a = b$, або $a < b$, або $a > b$, причому якщо $a < b$ і $b < c$, де c також раціональне число, то $a < c$.

2. Якщо числа a і b – раціональні, то сума, різниця, добуток, частка їх (остання за умови, що дільник не дорівнює нулю) є також раціональними числами.

3. Властивість щільності. Між двома різними раціональними числами c і b існує проміжне раціональне число.

4. Кожне раціональне число на прямій може бути зображене як певна точка цієї прямої.

Між множиною раціональних чисел і множиною точок прямої не існує взаємно однозначної відповідності. На прямій крім раціональних є ще й інші точки. Отже, якщо користуватися тільки множиною раціональних чисел для розв'язування життєво необхідних задач (наприклад, вимірювання довжини відрізків; встановлення взаємно однозначної відповідності між числами і точками прямої і т. д.), то її недостатньо. Тому множину раціональних чисел було розширено, доповнено множиною ірраціональних чисел.

Множина дійсних чисел, як і множина раціональних чисел, є упорядкованою і щільною. Крім того, між множиною дійсних чисел і множиною точок прямої існує взаємно однозначна відповідність: *кожному дійсному числу на прямій відповідає одна й тільки одна точка, і, навпаки, кожній точці прямої відповідає одне й тільки одне дійсне число.*

На множині дійсних чисел завжди виконуються операції додавання, віднімання, множення і ділення (крім ділення на 0).

Корінь непарного степеня з довільного дійсного числа має одне дійсне значення.

Корінь парного степеня з додатного числа має два значення, які відрізняються лише знаком.

Корінь парного степеня з від'ємного числа на множині дійсних чисел змісту не має.

3. Модуль дійсного числа і його властивості.

Означення 1.12. Модулем, або абсолютною величиною дійсного числа a , називається число $|a|$, яке визначається за формулою

$$|a| = \begin{cases} a & \text{якщо } a \geq 0; \\ -a & \text{якщо } a < 0. \end{cases}$$

Геометрично число $|a|$ визначає відстань від початку відліку O до точки, відповідної числу a на числовій осі.

Сформулюємо **властивості модуля дійсного числа**.

1. Рівні між собою числа мають рівні між собою модулі: $a = b \Rightarrow |a| = |b|$.

2. Модуль числа є число невід'ємне: $|a| = |-a| \geq 0$.

3. Число не більше свого модуля: $a \leq |a|$, $-a \leq |a|$.

4. Протилежні числа мають рівні між собою модулі:

$$|a| = |-a|.$$

5. Модуль суми двох чисел не більший суми їхніх: $|a + b| \leq |a| + |b|$.

6. Модуль різниці двох чисел не менший різниці їхніх модулів: $|a - b| \geq |a| - |b|$.

7. Модуль добутку двох чисел дорівнює добутку їхніх модулів: $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

8. Модуль частки дорівнює частці модулів діленого і дільника: $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$.

9. Якщо $a > 0$, то нерівності $|a| \leq b$ та $-b \leq a \leq b$ рівносильні.

10. Якщо $a > 0$, то нерівності $|a| \geq b$ та $b \leq -a$ або $b \geq a$ рівносильні.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $|2x - 3| < 5$.

Розв'язання. За властивістю 9 дану нерівність можемо записати у вигляді $-5 < 2x - 3 < 5 \Rightarrow -2 < 2x < 8 \Rightarrow -1 < x < 4$.

Отже, дана нерівність виконується для тих значень x , які належать інтервалу $(-1; 4)$.

Приклад 2. Довести, що $\sqrt{a^2} = |a|$.

Доведення. Корінь парного степеня з додатного числа має два дійсних значення: одне – додатне, інше – від'ємне

(протилежне першому). Тому, якщо $a \geq 0$, то $\sqrt{a^2} = a$. Якщо

$a < 0$, то $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = -a$. Отже,

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{якщо } a \geq 0; \\ -a & \text{якщо } a < 0. \end{cases}$$

Права частина останньої рівності дорівнює $|a|$. Отже, $\sqrt{a^2} = |a|$.

4. Точкові множини. Числові проміжки Окіл точки.

Між множиною дійсних чисел і множиною точок числової осі існує взаємно однозначна відповідність. Тому для більшої наочності в математичному аналізі часто користуються множинами точок, розміщених на числовій осі. Такі множини називають *точковими*.

Із точкових множин найчастіше мають справу з такими множинами, які ще називають *числовими проміжками*.

Нехай a і b – дійсні числа, причому $a < b$.

1. Множина точок x , які задовольняють нерівності $a \leq x \leq b$ називається *відрізком* або *сегментом* і позначається $[a; b]$. Точку a при цьому називають лівим кінцем, а точку b – правим кінцем відрізка $[a; b]$. Відрізок $[a; b]$ у множині дійсних чисел відповідають усі числа, що знаходяться між числами a і b , включаючи і самі ці числа:

$$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} - \text{відрізок (сегмент)}.$$

2. Множина точок x , які задовольняють нерівності $a < x < b$, називають *інтервалом* і позначають символом $(a; b)$, де a – початок інтервалу, b – кінець інтервалу. Кінці інтервалу не належать:

$$(a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} - \text{інтервал}.$$

3. Множина точок x числової осі, які задовольняють нерівності а) $a < x \leq b$; б) $a \leq x < b$ називаються *півінтервалами*:

$$(a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} - \text{півінтервал};$$

$$[a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} - \text{півінтервал}.$$

Проміжки $[a; b]$, $(a; b)$, $(a; b]$, $[a; b)$ називають *скінченними*.

4. Інтервали і півінтервали можуть бути й нескінченними.

Зокрема, всі точки числової осі позначають символом $(-\infty; +\infty)$ і цю множину називають *нескінченим інтервалом*:

$$(-\infty; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\} - \text{інтервал}.$$

Якщо у півінтервалах один із кінців є нескінченністю, то пишуть $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$, $[a; +\infty)$, $(-\infty; b]$, що відповідно $x > a$, $x < b$; $a \leq x$; $x \leq b$.

$$(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\} - \text{півінтервал};$$

$$(-\infty; b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\} - \text{півінтервал};$$

$$[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} - \text{півінтервал};$$

$$(-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} - \text{півінтервал}.$$

Введемо інтервали, що називаються *околами точки*.

Означення 1.13. *Околом* точки x_0 називають будь-який інтервал $(\alpha; \beta)$, що містить цю точку, тобто $\alpha < x_0 < \beta$.

Наприклад, околами точки $x_0 + 1$ є інтервали $(-0,5; 1,5)$, $(0; 2)$ і т. д.

Означення 1.14. Інтервал $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$, де $\varepsilon > 0$ – будь-яке дійсне число, називають *ε -околом* точки x_0 . Точка x_0 , що лежить всередині цього інтервалу, називають *центром околу*, а число ε – *радіусом околу*, тобто ε -*окіл* числа x_0 – це множина всіх дійсних чисел x , які задовольняють нерівність $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$ або $|x - a| < \varepsilon$.

Цей окіл називають досить малим, якщо число ε досить мале.

Приклад 1. Визначити множини, задані нерівностями:

$$\text{а) } |x - 3| \leq 2; \quad \text{б) } |x - 1| < 2/$$

Розв'язання. а) Задану нерівність можна записати $-2 \leq x - 3 \leq 2$ або $1 \leq x \leq 5$. Отже, маємо відрізок $[1; 5]$.

б) Скориставшись властивістю модуля дійсного числа, запишемо $-2 < x - 1 < 2$, або $-1 < x < 3$. Отже, одержали інтервал $(-1; 3)$.

Приклад 2. Із інтервала $(-4; 5)$ (рисунок 2) вилучено два відрізки $[-2; 0]$ і $[1; 3]$. Які проміжки залишились?

Розв'язання. Згідно з рисунком 2, якщо з інтервалу

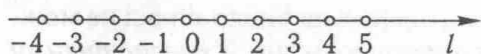


Рис. 2

$(-4; 5)$ вилучити відрізки $[-2; 0]$ і $[1; 3]$, то залишаються такі інтервали $(-4; -2)$; $(0; 1)$; $(3; 5)$.

5. Межі числових множин.

Нехай маємо деяку скінченну або нескінченну числову множину A , довільний елемент якої позначимо через x . Таку множину можна записати у вигляді $A = \{x\}$.

Означення 1.15. Множину A називають *обмеженою зверху*, якщо існує таке дійсне число M , що для всіх чисел $x \in A$ справджується нерівність $x \leq M$.

Число M при цьому називають *верхньою межею множини A* ($M = \max A$).

Означення 1.16. Найменшу верхню межу множини $A = \{x\}$ називають *точною верхньою межею* або *верхньою гранню* цієї множини і позначають символом $\beta = \sup \{x\}$ ($\sup$ – від латинського слова *supremum*, що означає „найвище”).

Число β , яке є точною верхньою межею множини $A = \{x\}$, характеризується такими властивостями.

1. Для всіх $x \in A$ справджується нерівність $x \leq \beta$.
2. Для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує хоча б одне число $x' > \beta - \varepsilon$.
3. Якщо елементи x деякої числової множини A задовольняють нерівність $x \leq M$, то й $\sup \{x\} \leq M$.

Аналогічно означається обмеженість числової множини знизу.

Означення 1.17. Числову множину $A = \{x\}$ називають *обмеженою знизу*, якщо існує таке дійсне число m , що для всіх чисел $x \in A$ справджується нерівність $x \geq m$.

Число m при цьому називають *нижньою межею множини A* ($m = \min A$).

Означення 1.18. Найбільшу нижню межу множини $A = \{x\}$ називають *точною нижньою межею* або *нижньою гранню* цієї множини і позначають символом $\alpha = \inf \{x\}$ ($\inf$ – від латинського слова *infimum*, що означає „найнижче”).

Точна нижня межа α характеризується такими властивостями.

1. Для всіх $x \in A$ справджується нерівність $x \geq \alpha$.
2. Для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує хоча б одне число $x'' < \alpha + \varepsilon$.
3. Якщо елементи x деякої числової множини A задовольняють нерівність $x \geq m$, то й $\inf \{x\} \geq m$.

Якщо числова множина $A = \{x\}$ не є обмеженою зверху (знизу), то за означенням вважають, що $\sup \{x\} = +\infty$ ($\inf \{x\} = -\infty$).

Теорема. Якщо не порожня числова множина $A = \{x\}$ обмежена зверху (знизу), то вона має точну верхню (нижню) межу.

Приклад. Для множини $E = (0; 1]$ знайти $\inf E$, $\sup E$, $\min E$, $\max E$.

Розв'язання. Дана множина не має найменшого елемента, тобто $\min E$ не існує, оскільки для довільного $x \in (0; 1]$ існує таке $x' \in E$, що $x' < x$. Множиною нижніх меж для E є множина $(-\infty; 0]$ з найбільшим елементом, що дорівнює нулю. Цей елемент і є точною нижньою межею пів інтервалу $(0; 1]$. Отже, $\inf(0; 1] = 0$.

Найбільший елемент для $(0; 1]$ існує і дорівнює 1. Множина верхніх меж – це множина $[1; +\infty)$ з найменшим елементом, що дорівнює 1, який і є точною верхньою межею множини E . Отже, $\max(0; 1] = \sup(0; 1] = 1$.

Вправи для самостійної роботи.

1. Описати переліком елементів множину:

- а) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 3x^2 + 2x = 0\}$; б) $A = \{x \in \mathbb{N} : x^2 - 3x - 4 \leq 0\}$;
 в) $A = \{x \in \mathbb{Z} : (x-3)(x^2-1) = 0 \text{ і } x \geq 0\}$.
2. Які записи є вірними:
 а) $\{1; 2\} \in A$; $\{3; 1\} \subset A$; $\{1; 2; 3\} \subset A$; $\{1\} \in A$; $\{1; 3\} \in A$,
 якщо $A = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2, 3\}$;
 б) $\mathbb{N} \in \mathbb{R}$; $\{2\} \in \mathbb{N}$; $\{1, 2\} \subset \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$; $2 \in \{1, 2\}$.
3. Знайти множини $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ і $B \setminus A$, якщо:
 а) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 20 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 7x + 12 = 0\}$;
 б) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 3| \geq 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| < 4\}$;
 в) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 2| > 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 2\}$.
4. Знайти $\max A$, $\min A$, $\sup A$, $\inf A$, якщо вони існують:
 а) $\{x \in \mathbb{Z} : -5 \leq x < 0\}$; б) $[-1; 1]$; в) $\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$

ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ І ГРАНИЦЬ

1. Сталі та змінні величини.

Величина – одне з основних математичних понять, зміст якого з розвитком математики змінювався і узагальнювався. Це поняття настільки широке і всеохоплююче, що його важко визначити. Маса, сила, тиск, напруга, довжина, об'єм, дійсне число, вектор – все це приклади величин. На першій стадії під величиною розуміли те, що, виражаючись в певних одиницях (наприклад – довжина в метрах, маса – в грамах і т. д.), характеризується своїм числовим значенням.

Величини в деякому процесі можуть набувати різних або однакових числових значень. У першому випадку величина називається *змінною*, у другому – *сталю*.

Приклад 1. Нехай a – довжина сторони квадрата, а S – його площа. Тоді $S = a^2$. Отже, якщо змінюється довжина a сторони квадрата, то змінюється і його площа. Причому, якщо довжину сторони a збільшити у 2 рази, то площа квадрата збільшиться у 4; якщо a збільшити у 3 рази, то площа збільшиться у 9 разів. Тут a є незалежною змінною, а S – залежною.

Предметом вищої математики є вивчення змінних величин. Стала величина вважається окремим випадком змінної: стала – це така змінна, всі значення якої рівні між собою.

2. Поняття функції однієї змінної.

Вивчаючи те чи інше явище, як правило, оперуємо кількома величинами, які пов'язані між собою так, що зміна деяких з них приводить до зміни інших.

Такий взаємозв'язок у математиці виражається за допомогою *функції*. Цей термін вперше ввів Г. Лейбніц (німецький математик).

Означення 1. Нехай маємо множину X дійсних чисел. Якщо кожному числу $x \in X$ за певним правилом або законом поставлено у відповідність одне дійсне число y з множини Y ($y \in Y$), то говорять, що на множині X визначено функцію і записують $y = f(x)$.

Це означення належить М. І. Лобачевському (російський математик) і П. Діріхле (німецький математик).

Змінна x називається *незалежною змінною*, або *аргументом*.

Змінна y називається *залежною змінною*, або *функцією*.

Під символом f розуміють те *правило*, за яким кожному x відповідає y , або ті операції, які треба виконати над аргументом, щоб одержати відповідне значення функції. Символ f ще називають *характеристикою функції*.

Множина X називається *областю визначення*, або *областю існування функції* і позначають $D(f)$.

Множина Y усіх значень функції, яких вона набуває при $x \in X$, називають *областю значень функції*, або *множиною значень функції* і позначають $E(f)$.

За означенням 1 функція вважається заданою, коли виконуються такі умови:

- 1) задано множину X , що є областю визначення;

2) існує закон (правило), за яким для кожного дійсного числа $x \in X$ можна вказати цілком певне (одне) значення y , із множини Y .

Наприклад, 1) якщо функцію задано формулою $y = \sqrt{x}$, де $x \in [0; +\infty)$, то характеристика f показує, що значення y можна одержати, якщо при певному значенні $x \in X$ над цим числом виконати дію добування квадратного кореня;

2) якщо розглянути функцію $y = 3x^2$, де $x \in (-\infty; +\infty)$, то тут f показує, що над кожним $x \in X$ потрібно виконати дію піднесення до другого степеня й утворений результат помножити на 3.

Приклад 2. Знайти область визначення та область

$$\text{значень функції } f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Розв'язання. Областю визначення даної функції є множина всіх значень x , для яких $f(x)$ має зміст.

Дана функція є сумою функцій $f_1(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$ і $f_2(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. Кожна з цих функцій має зміст при $\sqrt{\frac{x-2}{x+2}} \geq 0$ і $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \geq 0$, відповідно. Розв'язком першої нерівності є множина $D(f_1) = \{x \in (-\infty; -2) \cup [2; +\infty)\}$, а другої $D(f_2) = \{x \in [1; -1]\}$.

Областю визначення функції $f(x)$ буде множина $D(f) = D(f_1) \cap D(f_2)$. Отже, $D(f) = \emptyset$, тому і $E(f) = \emptyset$.

Приклад 3. Знайти область визначення функції

$$y = \frac{1}{\sqrt{3-x}} + \log_2(x^2 - 1).$$

Розв'язання. Оскільки $3-x$ стоїть під знаком квадратного кореня і в знаменнику, то $3-x > 0$, а $x^2 - 1$ стоїть під знаком логарифма, то $x^2 - 1 > 0$. Отже, x повинен задовольняти систему нерівностей:

$$\begin{cases} 3-x > 0, \\ x^2 - 1 > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x^2 > 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 3, \\ |x| > 1. \end{cases}$$

Отже, областю визначення буде два інтервали

$$\begin{cases} x < 3, \\ x > 1, \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 3 \quad \text{і} \quad \begin{cases} x < 3, \\ x < -1, \end{cases} \Rightarrow x < -1; \quad \text{тобто } x < -1 \text{ і } 1 < x < 3.$$

Нехай функцію $y = f(x)$ задано на множині X , тобто X – область визначення функції. Тоді число $y_0 = f(x_0)$, де $x_0 \in X$ називають значенням функції при $x = x_0$ або значенням функції в точці x_0 . Якщо функція задана формулою, то для знаходження її значення в точці x_0 , потрібно спочатку визначити, чи належить ця точка області визначення.

Приклад 4. Нехай функцію $y = f(x)$ задано формулою

$$y = \frac{x+1}{x-1}. \text{ Знайти } f(-1); f(0); f\left(\frac{1}{2}\right); f(1).$$

Розв'язання. Підставимо замість x відповідно значення -1 ; 0 ; $\frac{1}{2}$; 1 . Одержимо: $f(-1) = \frac{-1+1}{-1-1} = \frac{0}{-2} = 0$;

$$f(0) = \frac{0+1}{0-1} = \frac{1}{-1} = -1;$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-1} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = -3; \quad f(1) = \frac{1+1}{1-1} = \frac{2}{0}.$$

В останньому випадку є ділення на нуль, що неможливо. Тому кажуть, що функція при $x = 1$ не визначена.

У курсі математичного аналізу розглядають функції, для яких область визначення X і множина значень Y складаються з дійсних чисел.

З означення функції не випливає, що різним значенням аргументу відповідають різні значення функції. Функція може в усій області визначення набувати кількох або навіть одного значення. Зокрема, якщо множина значень функції складається лише з одного числа c , то таку функцію називають сталою і пишуть $y = c$.

3. Способи задання функцій.

Аналітичний спосіб. При аналітичному способі задання функції відповідність між аргументом і функцією задається формулою (аналітичним виразом), де зазначено, які дії потрібно виконати над значенням аргументу та сталими числами, щоб одержати відповідне значення функції.

В цьому випадку під областю визначення функції розуміють область існування відповідного аналітичного виразу, тобто сукупність допустимих дійсних значень x , за яких даний аналітичний вираз набуває дійсних значень. Якщо при цьому область визначення не вказується, то під нею розуміють *область існування функції* – множину всіх дійсних значень аргументу, для яких аналітичний вираз має зміст.

Функції, які розглядалися в нашому тексті вище, є аналітично заданими функціями.

Словесний спосіб. Часто закон відповідності між елементами двох множин описують за допомогою слів. Такий спосіб задання функції називають *словесним*.

Прикладом словесно заданої функції може бути функція Діріхле $D(x)$, у якій закон відповідності описується так: кожному раціональному числу ставиться у відповідність число 1 і кожному ірраціональному числу – число 0:

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{якщо } x \text{ раціональне число;} \\ 0 & \text{якщо } x \text{ ірраціональне число.} \end{cases}$$

Графічний спосіб. При графічному способі задання функції $y = f(x)$ відповідність між змінними x і y задається *графіком* – множиною точок $(x; y)$ площини, прямокутні координати яких задовольняють рівність $y = f(x)$. складатися з однієї суцільної лінії, кількох ліній тощо.

Графіком функції є тільки та лінія, яку кожна пряма, паралельна осі Oy , перетинає лише в одній точці. Так, на рисунку 1 функцію задає лише крива l_2 , яку кожна пряма, що проходить через точку x паралельно осі Oy , перетинає лише в одній точці. Область визначення цієї функції – відрізок $[a; b]$, який є проекцією кривої на вісь Ox . Щоб

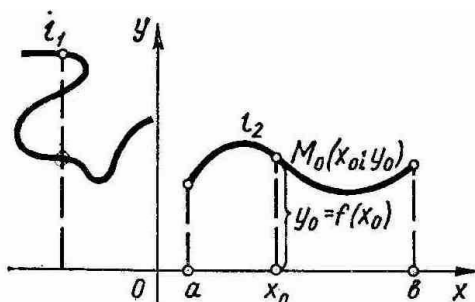


Рис. 1

знайти значення функції $y_0 = f(x_0)$, що відповідає аргументу x_0 , потрібно через точку x_0 $[a; b]$ провести перпендикуляр до осі Ox . Довжина цього перпендикуляра від осі Ox до точки $M_0(x_0; y_0)$ перетину з кривою, взята з належним знаком, і є значенням функції в точці x_0 , тобто $y_0 = f(x_0)$. Крива l_1 не задає функцію.

Табличний спосіб. Цей спосіб задання функції $y = f(x)$ полягає в тому, що відповідність між змінними x та y задається у вигляді таблиці. Прикладами табличного задання функції можуть бути таблиці десяткових логарифмів, таблиці значень тригонометричних функцій тощо.

Найчастіше табличним заданням функцій користуються в техніці та природознавстві, а саме тоді, коли закон залежності між величинами існує, але невідомий. Результати експерименту записують у вигляді таблиць.

4. Елементарні функції та їх класифікація.

Функції, задані аналітично, можуть бути утворені з невеликої кількості функцій, які називають *основними елементарними функціями*.

До основних елементарних функцій належать такі:

1. Степенева функція $y = x^\alpha$, де $\alpha \in \mathbb{R}$.

Область визначення і графіки цієї функції залежать від значення α (рисунк 2а-є).

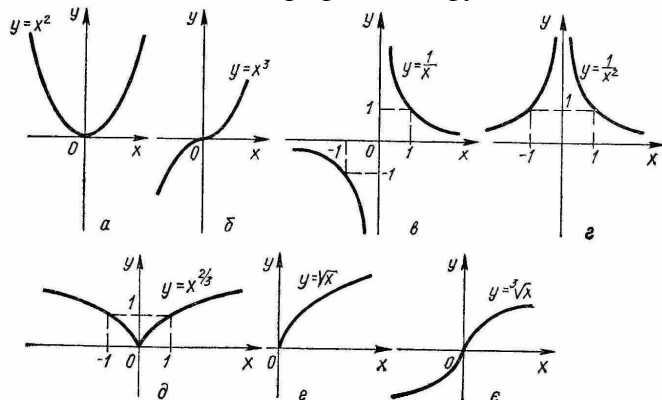


Рис. 2

2. Показникова функція $y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$ (рисунк 3).

3. Логарифмічна функція $y = \log_a x$, $a > 0, a \neq 1$ (рисунк 4).

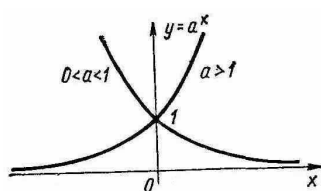


Рис. 3

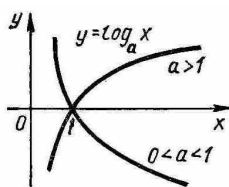


Рис. 4

4. Тригонометричні функції: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ (рисунк 5а-г).

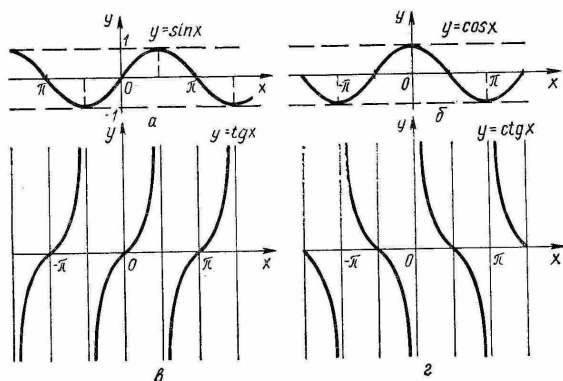


Рис. 5

5. Обернені тригонометричні функції: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctg x$, $y = \operatorname{arcc} \operatorname{tg} x$ (рисунк 6а-г).

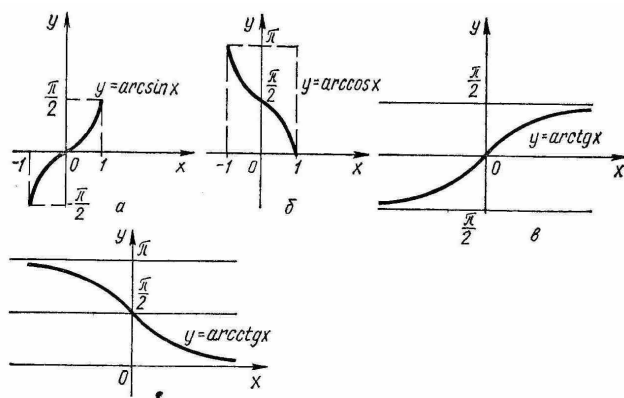


Рис. 6

Графіки елементарних функцій треба пам'ятати.

Перетворюючи їх, можна одержати графіки багатьох інших функцій. Нехай графік функції $y = f(x)$ відомий. Розглянемо деякі перетворення цього графіка.

1. Використавши графік функції $y = f(x)$ побудувати графік функції $y = -f(x)$.

Візьмемо деяке значення $x = x_1$. Тоді значення функції $y = f(x)$ в точці x_1 буде $f(x_1)$, значення функції $y = -f(x)$ в цій же точці буде $-f(x_1)$. Точка $M_1(x_1, f(x_1))$ належить графіку функції $y = f(x)$, а точка $M_2(x_1, -f(x_1))$ належить графіку функції $y = -f(x)$. Ці точки симетричні відносно осі Ox . Отже, графік функції $y = -f(x)$ симетричний графіку функції $y = f(x)$ відносно осі Ox (рисунк 7).

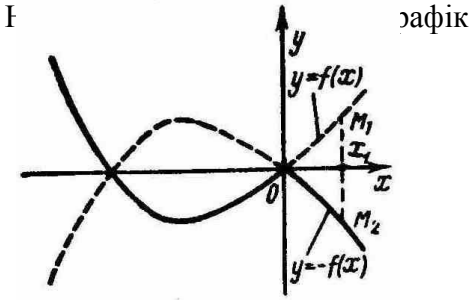


Рис. 7

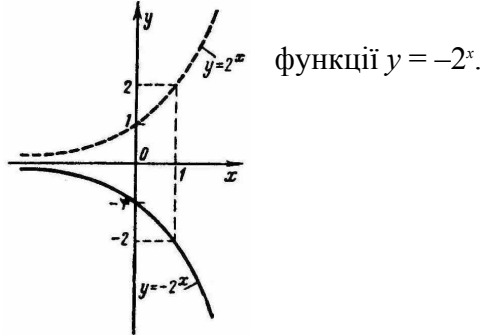


Рис. 8

2. Графік функції $y = f(x) + b$ одержимо з графіка функції $y = f(x)$ паралельним перенесенням вздовж осі Oy вгору на величину b , якщо $b > 0$, або на величину $|b|$ вниз, якщо $b < 0$ (рисунки 9 і 10).

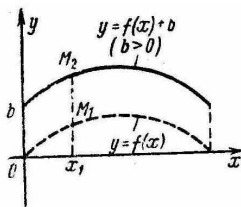


Рис. 9

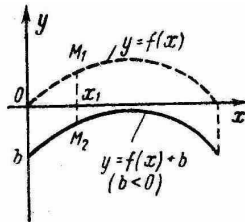
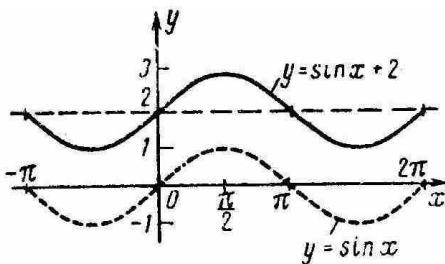
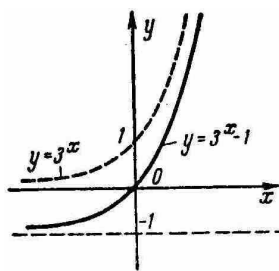


Рис. 10

На рисунку 11 побудовано графік функції $y = \sin x + 2$,



а



на рисунку 12 — $y = 3^x - 1$.

Рис. 11

Рис. 12

3. Графік функції $y = f(x - a)$ одержимо з графіка функції $y = f(x)$ паралельним перенесенням його вздовж осі Ox на a вправо, якщо $a > 0$, або на $|a|$, якщо $a < 0$

(рисунки 13 і 14).

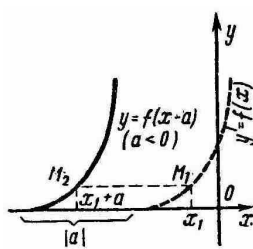
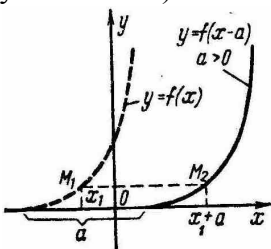


Рис. 13

Рис. 14

На рисунку 15 побудовано графік функції $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$,

а на рисунку 16 побудовано графік функції $y = \frac{1}{x+3}$.

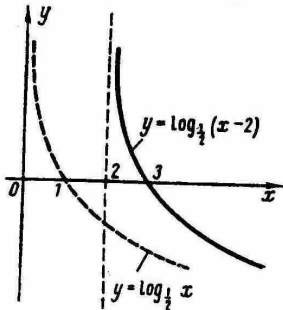


Рис. 15

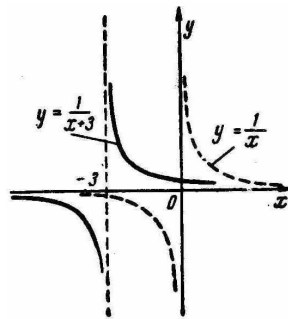


Рис. 16

4. Графік функції $y = kf(x)$, де $k \neq 0$ одержимо з графіка функції $y = f(x)$ при $0 < k < 1$ за допомогою стискування в $\frac{1}{k}$ разів ординат останньої функції, а при $k > 1$ за допомогою розтягування в k разів його ординат із збереженням відповідних абсцис. Якщо $-\infty < k < 0$, то графік $y = kf(x)$ є дзеркальним відображенням графіка $y = -kf(x)$ відносно осі Ox (відповідно до випадків $-1 < k < 0$ і $k < -1$).

На рисунку 17 побудовано графік функції $y = 2\sin x$; на рисунку 18 побудовано графік функції $y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x}$.

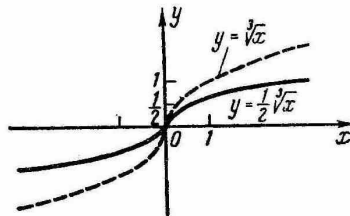
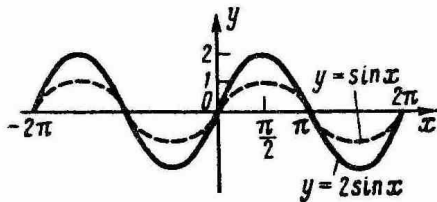


Рис. 17

Рис. 18

Над функціями виконують так звану операцію *суперпозиції*, або *накладання* (суперпозиція від латинських слів: *super* – над і *positio* – положення – буквально

розміщення над чимось, накладання).

Означення 2. Нехай функція $y = f(u)$ визначена на множині A , а функція $u = \varphi(x)$ – на множині B , причому для кожного значення $x \in B$ відповідне значення $u = \varphi(x) \in A$.

Тоді на множині B визначена функція $f(\varphi(x))$, яку називають *складеною функцією від x* .

Функцію $y = f(u)$ називають *зовнішньою*, а функцію $u = \varphi(x)$ – *внутрішньою*.

Наприклад, функція $y = \sqrt[3]{\sin x}$ є суперпозицією двох основних елементарних функцій: степеневі $y = \sqrt[3]{u}$, $u \in [-1; 1]$ та тригонометричної $u = \sin x$, $x \in (-\infty; +\infty)$.

Означення 3. Основні елементарні функції, а також функції, утворені за допомогою формул, в яких над основними елементарними функціями виконується лише скінченне число арифметичних операцій (додавання, віднімання, множення, ділення) і суперпозицій, називаються *елементарними функціями*.

Залежно від виразів, що зображують елементарну функцію, останні поділяють на такі типи.

Цілі раціональні функції.

Функція виду $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$, де $n \in \mathbb{Z}_0$ ($\mathbb{Z}_0$ – множина цілих невід'ємних чисел), $a_0, a_1, \dots, a_n$ – коефіцієнти (дійсні числа), причому $a_0 \neq 0$, називається *цілою раціональною функцією*, або *многочленом степеня n* .

Многочлен першого степеня називається також *лінійною функцією*.

Многочлен другого степеня називається також *квадратичною функцією*.

Дробово-раціональні функції.

Функція, що є відношенням двох многочленів

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n},$$

де $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n$ – дійсні числа, а n, m – будь-які натуральні числа.

Ірраціональні функції.

Функції, в яких над аргументом виконується дія добування кореня, називаються *ірраціональними*.

Цілі раціональні, дробово-раціональні та ірраціональні функції називаються *алгебраїчними функціями*.

Трансцендентні функції.

Елементарна функція, яка не є раціональною або ірраціональною, називається *трансцендентною функцією*.

Усі тригонометричні функції (прямі й обернені), показникова функція, логарифмічна функція є прикладами трансцендентних функцій.

5. Окремі класи функцій.

Обмежені функції.

Означення 4. Функцію $y = f(x)$, визначену на множині A , називають *обмеженою* на цій множині, коли існує таке число $M > 0$, що для всіх $x \in A$ виконується нерівність $|f(x)| \leq M$.

Отже, значення обмеженої функції не виходить за межі відрізка $[-M; M]$. Тому її графік лежить між прямими $y = -M$ та $y = M$. Наприклад, функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ обмежені на всій числовій осі, бо $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$, $x \in (-\infty; +\infty)$ (рисунок 5а, б).

Означення 5. Якщо для функцій $f(x)$ або $g(x)$, визначених на множині A , існує таке число N , що виконується нерівність $f(x) \leq N$ або $g(x) \geq N$, то функцію $f(x)$ називають *обмеженою зверху*, а $g(x)$ – *обмеженою знизу*.

Наприклад, функція $y = a^x$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ обмежена знизу прямою $y = 0$, але не обмежена зверху (рисунок 3).

Монотонні функції.

Означення 6. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на множині A . Якщо для двох довільних різних значень x_1 і x_2 аргументу, взятих із множини A , з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що:

- а) $f(x_1) < f(x_2)$, то функція називається *зростаючою*;
- б) $f(x_1) \leq f(x_2)$, то функція називається *неспадною*;
- в) $f(x_1) > f(x_2)$, то функція називається *спадною*;
- г) $f(x_1) \geq f(x_2)$, то функція називається *незростаючою*.

Наприклад, показникова функція $y = a^x$ є зростаючою при $a > 1$ і спадною при $0 < a < 1$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ (рисунок 3); логарифмічна функція $y = \log_a x$ при $a > 1$ є зростаючою, а при $0 < a < 1$ – спадною на інтервалі $(0; +\infty)$ (рисунок 4).

Означення 7. Зростаючі, не зростаючі, спадні й неспадні функції на множині A називаються *монотонними* на цій множині, зростаючі і спадні – *строго монотонними*.

Нехай функція не є монотонною в усій своїй області визначення, але цю область можна розбити на деяке (скінченне чи нескінченне) число проміжків, які не перетинаються і на кожному з яких функція монотонна. Такі проміжки називаються *проміжками монотонності функції*.

Наприклад, функція $y = x^2$ не є монотонною на всій числовій осі, але має два проміжки монотонності: на проміжку $(-\infty; 0)$ функція спадає, а на проміжку $(0; +\infty)$ функція зростає; функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ мають нескінченну кількість проміжків монотонності.

Приклад 5. Дослідити на монотонність функцію $f(x) = x^3 - 1$.

Розв'язання. Дана функція визначена на множині $\mathbb{R}$.

Якщо $x_1 < x_2$, то $x_1^3 < x_2^3$. Тому $x_1^3 - 1 < x_2^3 - 1$. Тобто дана функція є зростаючою на $\mathbb{R}$.

Парні і непарні функції.

Нехай функція $f(x)$ визначена на множині A точок осі Ox , розміщених симетрично відносно точки $x = 0$, тобто якщо $x \in A$, то й $-x \in A$.

Означення 8. Функцію $f(x)$ називають *парною*, якщо $f(-x) = f(x)$, $x \in A$, і *непарною*, якщо $f(-x) = -f(x)$, $x \in A$.

Наприклад, $f(x) = \cos x$, де $x \in (-\infty; +\infty)$, є парною функцією, бо відомо, що $\cos(-x) = \cos x$; $f(x) = \sin x$, де $x \in (-\infty; +\infty)$, є непарною функцією, бо згідно з властивістю цієї функції відомо, що $\sin(-x) = -\sin x$.

Приклад 6. Дослідити на парність або непарність функції:

$$1) f(x) = x^4 - 5 \cos x; \quad 2) f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Розв'язання. 1) Областю визначення даної функції є множина всіх дійсних чисел $\mathbb{R}$, тоді для довільного $x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = (-x)^4 - 5 \cos(-x) = x^4 - 5 \cos x = f(x).$$

Отже, функція $f(x) = x^4 - 5 \cos x$ є парною.

2) Областю визначення даної функції є множина $\mathbb{R}$.

Оскільки для довільного $x \in \mathbb{R}$

$$-x + \sqrt{x^2 + 1} = \frac{-x^2 + x^2 + 1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^{-1}, \text{ то}$$

$$f(-x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^{-1} = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x).$$

Отже, дана функція є непарною.

Періодичні функції.

Означення 9. Функцію $y = f(x)$, визначену на всій числовій осі, називають *періодичною*, якщо існує число $T > 0$ таке, що для всіх $x \in (-\infty; +\infty)$ виконується тотожність $f(x + T) = f(x)$.

Число T при цьому називають *періодом функції* $f(x)$, а саму функцію – *T -періодичною*. Якщо число T є періодом функції $f(x)$, то й число $-T$ є також періодом функції $f(x)$.

Наприклад, функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ мають період $T = 2\pi$; функції $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ мають період $T = \pi$.

Приклад 7. Довести, що функція $y = x^2$ неперіодична.

Доведення. Для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ і будь-якого $T (T > 0)$, число $x + T$ належить області визначення даної функції, то рівність $(x + T)^2 = x^2$ має виконуватися для довільного $x \in \mathbb{R}$, і, зокрема, при $x = 0$. Звідси маємо $T^2 = 0$ і, отже, $T = 0$, що суперечить припущенню про існування періоду, тобто дана функція неперіодична.

Обернені функції.

Нехай задана функція $y = f(x)$ з областю визначення X і множиною значень Y . Функція $f(x)$ кожному значенню

$x_0 \in X$ ставить у відповідність єдине значення $y_0 \in Y$, причому різним значенням x ставить у відповідність різні значення y . Тоді кожному значенню $y \in Y$ відповідатиме єдине значення $x \in X$, тобто можна визначити функцію $x = f^{-1}(y)$ з областю визначення Y і множиною значень X і позначають $y = f^{-1}(x)$.

Функція $y = f^{-1}(x)$ називається *оберненою функцією* до $y = f(x)$, а $y = f(x)$ – *прямою функцією*, тобто ці функції взаємно обернені.

Оскільки функції $y=f^1(x)$ і $y=f(x)$ взаємно обернені, то цю властивість можна застосовувати до побудови графіка функції $y=f^1(x)$, якщо відомо графік функції $y=f(x)$. Для цього графік прямої функції потрібно повернути навколо бісектриси першого і третього координатних кутів на 180° . На рисунку 19 зображені обернені функції до функцій $y=2x+3$ (а),

$$y=x^3 \text{ (б)}, y=x^2 \text{ (в)}, y=\sin x \left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \right) \text{ (г)}, y=a^x \text{ (д)}, y=\log_a x \text{ (е)}.$$

Теорема 1. Якщо функція $y=f(x)$ строго монотонна і неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона має обернену функцію, яка строго монотонна і неперервна на відрізку $[f(a); f(b)]$.

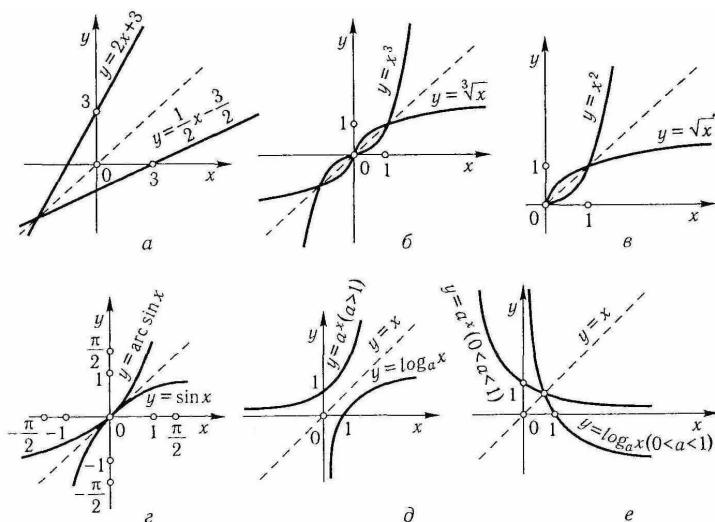


Рис. 19

Приклад 8. Для функції $f(x) = 4x + 1$ знайти обернену функцію.

Розв'язання. Область визначення та область значень даної функції є множина дійсних чисел. Функція зростаюча. Отже, існує обернена функція. Розв'язавши рівняння $y=4x+1$

відносно x , знаходимо $x = \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}$ і помінявши в цій рівності позначення незалежної і залежної змінних на загальноприйняті, одержимо формулу для оберненої функції $y^{-1} = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$.

Вправи для самостійної роботи.

- Дослідити на монотонність функції:
 - $y = x^3$ на інтервалі $x \in (-\infty; +\infty)$;
 - $y = \log_a x$ на інтервалі $x \in (0; +\infty)$;
 - $y = \frac{1}{x}$ на інтервалах $(0; +\infty)$ і $(-\infty; 0)$.
- Дослідити на парність або непарність функцій:
 - $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 3}$; б) $y = |x|$, $x \in (-\infty; +\infty)$;
 - $y = x^{2k+1}$, k – натуральне число.
- Знайти періоди функцій:
 - $y = \sin(ax + b)$, $x \in (-\infty; +\infty)$;
 - $y = \lg 2x$; в) $y = \sin^2 x$; г) $y = |\cos x|$.
- Знайти обернені функції до функцій:
 - $y = x + 1$, де $X = (-\infty; +\infty)$, $Y = (-\infty; +\infty)$;
 - $y = x^2$ з областю визначення $X = [0; +\infty)$;
 - $y = |x|$ на області визначення.

6. Границя функції.

Числова послідовність.

Означення 10. Якщо кожному натуральному числу $n \in \mathbb{N}$ за певним правилом поставити у відповідність число x_n , то множину чисел $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ називають *числовою послідовністю* (або просто *послідовністю*) і позначають символом $\{x_n\}$.

Окремі числа $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ називають *членами* або *елементами* послідовності: x_1 – перший член послідовності, x_2 – другий і т. д., x_n – n -й, або загальний член послідовності.

Елементи x_n і x_m при $n \neq m$ вважаються різними, хоча як числа вони можуть бути рівні між собою. Якщо всі елементи послідовності $\{x_n\}$ дорівнюють одному й тому самому числу, то її називають *сталю*.

Послідовність вважається *заданою*, якщо вказано спосіб знаходження її загального члена. Найчастіше послідовність задається формулою її загального члена. Іноді при заданні послідовності задається її перший член і правило утворення n -го члена за допомогою попередніх членів. Такий спосіб називають *рекурентним* (від латинського *resurgens* – *зворотний*).

Числова послідовність є окремим випадком функціональної залежності: коли областю визначення функції є натуральний ряд чисел. Отже, способи задання числової послідовності ті самі, що й функції.

Означення 11. Всяка функція $y = f(n)$ задана на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$, визначає деяку числову послідовність $\{y_n\}$ з загальним членом $y_n = f(n)$.

Серед числових послідовностей в окремий клас виокремлюють так звані *монотонні послідовності*, що об'єднують зростаючі, спадні, неспадні, незростаючі послідовності:

- послідовність $\{y_n\}$ називають *зростаючою*, якщо $y_{n+1} > y_n$ для кожного n ;
- послідовність $\{y_n\}$ називають *неспадною*, якщо $y_{n+1} \geq y_n$ для кожного n ;
- послідовність $\{y_n\}$ називають *спадною*, якщо $y_{n+1} < y_n$ для кожного n ;
- послідовність $\{y_n\}$ називають *незростаючою*, якщо $y_{n+1} \geq y_n$ для кожного n .

Над числовими послідовностями виконуються операції додавання, віднімання, множення та ділення.

Нехай маємо дві послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$.

Додавання, віднімання, множення і ділення виконуються додаванням, відніманням, множенням, діленням відповідних членів цих послідовностей. Ці дії символічно записуються:

$$\begin{aligned} \{x_n\} \pm \{y_n\} &= \{x_n \pm y_n\}; \quad \{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n y_n\}; \\ \frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} &= \left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\} \quad y_n \neq 0, n=1, 2, \dots \end{aligned}$$

Числову послідовність $\{y_n\}$ називають *обмеженою*, якщо існує дійсне число $M > 0$ таке, що для всіх $n = 1, 2, \dots$ виконується нерівність $|y_n| < M$. У протилежному випадку послідовність називають *необмеженою*.

Наприклад, якщо $y_n = n^2$, то відповідна числова послідовність має вигляд $1, 4, 9, \dots, n^2, \dots$

Приклад 9. Записати перші п'ять членів послідовності,

$$\text{заданої її загальним членом } y_n = \frac{2n+1}{n}.$$

Розв'язання. Підставляючи у формулу n -го члена послідовно числа $1, 2, 3, 4, 5$, одержимо:

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots\} = \left\{3, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \dots\right\}.$$

Приклад 10. Записати перші п'ять членів послідовності

$\{a_n\}$, заданої рекурентним співвідношенням

$$a_n = \frac{3a_{n-1} - a_{n-2}}{n}, \quad \text{де } n=3, 4, \dots, \text{ якщо } a_1=1, a_2=2.$$

Розв'язання. Згідно з рекурентною формулою маємо

$$a_3 = \frac{3a_2 - a_1}{3} = \frac{5}{3}, \quad a_4 = \frac{3a_3 - a_2}{4} = 1, \quad a_5 = \frac{3a_4 - a_3}{5} = \frac{4}{5}.$$

Отже, $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots\} = \left\{1, 2, \frac{5}{3}, 1, \frac{4}{5}, \dots\right\}.$

Границя числової послідовності.

Поняття про границю функції є одним із основних понять математичного аналізу. Його вивчення почнемо з найпростішого випадку функціональної залежності – з функції від натурального аргументу або з числової послідовності, що те саме.

Нехай маємо функцію натурального аргументу $y_n = f(n)$, $n = 1, 2, \dots$, значення якої запишемо у вигляді послідовності

$$y_1, y_2, \dots, y_n, \dots \quad (1)$$

Означення 12. Число a називається *границею функції* $y_n = f(n)$, $n = 1, 2, \dots$, або *послідовності* (1), якщо для будь-якого додатного числа ε існує таке натуральне число $N = N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N$ виконується нерівність

$$|y_n - a| < \varepsilon. \quad (2)$$

Той факт, що a є границею послідовності (1), символічно записують так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \quad \text{або} \quad y_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty).$$

Розглянемо геометричний зміст границі послідовності.

Візьмемо на числовій осі (рисунок 20) точку з абсцисою a і відкладемо точки з абсцисами $y_1, y_2, \dots, y_n$. Тоді нерівність (2) означатиме,

що відстань між точкою y_n і точкою a при $n > N$ має бути меншою за ε . Отже, всі

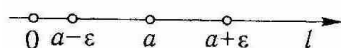


Рис. 20

члени послідовності $\{y_n\}$, починаючи з y_{N+1} , повинні знаходитись в інтервалі $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. Інтервал $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ є

околом точки a . Поза цим околом може бути розміщено тільки скінченне число членів послідовності.

Означення 13. Числову послідовність називають *збіжною*, якщо вона має границю. У протилежному випадку числову послідовність називають *розбіжною*.

Властивості збіжних числових послідовностей.

Збіжні числові послідовності мають низку властивостей, які можна сформулювати у вигляді теорем.

Теорема 2. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ і $a > p$ ($a < q$), то й члени послідовності $\{y_n\}$, починаючи з певного номера і для всіх наступних номерів, будуть більші за p (менші за q).

Теорема 3. Послідовність $\{y_n\}$, яка має границю, є обмеженою.

Теорема 4. Послідовність може мати тільки одну границю.

Теорема 5. Якщо дві послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ при кожному n задовольняють нерівність $x_n \geq y_n$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, то $a \geq b$.

Теорема 6 (критерій Коші). Для того щоб послідовність $\{y_n\}$ була збіжною, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого

числа $\varepsilon > 0$ існувало натуральне число $N = N(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n > N$ і $m > N$ виконувалася нерівність

$$|y_n - y_m| < \varepsilon. \quad (3)$$

Теорема 7. Якщо послідовність $\{y_n\}$ є збіжною і має границю – число a , то послідовність $\{y_n\}$, утворена з модулів членів цієї послідовності, є також збіжною і має границю – число $|a|$.

Приклад 11. Довести на мові „ $\varepsilon - N$ ”, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{5n+1} = \frac{1}{5}$.

Доведення. За означенням границі послідовності на мові „ $\varepsilon - N$ ” потрібно довести, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $N = N(\varepsilon)$ при $n > N$ $\left| \frac{n-1}{5n+1} - \frac{1}{5} \right| < \varepsilon$. Візьмемо довільне

число $\varepsilon > 0$. $\left| \frac{n-1}{5n+1} - \frac{1}{5} \right| = \left| \frac{6}{5(5n+1)} \right| < \varepsilon$, то для знаходження значень n , які задовольняють останню нерівність, достатньо

розв’язати нерівність

$$\left| \frac{6}{5(5n+1)} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow 25n+5 > \frac{6}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{25} \left(\frac{6}{\varepsilon} - 5 \right).$$

Отже, для всіх натуральних $n > N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{25} \left(\frac{6}{\varepsilon} - 5 \right) \right\rceil$ справджується нерівність $\left| \frac{n-1}{5n+1} - \frac{1}{5} \right| < \varepsilon$.

Приклад 12. Відомо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{(-1)^n}{n^2} \right) = 2$. Нехай $\varepsilon = 0,01$. Скільки членів послідовності $\{x_n\}$ лежить поза околom $(2 - 0,01; 2 + 0,01) = (1,99; 2,01)$?

Розв’язання. Оскільки $|x_n - 2| = \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| < \frac{1}{n^2}$, то нерівність $|x_n - 2| < 0,01$ виконується при $\frac{1}{n^2} < 0,01$, звідки $n > 10$. Отже, поза околom $(1,99; 2,01)$ знаходиться лише 10 членів даної послідовності. Геометрично це означає, що всі члени послідовності $\{x_n\}$ при $n > 10$ знаходяться від точки 2 на відстані, яка менша від 0,01.

Приклад 13. Довести, що якщо послідовність $\{a_n\}$ збігається до числа a , то послідовність $\{\sin a_n\}$ збігається до числа $\sin a$.

Доведення. Розглянемо $\varepsilon > 0$. Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, то для цього $\varepsilon > 0$ існує $N = N(\varepsilon)$ при $n > N$ $|a_n - a| < \varepsilon$. Тоді для цих же n отримаємо

$$\sin a_n - \sin a = 2 \left| \sin \frac{a_n - a}{2} \cos \frac{a_n + a}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{a_n - a}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{a_n - a}{2} \right| = |a_n - a| < \varepsilon.$$

А це означає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $N = N(\varepsilon)$ при $n > N$ $|\sin a_n - \sin a| < \varepsilon$.

Нескінченно малі та нескінченно великі числові послідовності.

Серед функцій натурального аргументу особливе місце посідають так звані *нескінченно малі* й *нескінченно великі* функції.

Означення 13. Послідовність $y_n = f(n)$, $n=1, 2, \dots$, називають *нескінченно малою*, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, а саму функцію $y_n = f(n)$ при цьому – *нескінченно малою величиною*.

Наприклад, послідовності $\left\{\frac{1}{n}\right\}, \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ – нескінченно малі.

Якщо в нерівності (2) покласти $a = 0$, то одержимо нерівність $|y_n| < \varepsilon$, $n > N$. Тому нескінченно малу числову послідовність можна визначити ще так.

Означення 13. Числову послідовність $\{y_n\}$ називають *нескінченно малою*, якщо для будь-якого додатного числа ε існує натуральне число $N = N(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n > N$ виконується нерівність $|y_n| < \varepsilon$.

Отже, члени послідовності $\{y_n\}$, починаючи з певного номера i для всіх наступних номерів, стають за модулем як завгодно малими. Проте не слід плутати нескінченно малу числову послідовність із досить малим числом. Окремі члени нескінченно малої числової

послідовності можуть бути досить великими. Наприклад, послідовність $\left\{\frac{10^{10}n}{n^2+1}\right\}$ є нескінченно малою, оскільки $\left\{\frac{10^{10}n}{n^2+1}\right\} < \varepsilon$ при n , більшому, наприклад за число $\frac{10^{10}}{\varepsilon}$. Проте окремі значення $\frac{10^{10}}{2}, \frac{10^{10} \cdot 2}{5}, \frac{10^{10} \cdot 3}{10}$ не є малими числами. Нескінченно малі функції позначають через $\alpha_n, \beta_n, \dots$

Між функцією y_n , яка має границю, і нескінченно малою функцією існує тісний зв'язок, який встановлюють наступні теореми.

Теорема 8. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$, то функція $\alpha_n = y_n - a$ є нескінченно малою.

Теорема 9. Якщо різниця між y_n і числом a є нескінченно малою функцією, то a є границею функції y_n .

Нескінченно малі функції мають такі властивості.

1. Алгебраїчна сума скінченного числа нескінченно малих функцій є функцією нескінченно малою.

2. Добуток обмеженої функції на нескінченно малу є величина нескінченно мала.

Розглянемо нескінченно великі числові послідовності.

Означення 14. Послідовність $\{y_n\}$ називають *нескінченно великою*, якщо, яке б не було число $M > 0$, існує таке число

$N = N(M)$, що для всіх $n > N$ виконується нерівність $|y_n| > M$,

що записують так $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$ (y_n при цьому називають нескінченно великою функцією).

Якщо члени нескінченно великої послідовності $\{y_n\}$, починаючи з певного n і для всіх наступних його значень, додатні, то цей факт записують так $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$.

Якщо члени нескінченно великої послідовності $\{y_n\}$, починаючи з певного n і для всіх наступних його значень, від'ємні, то це записують так $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$.

Наприклад, послідовності $\{(-1)^n n\}, \{n^2\}, \{a^n\}, a > 1$ є нескінченно великі.

Між нескінченно малими та нескінченно великими числовими послідовностями існує тісний зв'язок.

Теорема 10. Якщо $\{y_n\}$ є нескінченно великою числовою послідовністю, то послідовність $\{\alpha_n\} = \left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ є нескінченно малою.

Границя функції в точці.

Ми розглядали поняття про границю функції натурального аргументу. В цих функціях аргумент змінюється дискретно, набуваючи значень $1, 2, \dots, n, \dots$

Розглянемо функції виду $y=f(x)$, де аргумент змінюється неперервно пробігає всі точки певного проміжку, крім, можливо, однієї внутрішньої точки, тобто точки, що не є одним із кінців проміжку, якщо останні йому належать.

Отже, нехай функцію $y=f(x)$ визначено на проміжку $(a; b)$, за винятком, можливо, внутрішньої точки $x_0 \in (a; b)$. Надаватимемо аргументу x значень із проміжку, які близькі до x_0 , але $x \neq x_0$. Під терміном „близькі точки” будемо розуміти точки, відстань між якими є досить малою. Тоді може статися, що значення функції досить мало відрізняються від деякого числа A . У цьому випадку число A називають *границею функції $f(x)$ у точці x_0* .

Означення 15. Число A називають *границею функції $f(x)$ у точці x_0* , якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, яке залежить від ε ($\delta = \delta(\varepsilon)$), що для всіх $x_0 \in (a; b)$, які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad (4)$$

і записують $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Функція $f(x)$ може мати в точці x_0 тільки одну границю.

Геометрично це ілюструється так (рисунок 21): в прямокутній системі координат Oxy на координатній осі

Ox побудуємо точки $x_0, x_0 - \delta, x_0 + \delta$, а на осі Oy – точки $A, A - \varepsilon, A + \varepsilon$. Якщо A є границею $f(x)$ у точці x_0 , то на осі Ox знайдеться такий інтервал $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, то значення функції не вийдуть із інтервалу $(A - \varepsilon; A + \varepsilon)$.

Множина точок площини, що знаходяться між прямими $y = A - \varepsilon$ і $y = A + \varepsilon$ називається ε -смужкою точки A .

Отже, якщо A є границею функції $f(x)$ у точці x_0 , то графік функції для всіх $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, лежить всередині ε -смужки точки A .

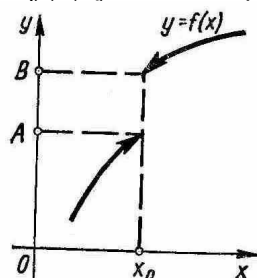
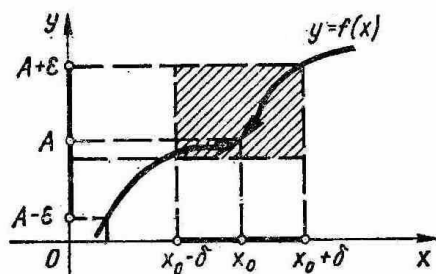


Рис. 21

Рис. 22

Приклад 14. Довести, що $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3$.

Доведення. Задамо довільне число $\varepsilon > 0$. Підставляючи у нерівність (4) замість

$f(x)$ і A їхні значення, одержимо:

$|(2x + 1) - 3| < \varepsilon$. Ліву частину цієї нерівності запишемо у

вигляді: $|(2x + 1) - 3| = 2|x - 1| < \varepsilon$. Звідси $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$. Отже, щоб виконувалась нерівність $|(2x + 1) - 3| < \varepsilon$,

потрібно, щоб значення x задовольняли нерівність $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тобто з останньої нерівності випливає

попередня нерівність і навпаки. Якщо прийняти $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, то з нерівності $0 < |x - 1| < \delta$ випливає нерівність $|(2x + 1) - 3| < \varepsilon$.

Отже, за даним ε знайшли $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Згідно з означенням 15 границі функції маємо $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3$.

Доцільно ввести поняття *односторонніх границь*. Нехай функція $y=f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 .

Означення 16. Число A називається границею функції $y=f(x)$ зліва (лівою границею) в точці x_0 , якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ і записують як

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x < x_0)}} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) = A$$

Число B називається границею функції $y=f(x)$ *справа (правою границею)* в точці x_0 , якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ виконується нерівність $|f(x) - B| < \varepsilon$ і записують як

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x > x_0)}} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) = B$$

Ліву і праву границі функції (рисунок 22) називають *односторонніми границями*.

Якщо функція $y=f(x)$ визначена на проміжку $(a; b)$, то в точці a може мати зміст лише число $f(a + 0)$, а в точці b – лише число $f(b - 0)$.

Умова $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ є необхідною і достатньою для існування границі функції $y=f(x)$ в точці x_0 :

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

Приклад 15. Знайти правосторонню і лівосторонню границі функції $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ у точці $x = 1$.

Розв'язання. Використаємо той факт, що для правої і лівої границі функції $x = x_0$, тобто $x = 1$. Тоді дану функцію можна записати у вигляді $y = x + 1$. Отже, існують ліва й права границі даної функції і вони дорівнюють 2: $f(1-0) = f(1+0) = 2$.

Основні теореми про границі функцій.

Знаходження границі функції на основі означення досить громіздке. На практиці користуються теоремами, які значно полегшують знаходження границі функції.

Теорема 11 (про границю суми, добутку і частки). Якщо кожна з функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$ має скінченну границю і точці x_0 , то в цій точці існують також границі функцій $f(x) \pm \varphi(x)$,

$$f(x) \varphi(x), \quad \frac{f(x)}{\varphi(x)} \quad \left(\text{остання за умови, що } \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \neq 0 \right) \text{ і}$$

справедливі формули

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x); \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x); \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)} \quad (7)$$

Із теореми 11 випливають **наслідки**.

Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ існує, то виконуються рівності:

1. Сталий множник можна виносити за знак границі

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c f(x) = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad c \in \mathbb{R}$$

2. Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ і k – натуральне число, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^k = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^k = a^k$$

Приклад 16. Знайти $\lim_{x \rightarrow 4} \left(2(x+3) - \frac{x}{x-2} \right)$.

Розв'язання. Використавши формулу (5) теореми 11, одержимо:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \left(2(x+3) - \frac{x}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 4} 2(x+3) + \lim_{x \rightarrow 4} \left(-\frac{x}{x-2} \right) = 14 - 2 = 12.$$

Приклад 17. Обчислити $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{2x - 1}$.

Розв'язання. За теоремою 11 про границю частки (формула (7)) одержимо:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{2x - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1)} = 2.$$

Теорема 12 (про границю проміжної функції). Нехай в деякому околі точки x_0 , крім, можливо, самої точки

x_0 , визначені функції $\varphi(x)$ і $\phi(x)$ і виконуються нерівності $\varphi(x) \leq f(x) \leq \phi(x)$. Тоді, якщо функції $\varphi(x)$ і $\phi(x)$ мають в точці x_0 одну й ту саму границю $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = A$, то таку саму границю має функція $f(x)$: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Теорема 13 (про граничний перехід у нерівностях). Якщо в деякому околі точки x_0 , крім, можливо, самої точки x_0 , виконується нерівність $f(x) \geq 0$ і існує границя $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$, то $b \geq 0$.

Обчислення границь. Важливі границі.

Розглянемо деякі границі конкретних функцій, які широко застосовують при обчисленні границь функцій.

Теорема 15 (1-а важлива границя). Виконується рівність

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (8)$$

Наслідок 1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$ (9)

Наслідок 2. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$ (10)

Наслідок 3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$ (11)

Число e . Натуральні логарифми.

Розглянемо послідовність $\{y_n\}$ із загальним членом

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ця послідовність зростаюча, тобто $y_{n+1} > y_n$. Крім того, обмежена зверху. Отже, має границю $\{y_n\}$, яку позначають буквою e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad (12)$$

Доведено, що e – ірраціональне число. Більше того, Ш. Ерміт (французький математик) довів, що e – трансцендентне число, тобто не є коренем ніякого алгебраїчного рівняння з цілими коефіцієнтами. Його наближене значення з точністю до 0,0001: $e = 2,7182$.

Число e у вищій математиці відіграє надзвичайно важливу роль. Зокрема, показникові функція $y = e^x$ за основою e відіграє важливу роль в теорії механічних коливань, в електротехніці та радіотехніці. Цю функцію називають також *експоненціальною функцією* або *експонентою* (від англійського *exponential* – показниковий), і позначають так: $y = \exp x$.

Розглядають логарифми за основою e .

Функція $y = \log_a x$ визначена, якщо $a > 0$, $a \neq 1$.

Зокрема, якщо $a = 10$, то y називається *десятьковим логарифмом числа x* і позначається $\lg x$.

Якщо $a = e$, то y називається *натуральним, або неперовим логарифмом числа x* (на честь шотландського математика Дж. Непера – винахідника логарифмів) і позначається $\ln x$.

Знаючи натуральний логарифм числа, досить просто знайти логарифми цього числа за інших основ, зокрема десятковий логарифм. При цьому використовують модуль переходу $\lg x = M \ln x$, де M – модуль переходу, $M = \lg e$.

Дійсно, число x за означенням логарифма можна подати у вигляді $x = e^{\ln x}$. Тоді

$$\lg x = \lg e \ln x. \quad (13)$$

Теорема 16 (2-а важлива границя). Виконується рівність

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (14)$$

Зауваження. При обчисленні границь, пов'язаних з числом e , часто застосовують таке твердження:

якщо існують границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$, причому $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, то існує також границя $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\varphi(x)}$, яка обчислюється за формулою

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\varphi(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}. \quad (15)$$

Приклад 18. Обчислити границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

Розв'язання. Використаємо формулу (12) для обчислення числа e . Тоді одержимо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} = e^{-1}.$$

Приклад 19. Знайти границю функції $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+1}{5x-2}\right)^{3x}$.

Розв'язання. Для обчислення границі даної функції використаємо другу важливу границю:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+1}{5x-2}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left[\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{5x}\right]^{\frac{3}{5}}}{\left[\left(1 + \frac{1}{-\frac{5}{2}x}\right)^{-\frac{5}{2}x}\right]^{\frac{6}{5}}} = \frac{e^{\frac{3}{5}}}{e^{-\frac{3}{5}}} = e^{\frac{9}{5}}.$$

Приклад 20. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 + \sin 2x}$.

Розв'язання. Використаємо першу важливу границю і формулу (15). Одержимо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 + \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 2x)^{\frac{1}{3}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}} = e^2.$$

Невизначені вирази.

Ми розглянули основні теореми про границі для випадку, коли функції x_n і y_n мають скінченні границі, причому у теоремі про границю частки припускали, що границядільника не дорівнює нулю.

Розглянемо випадок, коли $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ є нескінченно великими числовими послідовностями, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty.$$

Арифметична сума нескінченно великих числових послідовностей, якщо члени цих послідовностей мають той самий знак, є також нескінченно великою послідовністю. Тоді добуток цих послідовностей є також нескінченно великою числовою послідовністю. Про частку від ділення та різницю цих послідовностей нічого конкретного в загальному випадку сказати не можна.

Розглянемо наступні приклади.

1. Нехай $x_n = n^2$, $y_n = n$, $n = 1, 2, \dots$. Обидві послідовності є нескінченно великими: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$. Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

Отже, у цьому випадку послідовність $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ не має скінченної границі, а є нескінченно великою послідовністю.

2. Нехай $x_n = 2n$, $y_n = n$, $n = 1, 2, \dots$. Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 2$. Отже, границя відношення цих двох нескінченно великих числових послідовностей існує і дорівнює 2.

3. Нехай $x_n = n$, $y_n = n^2$, $n = 1, 2, \dots$. Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Отже, в цьому випадку послідовність $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ нескінченно мала.

4. Нехай $x_n = (-1)^n n$, $y_n = n^2$, $n = 1, 2, \dots$. Тоді $\frac{x_n}{y_n} = (-1)^n$. Отже, в цьому випадку послідовність $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$ не має границі.

Таким чином, якщо послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ є нескінченно великими, то частка від ділення їх залежно від закону зміни може бути різною, щоразу потрібно досліджувати відношення $\frac{x_n}{y_n}$. Тому говорять, що відношення $\frac{x_n}{y_n}$, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$, є невизначеністю і символічно позначають $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$.

Сказане тут про частку стосується й різниці двох нескінченно великих числових послідовностей, якщо члени цих послідовностей мають той самий знак. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$, то різницю $x_n - y_n$ називають невизначеністю виду $(\infty - \infty)$.

Аналогічний факт маємо у випадку відношення двох нескінченно малих числових послідовностей. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, то частка від ділення $\frac{x_n}{y_n}$ може також бути різною. Цю невизначеність називають невизначеністю виду $\left(\frac{0}{0} \right)$.

При розкритті цієї невизначеності, доцільно у чисельнику і знаменнику виокремити різницю $x - x_0$ і поділити на неї. Скорочувати на величину $x - x_0$ можна, оскільки $x \rightarrow x_0$, але, згідно з означенням границі функції $x \neq x_0$.

Існують інші види невизначеності. Зокрема, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$, то добуток цих величин є невизначеністю виду $(0 \cdot \infty)$.

Приклад 21. Знайти $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $(\infty - \infty)$. Для її розкриття позбавимося ірраціональності у чисельнику:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

Приклад 22. Знайти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{n^4 + 2n + 3}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Для розкриття її поділимо чисельник і знаменник на n^4 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{n^4 + 2n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right)\left(1 + \frac{3}{n}\right)\left(1 + \frac{4}{n}\right)}{1 + \frac{2}{n^3} + \frac{3}{n^4}}.$$

Границі чисельника і знаменника існують і дорівнюють одиниці. Застосувавши теорему про границю частки, одержимо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right)\left(1 + \frac{3}{n}\right)\left(1 + \frac{4}{n}\right)}{1 + \frac{2}{n^3} + \frac{3}{n^4}} = 1.$$

Вправи для самостійної роботи.

1. Знайти область визначення функції:

а) $y = \sqrt{1-x} + 2\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-1}$;

б) $y = \sqrt{\cos x^2}$; в) $y = \log_2(x^2 + 6x + 9) + \sqrt{x^2 - 2x - 8}$.

2. Користуючись означенням границі функції на мові „ ε - δ ” довести, що:

а) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x+7} = 3$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} (3x+2) = 5$.

3. Обчислити границі функцій:

а) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x+2}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^3 - 3x^2 - 2}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{1 - \cos x}$; г) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a}$;

д) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x-2}$.

7. Неперервність функції.

З поняттям границі функції тісно пов'язане інше важливе поняття математичного аналізу – поняття неперервності функції.

Неперервність функції в точці.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в точці x_0 і в деякому околі цієї точки.

Означення 17 (1-е означення неперервності функції). Функція $y = f(x)$ називається *неперервною в точці* x_0 , якщо границя функції і її значення в цій точці рівні, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (16)$$

Отже, щоб функція $y = f(x)$, була неперервною в точці x_0 , необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови:

1) функція $y = f(x)$ визначена в околі точки x_0 ;

2) існує границя $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ в точці x_0 ;

3) границя функції дорівнює значенню функції в цій точці, тобто виконується рівність (16).

Приклад 23. Показати, що степенева функція $y = x^n$, де n – ціле додатне число, неперервна в будь-якій точці числової осі.

Розв'язання. Степенева функція при цілому додатному показнику визначена на всій числовій осі.

$$x_0 \in (-\infty; +\infty). \quad f(x_0) = x_0^n \quad \lim_{x \rightarrow x_0} x^n = \lim_{x \rightarrow x_0} (x \cdot x \cdot \dots \cdot x) = x_0^n$$

Візьмемо довільну точку

Тоді

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = \lim_{x \rightarrow x_0} (x \cdot x \cdot \dots \cdot x) = x_0^n$$

Отже, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Тому функція $y = x^n$ є неперервною в будь-якій точці $x_0 \in (-\infty; +\infty)$.

Неперервність функції на межі приростів.

На практиці під час дослідження функцій на неперервність часто користуються означенням неперервності, яке ґрунтується на понятті приросту функції в точці.

Нехай числа x_0 та x належать області визначення функції $y = f(x)$.

Означення 18. Різниця $x - x_0$ називається *приростом аргументу* в точці x_0 і позначається через $\Delta x = x - x_0$.

Різниця відповідних значень функції $f(x) - f(x_0)$ називається *приростом функції* в точці x_0 і позначається через $\Delta y = \Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Приріст Δx може бути додатним або від'ємним числом, приріст Δy – довільним числом.

Означення 19 (2-е означення неперервності функції). Функція $y = f(x)$, визначена в околі точки x_0 , називається *неперервною в точці* x_0 , якщо її приріст в цій точці є нескінченно малою функцією при $\Delta x \rightarrow 0$.

Оскільки умови $x \rightarrow x_0$ і $x - x_0 \rightarrow 0$ однакові, то рівність (16) набуває вигляду:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \quad \text{або} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \quad (17)$$

Приклад 24. Довести неперервність функції $f(x) = \frac{1}{x}$

в кожній точці $x_0 \neq 0$.

Розв'язання. Знаходимо приріст функції

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x} = -\frac{\Delta x}{(x_0 + \Delta x)x_0},$$

звідки при $x_0 \neq 0$ одержимо

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{(x_0 + \Delta x)x_0} = 0,$$

що означає, згідно (17), неперервність даної функції в x_0 .

Одностороння неперервність. Точки розриву.

Якщо функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a; b]$, то в точках a і b можна ставити питання про односторонню неперервність, а саме: в точці a – про неперервність справа, а в точці b – зліва.

Означення 20. Функцію $y = f(x)$ називають *неперервною в точці* $x_0 \in (a; b)$ зліва, якщо виконуються умови:

- 1) $f(x)$ визначена в точці x_0 (існує число $f(x_0)$);
- 2) в точці x_0 існує лівостороння границя функції;
- 3) лівостороння границя функції дорівнює значенню функції в точці x_0 .

Отже, якщо $f(x)$ неперервна в точці x_0 зліва, то виконується співвідношення

$$f(x_0 - 0) = f(x_0), \quad (18)$$

де $f(x_0 - 0)$ – лівостороння границя функції в точці x_0 .

Означення 21. Функцію $y = f(x)$ називають *неперервною в точці x_0 (а; b) справа*, якщо виконуються умови:

- 1) $f(x)$ визначена в точці x_0 (існує число $f(x_0)$);
- 2) в точці x_0 існує правостороння границя функції;
- 3) правостороння границя функції дорівнює значенню

функції в точці x_0 .

Отже, якщо $f(x)$ неперервна в точці x_0 справа, то виконується співвідношення

$$f(x_0 + 0) = f(x_0), \quad (19)$$

де $f(x_0 + 0)$ – лівостороння границя функції в точці x_0 .

Очевидно, коли функція неперервна в точці, то вона в цій точці є неперервною і зліва, і справа.

Теорема 17 (3-є означення неперервності функції). Для того щоб функція $y = f(x)$ була неперервна в певній точці x_0 , необхідно і достатньо, щоб вона була в цій точці неперервна справа і зліва і

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0). \quad (20)$$

Всі три означення неперервності функції є еквівалентними.

Якщо хоча б одна з цих умов не виконується, то функція називається *розривною в точці x_0* , а сама точка x_0 називається *точкою розриву*. Залежно від того, яка з цих умов не виконується, точки розриву поділяють на два роди.

Означення 22. Точку розриву x_0 функції $f(x)$ називають *точкою розриву першого роду*, якщо в цій точці існують скінченні границі $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$, причому не всі числа $f(x_0)$, $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ рівні між собою. Зокрема, якщо $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$, то розрив в точці x_0 називають *усувним*, а точку x_0 – *точкою усувного розриву*. У цьому випадку досить довізначити функцію лише в одній точці x_0 , поклавши $f(x_0) = f(x_0 \pm 0)$, щоб одержати функцію, неперервну в точці x_0 .

Величину $\delta = \left| \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \right|$ називається *стрибком функції*.

Приклад 24. Функція $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ не визначена в точці $x = 1$. Довізначити її так у точці $x = 1$, щоб до визначена функція в цій точці була неперервною.

Розв'язання. Знайдемо границю заданої функції в точці $x = 1$:

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$ (оскільки $x - 1 \neq 0$, то скорочення можливе). Отже, шуканою є функція

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{якщо } x \neq 1 \\ 2 & \text{якщо } x = 1 \end{cases} \quad \text{або } F(x) = x + 1.$$

Означення 23. Точку розриву x_0 функції $f(x)$ називають *точкою розриву другого роду*, якщо в цій точці не існує жодної з односторонніх границь.

Наприклад, функція $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, якщо $f(x) = x^2 + 2x - 5$, $b = 10$, $a = 3$; розривна в точках $x = 1$, тому що в цих точках вона не визначена. Оскільки

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x}{x^2-1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x}{x^2-1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x}{x^2-1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x}{x^2-1} = +\infty,$$

то $x = 1$ – точки розриву другого роду (рисунок 23).

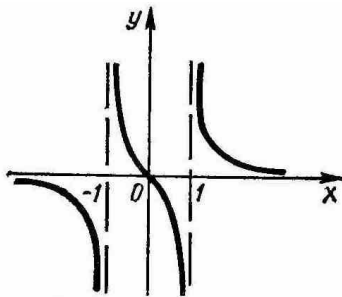


Рис. 23

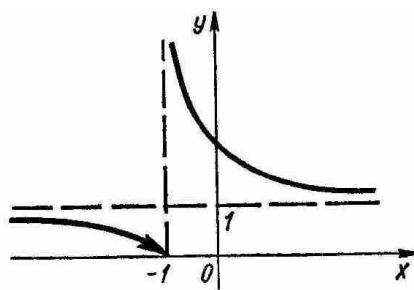


Рис. 24

Приклад 25. Дослідити на неперервність функцію

$$y = 2^{\frac{1}{x+1}} \text{ в точці } x = -1.$$

Розв'язання. Функція не визначена в точці $x = -1$, тому в цій точці вона розривна. Визначимо характер розриву.

Для цього знаходимо границі зліва і справа

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} y = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} 2^{\frac{1}{x+1}} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} y = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} 2^{\frac{1}{x+1}} = +\infty$$

Отже, точка $x = -1$ є точкою розриву другого роду.

Вправи для самостійної роботи.

1. Користуючись різними означеннями границі функції, довести, що:

а) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, якщо $f(x) = x^2 + 2x - 5$, $b = 10$, $a = 3$;

б) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, якщо $f(x) = \frac{2-x}{3x+4}$, $b = 3$, $a = -1$;

в) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, якщо $f(x) = \frac{4x^2+1}{3x^2+2}$, $b = \frac{4}{3}$, $a =$.

2. Довести, що функція $f(x) = x^3$ неперервна в будь-якій точці $x_0 \in \mathbb{R}$.

3. Дослідити точки розриву функції і їх характер:

а) $f(x) = \frac{x^3+1}{x+1}$; б) $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$; в) $f(x) = \frac{1}{4x-x^2-3}$.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Диференціальне числення – розділ математики, в якому розглядається дослідження функцій за допомогою похідних та диференціалів.

Деякі задачі диференціального числення розв'язані ще в давнину. Так, Евклід розв'язав задачу про паралелограм найбільшої площі, який можна вписати в даний трикутник; Архімед побудував дотичну до спіралі, що носить його ім'я, а Аполлоній побудував дотичну до еліпса, гіперболи та параболи.

Загальні методи диференціального числення розроблено Ньютоном і Лейбніцем наприкінці 17 ст., але лише в 19 ст. Коші обґрунтував ці методи на основі теорії границь.

1. Похідна.

Центральне поняття диференціального числення – похідна – широко використовується при розв'язуванні багатьох задач з математики, фізики та інших наук, а також при вивченні різних процесів. Якщо перебіг того чи іншого процесу описується деякою функцією, то дослідження даного процесу зводиться до вивчення властивостей цієї функції та її похідної.

До поняття похідної приводять наступні задачі:

1. Задача про швидкість прямолінійного руху.
2. Задача про густину неоднорідного стержня.
3. Задача про силу струму.
4. Задача про теплоємність.
5. Задача про швидкість хімічної реакції.
6. Задача про дотичну до кривої.

Розглянуті задачі, незважаючи на різний зміст, приводять до знаходження границь одного й того самого виду: границі відношення приросту функції до приросту аргументу. Цю границю в математиці називають *похідною*.

1.1. Означення похідної. Механічний, фізичний та геометричний зміст похідної.

Нехай на деякому проміжку $(a; b)$ задано функцію $y = f(x)$. Візьмемо довільну точку $x \in (a; b)$ і надамо x довільного приросту Δx такого, щоб точка $x + \Delta x$ також належала проміжку $(a; b)$. Знайдемо приріст функції:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Означення 1.1. *Похідною функції $y = f(x)$ в точці x називається границя відношення приросту функції Δy в цій точці до приросту аргументу Δx , коли приріст аргументу прямує до нуля і позначають $f'(x)$:*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (1)$$

Похідну функції $y = f(x)$ в точці x позначають також

символами: $y'; \frac{dy}{dx}; \frac{df}{dx}; y'_x$.

Зауваження. 1. Якщо в деякій точці x границя $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, то похідну $f'(x)$ в цій точці називають *нескінченною*.

2. Якщо границя $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ в деякій точці x не існує, то не існує в цій точці і похідної $f'(x)$.

Значення похідної функції $y = f(x)$ в точці $x = x_0$ позначається одним із символів

$$f'(x_0); f'(x)|_{x=x_0}; y'|_{x=x_0}; \frac{df(x_0)}{dx}.$$

З означення похідної випливає правило її знаходження.

Правило знаходження похідної. Щоб знайти похідну функції $f(x)$ у точці x_0 , потрібно:

1) надати значенню x довільного приросту Δx і знайти відповідний приріст функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;

2) знайти відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;

3) знайти границю цього відношення:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Якщо ця границя існує, то вона й дорівнює похідній $f'(x)$.

Пункти 1)–3) називають *кроками*.

Користуючись означенням похідної, розв'язки задач 1–6 можна тлумачити так:

1) *Швидкість в даний момент часу (миттєва швидкість)* – це похідна від пройденого шляху $S(t)$ за часом t : $v = S'(t)$. Це *механічний (фізичний) зміст похідної*.

Якщо функція $y=f(x)$ описує деякий фізичний процес, то похідна $y'=f'(x)$ є швидкістю зміни цього процесу. Інакше кажучи, яку б залежність не відображала функція $y=f(x)$, відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ можна розглядати як *середню швидкість зміни функції* у відносно аргументу x , а похідну $f'(x)$ – *миттєву швидкість зміни функції*. В цьому полягає *фізичний зміст похідної*.

2) *Лінійна густина неоднорідного стержня* – це похідна від маси $m(x)$ за довжиною x .

3) *Сила струму* – це похідна від кількості електрики за часом.

4) *Теплоємність* – це похідна від кількості теплоти за температурою.

5) *Швидкість хімічної реакції* – це похідна від кількості речовини, що вступила в реакцію, за часом.

6) *Кутовий коефіцієнт дотичної до кривої* $y=f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ або тангенс кута α , що утворює дотична до кривої в даній точці з додатним напрямом осі Ox , - це похідна $f'(x_0)$ в цій точці. Це *геометричний зміст похідної*.

1.2. Односторонні похідні. Неперервність і диференційовність.

Нехай Δx наближається до нуля праворуч, тобто $\Delta x \rightarrow 0$, але $\Delta x > 0$.

Означення 1.2. Якщо в формулі (1) передбачається, що $\Delta x \rightarrow 0$ і $\Delta x > 0$, то відповідну границю (коли вона існує) називають *правою похідною* від $f(x)$ в точці x і позначають

$$f'_+(x) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Аналогічно визначається *ліва похідна*:

$$f'_-(x) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Означення 1.3. З означення неперервності функції на мові приростів випливає, що коли неперервна функція $f(x)$ має ліву і праву похідні в точці x і вони рівні, то похідна $f'(x)$ існує і

$$f'_-(x) = f'_+(x) = f'(x). \quad (2)$$

Якщо ж $f'_-(x) \neq f'_+(x)$, то похідна в точці x не існує.

В точках розриву функції похідна також не існує.

Будемо розглядати лише скінченну похідну.

Означення 1.4. Функція $f(x)$ називається *диференційовною* в точці x_0 , якщо в цій точці вона має похідну $f'(x_0)$.

Функція $f(x)$ називається *диференційовною на проміжку*, якщо вона диференційована в кожній точці цього проміжку.

Існує зв'язок між неперервністю функції в точці і диференційованістю її в цій точці, який встановлює така теорема.

Теорема 1.1. Якщо функція $y=f(x)$ диференційовна в точці x_0 , то вона в цій точці неперервна.

Обернене твердження неправильне.

Отже, неперервність функції в точці є лише необхідною умовою її диференційованості в цій точці.

Приклад 1. Знайти похідну функції $y=x^2$ у точці $x_0=1$.

Розв'язання. За правилом знаходження похідної маємо.

1) Знаходимо приріст функції у точці:

$$f'(x_0) = \Delta y = (1 + \Delta x)^2 - 1^2 = 2\Delta x + \Delta x^2.$$

2) Знаходимо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2 + \Delta x$.

3) Знаходимо границю $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2 + \Delta x) = 2$.

Отже, похідна функції $y=x^2$ у точці $x_0=1$ існує і рівна $f'(1)=2$.

Приклад 2. Довести, що функція $y=|x|$ у точці $x_0=0$ похідної не має.

Розв'язання. Знаходимо приріст заданої функції в точці $x_0=0$. Маємо $\Delta y = |\Delta x|$. Тоді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta y|}{\Delta x} = \begin{cases} 1 & \text{якщо } \Delta x > 0 \\ -1 & \text{якщо } \Delta x < 0 \end{cases}$$

Звідси випливає, що відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$ не має границі. Вона також не диференційовна, бо не виконується рівність (2), бо $f'_-(0) \neq f'_+(0)$:

$$f'_-(0) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

і похідна не існує.

1.3. Похідні елементарних функцій.

На практиці похідні функцій знаходять за допомогою ряду правил і формул. Наведемо теореми, які дають основні правила знаходження похідних функцій.

1. Правила диференціювання суми, різниці, добутку і частки.

Теорема 1.2. Якщо функції $f_1(x), f_2(x)$ у точці x мають похідні, то сума, різниця, добуток і частка цих функцій (частка за умови, що $f_2(x) \neq 0$) також мають похідні в цій точці і справедливі такі формули:

$$y' = (f_1(x) \pm f_2(x))' = f_1'(x) \pm f_2'(x); \quad (3)$$

$$y' = (f_1(x)f_2(x))' = f_1'(x)f_2(x) + f_1(x)f_2'(x); \quad (4)$$

$$y' = \left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right)' = \frac{f_1'(x)f_2(x) - f_1(x)f_2'(x)}{f_2^2(x)}. \quad (5)$$

2. Похідні сталої, добутку сталої на функцію, степеневі, тригонометричних функцій, показникові і логарифмічної функцій.

Теорема 1.3. Якщо $y = f(x) + C$, де C – стале число, то

$$y' = f'(x) + C' = f'(x) + 0 = f'(x). \quad (6)$$

Теорема 1.4. Сталий множник можна виносити за знак похідної, тобто

$$y' = (Cf(x))' = Cf'(x). \quad (7)$$

Теорема 1.5. Похідна степеневі функції $y = x^\alpha$, де α – довільне число, дорівнює показнику, помноженому на цю функцію з показником, на одиницю меншим

$$y' = (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}. \quad (8)$$

Наприклад: нехай $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$, тоді $y' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$;

нехай $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, тоді $y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

$$\text{нехай } y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}, \quad \text{тоді } y' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Теорема 1.6. Похідні тригонометричних функцій знаходять за формулами:

$$y' = (\sin x)' = \cos(x); \quad (9)$$

$$y' = (\cos x)' = -\sin x; \quad (10)$$

$$y' = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad (11)$$

$$y' = (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \quad (12)$$

Теорема 1.7. Похідну показникової функції $y = a^x$ ($0 < a \neq 1$) знаходять за формулою

$$y' = (a^x)' = a^x \ln a. \quad (13)$$

Наслідок 1.1. Похідну функції $y = e^x$ знаходять за формулою

$$y' = (e^x)' = e^x. \quad (14)$$

Теорема 1.8. Похідну логарифмічної функції $y = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$) знаходять за формулою

$$y' = (\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e. \quad (15)$$

Наслідок 1.2. Похідну функції $y = \ln x$ знаходять за формулою

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}. \quad (16)$$

Приклад 3. Знайти похідні суми, добутку і частки

функцій: а) $y = 3x^2 - \sqrt[3]{x} + \ln x$; б) $y = x^3 \cdot \sqrt{x}$;

$$\text{в) } y = \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x}}; \quad \text{г) } y = \frac{x^2}{x^2 - 1}.$$

Розв'язання. а) Дана функція є алгебраїчною сумою функцій, тому

$$y' = (3x^2)' - \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + (\ln x)' = 3 \cdot 2x - \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{x} = 6x - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x}.$$

б) Дану функцію запишемо у вигляді: $y = x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{7}{2}}$.

Тоді за формулою $y' = (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ знаходимо похідну:

$$y'(x) = \left(x^{\frac{7}{2}}\right)' = \frac{7}{2} x^{\frac{7}{2}-1} = \frac{7}{2} x^{\frac{5}{2}} = \frac{7}{2} \sqrt{x^5}.$$

в) Для знаходження похідної скористаємося формулою (5) знаходження похідної частки функцій:

$$y'(x) = \frac{(x^3-1)' \cdot \sqrt{x} - (x^3-1) \cdot (\sqrt{x})'}{\sqrt{x^2}} = \frac{3x^2 \sqrt{x} - (x^3-1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{5x^3+1}{2x\sqrt{x}}.$$

г) Функцію будемо диференціювати, використовуючи формули: (5) – знаходження похідної частки функцій і (8) – знаходження похідної степеневі функції.

$$y' = \frac{(x^2)'(x-1) - x^2(x-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{2x(x-1) - x^2 \cdot 2x}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1-x^2)}{(x-1)^2} = -\frac{2x}{(x-1)^2}.$$

1.4. Похідна оберненої функції. Диференціювання обернених тригонометричних функцій.

Нехай $y=f(x)$ і $x=\varphi(y)$ – пара взаємно обернених функцій. Зв'язок між похідними цих функцій дає наступна теорема.

Теорема 1.9. Якщо функція $y=f(x)$ строго монотонна на інтервалі $(a; b)$ і має відмінну від нуля похідну $f'(x)$ в довільній точці цього інтервалу, то існує обернена функція $x=\varphi(y)$, яка також має похідну $\varphi'(x)$, причому

$$\varphi'(x) = \frac{1}{f'(x)}. \quad (17)$$

Теорема 1.10. Похідні від обернених тригонометричних функцій знаходять за формулами:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (18)$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (19)$$

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}; \quad (20)$$

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \quad (21)$$

Приклад 4. Обчислити похідну для функції $x = \arcsin y$.

Розв'язання. Задана функція обернена до функції $y = \sin x$. Згідно з теоремою 1.9 можна записати

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Звідси $(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$. Якщо замість y записати в останньому виразі x , то одержимо формулу (18)

знаходження похідної від оберненої функції $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

1.5. Похідна складеної функції.

Означення 1.5. Нехай $y=f(u)$ і $u=\varphi(x)$. Тоді функція $y=f(\varphi(x))$ – складена функція з проміжним аргументом u і кінцевим аргументом x .

Теорема 1.11. Якщо функція $u=\varphi(x)$ має похідну u'_x в точці x , а функція $y=f(u)$ має похідну y'_u у відповідній точці u , то складена функція $y=f(\varphi(x))$ має похідну y'_x в точці x і справедлива формула

$$y'_x = y'_u u'_x. \quad (22)$$

Згідно з формулою (22) маємо таке **правило диференціювання складеної функції**: *похідна складеної функції дорівнює добутку похідної цієї функції по проміжному аргументу на похідну від проміжного аргументу по кінцевому аргументу.*

Це правило залишається справедливим, коли складена функція має кілька проміжних аргументів.

Якщо, наприклад, $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = \phi(x)$, то

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x. \quad (23)$$

При диференціюванні складених функцій потрібно чітко уявляти собі, яка з дій, що приводить до значення складеної функції, є останньою. Та величина, над якою виконується остання дія, приймається за проміжний аргумент.

Приклад 5. Знайти похідну функції $y = \sin^3 x$.

Розв'язання. Останньою операцією для даної функції є піднесення до кубу. Отже, проміжний аргумент $u = \sin x$, а кінцевий аргумент $y = u^3$. Похідна даної функції за формулами (22), (8), (9) має вигляд:

$$y'_x = y'_u u'_x = (u^3)'_u (\sin x)'_x = 3u^2 \cos x = 3 \sin^2 x \cos x.$$

Приклад 6. Знайти похідну функції $y = e^{\lg^2 x}$.

Розв'язання. Позначимо $v = \lg x$, $u = v^2$. Тоді маємо складену функцію виду $y = e^u$, $u = v^2$, $v = \lg x$. Отже,

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x = e^u 2v \frac{1}{\cos^2 x} = 2e^{\lg^2 x} \lg x \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2e^{\lg^2 x} \lg x}{\cos^2 x}.$$

На практиці проміжні аргументи не виписують, але похідні від них позначають штрихом.

Приклад 7. Знайти похідну функції $y = \ln \lg x^3$.

Розв'язання. $y' = (\ln \lg x^3)' = \frac{1}{\lg x^3} (\lg x^3)' = \frac{1}{\lg x^3} \cdot \frac{1}{\cos^2 x^3} \cdot (x^3)' = \frac{\cos x^3}{\sin x^3} \cdot \frac{1}{\cos^2 x^3} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{\sin x^3 \cos x^3}.$

Приклад 8. Знайти похідну складеної функції $y = \sqrt[3]{(6x^5 - 12x^3 - x + 1)^2}$.

Розв'язання. Дану функцію будемо диференціювати за

формулою $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$:

$$y' = \left(\sqrt[3]{(6x^5 - 12x^3 - x + 1)^2} \right)' =$$

$$= \left((6x^5 - 12x^3 - x + 1)^{\frac{2}{3}} \right)' = \frac{2}{3} (6x^5 - 12x^3 - x + 1)^{\frac{2}{3}-1} \cdot (6x^5 - 12x^3 - x + 1)' = \frac{2}{3} (6x^5 - 12x^3 - x + 1)^{-\frac{1}{3}} \cdot (30x^4 - 36x^2 - 1) =$$

$$= \frac{2}{3 \sqrt[3]{6x^5 - 12x^3 - x + 1}} (30x^4 - 36x^2 - 1).$$

1.6. Похідна неявно заданої функції.

Нехай неявна функція y задана рівнянням

$$F(x, y) = 0. \quad (24)$$

Для диференціювання неявно заданої функції існує наступне **правило**: *потрібно взяти похідну по x від обох частин рівняння (24), вважаючи у функцією від x , і одержане рівняння розв'язати відносно y' .* Отже, похідна неявної функції виражається через незалежну змінну x і саму функцію y .

Приклад 9. Знайти похідну y' , якщо $x^2 + y^2 - 2y + 3x = 1$.

Розв'язання. Диференціюємо ліву і праву частину даного рівняння, вважаючи, що доданок y^2 є складною функцією:

$$2x + 2yy' - 2y' + 3 = 0.$$

Розв'язуємо одержане рівняння відносно y'

$$y'(2y-2) = -2x-3; \quad y' = \frac{2x+3}{2-2y}.$$

З подібними задачами зустрічаємося в геометрії.

Приклад 10. Знайти дотичну до кола $x^2 + y^2 = 25$ в точці (3; 4).

Розв'язання. Запишемо рівняння пучка прямих, що проходить через дану точку (3; 4): $y - 4 = k(x - 3)$.

Кутовий коефіцієнт k дотичної рівний похідній: $k = y'$, тобто $k = -\frac{x}{y}$. Для розглядуваної точки маємо:

$k = -\frac{3}{4}$, яке підставляємо у пучок прямих. Отже, рівняння шуканої дотичної запишемо у вигляді:

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3), \text{ тобто } 3x + 4y - 25 = 0.$$

1.7. Метод логарифмічного диференціювання.

Похідна показниково-степеневі функції.

Іноколи при знаходженні похідної доцільно задану функцію спочатку прологарифмувати, а потім знайти похідну як від неявної функції. Така операція називається *логарифмічним диференціюванням*.

Приклад 11. Знайти похідну функції $y = \frac{x^2(x^2+1)e^x}{(x-1)\sqrt{3x+5}}$.

Розв'язання. Прологарифмуємо дану функцію:

$$\ln y = 3 \ln x + \ln(x^2 + 1) + x - \ln(x - 1) - \frac{1}{2} \ln |3x + 5|.$$

Знайдемо похідну даної функції за правилом диференціювання неявно заданої функції:

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x} + \frac{2x}{x^2+1} + 1 - \frac{1}{x-1} - \frac{3}{2(3x+5)}.$$

Тоді

$$y' = \frac{x^2(x^2+1)e^x}{(x-1)\sqrt{3x+5}} \left(\frac{3}{x} + \frac{2x}{x^2+1} + 1 - \frac{1}{x-1} - \frac{3}{2(3x+5)} \right).$$

Функцію прикладу 8 можна диференціювати за правилом диференціювання частки, але такий спосіб дуже громіздкий.

Існують функції, похідні яких знаходять лише логарифмічним диференціюванням. Прикладом такої функції є *показниково-степенева функція*.

Означення 1.6. Функція виду

$$y = u^v, \quad (25)$$

де $u = u(x) > 0$, $v = v(x)$ – задані і диференційовні функції від x , називається *показниково-степеневою функцією*.

Теорема 1.12. Похідна показниково-степеневі функції (25) дорівнює сумі похідної показникової функції за умови, що $u = \text{const}$, і похідної степеневі функції за умови, що $v = \text{const}$:

$$y' = (u^v)' = u^v \ln u \cdot v' + v u^{v-1} u'. \quad (26)$$

Приклад 12. Знайти похідну функції $y = \frac{4x^2}{\sqrt[5]{(2-x)^3}}$.

Розв'язання. Прологарифмуємо дану функцію:

$$\ln y = \ln 4 + 2 \ln x - \frac{3}{5} \ln(2 - x).$$

Знаходимо похідну:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x} - \frac{3(2-x)'}{5(2-x)} = \frac{2}{x} + \frac{3}{5(2-x)} = \frac{20-7x}{5x(2-x)}, \quad y' = \frac{4x^2}{\sqrt[5]{(2-x)^3}} \cdot \frac{20-7x}{5x(2-x)}.$$

1.8. Таблиця похідних.

Зведемо формули диференціювання в таблицю.

y	y'	y	y'	y	y'
C	0	e^x	e^x	$\log_a x$	$\frac{\log_a e}{x}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{R}$	a^x	$a^x \ln a$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
x	1	$\sin x$	$\cos x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{arccotg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Вправи для самостійної роботи.

Для виконання вправ на обчислення похідних потрібно запам'ятати таблицю похідних і правила їх обчислення. Вправи потрібно робити до тих пір, доки не виробиться автоматизм в цих обчисленнях і не буде потреби заглядати у таблицю.

1. Користуючись означенням, знайти похідні функцій:

- а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = 2^x$; в) $y = \log_2 x$; г) $y = 10^x$;
 $y = \cos 3x$
 д) ; е) $y = 3 - 2x$; ж) $y = \frac{1}{x^2}$; з) $y = \operatorname{tg} x$.

2. Знайти похідні функцій:

- а) $y = \frac{x^3 - 2x}{x^2 + x + 1}$; б) $y = \frac{x^2 + x - 1}{x^3 + 1}$; в) $y = \frac{1}{x^2 - 1}$;
 г) $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$; д) $y = \cos x - \frac{1}{3} \cos^2 x$; е) $y = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$;
 ж) $y = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$; з) $y = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$;
 к) $y = e^{\sqrt{x+1}}$; л) $y = x^2 \log_3 x$; м) $y = \ln(x^2 - 4x)$;
 н) $y = \sin(2x + 3)$; о) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

3. Користуючись правилом логарифмічного диференціювання, знайти похідні, якщо:

- а) $y = (x^2 + 1)^{\sin x}$; б) $y = x^{\ln x}$; в) $y = (\sin x)^{\cos x}$;
 г) $y = \frac{(x-2)^2 \sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}$; д) $y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$.

2. Диференціал.

Поняття диференціала тісно пов'язане з поняттям похідної, і є одним з найважливіших в математиці. Термін „диференціал” (від латинського слова *differentia* – різниця) ввів у математику Лейбніц. Диференціал наближено дорівнює приросту функції і пропорційний приросту аргументу. Внаслідок цього диференціал широко застосовується при дослідженні різноманітних процесів і явищ.

2.1. Означення, геометричний та механічний зміст диференціала.

Дамо друге означення диференційовності функції в точці, еквівалентне означенню 1.4.

Означення 2.1. Нехай функція $y=f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 . Функція $f(x)$ називається диференційовною в точці x_0 , якщо її приріст в цій точці $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$,

$\Delta x = x - x_0$ можна записати у вигляді $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, де $A = A(x_0)$ – деяке число, не залежне від Δx , а $\alpha(\Delta x)$ прямує до нуля, коли приріст Δx прямує до нуля.

З еквівалентності означень 1.4 і 2.1 випливає, що якщо у точці x_0 функція $f(x)$ має похідну, то вона дорівнює числу A : $f'(x_0) = A$ і її приріст запишемо у вигляді

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x. \quad (27)$$

Доданки у рівності (27) відіграють неоднакову роль.

Перший з доданків лінійний відносно Δx і при $\Delta x \rightarrow 0$ та $f'(x) \neq 0$ є нескінченно малою одного порядку з Δx , тому що $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x)\Delta x}{\Delta x} = f'(x)$. Другий доданок – нескінченно мала

вищого порядку, ніж Δx , тому що $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$. 2-й доданок не є лінійним відносно Δx , тобто містить Δx в степені, вищому від одиниці. Отже, перший доданок у формулі (27) є головною частиною приросту функції, лінійною відносно приросту аргументу.

Означення 2.2. Диференціалом dy функції $y=f(x)$ в точці x називається головна, лінійна відносно Δx (добуток $f'(x)\Delta x$), частина приросту функції $f(x)$ в цій точці:

$$dy = f'(x)\Delta x. \quad (28)$$

Якщо $y = x$, то $y' = x' = 1$, тому $dy = dx = \Delta x$, тобто диференціал dx незалежної змінної збігається з її приростом Δx . Формулу (28) запишемо у вигляді

$$dy = f'(x)dx \text{ або } dy = y'dx. \quad (29)$$

Формула (29) дає змогу розглядати похідну як відношення диференціала функції до диференціала незалежної змінної:

$$y' = \frac{dy}{dx}. \quad (30)$$

Диференціал має **дві властивості**:

1. Диференціал є головною частиною приросту функції (різниця між приростом функції і диференціалом при $\Delta x \rightarrow 0$ є величиною вищого порядку малості, ніж Δx).

2. Диференціал у розглядуваній точці x є лінійною функцією від Δx .

Диференціалу функції можна дати геометричне й механічне тлумачення.

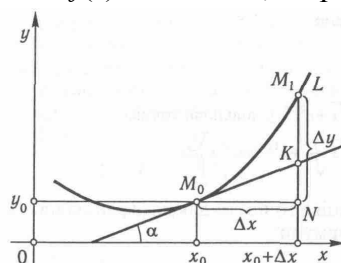
Геометричний зміст диференціала.

Нехай графік диференційовної функції $f(x)$ має вигляд, зображений на рисунку 1 – крива L .

Візьмемо на кривій L точки

$M_0(x_0; y_0)$ і $M_1(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$.

У точці M_0 проведемо дотичну до кривої L . Тоді з ΔM_0KN знайдемо відрізок KN : $KN = \operatorname{tg} \alpha \Delta x = f'(x_0)\Delta x$ або $KN = dy$, який характеризує геометричний зміст диференціала:



диференціал в точці x_0 дорівнює
 приросту ординати, дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці
 $(x_0; f(x_0))$, коли незалежна змінна дістає приріст Δx .

Рис. 1

Механічний зміст диференціала функції.

Нехай матеріальна точка рухається за відомим законом $s = f(t)$, де $f(t)$ – диференційовна функція при деякому значенні часу $t = t_0$. Тоді функція $f(t)$ має диференціал $ds = f'(t_0)\Delta t$. Проте $f'(t_0)$ дорівнює швидкості $v = f'(t_0)$. Тому $ds = v\Delta t$. Добуток $v\Delta t$ виражає шлях, який точка проходить за час Δt , рухаючись зі сталою швидкістю v .

Отже, механічне тлумачення диференціала функції таке: *диференціал функції виражає той шлях, який точка пройшла б за час Δx , якби вона рухалася прямолінійно й рівномірно зі сталою швидкістю $v = f'(t_0)$.*

2.2. Основні формули та правила диференціювання.

Формула (30) дає ще одне визначення похідної, яке є відношенням двох диференціалів: диференціала функції до диференціала аргументу. Використовуючи формулу (29), складемо таблицю диференціалів елементарних функцій.

y	dy	y	dy
$y = C = \text{const}$	$dy = 0$	$y = \ln x$	$dy = \frac{dx}{x}$
$y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$dy = \alpha x^{\alpha-1} dx$	$y = \sin x$	$dy = \cos x \cdot dx$
$y = x$	$dy = dx$	$y = \cos x$	$dy = -\sin x \cdot dx$
$y = \frac{1}{x}$	$dy = -\frac{dx}{x^2}$	$y = \operatorname{tg} x$	$dy = \frac{dx}{\cos^2 x}$
$y = \sqrt{x}$	$dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$	$y = \operatorname{ctg} x$	$dy = -\frac{dx}{\sin^2 x}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$dy = \frac{dx}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y = \arcsin x$	$dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = a^x$	$dy = a^x \ln a \cdot dx$	$y = \arccos x$	$dy = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = e^x$	$dy = e^x dx$	$y = \operatorname{arctg} x$	$dy = \frac{dx}{1+x^2}$
$y = \log_a x$	$dy = \frac{\log_a e \cdot dx}{x}$	$y = \operatorname{arcctg} x$	$dy = -\frac{dx}{1+x^2}$

Якщо u і v – диференційовані функції, то для знаходження диференціалів існують наступні формули:

1. $dC = 0$; 2. $d(Cu) = Cdu$ ($C = \text{const}$); 3. $d(u \pm v) = du \pm dv$;

$$d(uv) = vdu + u dv$$

4. ; 5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$.

Приклад 13. Знайти диференціал функції $y = \ln \sin 2x$ при $x = \frac{\pi}{8}$.

Розв'язання. Користуючись формулою (29), маємо:

$$dy = (\ln \sin 2x)' dx = \frac{1}{\sin 2x} \cdot \cos 2x \cdot 2 dx = 2 \operatorname{ctg} 2x dx.$$

При $x = \frac{\pi}{8}$: $dy = 2 \operatorname{ctg} 2 \cdot \frac{\pi}{8} dx = 2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} dx = 2 dx$.

Приклад 14. Знайти диференціал функції $y = x^2 \operatorname{tg}(3x + 1)$.

Розв'язання. Знаходимо диференціал даної функції як добуток функцій: x^2 та $\operatorname{tg}(3x + 1)$. Отже,

$$dy = \left((x^2)' \operatorname{tg}(3x+1) + x^2 (\operatorname{tg}(3x+1))' \right) dx = \left(2x \operatorname{tg}(3x+1) + \frac{3x^2}{\cos^2(3x+1)} \right) dx.$$

Застосування диференціалу до наближених обчислень.

Диференціал функції часто застосовують для наближених обчислень. При цьому користуються тим, що dy є головною частиною приросту функції у точці, тому $\Delta x \approx dy$. Підставивши значення Δx і dy , одержимо наближену рівність:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \quad (31)$$

Цією формулою користуються при наближених обчисленнях.

Приклад 15. Обчислити наближено $\sqrt{27}$.

Розв'язання. Перетворимо вираз, що стоїть під знаком

радикала: $27=25+2=25\left(1+\frac{2}{25}\right)$, звідки

$$\sqrt{27}=\sqrt{25\left(1+\frac{2}{25}\right)}=5\sqrt{1+\frac{2}{25}}.$$

При обчисленні $\sqrt{1+\frac{2}{25}}$ введемо функцію $f(x)=\sqrt{x}$, тоді $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Формула (31) матиме вигляд: $\sqrt{x+\Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x$, де $x=1$, $\Delta x=\frac{2}{25}$, або $\sqrt{1+\frac{2}{25}} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}} \cdot \frac{2}{25} = 1 + \frac{1}{25} = 1,04$.

В результаті одержимо $\sqrt{27} \approx 5 \cdot 1,04 = 5,2$.

2.3. Основні теореми диференціального числення.

У курсі математичного аналізу одне з центральних місць займають так звані теореми про середнє значення диференціального числення. В усіх цих теоремах ідеться про те, що коли функція та її похідна задовольняють певні умови, то в інтервалі $(a; b)$ знайдеться точка, в якій функція має певні властивості. Тому ці теореми називають *теореми про середнє*.

Теорема Ферма. Нехай функція $y=f(x)$ на інтервалі $(a; b)$ і набуває свого найбільшого або найменшого значення у деякій точці c цього інтервалу. Тоді, якщо в точці c існує похідна $f'(c)$, то $f'(c)=0$.

Геометричний зміст теореми Ферма зрозумілий з рисунка 2: якщо в точці $x=c$ функція $f(x)$ досягає найбільшого або найменшого значення, то дотична до графіка цієї функції в точці $(c; f(c))$ паралельно осі Ox .

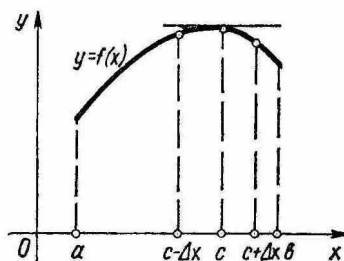


Рис. 2

Теорема Ролля. Нехай функція $y=f(x)$ задовольняє умови:

- 1) визначена й неперервна на відрізку $[a; b]$;
- 2) диференційовна в інтервалі $(a; b)$;
- 3) на кінцях відрізка набуває значень $f(a)=f(b)$.

Тоді знайдеться хоча б одна точка $c \in (a; b)$, в якій $f'(c)=0$.

Якщо хоча б одна з цих умов не виконується, то теорема перестає бути правильною. Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона досягає на цьому відрізку свого найбільшого значення M і найменшого значення m . Якщо $M=m$, то $f(x)=\text{const}$ і $f'(c)=0$ в довільній точці $x \in [a; b]$. Нехай $M \neq m$. Якщо $M=f(a)=f(b)$ і $m \neq f(a)=f(b)$, то внутрішній точці інтервалу $(a; b)$, тому що $f'(c)=0$ (рисунки 3а, б, в).

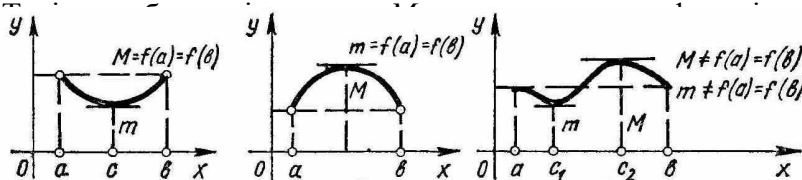


Рис. 3

Геометричний зміст теореми Ролля: Якщо $f(x)$ задовольняє умови теореми Ролля, то:

1) графік функції є суцільною лінією ($f(x)$ є неперервною на відрізку); 2) у кожній точці кривої можна провести дотичну; 3) крайні точки графіка знаходяться на однаковій відстані від осі Ox .

Теорема Лагранжа. Якщо функція $f(x)$:

- 1) задана і неперервна на відрізку $[a; b]$;
- 2) диференційовна в інтервалі $(a; b)$, тоді в інтервалі $(a; b)$ знайдеться хоча б одна точка c , $a < c < b$, в якій справджується рівність

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \quad (32)$$

Геометричний зміст теореми Лагранжа полягає в наступному (рисунок 4). Кінці графіка функції $f(x)$ – точки $A=(a; f(a))$ і $B=(b; f(b))$, AB – хорда, яка з'єднує точки A і B .

Тоді відношення $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ рівне тангенсу кута нахилу α хорди AB до осі Ox , тобто

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \operatorname{tg} \alpha. \quad \text{Похідна}$$

$f'(c)$ рівна тангенсу кута нахилу α дотичної до графіка

функції в точці $(c; f(c))$, тобто $f'(c) = \operatorname{tg} \alpha$. Формула (31) матиме вигляд $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha$. Отже, якщо функція задовольняє умови теореми Лагранжа, то на графіку цієї функції знайдеться хоча б одна точка, в якій дотична до графіка паралельна хорді, що сполучає кінці кривої AB . Таких точок може бути і кілька, але хоча б одна завжди існує.

Теорема Коші. Нехай:

- 1) функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ задані й неперервні на відрізку $[a; b]$;
- 2) диференційовані в інтервалі $(a; b)$;
- 3) похідна $\varphi'(x)$ в інтервалі $(a; b)$ не дорівнює нулю. Тоді в інтервалі $(a; b)$ знайдеться така точка c , що виконується рівність

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \quad (33)$$

Приклад 16. Чи виконується теорема Ролля для функції

$$f(x) = x^2 - 6x + 7 \quad \text{на відрізку } [1; 5]? \quad \text{При якому } c?$$

Розв'язання. Оскільки дана функція неперервна і диференційовна при всіх значеннях $x \in [1; 5]$, а значення її на кінцях рівні між собою: $f(1) = f(5) = 2$, то теорема Ролля на цьому відрізку справджується.

Значення c знаходимо із рівняння $f'(x) = 2x - 6 = 0$, звідки $c = 3$.

Приклад 17. Перевірити, що функції $f(x) = x^2 - 2x + 3$ і $\varphi(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$ задовольняють умови теореми Коші на відрізку $[1; 4]$. Знайти відповідне значення c .

Розв'язання. Оскільки функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ є багаточленами, то вони неперервні на всій числовій осі, а отже, й на відрізку $[1; 4]$. Знайдемо похідні: $f'(x) = 2x - 2$; $\varphi'(x) = 3x^2 - 14x + 20$. При будь-якому $x \in (1; 4)$ існують похідні $f'(x)$ і $\varphi'(x)$, причому $\varphi'(x) \neq 0$. Умови теореми Коші виконуються.

Тому застосуємо формулу Коші (33): $\frac{f(4) - f(1)}{\varphi(4) - \varphi(1)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$. Отже, $\frac{11 - 2}{27 - 9} = \frac{2c - 2}{3c^2 - 14c + 20}$, $1 < c < 4$. Звідси $c_1 = 2$, $c_2 = 4$. Лише точка $c_1 = 2$ є внутрішньою точкою інтервалу $(1; 4)$.

2.4. Правило Лопітала.

Розглянемо застосування похідних до розкриття невизначеностей.

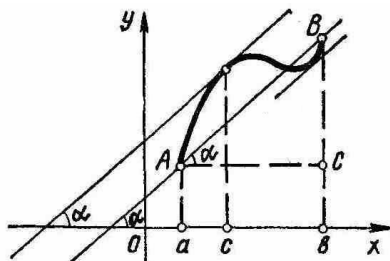


Рис. 4

Невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Теорема 1 (перше правило Лопіталя). Нехай для функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$ виконуються умови:

1) функції визначені на півінтервалі $(a; b]$ і

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0;$$

2) в інтервалі $(a; b)$ $f(x)$ і $\varphi(x)$ диференційовні, причому $\varphi(x) \neq 0$ для всіх $x \in (a; b)$.

3) тоді якщо існує границя відношення похідних $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то існує і границя відношення функцій $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ і ці границі рівні між собою:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \quad (34)$$

Невизначеність $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Теорема 2 (друге правило Лопіталя). Нехай для функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$ виконуються умови:

1) функції визначені на півінтервалі $(a; b]$ і при цьому

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty;$$

2) в інтервалі $(a; b)$ $f(x)$ і $\varphi(x)$ диференційовні, причому $\varphi(x) \neq 0$ для всіх $x \in (a; b)$;

3) тоді, якщо існує границя похідних $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то існує і границя функцій $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ і ці границі рівні між собою:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \quad (35)$$

Зауваження. Крім невизначеностей $\left(\frac{0}{0}\right)$ і $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ існують невизначеності $(0 \cdot \infty)$; $(\infty - \infty)$; (1^∞) ; (0^0) ; (∞^0) . Ці невизначеності спочатку зводяться до невизначеностей $\left(\frac{0}{0}\right)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, а потім застосовують правило Лопіталя для знаходження границі функцій. Наприклад:

а) Нехай маємо невизначеність $(0 \cdot \infty)$. Це означає, що маємо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ такі, що $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$. Тоді добуток функцій $f(x)\varphi(x)$ можна подати у вигляді частки $f(x)\varphi(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$. У правій частині маємо невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$.

б) Якщо маємо невизначеність $(\infty - \infty)$, тобто $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ і $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = -\infty$, то різницю $f(x) - \varphi(x)$ можна записати так:

$$f(x) - \varphi(x) = \frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \frac{1}{\varphi(x)}}.$$

Одержали невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Приклад 18. Користуючись правилом Лопітала, знайти границю функції: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$. Перевіримо виконання умов теореми Лопітала.

Нехай $f(x) = \ln x$, $\varphi(x) = x - 1$. Розглянемо півінтервал $(1; b]$, де $b > 1$ – довільне число. Тоді $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$.

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \varphi'(x) = 1 \neq 0$$

Знаходимо похідні:

при довільному $x \in (1; b]$. Тоді

виконуються всі три умови першого правила Лопітала. Тому $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$. Тобто

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1} = 1.$$

Приклад 19. Знайти границю функції $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Використаємо другу теорему Лопітала

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{nx^n} = 0.$$

Приклад 20. Знайти границю функції $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $(0 \cdot \infty)$. Зведемо її до невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$. Для цього запишемо $(1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$ у вигляді

$$(1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \frac{1-x}{\frac{1}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}}} = \frac{1-x}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}}.$$

Отже, одержали невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$. Тому

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi x}{2}}} = \frac{2}{\pi}.$$

2.5. Застосування диференціального числення для дослідження функцій. Монотонність функцій.

Теорема 1 (достатні умови строгої монотонності). Якщо функція $f(x)$ диференційована на інтервалі $(a; b)$ і $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) всюди, крім, можливо, скінченного числа точок, в яких $f'(x) = 0$ на $(a; b)$, то функція $f(x)$ зростає (спадає) на $(a; b)$.

Теорема 2 (необхідна умова зростання). Якщо диференційована на інтервалі $(a; b)$ функція зростає, то $f'(x) \geq 0$ на $(a; b)$.

Отже, інтервали монотонності функції можуть відділятися один від одного або точками, де похідна дорівнює нулю, які називаються *стаціонарними точками*, або точками, де похідна не існує.

Означення 1. Точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називаються *критичними точками*, або *критичними точками першого роду*.

Теорема 2 має такий геометричний зміст.

Якщо на інтервалі $(a; b)$ функція $f(x)$ зростає, то дотична до кривої $y = f(x)$ у кожній точці $x \in (a; b)$ утворює з додатним напрямом осі Ox гострий кут φ (або в окремих точках горизонтальна), тангенс якого невід'ємний: $f'(x) = \operatorname{tg} \varphi \geq 0$ (рисунок 5).

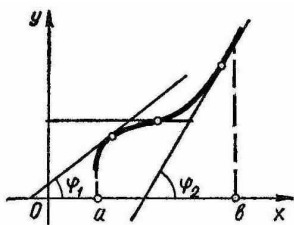


Рис. 5

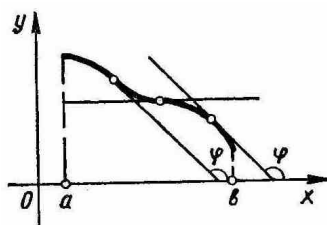


Рис. 6

Якщо на інтервалі $(a; b)$ функція $f(x)$ спадає, то кут нахилу дотичної тупий, або, в окремих випадках, дотична горизонтальна, тангенс якого недоводатний: $\operatorname{tg} \varphi = f'(x) \leq 0$ (рисунок 6).

Отже, щоб знайти **інтервали монотонності функції $f(x)$** , треба:

- 1) знайти область визначення функції;
- 2) знайти похідну даної функції;
- 3) знайти критичні точки з рівняння $f'(x) = 0$ та з умови, що $f'(x)$ не існує;
- 4) розділити критичними точками область визначення на інтервали і у кожному з них визначити знак похідної. На інтервалах, де похідна додатна, функція зростає, а де від'ємна – спадає.

Приклад 1. Знайти інтервали монотонності функції

$$f(x) = x^3 + 2x - 5.$$

Розв'язання. Областю визначення даної функції є нескінченний інтервал $(-\infty; +\infty)$. Похідна $f'(x) = 3x^2 + 2 \neq 0$ також існує на всій числовій осі, тому критичних точок дана функція не має. Оскільки для довільного $x \in (-\infty; +\infty)$: $f'(x) > 0$, то функція зростає на всій числовій осі.

Локальний екстремум функції.

Означення 2. Точка x_0 називається *точкою локального максимуму* (або *локального мінімуму*) функції $f(x)$, якщо існує такий окіл $0 < |x - x_0| < \delta$ точки x_0 , який належить області визначення функції, і для всіх x з цього околу виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$ (або $f(x) > f(x_0)$).

Геометричний зміст цього означення показано на рисунку 7.

Точки локального (від латинського слова *lokalis* – місцевий) максимуму і локального мінімуму називаються *точками локального екстремуму*, а значення функції в цих точках називаються відповідно *локальним максимумом* і *локальним мінімумом* або *локальним екстремумом*.

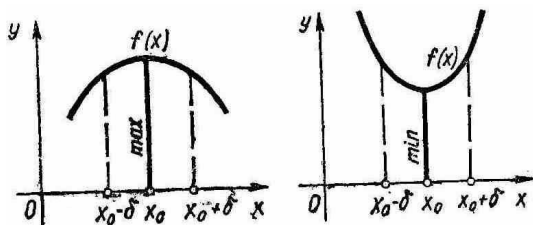
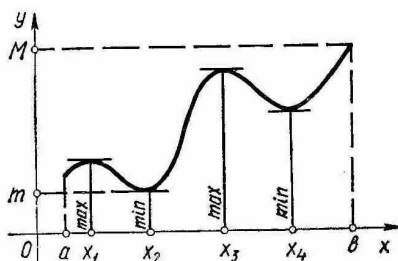


Рис. 7

З означення 2 випливає, що поняття екстремуму носить локальний характер в тому розумінні, що нерівність

$$f(x) < f(x_0) \quad (\text{або } f(x) > f(x_0))$$

може не виконуватись для всіх значень x з області визначення функції, але повинна виконуватись лише в деякому околі



точки x_0 .

Не слід плутати локальний максимум (мінімум) із найбільшим

Рис. 8

(найменшим) значенням функції, якого вона досягає на проміжку. Локальних максимумів і локальних мінімумів функція може мати кілька, тоді як найбільше значення (його ще називають *абсолютним максимумом*), якщо воно існує, є єдиним. Це саме стосується й найменшого значення (*абсолютного мінімуму*) функції. Окремий локальний мінімум може

бути більшим за окремий локальний максимум (див. рисунок 8). Функція, графік якої зображений на рисунку 8, у точці x_4 має мінімум, більший за максимум, який вона досягає у точці x_1 .

Розглянемо питання про необхідні умови існування екстремуму функції в точці, а також про достатні умови його існування.

Теорема 3 (необхідна умова локального екстремуму).

Якщо функція $f(x)$ має в точці x_0 локальний екстремум і диференційовна в цій точці, то $f'(x_0) = 0$.

Теорема 3 має такий геометричний смисл (рисунок 8):

якщо точки x_1, x_2, x_3, x_4 — точки локального екстремуму і у відповідних точках графіка існують неперпендикулярні дотичні, то ці дотичні паралельні осі Ox .

Умова $f'(x_0) = 0$ є необхідною але не достатньою для того, щоб диференційовна в точці x_0 функція мала локальний екстремум, тобто не всяка точка x_0 , в якій $f'(x_0) = 0$, є екстремальною точкою. Наприклад, функція $y = x^3$ має похідну $y' = 3x^2$, що дорівнює нулю в точці $x = 0$, але не має в цій точці екстремуму; функція $y = |x|$ має в точці $x = 0$ мінімум, але не має в цій точці похідної.

Означення 3. Внутрішню точку x_0 проміжку $(a; b)$

називають *стаціонарною* точкою функції $f(x)$, якщо в цій точці $f'(x_0) = 0$. Стаціонарні точки і точки, в яких похідна не існує, називають *критичними точками* або *точками можливого екстремуму* функції. Критичні точки можуть бути точками, в яких функція зростає або спадає.

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Наприклад, у функції у точці $x = 0$ похідна не існує. Проте в точці $x = 0$ функція зростає. Отже, $x = 0$ не є екстремальною точкою.

Отже, необхідну умову локального екстремуму можна сформулювати так: *якщо функція має в точці локальний екстремум, то ця точка є критичною, або точкою можливого екстремуму.*

Обернене твердження невірне.

Розглянемо критерії, які дають змогу із множини критичних точок виділити точки максимуму і мінімуму.

Теорема 4 (достатня умова локального екстремуму). Нехай x_0 є критичною точкою функції $f(x)$ і нехай існує окіл точки $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, в якому $f(x)$ має похідну $f'(x)$, крім, можливо, точки x_0 . Тоді:

1) якщо в інтервалі $(x_0 - \delta; x_0)$ похідна $f'(x) > 0$, а в інтервалі $(x_0; x_0 + \delta)$, похідна $f'(x) < 0$, то x_0 є точкою максимуму функції $f(x)$;

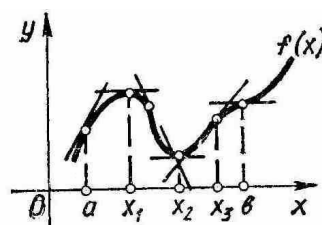
2) якщо в інтервалі $(x_0 - \delta; x_0)$ похідна $f'(x) < 0$, а в інтервалі $(x_0; x_0 + \delta)$, похідна $f'(x) > 0$, то x_0 є точкою мінімуму функції $f(x)$;

3) якщо в обох інтервалах $(x_0 - \delta; x_0)$ і $(x_0; x_0 + \delta)$ похідна $f'(x)$ має той самий знак (набуває або тільки додатних, або тільки від'ємних значень), то x_0 не є екстремальною точкою функції $f(x)$.

Геометричний зміст теореми ілюструє рисунок 9.

Можна ще сказати так:

якщо при переході зліва направо через критичну точку x_0 знак похідної $f'(x)$ змінюється з



плюса на мінус, то x_0 – точка
локального максимуму; якщо
знак похідної $f'(x)$ змінюється

з мінуса на плюс, то x_0 – точка
локального мінімуму; якщо похідна не змінює знак, то в
точці x_0 екстремум відсутній.

Рис. 9

Із теорем 3 і 4 випливає **правило дослідження функції на екстремум**. Щоб дослідити функцію $f(x)$ на екстремум, треба:

1) знайти стаціонарні точки заданої функції. Для цього слід розв'язати рівняння $f'(x) = 0$ і серед його розв'язків вибрати тільки ті дійсні корені, які є внутрішніми точками області існування функції;

2) знайти точки, в яких похідна $f'(x)$ не існує. Якщо
критичних точок функція не має, то вона не має і екстремумів. Якщо критичні точки є, то треба дослідити знак похідної в кожному з інтервалів, на які розбивається область існування цими критичними точками. Для цього достатньо визначити знак похідної в довільній точці інтервалу, оскільки похідна може змінити знак лише при переході через критичну точку;

3) за зміною знака $f'(x)$ при переході через критичні точки зліва направо визначити точки максимумів та мінімумів і обчислити значення функції $f(x)$ в цих точках.

Приклад 2. Дослідити на екстремум функцію

$$f(x) = (x+1)^2(x-2)^3.$$

Розв'язання. Знаходимо похідну функції:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x+1)(x-2)^3 + 3(x+1)^2(x-2)^2 = \\ &= (x+1)(x-2)^2(2x-4+3x+3) = (x+1)(x-2)^2(5x-1). \end{aligned}$$

Розв'язуємо рівняння $f'(x) = 0$: $(x+1)(x-2)^2(5x-1) = 0$.

Звідси одержимо стаціонарні точки: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{5}$, $x_3 = 2$.

Точок, в яких похідна не існує, не має. Отже, стаціонарні точки є єдиними критичними точками заданої функції.

Розглянемо інтервали $(-\infty; -1)$, $(-1; \frac{1}{5})$, $(\frac{1}{5}; 2)$, $(2; +\infty)$.

Для визначення знака похідної обчислимо її в довільних точках, які належать цим інтервалам. Візьмемо, наприклад, точки -2 , 0 , 1 , 3 . Тоді

$$\begin{aligned} f'(-2) &= -4^2(-1) > 0, (+) & f'(0) &= -4 < 0, (-) \\ f'(1) &= 8 > 0, (+) & f'(3) &= 4 \cdot 14 > 0, (+) \end{aligned}$$

При переході через точку $x_1 = -1$ похідна змінює знак „+” на „-”. У цій точці функція має максимум: $f(-1) = -27$.

При переході через точку $x_2 = \frac{1}{5}$ похідна змінює знак „-” на „+”. У цій точці функція має мінімум: $f(\frac{1}{5}) = -\frac{324}{125}$.

При переході через критичну точку $x_3 = 2$ похідна знак не змінює. Точка $x_3 = 2$ не є екстремальною для заданої функції.

Найменше і найбільше значення функції.

Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$. За теоремою Вейєрштрасса на цьому відрізку функція досягає найбільшого значення $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$ і найменшого значення $m = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$, які також називають абсолютними екстремумами функції на цьому відрізку.

Для точки x_0 , де функція досягає найбільшого значення, може бути лише три можливості: а) $x_0 = a$, б) $x_0 \in (a; b)$, в) $x_0 = b$. Якщо $x_0 \in (a; b)$, то точку x_0 потрібно шукати серед критичних точок даної функції. Те саме можна сказати і про точку, в якій функція досягає найменшого значення.

Отже, **щоб знайти найбільше (найменше) значення** функції $f(x)$, яка неперервна на відрізку $[a; b]$, треба:

- 1) знайти критичні точки функції $f(x)$, які належать інтервалу $(a; b)$;
- 2) обчислити значення функції $f(x)$ у знайдених критичних точках: a та b і серед цих значень вибрати найбільше (найменше).

Нехай функція $f(x)$ неперервна в інтервалі $(a; b)$. Така функція може й не мати абсолютних екстремумів. Тоді про їх наявність судять з поведінки даної функції на кінцях інтервалу, обчислюючи $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ та значення $f(x)$ в критичних точках, які належать інтервалу $(a; b)$.

Приклад 3. Знайти найбільше і найменше значення

функції $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ на відрізку $\left[-2; \frac{5}{2}\right]$.

Розв'язання. Знаходимо похідну $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$.

Прирівнявши похідну до нуля і розв'язавши рівняння $6x^2 - 6x - 12 = 0$, знайдемо стаціонарні точки $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Точок, в яких похідна не існує, немає.

Обчислюємо значення функції в точках x_1 , x_2 і на кінцях відрізка $x_3 = -2$, $x_4 = \frac{5}{2}$:

$$\begin{aligned} f(-1) = 8 & \quad f(2) = -19 & \quad f(-2) = -3 & \quad f\left(\frac{5}{2}\right) = -16\frac{1}{2} & \quad M = \max_{-2 \leq x \leq \frac{5}{2}} f(x) = 8 & \quad m = \min_{-2 \leq x \leq \frac{5}{2}} f(x) = -19 \\ ; & \quad ; & \quad ; & \quad ; & \quad ; & \quad ; \end{aligned}$$

Вправи для самостійної роботи.

1. Знайти диференціали функцій:

- а) $(x^3 - 1)e^{2x}$; б) $x^3 \sin 3x$; в) $(1 - x^2) \cos x$; г) $\frac{e^x}{x}$;
 д) $\sin 3x \cos 5x$; е) $x^3 \ln x$; ж) $(2x^3 - 1) \cos 3x$;
 з) $e^x \sin x$; к) $\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$; л) $(x^3 - x) \cos 7x$.

2. За допомогою диференціала обчислити наближене значення функції:

- а) $f(x) = \arcsin x$ у точці $x = 0,48$;
 б) $f(x) = \arctg x$ у точці $x = 1,05$.

3. Перевірити справедливність:

- а) теореми Ролля для функції $f(x) = \sqrt[3]{(x-4)^2}$ на сегменті $[0; 8]$;
 б) теореми Коші для функцій $f(x) = x^2 + 2$ і $\varphi(x) = x^3 - 1$ на сегменті $[1; 12]$ і знайти проміжкові точку c ;
 в) теореми Лагранжа для функції $f(x) = \ln x$ на сегменті $[1; e]$ і знайти проміжкові точку c ;
 г) теореми Ферма для функції $f(x) = 3 + 2x - x^2$ на сегменті $[0; 4]$ і знайти точку c , для якої $f'(c) = 0$.

4. Обчислити границю функції, використовуючи правило Лопіталя:

- а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x}{\cos x - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right]$; в) $\lim_{x \rightarrow +0} x^x$;

$$\begin{aligned} \text{г)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2 \ln x}{x}; \quad \text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}; \quad \text{е)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^x}{\ln(1+x)}; \\ \text{ж)} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right); \quad \text{з)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x - \sin x}. \end{aligned}$$

5. Знайти інтервали монотонності функцій:

$$\text{а)} f(x) = -x^2 + 10x + 7; \quad \text{б)} f(x) = 3x^2 - 8x^3;$$

$$\text{в)} f(x) = x^2 - \ln x^2; \quad \text{г)} f(x) = x + \sin x;$$

$$\text{д)} f(x) = \frac{2x-3}{x+7}; \quad \text{е)} f(x) = \frac{2x}{1+x^2};$$

$$\text{е)} f(x) = \frac{x}{\ln x}; \quad \text{ж)} f(x) = \frac{1}{(x-5)^2}.$$

6. Дослідити на екстремум функції:

$$\text{а)} f(x) = \cos x - \sin x; \quad \text{б)} f(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x;$$

$$\text{в)} f(x) = x^3 - 12x + 1; \quad \text{г)} f(x) = x + \frac{1}{x};$$

$$\text{д)} f(x) = -x^2 \sqrt{x^2 + 2}; \quad \text{е)} f(x) = x - \ln(1+x);$$

$$\text{е)} f(x) = \frac{x}{\sqrt{10-x}}; \quad \text{ж)} f(x) = \frac{x+1}{x^2+8}.$$

7. Знайти найбільше і найменше значення функції:

$$\text{а)} f(x) = x^4 - 8x^2 \text{ на відрізку } [-1; 3];$$

$$\text{б)} f(x) = x^2 \ln x \text{ на відрізку } [1; e];$$

$$\text{в)} f(x) = \sin^2 x \text{ на відрізку } [0; \pi].$$

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Інтеграл – одне з центральних понять математичного аналізу і всієї математики. Воно виникло у зв'язку з двома основними задачами:

1) про відновлення функції по заданій її похідній;

2) про обчислення площі, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, прямими $x = a$, $x = b$ і віссю Ox . Термін „інтеграл” ввів Я. Бернуллі у 1690 році.

Елементи інтегрального числення закладено у працях математиків Стародавньої Греції. Основні поняття і початки теорії інтегрального числення розроблені в кінці 17 ст. Ньютоном і Лейбніцем. Далі історичний розвиток інтегрального числення пов'язаний з іменами Л. Ейлера, О. Коші, Б. Рімана та інших вчених. Вказані задачі 1) і 2) приводять до двох пов'язаних між собою видів інтегралів: невизначеного і визначеного. Вивчення властивостей і обчислення цих інтегралів і складають основну задачу інтегрального числення.

1. Невизначений інтеграл.

За допомогою невизначеного інтеграла розв'язується задача знаходження функції $f(x)$ за відомою її похідною $f'(x)$.

1.1. Поняття первісної функції та невизначеного інтеграла.

Означення 1.1. Функцію $F(x)$ на проміжку $(a; b)$ називають *первісною* для функції $f(x)$, якщо $F(x)$ на проміжку $(a; b)$ є неперервною, а в кожній внутрішній точці проміжку $(a; b)$ $F(x)$ є диференційованою і

$$F'(x) = f(x). \quad (1)$$

Наприклад: 1) Нехай $f(x) \equiv 1$. Тоді в інтервалі $(-\infty; +\infty)$

первісною для такої функції буде функція $F(x) = x$. Дійсно, в інтервалі $(-\infty; +\infty)$ функція $F(x)$ є неперервною і диференційованою, причому $F'(x) = 1$. 2) Нехай $f(x) = e^x$. Тоді в інтервалі $(-\infty; +\infty)$ первісною функцією є функція $F(x) = e^x$. Дійсно, функція e^x є неперервною в цьому інтервалі й диференційованою, причому $F'(x) = e^x$. Отже, виконується співвідношення (1).

У наведених прикладах первісними будуть також: для $f(x) \equiv 1 - F(x) = x+1$, $F(x) = x+2$, ..., $F(x) = x+C$, де C – довільна стала; для $f(x) = e^x - F(x) = e^x + C$. Як знайти всі первісні даної функції, якщо існує хоча б одна, відповідь дає теорема.

Теорема 1.1. Якщо $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на проміжку $(a; b)$, то всяка інша первісна функції $f(x)$ на цьому проміжку має вигляд $F(x) + C$.

Розглянемо геометричну інтерпретацію первісної функції. Нехай функція $f(x) \geq 0$ неперервна на відрізку $[a; b]$ (рисунок 1).

Розглянемо фігуру $ABCD$, обмежену графіком неперервної функції $f(x)$, двома прямими $x = a$, $x = b$ і віссю Ox . Таку фігуру називають *криволінійною трапецією*. Позначимо через P площу цієї трапеції. Можна довести, що $P'(x) = f(x)$, тобто

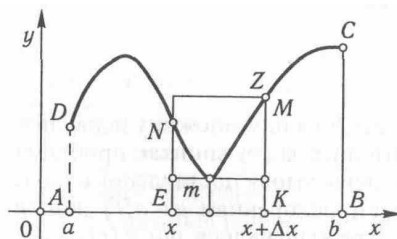


Рис. 1

первісну функцію інтерпретувати як змінну площу $P(x)$ криволінійної трапеції. Тоді усі первісні функції пов'язані співвідношенням $P'(x) = F(x) + C$, де $F(x)$ також первісна функція для $f(x)$. Поклавши в попередній рівності $x = a$ і врахувавши, що $P(a) = 0$, маємо $C = -F(a)$. Тому $P(x) = F(x) - F(a)$.

Вважаючи, що $x = b$, одержимо формулу для обчислення площі криволінійної трапеції:

$$P = F(b) - F(a). \quad (2)$$

Приклад 1. Користуючись формулою (2), обчислити площу криволінійної фігури, зображеної на рисунку 2.

Розв'язання. Первісною функцією для $f(x) = x$ є $F(x) = \frac{x^2}{2}$. Тому площа заданої фігури рівна: $P(x) = F(4) - F(1) = \frac{4^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{16}{2} - \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$. На рисунку 2 зображена трапеція, площа якої рівна добутку півсуми основ на висоту, тобто $\frac{1+4}{2} \cdot 3 = \frac{15}{2}$.

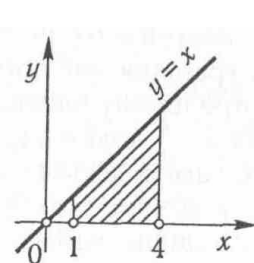


Рис. 2

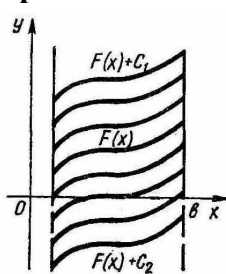
Означення 1.2. Множина всіх первісних функцій $F(x)$ для функції $f(x)$ на проміжку $(a; b)$ називається *невизначеним інтегралом функції $f(x)$* і позначається

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \quad (3)$$

Знак $\int$ називається *інтегралом*, $f(x) dx$ – підінтегральний вираз, $f(x)$ – підінтегральна функція, x – змінна інтегрування.

1.2. Властивості невизначеного інтеграла.

З точки зору геометрії невизначений інтеграл є множиною кривих, кожна з яких називається *інтегральною кривою* і утворюється зсувом однієї з них паралельно самій собі уздовж осі Oy (рисунок 3). Щоб задати її значення



$F(x_0)$ в якій-небудь точці $x_0 \in (a; b)$.

Рис. 3

З рівностей (3) випливають такі **властивості невизначеного інтеграла**.

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x) dx \right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$$

2. Невизначений інтеграл від диференціала даної функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої

$$\int dF(x) = \int F'(x) dx = \int f(x) dx = F(x) + C$$

3. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу

$$d\left(\int f(x) dx \right) = \left(\int f(x) dx \right)' dx = f(x) dx$$

4. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла

$$\int Cf(x) dx = C \int f(x) dx$$

5. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих функцій

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx$$

Властивості 4 і 5 використовують безпосередньо для знаходження невизначених інтегралів.

1.3. Таблиця основних інтегралів.

Оскільки операція інтегрування є оберненою до операції диференціювання, то можна для кожної функції (похідної) написати їй відповідну первісну функцію (невизначений інтеграл). Тоді одержимо таку таблицю інтегралів.

1. $\int 0 \cdot dx = C$

2. $\int 1 \cdot dx = x + C$

3. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$

4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

6. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; \quad \int e^x dx = e^x + C$

8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

9. $\int \cos x dx = \sin x + C$

10. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctgx} + C$

11. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tgx} + C$

12. $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctgx} + C$

13. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$

14. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$

15. $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

16. $\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$

17. $\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$

$$18. \int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln |\cos x| + C \quad 19. \int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln |\sin x| + C$$

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int (x^4 - 3x^2 + x - 5) \, dx$.

Розв'язання. $\int (x^4 - 3x^2 + x - 5) \, dx =$

$$= \int x^4 \, dx - 3 \int x^2 \, dx + \int x \, dx - 5 \int dx = \frac{x^5}{5} - x^3 + \frac{x^2}{2} - 5x + C$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} \, dx$.

Розв'язання. Запишемо підінтегральну функцію у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} &= 1 + \frac{3}{x^2 - 1} \quad \text{Тоді} \quad \int \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} \, dx = \int \left(1 + \frac{3}{x^2 - 1} \right) dx = \\ &= \int 1 \cdot dx + 3 \int \frac{dx}{x^2 - 1} = x + \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C \end{aligned}$$

1.4. Основні методи інтегрування.

Усі методи інтегрування функцій зводять невизначений інтеграл до інтеграла, який знаходиться в основній таблиці інтегралів. Основними методами інтегрування є безпосереднє інтегрування, метод підстановки та інтегрування частинами.

1. Метод безпосереднього інтегрування. Обчислення інтегралів за допомогою основних властивостей невизначеного інтеграла і таблиці інтегралів називають безпосереднім інтегруванням.

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} \, dx$.

Розв'язання. $\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}$. Тоді $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} \, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx =$
 $= \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx + \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$

2. Метод підстановки (заміни змінної). В основі цього методу лежить така теорема.

Теорема 1.2. Нехай $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на проміжку $(a; b)$, тобто $\int f(x) \, dx = F(x) + C$, $x \in (a; b)$,

і нехай функція $x = \varphi(t)$ визначена і диференційована на проміжку $(\alpha; \beta)$, причому множина значень цієї функції

є проміжок $(a; b)$. Тоді справедлива формула

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt = F(\varphi(t)) + C, \quad t \in (\alpha; \beta) \quad (4)$$

Теорема 1.2 застосовується, **як правило**.

Нехай потрібно знайти невизначений інтеграл $\int g(x) \, dx$.

Цей інтеграл записуємо у вигляді

$$\int g(x) \, dx = \int f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx = \left| \begin{array}{l} t = \varphi(x) \\ \varphi'(x) \, dx = dt \end{array} \right| = \int f(t) \, dt = F(t) + C = F(\varphi(x)) + C \quad (5)$$

Формула (5) називається формулою інтегрування заміною змінної.

Приклад 5. Знайти інтеграл $\int \frac{x^3}{x-1} \, dx$.

Розв'язання. $\int \frac{x^3}{x-1} \, dx = \left| \begin{array}{l} t = x-1 \\ dt = dx \\ x = t+1 \end{array} \right| = \int \frac{(t+1)^3}{t} \, dt = \int \frac{t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{t} \, dt = \int \left(t^2 + 3t + 3 + \frac{1}{t} \right) dt =$

$$= \frac{t^3}{3} + \frac{3}{2}t^2 + 3t + \ln|t| + C = \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{3}{2}(x-1)^2 + 3(x-1) + \ln|x-1| + C.$$

3. Метод інтегрування частинами. Нехай $u = u(x), v = v(x)$, які на деякому проміжку $(a; b)$ є неперервними й мають неперервні похідні першого порядку $u'(x), v'(x)$. Тоді функції u, v мають диференціали $du = u'(x)dx, dv = v'(x)dx$, причому виконується рівність $d(uv) = u dv + v du$, $u dv = d(uv) - v du$.

Внаслідок рівності диференціалів невизначені інтеграли будуть відрізнятися тільки на сталу величину. Інтегруючи обидві частини останньої рівності, одержимо

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du,$$

але $\int d(uv) = uv + C$. Тому одержимо таку формулу

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (6)$$

Відмітимо, що у формулі (6) не пишемо сталу, бо стала міститься в інтегралі $\int v du$, а сума двох сталих є сталою.

Формулу (6) називають **формулою інтегрування частинами**.

З'ясуємо докладніше зміст формули (6). Нехай потрібно знайти інтеграл $\int f(x)dx$. Позначимо деякий аналітичний

вираз, який входить до функції $f(x)$, через $u = u(x)$. Тоді решту підінтегрального виразу позначимо через dv :

$$dv = \frac{f(x)dx}{u(x)}. \quad (7)$$

Інакше кажучи, запишемо підінтегральний вираз у вигляді $f(x)dx = u dv$. Якщо при цьому диференціал (7) є такий, що невизначений інтеграл $v = \int \frac{f(x)dx}{u(x)}$ знаходиться

простіше, або є табличним, або зводиться до табличного, і при цьому інтеграл $\int u dv = \int v u'(x)dx$ також знаходиться, то формула (6) дає змогу знайти інтеграл $\int f(x)dx$.

Приклад 6. Знайти невизначений інтеграл, користуючись

методом інтегрування частинами $\int x \sin x dx$.

$$\int x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = u' dx = dx \\ dv = \sin x dx, \quad v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right| =$$

Розв'язання.

$$= -x \cos x - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + C$$

Вправи для самостійної роботи.

1. Обчислити інтеграли:

а) $\int (2x^3 - x + 3) dx$; б) $\int \frac{(x+2)(x^2-3)}{x^3} dx$;

в) $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx$; г) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx$;

д) $\int \cos x \sin 3x dx$; е) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$; з) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$.

2. Знайти невизначені інтеграли, користуючись методом підстановки:

$$\begin{aligned} &\text{а) } \int \frac{dx}{5x+1}; \quad \text{б) } \int e^{x^2+1} x dx; \quad \text{в) } \int \frac{x^2}{1+x^6} dx; \\ &\text{г) } \int \frac{2x}{x^4-9} dx; \quad \text{д) } \int \frac{dx}{x^2+2x+5}; \\ &\text{е) } \int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}; \quad \text{з) } \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx. + \end{aligned}$$

3. Користуючись методом інтегрування частинами, знайти інтеграли:

$$\begin{aligned} &\text{а) } \int x e^x dx; \quad \text{б) } \int x \cos x dx; \quad \text{в) } \int (x^2 + 2x + 3) \cos x dx; \\ &\text{г) } \int x^2 \ln x dx; \quad \text{д) } \int (2x + 1) \sin x dx. \end{aligned}$$

2. Визначений інтеграл.

2.1. Задача про площу криволінійної трапеції.

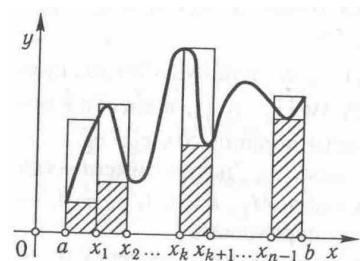
На рисунку 4 зображено криволінійну трапецію, яка зверху обмежена графіком неперервної і невід'ємної функції $y = f(x)$, заданої на відрізку $[a; b]$.

Поділимо відрізок $[a; b]$, що є основою трапеції, на n довільних частин за допомогою точок $x_0, x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n$ так, щоб справджувалися нерівності

Рис. 4

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < x_{k+1} < x_n = b.$$

Через кожну точку поділу проведемо прямі, паралельні осі Oy . Тоді криволінійна трапеція розіб'ється на n окремих



криволінійних трапецій. Розглянемо одну з таких трапецій, основою якої лежить відрізок $[x_k; x_{k+1}]$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Оскільки функція $f(x)$ є неперервною, то вона буде неперервна і на кожному окремому відрізку, зокрема на відрізку $[x_k; x_{k+1}]$. Тоді за теоремою Вейерштрасса $f(x)$ на відрізку $[x_k; x_{k+1}]$ набуває свого найменшого m_k і найбільшого M_k значень. Тоді на відрізку знайдуться точки c'_k, c''_k ; $x_k \leq c'_k, c''_k \leq x_{k+1}$, що $m_k = f(c'_k)$; $M_k = f(c''_k)$.

На кожному з відрізків $[x_k; x_{k+1}]$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ побудуємо два прямокутники, основи яких збігаються з відрізком $[x_k; x_{k+1}]$, а висоти є ординатами точок кривої $f(x)$,

абсциси яких дорівнюють c'_k, c''_k . Прямокутники, довжина висот яких дорівнює m_k , називатимемо *вхідними* (на рисунку 4 вони заштриховані), а прямокутники з висотами M_k — *вихідними*.

Позначимо суму площ вхідних прямокутників через

$\underline{S}$, а через $\bar{S}$ — суму площ вихідних прямокутників. Тоді за побудовою цих прямокутників маємо:

$$\underline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} f(c'_k)(x_{k+1} - x_k); \quad \bar{S} = \sum_{k=0}^{n-1} f(c''_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Суми $\underline{S}$ і $\bar{S}$ для одного розбиття відрізка $[a; b]$ на частини є сталими числами. Якщо ж розбиття, тобто сукупність точок $x_0, x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n$ змінювати, то будуть змінюватися $\underline{S}$ і $\bar{S}$.

Позначимо сукупність точок $x_0, x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n$ буквою T і будемо називати *розбиттям відрізка*. Тоді $\underline{S}$ і $\bar{S}$ будуть залежати від T : $\underline{S} = \underline{S}(T)$ і $\bar{S} = \bar{S}(T)$.

Нехай $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ є довжиною відрізка $[x_k; x_{k+1}]$, а λ — найбільше з чисел Δx_k : $\lambda = \max \Delta x_k, 0 \leq k \leq n-1$. Тоді число λ залежить від T : $\lambda = \lambda(T)$. Надалі будемо розглядати такі T -розбиття відрізка $[a; b]$ на частини, щоб $\lambda(T) \rightarrow 0$.

Означення 2.1. Якщо величини $\underline{S}(T)$ і $\bar{S}(T)$ при $\lambda(T) \rightarrow 0$ мають границі й ці границі рівні між собою

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \underline{S}(T) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \bar{S}(T) = S. \quad (8)$$

то криволінійну трапецію називають *квадровно*. *Фігурою*, а число S при цьому – *площею криволінійної трапеції*.

Якщо границі величин $\underline{S}(T)$ і $\bar{S}(T)$ при $\lambda(T) \rightarrow 0$ різні або хоча б одна з цих границь не існує, то кажуть, що фігура не має площі, тобто є неквадрованою.

2.2. Означення та умови існування визначеного інтеграла.

Крім сум $\underline{S}$ і $\bar{S}$ розглянемо суму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) \Delta x_k, \quad (9)$$

де c_k – довільна точка відрізка $[x_k; x_{k+1}]$; $x_k \leq c_k \leq x_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Очевидно, сума (9) виражає суму площ прямокутників, що знаходяться між вхідними та вихідними прямокутниками. Тому справедливі нерівності

$$\underline{S} \leq \sigma \leq \bar{S}. \quad (10)$$

Якщо криволінійна трапеція є квадратною фігурою, то з (10) випливає, що $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sigma = S$.

Отже, за площу криволінійної трапеції можна взяти границю суми (9) при $\lambda(T) \rightarrow 0$.

Означення 2.2. Суму (9) називають *інтегральною сумою* для функції $f(x)$, складеної для T -розбиття відрізка $[a; b]$ на частини при виборі точок $c_k \in [x_k; x_{k+1}]$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$).

Геометричний зміст інтегральної суми: якщо $f(x) \geq 0$, то число σ дорівнює площі ступінчастої фігури (рисунок 4), тобто сумі площ n прямокутників з основами Δx_k і висотами $f(c_k)$.

Довжину найбільшого частинного відрізка T -розбиття λ назвемо *діаметром цього розбиття*: $\lambda = \lambda(T) = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$.

Означення 2.3. Якщо існує скінченна границя інтегральної суми (9) при $\lambda \rightarrow 0$, яка не залежить ні від T -розбиття, ні від вибору точок c_k , то ця границя називається *визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$* і позначається символом

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n f(c_k) \Delta x_k. \quad (11)$$

Функція $f(x)$ називається інтегрованою на відрізку $[a; b]$.

Числа a і b називаються відповідно *нижньою* і *верхньою межею інтегрування*, функція $f(x)$ – *підінтегральною функцією*, $f(x)dx$ – *підінтегральним виразом*; x – *змінною інтегрування*, $[a; b]$ – *проміжком інтегрування*.

Якщо визначений інтеграл існує, то функцію $f(x)$ називають *інтегрованою на відрізку $[a; b]$* за

Ріманом, а сам інтеграл $\int_a^b f(x) dx$ – *інтегралом Рімана*.

Отже, площа S криволінійної трапеції, обмеженої прямими $y = 0$, $x = a$, $x = b$ і графіком функції $y = f(x) \geq 0$ дорівнює визначеному інтегралу від цієї функції

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

У цьому полягає *геометричний зміст визначеного інтеграла*: визначений інтеграл від невід'ємної функції чисельно дорівнює площі відповідної криволінійної трапеції.

2.3. Властивості визначеного інтеграла.

1. Якщо у визначеному інтегралі поміняти місцями межі, то знак інтеграла змінюється на протилежний

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

2. Визначений інтеграл з однаковими межами

дорівнює нулю $\int_a^a f(x)dx = 0$.

3. Якщо існує інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, то існує також інтеграл $\int_a^b Cf(x)dx$ і виконується рівність $\int_a^b Cf(x)dx = C \int_a^b f(x)dx$ (C – довільне число).

4. Якщо існують інтеграли $\int_a^b f(x)dx$ і $\int_a^b \varphi(x)dx$, то існує інтеграл $\int_a^b (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx$.

5. Якщо для функції $f(x)$ існують інтеграли $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^c f(x)dx$, $\int_c^b f(x)dx$, то виконується рівність $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

6. Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ інтегровані на відрізку $[a; b]$ і для кожного $x \in [a; b]$ $f(x) \leq \varphi(x)$, то виконується нерівність

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx$$

7. Якщо функція $f(x)$ є інтегровною на відрізку $[a; b]$, то на ньому є інтегровною також функція $|f(x)|$, і вірна нерівність $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Основна теорема інтегрального числення.

Теорема 2.1. Якщо функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a; b]$, то функція $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ є диференційовною в кожній точці цього відрізка і похідна $\Phi'(x)$ дорівнює $\Phi'(x) = f(x)$.

Теорема 2.2. Для всякої неперервної на відрізку $[a; b]$ функції $f(x)$ правильною є так звана формула Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b), \quad (12)$$

де $F(x)$ – одна з первісних функцій для функції $f(x)$.

При обчисленні визначених інтегралів користуються методами підстановки та інтегрування частинами.

Приклад 1. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Розв'язання. Оскільки підінтегральна функція в інтегралі є функцією неперервною на відрізку, то використаємо формулу Ньютона-Лейбніца.

Однією з первісних функцій для функції $\frac{1}{1+x^2} \in \arctg x$. Тому

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^1 = \arctg 1 - \arctg 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Приклад 2. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^5 \frac{3dx}{\sqrt[4]{3x+1}}$.

Розв'язання. Зробимо заміну змінної $y = \sqrt[4]{3x+1}$. Тоді $3x+1 = y^4$, $3dx = 4y^3 dy$. Визначимо межі інтегрування для нової змінної y :

при $x = 0$ маємо $y_1 = \sqrt[4]{1} = 1$ (нижня межа);

при $x = 5$ маємо $y_2 = \sqrt[4]{15+1} = 2$ (верхня межа).

Тоді $\int_0^5 \frac{3dx}{\sqrt[4]{3x+1}} = \int_1^2 \frac{4y^3 dy}{y} = 4 \int_1^2 y^2 dy = 4 \left. \frac{y^3}{3} \right|_1^2 = \frac{4}{3} (8-1) = \frac{28}{3}$.

Приклад 3. Знайти визначений інтеграл $\int_1^2 x \ln x dx$, користуючись формулою інтегрування частинами.

Розв'язання. Для обчислення визначеного інтеграла формула інтегрування частинами має вигляд:

$$\int_a^b u(x) dv(x) = (u(x)v(x)) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) du(x).$$

Матимемо $\int_1^2 x \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, dv = x dx \\ du = \frac{1}{x} dx, v = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} x^2 \ln x \Big|_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x dx =$

$$= \frac{1}{2} 2^2 \ln 2 - \frac{1}{4} 1^2 \ln 1 - \frac{x^2}{4} \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - \frac{1}{4} 2^2 + \frac{1}{4} 1^2 = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}.$$

Вправи для самостійної роботи.

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^\pi \cos x dx$; б) $\int_2^3 \frac{2x^4 - 5x^2 + 3}{x^2 - 1} dx$; в) $\int_0^1 x^3 dx$;
 г) $\int_0^\pi \sin x dx$; д) $\int_2^3 3x^2 dx$; е) $\int_{-1}^2 (2x + 3x^2 + 1) dx$;
 з) $\int_0^1 (e^x - 1) dx$; ж) $\int_0^4 \left(\frac{1}{4} x - 1 \right)^5 dx$.

2. Обчислити визначений інтеграл, застосовуючи метод заміни змінної:

а) $\int_0^2 x \sqrt{1-x^2} dx$; б) $\int_0^2 \frac{dx}{x + \sqrt{4-x^2}}$;
 в) $\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}$; г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$.

3. Обчислити визначений інтеграл, застосовуючи метод інтегрування частинами:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{5+3\sin x} dx & ; \quad \text{б) } \int_2^{\sqrt[3]{e}} x^2 \ln x dx \\ \text{в) } \int_0^{\pi} x^2 \cos x dx & ; \quad \text{г) } \int_0^2 x \ln(1+x^2) dx \end{array} .$$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна література

1. Бескровний О.І. Математика для економістів: Вища математика: конспект лекцій для студентів економічних спеціальностей / О.І. Бескровний; М-во освіти і науки України, Університет Україна, каф. КІ. – К: УУ, 2019 . – 192 с.
2. Козира В.М. Елементарна та вища математика: посібник-довідник для учнів, абітурієнтів, студентів / В.М. Козира. – Тернопіль: Астон, 2021. –168 с. ISBN 978-966-308-841-9
3. Литвин І.І., Конончук О.М., Желізняк О.Г. Вища математика, 2019 р. В-тво: ЦНЛ, 368 с. ISBN 978-611-01-0983-3.