

Кафедра математика та інформатика

Valószínűségyszámítás II. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ІІ.

Előadás jegyzet
az első modulhoz

Курс лекцій
ІІ. Модуль

Перший (бакалаврський)
(ступінь вищої освіти)

A Освіта/Педагогіка / A Oktatás/Pedagógia

A4.09 Середня освіта (Інформатика) / A4.09 Középiskolai oktatás
(Informatika)

Інформатика
(освітня програма)

Informatika
(Képzési program)



Берегове – 2026

Курс лекції «Теорія ймовірностей II.» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня, галузь знань: А Освіта/Педагогіка, А4.09 Середня освіта (Інформатика)б освітня програма: «Інформатика» / Укладач: Кучінка К.Й. Берегове: Закарпатський угорський університет ім. Ференца Ракоці II, 2025. 50 с.

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри обліку і аудиту ЗУЕ ім. Ф. Ракоці II
(протокол №7 від 16 травня 2026 року)

Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості освіти
ЗУЕ ім. Ф.Ракоці II
(протокол №5 25 травня 2026 року)

Рекомендовано до видання в електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради ЗУЕ ім. Ф.Ракоці II
(протокол №5 27 травня 2026 року)

Укладач:

Каталін Кучінка – кандидат фіз.-мат. наук, доцент, завідувач кафедри математики та інформатики ЗУЕ ім. Ференца Ракоці II

Рецензенти:

Дердь Надь– канд. фіз.-мат. наук, завідувач кафедри природничі науки Токайський університет

Адам Доровці– доктор філософії, доцент кафедри математики та інформатики ЗУЕ ім. Ференца Ракоці II

повідальні за випуск:

Мирослав СТОЙКА – завідувач кафедри математики та інформатики ЗУЕ імені Ференца Ракоці II, доцент, кандидат фізико-математичних наук

Олександр ДОБОШ – начальник Видавничого відділу ЗУЕ ім. Ф.Ракоці II

За зміст методичних вказівок відповідальність несе розробник.

Видавництво: ЗУЕ імені Ференца Ракоці II (адреса: пл. Кошута 6, м. Берегове, 90202.
Електронна пошта: foiskola@kmf.uz.ua)

© Каталін Кучінка, 2026
© Кафедра математики та інформатики ЗУЕ ім. Ф.Ракоці II, 2026

Tartalomjegyzék

Bevezető	3
1 Diszkrét valószínűségi változók	4
1.1 A várható érték	4
1.2 A várható érték tulajdonságai és bizonyításai	4
1.3 A szórás	6
1.4 A szórás tulajdonságai	7
1.5 Csebisev-egyenlőtlenség	7
Önellenőrző kérdések	7
2 Folytonos valószínűségi változók	8
2.1 Folytonos valószínűségi változó és eloszlásfüggvénye	8
2.2 Az eloszlásfüggvény tulajdonságai és bizonyításai	8
2.3 Sűrűségfüggvény	10
2.4 Várható érték	11
2.5 Szórás és Szórásnégyzet	12
Önellenőrző kérdések	13
3 Nevezetes diszkrét eloszlások. Hipergeometrikus eloszlás.	14
3.1 A hipergeometrikus eloszlás definíciója	14
3.2 A várható érték és bizonyítása	14
3.3 A szórás és bizonyítása	15
Önellenőrző kérdések	16
4 Nevezetes diszkrét eloszlások. Binomiális eloszlás.	17
4.1 A binomiális eloszlás definíciója és eloszlása	17
4.2 A várható érték és bizonyítása	17
4.3 A szórás és bizonyítása	18
Önellenőrző kérdések	18
5 Nevezetes diszkrét eloszlások. Geometriai és negatív binomiális eloszlás	20
5.1 Geometriai eloszlás	20
5.2 Negatív binomiális eloszlás	22
Önellenőrző kérdések	23
6 A Poisson-eloszlás	24
6.1 A várható érték (M) és bizonyítása	24
6.2 A szórás és bizonyítása	25
6.3 Kapcsolat a binomiális és a Poisson-eloszlás között	25
Önellenőrző kérdések	27
7 Nevezetes folytonos eloszlások. Egyenletes eloszlás	28
7.1 Az egyenletes eloszlás definíciója	28
7.2 A várható érték (M) és bizonyítása	28
7.3 A szórás és bizonyítása	29
Önellenőrző kérdések	30

8 Nevezetes folytonos eloszlások. Exponenciális eloszlás	31
8.1 Az exponenciális eloszlás definíciója	31
8.2 A várható érték (M) és bizonyítása	31
8.3 A szórás és bizonyítása	32
Önellenőrző kérdések	33
9 Nevezetes folytonos eloszlások. Normális és standard normális eloszlás	33
9.1 A standard normális eloszlás	34
9.2 Az általános normális eloszlás	35
9.3 Kapcsolat a két eloszlás között (Standardizálás)	36
Önellenőrző kérdések	37
10 Bevezetés a valószínűségszámítás határeloszlás-tételeibe	38
Bevezetés a valószínűségszámítás határeloszlás-tételeibe	38
Markov-egyenlőtlenség	38
Csebisev-egyenlőtlenség	39
Sztocasztikus konvergencia	39
Majdnem biztos konvergencia	40
A nagy számok gyenge törvénye (Csebisev-alak)	40
A nagy számok Bernoulli-féle törvénye	41
A nagy számok erős törvényei	41
Önellenőrző kérdések	42
11 A központi határeloszlás-tétel	43
A központi határeloszlás-tétel	43
Önellenőrző kérdések	44
Tárgymutató	45
Felhasznált irodalom	47

Bevezető

Ez a jegyzet a *Valószínűségszámítás* tárgy előadásaihoz készült segédanyag, amely az informatika szakos hallgatók számára íródott. A tananyag szorosan épít a *Valószínűségszámítás I.* keretében elsajátított alapfogalmakra, mintegy annak természetes folytatásaként mélyíti el a valószínűségszámítás elméleti hátterét.

Míg az első részben a véletlen kísérletekkel, az eseményalgebrával és a klasszikus valószínűségi modellekkel ismerkedtünk meg, ez a második rész a valószínűségi változók – mind a diszkrét, mind a folytonos – részletes vizsgálatára fókuszál. Különös hangsúlyt fektetünk a legfontosabb, a gyakorlatban is sűrűn előforduló eloszlások (mint a binomiális, a Poisson-, a normális vagy az exponenciális eloszlás) tulajdonságainak megértésére.

Informatikus szemmel nézve a valószínűségszámítás nem csupán egy absztrakt matematikai diszciplína, hanem elengedhetetlen eszköz a komplex rendszerek modellezésében. A jegyzetben tárgyalt határeloszlás-tételek, különösen a nagy számok törvényei és a központi határeloszlás-tétel, alapvető fontosságúak a gépi tanulás, az adatelemzés, a hálózatkutatás és a szimulációs eljárások megértéséhez. Ezen elméleti alapok biztosítják azt a matematikai precizitást, amelyre a modern informatikai algoritmusok épülnek.

A jegyzet felépítése követi az előadások tematikáját, minden fejezet végén önellenőrző kérdésekkel segítve a tananyag elsajátítását és a vizsgára való felkészülést.

1 Diszkrét valószínűségi változók

Diszkrét valószínűségi változó: Egy $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt diszkrét valószínűségi változónak nevezünk, ha értékkészlete megszámlálható (véges vagy végtelen), és minden x értékre teljesül, hogy az $\{\omega : \xi(\omega) = x\}$ halmaz esemény.

Eloszlás: A diszkrét valószínűségi változó eloszlását a lehetséges értékek és a hozzájuk tartozó valószínűségek adják meg. Ha ξ lehetséges értékei $x_1, x_2, \dots$, akkor az eloszlást a $p_i = P(\xi = x_i)$ valószínűségek alkotják, ahol $\sum p_i = 1$.

1.1 A várható érték

A várható értéket a szakirodalom gyakran $M(\xi)$ -vel (Expected value), a Slyusarchuk forrás pedig $M\xi$ -vel jelöli.

Definíció: A diszkrét ξ valószínűségi változó várható értéke a lehetséges értékek valószínűségekkel súlyozott összege:

$$M\xi = \sum_k x_k p_k$$

feltéve, hogy a sor abszolút konvergens.

1.2 A várható érték tulajdonságai és bizonyításai

(A bizonyítások forrása: P.V. Slyusarchuk: Valószínűségszámítás és matematikai statisztika, 4.1.2. és 4.1.3. fejezetek). A forrás a várható érték (a szövegben $M\xi$) tulajdonságait részben a definícióból, részben az elemi eseményekre való összegzés tulajdonságaiból vezeti le.

1. **Konstans várható értéke:** Ha C konstans, akkor $MC = C$.

Bizonyítás: A konstans tekinthető olyan diszkrét valószínűségi változónak, amely egyetlen értéket vesz fel 1 valószínűséggel. Ha $P(\xi = C) = 1$, akkor a definíció alapján:

$$MC = C \cdot 1 = C$$

2. **Konstans kiemelése:** $M(C\xi) = C \cdot M\xi$, ahol C konstans.

Bizonyítás: A definícióból közvetlenül adódik. Ha ξ értékei x_i és a hozzájuk tartozó valószínűségek p_i , akkor:

$$M(C\xi) = \sum_i (Cx_i)p_i = C \sum_i x_i p_i = C \cdot M\xi$$

3. **Összeg várható értéke (Additivitás):** $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$.

Bizonyítás: A forrás az első tulajdonságot (az elemi események terén vett összegzést) használja fel a bizonyításhoz. Tudjuk, hogy a várható érték felírható az elemi eseményekre (ω) vett összegeként: $M\xi = \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega)P(\omega)$. Ezt

alkalmazva az összeget:

$$M(\xi + \eta) = \sum_{\omega \in \Omega} (\xi(\omega) + \eta(\omega)) P(\omega)$$

Az összegzés tulajdonságait használva a tagok szétbonthatók:

$$= \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) P(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} \eta(\omega) P(\omega)$$

A definíció értelmében az első tag $M\xi$, a második tag $M\eta$, tehát:

$$= M\xi + M\eta$$

4. **Független változók szorzata:** Ha ξ és η független diszkrét valószínűségi változók, és létezik véges várható értékük, akkor a szorzatuk várható értéke is létezik, és megegyezik a várható értékek szorzatával: $M(\xi\eta) = M\xi \cdot M\eta$.

Bizonyítás: A bizonyítás lépései a várható érték definíciójára és a függetlenség tulajdonságára épülnek. Tekintsük a ξ és η valószínűségi változókat, melyek értékészlete rendre $\{x_k\}$ és $\{y_l\}$. A $\xi\eta$ szorzat várható értéke a lehetséges értékek szorzatának és azok együttes bekövetkezési valószínűségének összege:

$$M(\xi\eta) = \sum_k \sum_l x_k y_l P(\xi = x_k, \eta = y_l)$$

Mivel ξ és η függetlenek, az együttes eloszlás a peremeloszlások szorzatával egyenlő: $P(\xi = x_k, \eta = y_l) = P(\xi = x_k) \cdot P(\eta = y_l)$. Helyettesítsük be a szorzatot az összegbe:

$$M(\xi\eta) = \sum_k \sum_l x_k y_l P(\xi = x_k) P(\eta = y_l)$$

Mivel az összeg abszolút konvergens, az összegzés sorrendje felcserélhető, és a tagok csoportosíthatók. Emeljük ki az x_k -től függő tényezőket a belső (l szerinti) összegzés elé:

$$M(\xi\eta) = \sum_k \left[x_k P(\xi = x_k) \sum_l y_l P(\eta = y_l) \right]$$

Vegyük észre, hogy a belső összeg éppen η várható értéke, a külső összeg pedig ξ várható értéke:

$$\sum_l y_l P(\eta = y_l) = M\eta, \quad \sum_k x_k P(\xi = x_k) = M\xi$$

Ebből következik a tétel állítása:

$$M(\xi\eta) = \left(\sum_k x_k P(\xi = x_k) \right) \cdot M\eta = M\xi \cdot M\eta$$

5. **Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenség:** $(M(\xi\eta))^2 \leq M(\xi^2) \cdot M(\eta^2)$.

Bizonyítás: Tekintsük a $M((t\xi + \eta)^2) \geq 0$ kifejezést, amely minden valós t -re igaz (mivel egy négyzet várható értéke nem lehet negatív). Kifejtve a négyzetet és használva a várható érték linearitását:

$$t^2 M(\xi^2) + 2t M(\xi\eta) + M(\eta^2) \geq 0$$

Ez egy másodfokú egyenlőtlenség t -ben. Ahhoz, hogy ez minden t -re nem-negatív legyen, a diszkriminánsának nem pozitívnak kell lennie ($D \leq 0$):

$$(2M(\xi\eta))^2 - 4M(\xi^2)M(\eta^2) \leq 0$$

$$4(M(\xi\eta))^2 \leq 4M(\xi^2)M(\eta^2)$$

$$(M(\xi\eta))^2 \leq M(\xi^2)M(\eta^2)$$

1.3 A szórás

A szórás azt mutatja meg, hogy a valószínűségi változó értékei mennyire ingadoznak a várható érték körül. A definíció szerint a szórás (jelölje $D\xi$) a várható értéktől ($M\xi$) való eltérés négyzetének a várható értéke:

$$D\xi = M[(\xi - M\xi)^2]$$

Ez a mennyiség a valószínűségi változó értékeinek a várható értéktől való átlagos négyzetes eltérését fejezi ki.

Steiner-formula: Ha a ξ valószínűségi változónak létezik véges szórása, akkor a szórásnégyzete ($D^2\xi$) kiszámítható a második momentum ($M(\xi^2)$) és a várható érték négyzetének ($(E\xi)^2$) különbségeként:

$$D^2\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2$$

Bizonyítás: A bizonyítás a szórásnégyzet definíciójából indul ki, és a várható érték linearitását használja fel. Legyen $m = E\xi$ a valószínűségi változó várható értéke. A szórásnégyzet definíciója szerint:

$$D^2\xi = E((\xi - m)^2)$$

Végezzük el a négyzetre emelést a zárójelben:

$$(\xi - m)^2 = \xi^2 - 2m\xi + m^2$$

Alkalmazzuk az E operátort a kifejezés minden tagjára:

$$M(\xi^2 - 2m\xi + m^2) = M(\xi^2) - 2m \cdot M(\xi) + m^2$$

Mivel $m = E\xi$, helyettesítsük ezt vissza a középső tagba:

$$-2m \cdot M(\xi) = -2(M\xi)(E\xi) = -2(E\xi)^2$$

Így az egyenlet:

$$= M(\xi^2) - 2(E\xi)^2 + (E\xi)^2 = M(\xi^2) - (E\xi)^2$$

Ez az összefüggés jelentősen megkönnyíti a szórás számolását.

1.4 A szórás tulajdonságai

A szórás legfontosabb tulajdonságai a következők:

1. **Nemnegativitás:** A szórás mindig nemnegatív ($D\xi \geq 0$). A szórás pontosan akkor 0, ha a valószínűségi változó 1 valószínűséggel egyetlen konstans értéket vesz fel.
2. **Konstans szórása:** Egy konstans (C) szórása nulla: $D(C) = 0$.
3. **Lineáris transzformáció:** Ha a valószínűségi változót egy a konstanssal szorozzuk és hozzáadunk egy b konstans:

$$D(a\xi + b) = a^2 D\xi$$

A konstanssal való eltolás nem befolyásolja a szórást, a szorzó négyzete pedig kiemelhető.

4. **Független változók összege:** Ha ξ és η független valószínűségi változók, akkor az összegük szórása megegyezik a szórásaik összegével:

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$$

1.5 Csebisev-egyenlőtlenség

A szórás segítségével felső becslést adhatunk arra, hogy a valószínűségi változó értékei milyen valószínűséggel térnek el a várható értéktől egy adott mértéknél jobban. Ha $D\xi$ véges, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén:

$$P(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

Ez az egyenlőtlenség azt fejezi ki, hogy kis szórás esetén kicsi a valószínűsége a várható értéktől való nagy eltérésnek.

Önellenőrző kérdések

Válaszoljon az alábbi kérdésekre a fejezet anyaga alapján:

1. Hogyan definiáljuk a diszkrét valószínűségi változó várható értékét ($M\xi$), és mi a feltétele a létezésének?
2. Hogyan számítható ki két független valószínűségi változó szorzatának várható értéke?
3. Ismertesse a Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenséget a várható értékekre vonatkozóan!
4. Mi a Steiner-formula, és hogyan könnyíti meg a szórás kiszámítását?
5. Mit fejez ki a Csebisev-egyenlőtlenség a valószínűségi változó várható értéktől való eltéréséről?

2 Folytonos valószínűségi változók

2.1 Folytonos valószínűségi változó és eloszlásfüggvénye

A valószínűségi változó definíciója: Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ egy valószínűségi mező. A $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt valószínűségi változónak nevezzük, ha minden $x \in \mathbb{R}$ esetén a $\{\omega : \xi(\omega) < x\}$ halmaz esemény (azaz eleme az $\mathcal{A}$ σ -algebrának).

Az eloszlásfüggvény definíciója: A ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényének az $F_\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt nevezzük, melyet az alábbi módon definiálunk:

$$F_\xi(x) = P(\xi < x)$$

(Egyes források $F(x)$ -ként jelölik).

Abszolút folytonos valószínűségi változó: A ξ valószínűségi változót abszolút folytonosnak nevezzük, ha létezik olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nemnegatív, Borel-mérhető függvény (sűrűségfüggvény), amelyre teljesül, hogy:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Az ilyen változók eloszlásfüggvénye mindenhol folytonos.

2.2 Az eloszlásfüggvény tulajdonságai és bizonyításai

Az eloszlásfüggvényekre (legyen az diszkrét vagy folytonos változóé) az alábbi négy fő tulajdonság jellemző. A bizonyítások a valószínűség axiómáin és folytonosságán alapulnak.

1. tulajdonság: Monoton növekedés

Állítás: Az $F(x)$ függvény monoton nemcsökkenő, azaz ha $a < b$, akkor $F(a) \leq F(b)$.

Bizonyítás: Legyen $a < b$. Ekkor a $\{\xi < a\}$ esemény részhalmaza a $\{\xi < b\}$ eseménynek (ha ξ értéke kisebb mint a , akkor biztosan kisebb mint b is):

$$\{\xi < a\} \subseteq \{\xi < b\}$$

A valószínűség monotonitása miatt (ha $A \subseteq B$, akkor $P(A) \leq P(B)$):

$$P(\xi < a) \leq P(\xi < b)$$

A definíció alapján ez éppen azt jelenti, hogy $F(a) \leq F(b)$.

2. tulajdonság: Határértékek a végtelenben

Állítás:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

Bizonyítás:

- **A $+\infty$ eset:** Tekintsünk egy monoton növekvő x_n sorozatot, amely a $+\infty$ -be tart ($x_n \nearrow \infty$). Jelölje $A_n = \{\xi < x_n\}$. Ekkor $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$, és az események uniója a biztos esemény (Ω), mivel ξ biztosan felvesz valamilyen véges értéket. A valószínűség folytonossága miatt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P(\Omega) = 1$$

- **A $-\infty$ eset:** Tekintsünk egy monoton csökkenő y_n sorozatot, amely a $-\infty$ -be tart ($y_n \searrow -\infty$). Jelölje $B_n = \{\xi < y_n\}$. Ekkor $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$, és az események metszete a lehetetlen esemény ($\emptyset$), mivel ξ értéke nem lehet minden valós számnál kisebb. A valószínűség folytonossága miatt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = P(\emptyset) = 0$$

3. tulajdonság: Balról folytonosság

Állítás: Az eloszlásfüggvény balról folytonos, azaz tetszőleges x esetén:

$$\lim_{y \rightarrow x^-} F(y) = F(x)$$

(Megjegyzés: Ez a tulajdonság a $P(\xi < x)$ definícióból következik. Ha a definíció $P(\xi \leq x)$ lenne, akkor a függvény jobbról lenne folytonos).

Bizonyítás: Legyen x_n egy monoton növekvő sorozat, amely x -hez tart ($x_n \nearrow x$). Ekkor az $A_n = \{\xi < x_n\}$ események sorozata is növekvő ($A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$), és az uniójuk éppen az $A = \{\xi < x\}$ esemény (mivel az egyenlőtlenség szigorú, a határérték x nem kerül bele az unióba a "kisebb" reláció miatt). A valószínűség folytonossága alapján:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P(\xi < x) = F(x)$$

Ez igazolja a balról folytonosságot.

4. tulajdonság: Intervallumba esés valószínűsége

Állítás: Annak valószínűsége, hogy a ξ valószínűségi változó egy $[a, b)$ félig zárt intervallumba esik:

$$P(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a)$$

Bizonyítás: A $\{\xi < b\}$ esemény felbontható két egymást kizáró esemény összegére:

$$\{\xi < b\} = \{\xi < a\} \cup \{a \leq \xi < b\}$$

Mivel az események diszjunktak (egy szám nem lehet egyszerre kisebb a -nál és nagyobb vagy egyenlő a -val), a valószínűség additivitása miatt:

$$P(\xi < b) = P(\xi < a) + P(a \leq \xi < b)$$

$$F(b) = F(a) + P(a \leq \xi < b)$$

Átrendezve:

$$P(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a)$$

Összefoglalás: Egy $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor eloszlásfüggvénye valamely valószínűségi változónak, ha:

1. Monoton nemcsökkenő.
2. Balról folytonos.
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ és $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$.

2.3 Sűrűségfüggvény

Definíció: A ξ valószínűségi változót (és eloszlását) abszolút folytonosnak nevezük, ha létezik olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nemnegatív, Borel-mérhető függvény, amelyre az eloszlásfüggvény előáll az alábbi integrál alakjában:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Ekkor az f függvényt a ξ sűrűségfüggvényének nevezzük.

Tulajdonságok és bizonyításai:

1. Normálás (Az integrál értéke 1)

Állítás: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

Bizonyítás: Az eloszlásfüggvény tulajdonságaiból tudjuk, hogy $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$. A definíciót felhasználva:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$$

2. Valószínűség kiszámítása intervallumon

Állítás: Annak valószínűsége, hogy ξ egy $[a, b)$ intervallumba esik: $P(a \leq \xi < b) = \int_a^b f(x) dx$.

Bizonyítás: Az eloszlásfüggvény tulajdonságaiból $P(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a)$. Behelyettesítve a sűrűségfüggvény integrálját:

$$F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^b f(x) dx - \int_{-\infty}^a f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

3. Kapcsolat az eloszlásfüggvénnyel (Deriválás)

Állítás: A sűrűségfüggvény az eloszlásfüggvény deriváltja (ahol f folytonos): $F'(x) = f(x)$.

Bizonyítás: Ez az analízis alaptételének közvetlen következménye, mivel $F(x)$ az f függvény integrálfüggvénye.

2.4 Várható érték

Definíció: Legyen ξ sűrűségfüggvénye $f(x)$. Ha az $\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x) dx$ integrál véges, akkor a várható érték:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$$

Tulajdonságok és bizonyításai:

1. Linearitás

Állítás: Ha c konstans, akkor $M(c\xi) = cM\xi$, és $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$ (feltéve, hogy a várható értékek léteznek).

Bizonyítás (Konstans kiemelése): A várható érték definícióját és az integrál tulajdonságait használva:

$$M(c\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (cx)f(x) dx = c \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = cM\xi$$

Bizonyítás (Összeg): Két folytonos változó esetén az együttes sűrűségfüggvény ($h(x, y)$) segítségével bizonyítható:

$$M(\xi + \eta) = \iint (x + y)h(x, y) dx dy = \iint xh(x, y) dx dy + \iint yh(x, y) dx dy = M\xi + M\eta$$

2. Transzformált változó várható értéke

Állítás: Ha g Borel-mérhető függvény, akkor $M(g(\xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x) dx$.

Bizonyítás: A bizonyítás mértékelméleti eszközöket igényel, de speciális esetekben visszavezethető a definícióra.

3. Független változók szorzata

Állítás: Ha ξ és η függetlenek, akkor $M(\xi\eta) = M\xi \cdot M\eta$.

Bizonyítás: Ha létezik együttes sűrűségfüggvény $h(x, y)$, és a változók függetlenek, akkor $h(x, y) = f_{\xi}(x) \cdot f_{\eta}(y)$. Ekkor:

$$M(\xi\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf_{\xi}(x)f_{\eta}(y) dx dy$$

Az integrálok szétválaszthatók:

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} y f_{\eta}(y) dy \right) = M\xi \cdot M\eta$$

2.5 Szórás és Szórásnégyzet

Definíció: A szórásnégyzet (variancia) a várható értéktől való eltérés négyzetének várható értéke:

$$D^2\xi = M((\xi - M\xi)^2)$$

A szórás ennek pozitív négyzetgyöke: $D\xi = \sqrt{D^2\xi}$.

Tulajdonságok és bizonyításai:

1. Steiner-formula (Kiszámítási mód)

Állítás: $D^2\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2$.

Bizonyítás: Jelölje $m = M\xi$. A várható érték linearitását használva:

$$\begin{aligned} D^2\xi &= M((\xi - m)^2) = M(\xi^2 - 2m\xi + m^2) \\ &= M(\xi^2) - 2mM\xi + m^2 = M(\xi^2) - 2m^2 + m^2 = M(\xi^2) - m^2 \end{aligned}$$

2. Lineáris transzformáció

Állítás: $D^2(a\xi + b) = a^2 D^2\xi$.

Bizonyítás: Tudjuk, hogy $M(a\xi + b) = aM\xi + b$. Jelölje $m = M\xi$.

$$\begin{aligned} D^2(a\xi + b) &= M((a\xi + b - (am + b))^2) = M((a(\xi - m))^2) \\ &= M(a^2(\xi - m)^2) = a^2 M((\xi - m)^2) = a^2 D^2\xi \end{aligned}$$

3. Független változók összege

Állítás: Ha ξ és η függetlenek (vagy legalább korrelálatlanok), akkor $D^2(\xi + \eta) = D^2\xi + D^2\eta$.

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} D^2(\xi + \eta) &= M((\xi + \eta)^2) - (M(\xi + \eta))^2 \\ &= M(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2) - ((M\xi)^2 + 2M\xi M\eta + (M\eta)^2) \\ &= [M(\xi^2) - (M\xi)^2] + [M(\eta^2) - (M\eta)^2] + 2[M(\xi\eta) - M\xi M\eta] \end{aligned}$$

A függetlenség miatt $M(\xi\eta) = M\xi M\eta$, így a harmadik tag 0. A maradék tagok pedig a szórásnégyzetek definíciói:

$$= D^2\xi + D^2\eta$$

Önellenőrző kérdések

Válaszoljon az alábbi kérdésekre a fejezet anyaga alapján:

1. Hogyan definiáljuk a sűrűségfüggvényt abszolút folytonos valószínűségi változó esetén?
2. Milyen összefüggés van a sűrűségfüggvény integrálja és a teljes esemény valószínűsége között?
3. Hogyan számoljuk ki sűrűségfüggvénnyel annak valószínűségét, hogy a változó az $[a, b)$ intervallumba esik?
4. Mi a kapcsolat az eloszlásfüggvény deriváltja és a sűrűségfüggvény között?
5. Hogyan számítható ki a folytonos valószínűségi változó szórásnégyzete a Steiner-formula segítségével?

3 Nevezetes diszkrét eloszlások. Hipergeometrikus eloszlás.

3.1 A hipergeometrikus eloszlás definíciója

A hipergeometrikus eloszlás a visszatevés nélküli mintavételt írja le.

Kísérlet: Legyen adott N darab termék (vagy golyó), amelyek között M darab „selejtes” (vagy speciális tulajdonságú, pl. piros), a maradék $N - M$ pedig hibátlan (vagy fehér). Az N termék közül válasszunk ki véletlenszerűen, visszatevés nélkül n darabot.

Valószínűségi változó (ξ): Jelentse ξ a kiválasztott n termék között található selejtesek (speciálisak) számát. Ekkor ξ hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változó.

A ξ diszkrét valószínűségi változót hipergeometrikus eloszlásúnak nevezzük, ha eloszlása felírható:

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

A k lehetséges értékei azok az egész számok, amelyekre a binomiális együtthatók értelmezve vannak: $\max(0, n - (N - M)) \leq k \leq \min(n, M)$.

3.2 A várható érték és bizonyítása

Állítás: A hipergeometrikus eloszlás várható értéke:

$$M(\xi) = n \frac{M}{N}$$

Ez az eredmény intuitívan azt jelenti, hogy a mintában a selejtesek aránya átlagosan megegyezik a teljes sokaságban lévő selejtesek arányával (M/N).

Bizonyítás: A bizonyításhoz felhasználjuk a várható érték definícióját és a kombinatorikai azonosságokat.

1. Definíció felírása:

$$M(\xi) = \sum_k k \cdot P(\xi = k) = \sum_k k \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

(Az összegzés a lehetséges k értékekre fut, de $k = 0$ esetén a tag 0, így kezdetjük $k = 1$ -től).

2. Azonosság alkalmazása: Használjuk a $k \binom{M}{k} = M \binom{M-1}{k-1}$ azonosságot:

$$M(\xi) = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_k M \binom{M-1}{k-1} \binom{N-M}{n-k}$$

3. Konstans kiemelése: Emeljük ki az összeg elé az M tényezőt:

$$M(\xi) = \frac{M}{\binom{N}{n}} \sum_k \binom{M-1}{k-1} \binom{N-M}{n-k}$$

4. **Vandermonde-azonosság (vagy a "számláló összegzése"):** Vegyük észre, hogy az összegzésben szereplő tagok egy olyan "képzeletbeli" hipergeometrikus eloszlás számlálói, ahol a paraméterek $N - 1$, $M - 1$ és $n - 1$. Az összes lehetséges kiválasztás száma $N - 1$ elemből $n - 1$ elem kiválasztása, azaz $\binom{N-1}{n-1}$. Tehát:

$$\sum_k \binom{M-1}{k-1} \binom{(N-1)-(M-1)}{n-k} = \binom{N-1}{n-1}$$

Behelyettesítve:

$$M(\xi) = \frac{M}{\binom{N}{n}} \binom{N-1}{n-1}$$

5. **Egyszerűsítés:** Bontsuk ki a binomiális együtthatókat:

$$\frac{M \cdot \frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} = M \cdot \frac{(N-1)!}{(n-1)!} \cdot \frac{n!}{N!} = M \cdot \frac{n}{N}$$

$$M(\xi) = n \frac{M}{N}$$

3.3 A szórás és bizonyítása

Állítás: A hipergeometrikus eloszlás szórásnégyzete:

$$D^2(\xi) = n \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}$$

A szórás ennek a négyzetgyöke.

Bizonyítás: A levezetéshez a $D^2(\xi) = M(\xi^2) - (M(\xi))^2$ összefüggést használjuk. Mivel $M(\xi)$ -t már ismerjük, az $M(\xi^2)$ kiszámítása a cél. Ehhez célszerű a második faktoriális momentumot, azaz $M(\xi(\xi-1))$ -et kiszámolni.

1. $M(\xi(\xi-1))$ **kiszámítása:**

$$M(\xi(\xi-1)) = \sum_k k(k-1) \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Használjuk a $k(k-1)\binom{M}{k} = M(M-1)\binom{M-2}{k-2}$ azonosságot:

$$= \frac{M(M-1)}{\binom{N}{n}} \sum_k \binom{M-2}{k-2} \binom{N-M}{n-k}$$

Az összegzés (hasonlóan a várható értékhez) kiadja az $\binom{N-2}{n-2}$ értéket (ez $N-2$ elemből $n-2$ kiválasztása):

$$= \frac{M(M-1)}{\binom{N}{n}} \binom{N-2}{n-2}$$

Egyszerűsítve a faktoriálisokkal:

$$= M(M-1) \frac{n(n-1)}{N(N-1)}$$

2. $M(\xi^2)$ **kifejezése:** Mivel $M(\xi^2) = M(\xi(\xi - 1)) + M(\xi)$, ezért:

$$M(\xi^2) = \frac{n(n-1)M(M-1)}{N(N-1)} + n\frac{M}{N}$$

3. **A szórásnégyzet összeállítása:**

$$D^2(\xi) = \left[\frac{n(n-1)M(M-1)}{N(N-1)} + n\frac{M}{N} \right] - \left(n\frac{M}{N} \right)^2$$

Jelöljük $p = \frac{M}{N}$ -et. Ekkor $M = Np$. A kifejezés átrendezése (algebrai átalakítások után) a következő formát adja:

$$D^2(\xi) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$$

Behelyettesítve $p = M/N$ -et:

$$D^2(\xi) = n\frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N} \right) \frac{N-n}{N-1}$$

Megjegyzés: A kapott képlet nagyon hasonlít a binomiális eloszlás szórására ($np(1-p)$), de megjelenik benne egy korrekciós tényező ($\frac{N-n}{N-1}$), amely a visszatevés nélküli mintavétel miatt a véges sokaság hatását fejezi ki. Ha N tart a végtelenhez, ez a tényező 1-hez tart, és az eloszlás binomiális eloszláshoz közelít.

Önellenőrző kérdések

Válaszoljon az alábbi kérdésekre a fejezet anyaga alapján:

1. Mi a hipergeometrikus eloszlás definíciója és milyen mintavételt ír le?
2. Hogyan jelöljük és számítjuk ki a hipergeometrikus eloszlás várható értékét?
3. Milyen azonosságot használunk fel a várható érték bizonyításához?
4. Hogyan számítható ki a hipergeometrikus eloszlás szórásnégyzete?
5. Hogyan viszonyul a hipergeometrikus eloszlás a binomiális eloszláshoz, ha N tart a végtelenhez?

4 Nevezetes diszkrét eloszlások. Binomiális eloszlás.

A 13. Nevezetes diszkrét eloszlások közül a binomiális eloszlás, annak eloszlása, valamint a várható értékének és szórásának bizonyítása az alábbiakban olvasható a megadott források alapján.

4.1 A binomiális eloszlás definíciója és eloszlása

A binomiális eloszlás a visszatevéses mintavételt, vagy általánosabban a Bernoulli-féle kísérletsorozatot írja le.

Kísérlet: Tekintsünk egy kísérletet, amelyben egy A esemény („siker”) p valószínűséggel következik be ($0 < p < 1$). Ismételjük meg a kísérletet n -szer egymástól függetlenül. (A „kudarcc” valószínűsége $q = 1 - p$).

Valószínűségi változó (ξ): Jelölje ξ az A esemény bekövetkezéseinek számát az n kísérlet során. Ekkor ξ n -edrendű, p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó.

A ξ diszkrét valószínűségi változót binomiális eloszlásúnak nevezzük, ha eloszlása felírható:

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

ahol k lehetséges értékei: $0, 1, 2, \dots, n$.

4.2 A várható érték és bizonyítása

Állítás: A binomiális eloszlás várható értéke:

$$M(\xi) = np$$

Ez az eredmény azt mutatja, hogy ha egy esemény valószínűsége p , akkor n kísérletből átlagosan np -szer fog bekövetkezni.

Bizonyítás (Bernoulli-változók összegére visszavezetve): A leggyorsabb bizonyítás a várható érték linearitását (additivitását) használja fel, ahogy azt Fazekas és Slyusarchuk tárgyalja.

1. **Felbontás indikátor változókra:** Jelölje ξ_i az i -edik kísérlet eredményét (indikátor változó):

- $\xi_i = 1$, ha az i -edik kísérletben az A esemény bekövetkezett (siker).
- $\xi_i = 0$, ha nem következett be.

Ekkor a sikerek száma ezek összege:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$$

2. **Egy tag várható értéke:** A ξ_i Bernoulli-eloszlású. Várható értéke:

$$M(\xi_i) = 1 \cdot P(\xi_i = 1) + 0 \cdot P(\xi_i = 0) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$$

3. **Az összeg várható értéke:** A várható érték linearitása miatt az összeg várható értéke a várható értékek összege:

$$M(\xi) = M\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \sum_{i=1}^n M(\xi_i) = \sum_{i=1}^n p = np$$

(Megjegyzés: A tétel közvetlen számolással, a $\sum k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ összeg kiszámításával is bizonyítható, ahogy azt Tomács és Slyusarchuk részletezi a kombinatorikus azonosságok felhasználásával.)

4.3 A szórás és bizonyítása

Állítás: A binomiális eloszlás szórásnégyzete:

$$D^2(\xi) = np(1-p)$$

A szórás ennek négyzetgyöke: $\sqrt{np(1-p)}$.

Bizonyítás (A függetlenség felhasználásával): Mivel a kísérletek függetlenek, a ξ_i valószínűségi változók is függetlenek. Független változók esetén az összeg szórásnégyzete megegyezik a szórásnégyzetek összegével.

1. **Egy tag szórásnégyzete:** Számítsuk ki egyetlen ξ_i indikátorváltozó szórásnégyzetét a $D^2(\xi_i) = M(\xi_i^2) - (M(\xi_i))^2$ képlettel.
 - Mivel ξ_i csak 0 vagy 1 lehet, ezért $\xi_i^2 = \xi_i$.
 - Így $M(\xi_i^2) = M(\xi_i) = p$.
 - $M(\xi_i) = p$.

Behelyettesítve:

$$D^2(\xi_i) = p - p^2 = p(1-p)$$

2. **Az összeg szórásnégyzete:** Mivel $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i$ és a tagok függetlenek, a szórásnégyzetek összeadhatók:

$$D^2(\xi) = \sum_{i=1}^n D^2(\xi_i) = \sum_{i=1}^n p(1-p) = n \cdot p(1-p)$$

(Megjegyzés: A szórásnégyzet szintén levezethető közvetlen számolással a Steiner-formula $(M(\xi^2) - (M\xi)^2)$ és a faktoriális momentumok segítségével, ahogy azt a Tomács-féle jegyzet bemutatja.)

Önellenőrző kérdések

Válaszoljon az alábbi kérdésekre a fejezet anyaga alapján:

1. Hogyan definiáljuk a binomiális eloszlást és milyen kísérletet ír le?

2. Mi a binomiális eloszlás valószínűség-eloszlás függvénye?
3. Mennyi a binomiális eloszlás várható értéke?
4. Hogyan bizonyítható a várható érték indikátor változók segítségével?
5. Mennyi a binomiális eloszlás szórásnégyzete és hogyan vezethető le független változók esetén?

5 Nevezetes diszkrét eloszlások. Geometriai és negatív binomiális eloszlás

A 13. Nevezetes diszkrét eloszlások közül a geometriai eloszlást és a negatív binomiális eloszlást, azok várható értékét ($M\xi$) és szórását, valamint ezek bizonyításait az alábbiakban foglalom össze a megadott források alapján (elsősorban Fazekas István jegyzetére támaszkodva).

5.1 Geometriai eloszlás

Tekintsünk egy kísérletet, amelyben egy A esemény („siker”) p valószínűséggel következik be ($0 < p < 1$). Ismételjük a kísérletet független módon addig, amíg az A esemény először be nem következik. Jelölje ξ azt a véletlen változót, amely megadja, hogy hányadik kísérletre következett be először az A esemény. Ekkor ξ p paraméterű geometriai eloszlású.

A ξ diszkrét valószínűségi változót geometriai eloszlásúnak nevezzük, ha eloszlása felírható:

$$P(\xi = k) = p(1 - p)^{k-1}$$

ahol $k = 1, 2, \dots$.

Várható érték és bizonyítása

Állítás:

$$M\xi = \frac{1}{p}$$

Bizonyítás: A bizonyításhoz a hatványsorok deriválását használjuk fel. A várható érték definíciója szerint:

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p(1 - p)^{k-1}$$

Emeljük ki a p tényezőt. Vegyük észre, hogy a $k(1 - p)^{k-1}$ kifejezés a $(1 - p)^k$ függvény $(1 - p)$ szerinti deriváltjára emlékeztet (pontosabban negatív előjellel). Tudjuk, hogy a mértani sor összege (ha $|x| < 1$):

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}$$

Deriváljuk mindkét oldalt x szerint:

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1 - x)^2}$$

Helyettesítsük be az $x = 1 - p$ értéket (ami a konvergenciatartományban van, hiszen $0 < p < 1$):

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(1 - p)^{k-1} = \frac{1}{(1 - (1 - p))^2} = \frac{1}{p^2}$$

Ezt visszahelyettesítve a várható érték képletébe:

$$M\xi = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Szórás és bizonyítása

Állítás:

$$D^2\xi = \frac{1-p}{p^2}$$

(A szórás ennek négyzetgyöke). **Bizonyítás:** A szórást a $D^2\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2$ összefüggés (Steiner-formula) segítségével számoljuk. $M\xi = 1/p$ már ismert, így $M(\xi^2)$ -t kell meghatározni. Ehhez célszerű a második faktoriális momentumot, $M(\xi(\xi-1))$ -et kiszámolni, majd felhasználni, hogy $M(\xi^2) = M(\xi(\xi-1)) + M\xi$.

1. $M(\xi(\xi-1))$ **kiszámítása:**

$$M(\xi(\xi-1)) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)p(1-p)^{k-1} = p(1-p) \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2}$$

A mértani sor összegképletét kétszer deriválva x szerint:

$$\frac{d^2}{dx^2} \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{d}{dx} \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

A bal oldal deriváltja: $\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2}$. Helyettesítsünk $x = 1-p$ -t:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} = \frac{2}{(1-(1-p))^3} = \frac{2}{p^3}$$

Ezt beírva az eredeti egyenletbe:

$$M(\xi(\xi-1)) = p(1-p) \cdot \frac{2}{p^3} = \frac{2(1-p)}{p^2}$$

2. **A szórásnégyzet összeállítása:**

$$D^2\xi = M(\xi(\xi-1)) + M\xi - (M\xi)^2$$

$$D^2\xi = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}$$

Közös nevezőre hozva (p^2):

$$= \frac{2 - 2p + p - 1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

5.2 Negatív binomiális eloszlás

Tekintsük ugyanazt a kísérletsorozatot, mint a geometriai eloszlásnál. Jelölje ξ azt a véletlen változót, amely megadja, hogy hányadik kísérletre következett be az A esemény r -edszerre (r rögzített egész szám). Ekkor ξ r -edrendű, p paraméterű negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó.

A ξ diszkrét valószínűségi változót negatív binomiális eloszlásúnak nevezzük, ha eloszlása felírható:

$$P(\xi = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$$

ahol $k = r, r+1, \dots$

Lehetséges értékei: $r, r+1, r+2, \dots$ Az eloszlás (annak valószínűsége, hogy a k -adik kísérlet a döntő, azaz az r -edik siker, ami azt jelenti, hogy az első $k-1$ kísérletben pontosan $r-1$ siker volt):

$$P(\xi = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$$

ahol $k = r, r+1, \dots$

Fontos összefüggés: A negatív binomiális eloszlású változó felírható r darab független, p paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változó összegeként:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_r$$

ahol ξ_1 az első sikerig tartó idő, ξ_2 az első után a második sikerig tartó idő, és így tovább.

Várható érték és bizonyítása

Állítás:

$$M\xi = \frac{r}{p}$$

Bizonyítás: A bizonyításhoz a független geometriai változók összegére vonatkozó összefüggést és a várható érték linearitását használjuk.

- Írjuk fel ξ -t független geometriai változók összegeként:

$$\xi = \sum_{i=1}^r \xi_i$$

ahol minden ξ_i p paraméterű geometriai eloszlású.

- Tudjuk, hogy egy geometriai változó várható értéke $M\xi_i = 1/p$ (lásd fentebb).
- A várható érték additivitása (linearitása) miatt:

$$M\xi = M\left(\sum_{i=1}^r \xi_i\right) = \sum_{i=1}^r M\xi_i = \sum_{i=1}^r \frac{1}{p} = r \cdot \frac{1}{p} = \frac{r}{p}$$

Szórás és bizonyítása

Állítás:

$$D^2\xi = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Bizonyítás: A bizonyításhoz ismét az összegre bontást használjuk fel, valamint a szórás tulajdonságait független változók esetén.

- Legyen $\xi = \sum_{i=1}^r \xi_i$, ahol ξ_i -k független geometriai eloszlásúak.
- Tudjuk, hogy egy geometriai változó szórásnégyzete $D^2\xi_i = \frac{1-p}{p^2}$ (lásd fentebb).
- Független valószínűségi változók összegének szórásnégyzete a szórásnégyzetek összege (Biemaymé-azonosság):

$$D^2\xi = D^2\left(\sum_{i=1}^r \xi_i\right) = \sum_{i=1}^r D^2\xi_i = \sum_{i=1}^r \frac{1-p}{p^2} = r \cdot \frac{1-p}{p^2}$$

Önellenőrző kérdések

Válaszoljon az alábbi kérdésekre a fejezet anyaga alapján:

1. Hogyan definiáljuk a geometriai eloszlást?
2. Mennyi a geometriai eloszlás várható értéke és szórása?
3. Mi a kapcsolat a geometriai sor összege és a geometriai eloszlás várható értéke között a bizonyításban?
4. Hogyan definiáljuk a negatív binomiális eloszlást?
5. Hogyan vezethető vissza a negatív binomiális eloszlás geometriai eloszlások összegére?

sectionNevezetes diszkrét eloszlások. Poisson eloszlás

6 A Poisson-eloszlás

A Poisson-eloszlás gyakran lép fel ritka események leírásakor (például atomi bomlás, telefonhívások érkezése, sajtóhibák száma egy oldalon).

Definíció: A ξ valószínűségi változót λ paraméterű Poisson-eloszlásúnak nevezük ($\lambda > 0$), ha lehetséges értékei a nemnegatív egész számok ($k = 0, 1, 2, \dots$), és az eloszlása:

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

A valószínűségek összege 1, mivel a e^λ Taylor-sorfejtése alapján $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^\lambda$, így $e^{-\lambda} \cdot e^\lambda = 1$.

6.1 A várható érték (M) és bizonyítása

Állítás: A λ paraméterű Poisson-eloszlás várható értéke:

$$M\xi = \lambda$$

Bizonyítás: A várható érték definíciója szerint ($M\xi = \sum k \cdot p_k$):

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Mivel a $k = 0$ tag értéke 0, az összegzést kezdhetjük $k = 1$ -től:

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Egyszerűsítsük a törtet k -val, felhasználva, hogy $k! = k \cdot (k-1)!$:

$$M\xi = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

Emeljünk ki egy λ -t az összegből, hogy a hatványkitevő megegyezzen a faktoriálisban lévő számmal $(k-1)$:

$$M\xi = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

Vezessük be a $j = k - 1$ új indexet. Ha k 1-től tart végtelenig, akkor j 0-tól tart végtelenig:

$$M\xi = \lambda e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}}_{e^\lambda}$$

Mivel a szumma értéke e^λ :

$$M\xi = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^\lambda = \lambda$$

6.2 A szórás és bizonyítása

Állítás: A λ paraméterű Poisson-eloszlás szórásnégyzete (varianciája):

$$D^2\xi = \lambda$$

Ennek megfelelően a szórása: $\sigma = \sqrt{\lambda}$.

Bizonyítás: A szórásnégyzetet a $D^2\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2$ (Steiner-formula) segítségével számítjuk ki. Tudjuk, hogy $M\xi = \lambda$, így $(M\xi)^2 = \lambda^2$. A feladat az $M(\xi^2)$ meghatározása. Célszerű a k^2 kifejezést $k(k-1) + k$ alakban felírni.

1. A második momentum ($M(\xi^2)$) felírása:

$$M(\xi^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} (k(k-1) + k) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Bontsuk két részre az összeget:

$$M(\xi^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

A második tag éppen a várható érték ($M\xi = \lambda$), amit már bizonyítottunk.

2. **Az első tag kiszámítása:** A $k(k-1)$ szorzótényező miatt a $k=0$ és $k=1$ tagok nullák, így az összegzés $k=2$ -től indulhat. Egyszerűsítsünk $k(k-1)$ -gyel, tudva, hogy $k! = k(k-1)(k-2)!$:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} e^{-\lambda}$$

Emeljünk ki λ^2 -t:

$$\lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}$$

Vezessük be az $m = k - 2$ indexet. Az összeg így e^λ -t ad:

$$\lambda^2 e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!}}_{e^\lambda} = \lambda^2 e^{-\lambda} e^\lambda = \lambda^2$$

3. Összesítés:

$$M(\xi^2) = \lambda^2 + \lambda$$

$$D^2\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2 = (\lambda^2 + \lambda) - \lambda^2 = \lambda$$

6.3 Kapcsolat a binomiális és a Poisson-eloszlás között

A Poisson-eloszlás a binomiális eloszlás határeloszlása. Ezt az összefüggést Poisson-tételnek (vagy a ritka események törvényének) nevezik.

Tétel: Tekintsünk egy n -edrendű, p_n paraméterű binomiális eloszlás-sorozatot. Ha a kísérletek száma minden határon túl nő ($n \rightarrow \infty$), és a valószínűség tart a nullához ($p_n \rightarrow 0$) úgy, hogy a várható érték konstans marad (vagy tart egy konstanshoz), azaz $n \cdot p_n \rightarrow \lambda > 0$, akkor a binomiális eloszlás valószínűségei a λ paraméterű Poisson-eloszlás valószínűségeihez tartanak:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

minden rögzített k -ra.

Bizonyítás

A bizonyítás a binomiális eloszlás valószínűségének határérték-számításán alapul. A binomiális eloszlás képlete szerint annak valószínűsége, hogy az esemény pontosan k -szor következik be:

$$P(\xi_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}$$

A feltétel szerint $np_n \rightarrow \lambda$, ezért írhatjuk, hogy $p_n \approx \frac{\lambda}{n}$ (illetve a határértéknél ezt a helyettesítést alkalmazzuk). Helyettesítsük be a $p_n = \frac{\lambda}{n}$ kifejezést:

$$P(\xi_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

Bontsuk ki a binomiális együtthatót:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!}$$

Írjuk vissza ezt az egyenletbe:

$$P(\xi_n = k) = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

Csoportosítsuk át a tényezőket, hogy a határértéket könnyebben vizsgálhassuk. A $\lambda^k/k!$ részt emeljük ki, az n^k nevezőt pedig osszuk szét a számláló k darab tényezője alá:

$$P(\xi_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \underbrace{\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \dots \frac{n-k+1}{n}}_{k \text{ darab tényező}} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

Vizsgáljuk meg az egyes tényezők határértékét külön-külön:

- **Az első csoport:** Mivel k rögzített, a törtes tényezők mindegyike 1-hez tart:

$$\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1, \quad \dots, \quad \frac{n-k+1}{n} \rightarrow 1$$

Tehát ezek szorzata is 1-hez tart.

- **A hatvány:** A nevezetes határérték alapján:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$$

- **A maradék tag:** Mivel k rögzített, és $\lambda/n \rightarrow 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = (1 - 0)^{-k} = 1$$

A részeredményeket egyesítve megkapjuk a tételt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot 1 \cdot e^{-\lambda} \cdot 1 = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Ezzel a tételt bizonyítottuk.

Gyakorlati következmény: Ez az eredmény teszi lehetővé, hogy a binomiális eloszlást Poisson-eloszlással közelítsük olyan esetekben, amikor a kísérletek száma (n) nagy, és a valószínűség (p) kicsi (pl. $n \geq 50$ és $p \leq 0.1$ vagy $np \leq 10$). Ilyenkor a $\lambda = np$ választással a számolás jelentősen egyszerűsödik.

Önellenőrző kérdések

Válaszoljon az alábbi kérdésekre a fejezet anyaga alapján:

1. Mi a Poisson-eloszlás definíciója és milyen valószínűségi változót ír le?
2. Mennyi a λ paraméterű Poisson-eloszlás várható értéke?
3. Hogyan vezethető le a Poisson-eloszlás várható értéke?
4. Mennyi a Poisson-eloszlás szórása és milyen kapcsolatban van a várható értékkel?
5. Milyen feltételek mellett közelíthető a binomiális eloszlás Poisson-eloszlással?

7 Nevezetes folytonos eloszlások. Egyenletes eloszlás

7.1 Az egyenletes eloszlás definíciója

Egy folytonos ξ valószínűségi változót az $[a, b]$ intervallumon ($a < b$) egyenletes eloszlásúnak nevezünk, ha értékei az adott intervallumba esnek, és annak bármely részintervallumába esés valószínűsége arányos a részintervallum hosszával.

Sűrűségfüggvénye: Mivel a valószínűség az $[a, b]$ intervallumon belül egyenletes, a sűrűségfüggvény itt konstans, azon kívül pedig nulla:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases} \quad (1)$$

Ez a függvény teljesíti a sűrűségfüggvényekre vonatkozó feltételt, mivel a görbe alatti terület az $[a, b]$ intervallumon éppen 1 (a téglalap területe: $(b-a) \cdot \frac{1}{b-a} = 1$).

Eloszlásfüggvénye: Az eloszlásfüggvény ($F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$) integrálással adódik:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{ha } a < x \leq b \\ 1, & \text{ha } x > b \end{cases} \quad (2)$$

Az $[a, b]$ szakaszon az eloszlásfüggvény lineárisan növekszik 0-tól 1-ig.

7.2 A várható érték (M) és bizonyítása

Állítás: Az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlású ξ valószínűségi változó várható értéke az intervallum középpontja:

$$M\xi = \frac{a+b}{2} \quad (3)$$

Bizonyítás: A folytonos valószínűségi változó várható értékének definíciója: $M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$. Helyettesítsük be az egyenletes eloszlás sűrűségfüggvényét (amely csak $[a, b]$ -n nem nulla):

1. Az integrál felírása:

$$M\xi = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx$$

2. Konstans kiemelése és integrálás:

$$M\xi = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b$$

3. A határok behelyettesítése:

$$M\xi = \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) = \frac{1}{2(b-a)} (b^2 - a^2)$$

4. **Egyszerűsítés:** A számlálót tényezőkre bontjuk ($b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$):

$$M\xi = \frac{(b - a)(b + a)}{2(b - a)} = \frac{a + b}{2}$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

7.3 A szórás és bizonyítása

Állítás: A szórásnégyzet (variancia):

$$D^2\xi = \frac{(b - a)^2}{12} \quad (4)$$

A szórás (standard eltérés): $D\xi = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$.

Bizonyítás: A levezetéshez a $D^2\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2$ (Steiner-formula) összefüggést használjuk. Az $M\xi$ -t már ismerjük, így először a második momentumot ($M(\xi^2)$) kell kiszámítanunk.

1. **A második momentum ($M(\xi^2)$) kiszámítása:**

$$M(\xi^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx$$

Integrálás:

$$M(\xi^2) = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b = \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^3 - a^3}{3} \right)$$

A köbök különbségének szorzattá alakítása ($b^3 - a^3 = (b - a)(b^2 + ab + a^2)$):

$$M(\xi^2) = \frac{(b - a)(b^2 + ab + a^2)}{3(b - a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

2. **A szórásnégyzet felírása:** Alkalmazzuk a Steiner-formulát:

$$D^2\xi = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left(\frac{a + b}{2} \right)^2$$

3. **Közös nevezőre hozás és összevonás:**

$$\begin{aligned} D^2\xi &= \frac{4(b^2 + ab + a^2)}{12} - \frac{3(a^2 + 2ab + b^2)}{12} \\ D^2\xi &= \frac{4b^2 + 4ab + 4a^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12} \\ D^2\xi &= \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} \end{aligned}$$

4. **Teljes négyzet kialakítása:** A számláló éppen $(b - a)^2$, így:

$$D^2\xi = \frac{(b - a)^2}{12}$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

Önellenőrző kérdések

Válaszoljon az alábbi kérdésekre a fejezet anyaga alapján:

1. Mi a feltétele annak, hogy egy ξ valószínűségi változó egyenletes eloszlású legyen az $[a, b]$ intervallumon?
2. Hogyan írható fel az egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye, és mennyi az értéke az $[a, b]$ intervallumon kívül?
3. Mit jelent geometriailag, hogy az egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye alatt a terület 1?
4. Vezesse le az egyenletes eloszlás várható értékét! (Milyen értéket kapunk eredményül?)
5. Írja fel az egyenletes eloszlás szórásnégyzetének (varianciájának) képletét!

8 Nevezetes folytonos eloszlások. Exponenciális eloszlás

8.1 Az exponenciális eloszlás definíciója

Az exponenciális eloszlás gyakran használatos élettartamok, várakozási idők és ritka események közötti időközök modellezésére (pl. radioaktív bomlás, kiszolgálás ideje).

Definíció: A ξ valószínűségi változót λ paraméterű ($\lambda > 0$) exponenciális eloszlásúnak nevezzük, ha sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x \leq 0 \end{cases} \quad (5)$$

Eloszlásfüggvénye: Az eloszlásfüggvény az $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ összefüggés alapján:

- Ha $x \leq 0$, akkor $F(x) = 0$.

- Ha $x > 0$, akkor:

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \left[\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} \right]_0^x = -(e^{-\lambda x} - e^0) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Tehát:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x \leq 0 \end{cases} \quad (6)$$

Tulajdonság (Örökifjú tulajdonság): Az exponenciális eloszlás rendelkezik az úgynevezett „örökifjú” (vagy emlékezetnélküli) tulajdonsággal:

$$P(\xi < t + s \mid \xi \geq t) = P(\xi < s) \quad (t, s > 0) \quad (7)$$

Ez azt jelenti, hogy ha az esemény egy t ideig nem következett be, annak valószínűsége, hogy a következő s időintervallumban bekövetkezik, ugyanannyi, mint ha a folyamat az elejéről indult volna.

8.2 A várható érték (M) és bizonyítása

Állítás: A λ paraméterű exponenciális eloszlás várható értéke:

$$M\xi = \frac{1}{\lambda} \quad (8)$$

Bizonyítás: A várható érték definíciója szerint: $M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$. Mivel $f(x) = 0$, ha $x \leq 0$, az integrálást elég 0-tól végezni.

1. Az integrál felírása:

$$M\xi = \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx$$

2. **Parciális integrálás:** Legyen $u = x$ és $v' = \lambda e^{-\lambda x}$. Ekkor $u' = 1$ és $v = -e^{-\lambda x}$.

$$\int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = [-x e^{-\lambda x}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-\lambda x} dx$$

3. **A határértékek és a második integrál kiszámítása:**

- Az első tag: $\lim_{x \rightarrow \infty} (-x e^{-\lambda x}) - (-0 \cdot e^0) = 0 - 0 = 0$ (a L'Hospital-szabály miatt az exponenciális tag gyorsabban tart nullához, mint ahogy x a végtelenhez).

- A második tag: $\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^{\infty} = 0 - \left(\frac{1}{-\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda}$.

4. **Összegzés:**

$$M\xi = 0 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

8.3 A szórás és bizonyítása

Állítás: A szórásnégyzet (variancia):

$$D^2\xi = \frac{1}{\lambda^2} \quad (9)$$

A szórás: $D\xi = \frac{1}{\lambda}$.

Bizonyítás: A bizonyításhoz a $D^2\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2$ összefüggést (Steiner-formula) használjuk. Mivel $M\xi = 1/\lambda$, a feladat a második momentum, $M(\xi^2)$ kiszámítása.

1. **A második momentum ($M(\xi^2)$) felírása:**

$$M(\xi^2) = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx$$

2. **Parciális integrálás:** Legyen $u = x^2$ és $v' = \lambda e^{-\lambda x}$. Ekkor $u' = 2x$ és $v = -e^{-\lambda x}$.

$$M(\xi^2) = [-x^2 e^{-\lambda x}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 2x(-e^{-\lambda x}) dx$$

A határok behelyettesítésével az első tag 0 (L'Hospital-szabály miatt). A kifejezés így egyszerűsödik:

$$M(\xi^2) = 2 \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx$$

3. **Visszavezetés az első momentumra:** Vegyük észre, hogy az integrandusban szereplő $\int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx$ kifejezés majdnem megegyezik a várható érték kiszámításánál használt integrállal, csak hiányzik egy λ szorzó. Írjuk át az egyenletet:

$$M(\xi^2) = \frac{2}{\lambda} \underbrace{\int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx}_{M\xi}$$

Mivel $M\xi = 1/\lambda$:

$$M(\xi^2) = \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}$$

(Megjegyzés: A Fazekas-könyv általános rekurziós formulát ad a momentumokra: $M\xi^k = \frac{k}{\lambda} M\xi^{k-1}$. Ebből $k = 2$ esetén $M\xi^2 = \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda}$ szintén adódik).

4. A szórásnégyzet kiszámítása:

$$D^2\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Önellenőrző kérdések

Válaszoljon az alábbi kérdésekre a fejezet anyaga alapján:

1. Hogyan definiáljuk a λ paraméterű exponenciális eloszlás sűrűségfüggvényét?
2. Írja fel az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvényét pozitív x esetén!
3. Mit jelent az exponenciális eloszlás „örökifjú” (emlékezetnélküli) tulajdonsága?
4. Mennyi a λ paraméterű exponenciális eloszlás várható értéke?
5. Hogyan számítható ki az exponenciális eloszlás szórása a λ paraméter segítségével?

9 Nevezetes folytonos eloszlások. Normális és standard normális eloszlás

9.1 A standard normális eloszlás

1. Definíció A ξ valószínűségi változót standard normális eloszlásúnak nevezük, ha normális eloszlású $m = 0$ várható értékkel és $\sigma = 1$ szórással. Jelölése gyakran: $\xi \sim N(0, 1)$.

2. Sűrűségfüggvény ($f(x)$ vagy $\varphi(x)$) Képlete: A standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Ezt a függvényt gyakran Gauss-görbének vagy haranggörbének is nevezik.

Tulajdonságai:

- Szimmetria: A függvény páros, azaz $f(-x) = f(x)$, így a görbe szimmetrikus az y tengelyre (az $x = 0$ egyenesre).
- Alak: Harang alakú görbe, amelynek maximuma az $x = 0$ helyen van, értéke itt $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.
- Inflexiós pontok: A görbe inflexiós pontjai az $x = -1$ és $x = 1$ helyeken vannak (általános esetben $m \pm \sigma$).
- Határérték: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, azaz az x tengely az aszimptotája.

3. Eloszlásfüggvény ($\Phi(x)$) A standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét külön jelöléssel, $\Phi(x)$ -szel (vagy Φ -vel) szokás illetni. Definíció:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Ennek a függvénynek nincs zárt alakja (elemi függvényekkel nem fejezhető ki), ezért értékeit táblázatokban foglalják össze vagy numerikus módszerekkel közelítik.

Tulajdonságai:

- Szimmetria: A sűrűségfüggvény szimmetriája miatt az eloszlásfüggvényre igaz, hogy:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Ez a tulajdonság lehetővé teszi, hogy a táblázatok csak a pozitív x értékekre adják meg a valószínűségeket.

- Értékek: $\Phi(0) = 0,5$, mivel a haranggörbe alatti terület fele a negatív tartományra esik.

4. Várható érték és Szórás Várható érték ($M\xi$ vagy $E\xi$): A standard normális eloszlás várható értéke 0.

$$E\xi = 0$$

Bizonyítás: A várható érték definíciója szerint $E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$. Mivel az x páratlan függvény, az $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ pedig páros, szorzatuk páratlan. Szimmetrikus tartományon integrálva egy páratlan függvényt (feltéve, hogy az integrál létezik), az eredmény 0.

Szórásnégyzet ($D^2\xi$) és Szórás ($D\xi$): A standard normális eloszlás szórásnégyzete és szórása is 1.

$$D^2\xi = 1, \quad D\xi = 1$$

Bizonyítás: A szórásnégyzet definíciója $D^2\xi = M(\xi^2) - (E\xi)^2$. Mivel $E\xi = 0$, így a második momentumot kell kiszámítani: $M(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$. Parciális integrálással belátható, hogy ez az integrál 1-gyel egyenlő.

Magasabb momentumok: A páratlan rendű momentumok értéke 0. A páros rendű momentumok ($k = 2r$) esetén:

$$M(\xi^{2r}) = (2r - 1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2r - 1)$$

Például a negyedik momentum $M(\xi^4) = 3$.

9.2 Az általános normális eloszlás

A normális eloszlás (más néven Gauss-eloszlás) a valószínűségi számítás egyik legfontosabb eloszlása. Az alábbiakban összefoglalom a sűrűségfüggvényét, eloszlásfüggvényét, valamint a várható értékét és annak bizonyítását a megadott források alapján.

1. Definíció és Sűrűségfüggvény ($f(x)$) A ξ valószínűségi változót m várható értékű és σ szórású ($m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$) normális eloszlásúnak nevezzük, ha sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Jelölése: $\xi \sim N(m, \sigma^2)$.

Tulajdonságai:

- A függvény grafikonja a híres haranggörbe (Gauss-görbe).
- A görbe szimmetrikus az $x = m$ egyenesre.
- A függvénynek maximuma van az $x = m$ helyen, a maximum értéke $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$.
- Inflexió pontjai az $x = m - \sigma$ és $x = m + \sigma$ helyeken vannak.

Standard normális eloszlás: Ha $m = 0$ és $\sigma = 1$, akkor standard normális eloszlásról beszélünk. Ennek sűrűségfüggvényét gyakran $\varphi(x)$ -szel jelölik:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

2. Eloszlásfüggvény ($F(x)$) Mivel a normális eloszlás abszolút folytonos, eloszlásfüggvénye a sűrűségfüggvény integráljaként áll elő:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Ennek az integrálnak nincs zárt alakja (elemi függvényekkel nem fejezhető ki), ezért értékeit táblázatokban foglalják össze vagy numerikus módszerekkel közelítik. A standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét $\Phi(x)$ -szel jelölik:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Szimmetriája miatt érvényes rá a $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ összefüggés.

3. Várható érték és bizonyítása Állítás: Az m és σ paraméterű normális eloszlás várható értéke:

$$M(\xi) = m$$

Bizonyítás: A bizonyítást két lépésben végezzük: először a standard normális eloszlásra, majd az általános esetre a lineáris transzformáció segítségével.

1. Standard normális eloszlás ($\eta \sim N(0, 1)$) várható értéke: A várható érték definíciója szerint:

$$M(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Vegyük észre, hogy az integrandus (az integrálandó függvény) páratlan függvény, mivel:

$$(-x) \cdot \varphi(-x) = -x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = - \left(x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right)$$

Mivel az integrálás szimmetrikus tartományon ($-\infty$ -től $+\infty$ -ig) történik, és az integrál konvergens (létezik a várható érték), ezért az értéke szükségképpen 0.

$$M(\eta) = 0$$

2. Általános eset ($\xi \sim N(m, \sigma^2)$): Bármely normális eloszlású ξ valószínűségi változó előállítható a standard normális η lineáris transzformációjaként:

$$\xi = \sigma\eta + m$$

A várható érték linearitását (homogenitását és additivitását) kihasználva:

$$M(\xi) = M(\sigma\eta + m) = \sigma \cdot M(\eta) + m$$

Mivel az előző pontban beláttuk, hogy $M(\eta) = 0$:

$$M(\xi) = \sigma \cdot 0 + m = m$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

9.3 Kapcsolat a két eloszlás között (Standardizálás)

A standard normális eloszlás és az általános normális eloszlás közötti kapcsolat egy lineáris transzformáción alapul. A standard normális eloszlás a normális eloszlás azon speciális esete, ahol a paraméterek értéke $m = 0$ és $\sigma = 1$. A két eloszlás közötti kapcsolatot a következő tételek írják le a megadott források alapján:

1. Általános normális eloszlás előállítása standard normálisból Ha η egy standard normális eloszlású valószínűségi változó (azaz $\eta \sim N(0, 1)$), akkor tetszőleges $m \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$ esetén a

$$\xi = \sigma\eta + m$$

lineáris transzformációval kapott valószínűségi változó m és σ paraméterű normális eloszlású lesz (jelölése $\xi \sim N(m, \sigma^2)$).

2. Standardizálás (Visszavezetés standard normálisra) A fenti összefüggés megfordítása is igaz. Ha ξ egy m és σ paraméterű normális eloszlású valószínűségi változó, akkor a

$$\eta = \frac{\xi - m}{\sigma}$$

transzformációval kapott valószínűségi változó standard normális eloszlású lesz. Ezt az eljárást, amellyel egy tetszőleges eloszlású változót 0 várható értékűre és 1 szórásúra transzformálunk, standardizálásnak nevezzük.

Bizonyítás és az eloszlásfüggvények kapcsolata A kapcsolat az eloszlásfüggvények tulajdonságaival igazolható. Ha η standard normális eloszlású, és $\Phi(x)$ jelöli az eloszlásfüggvényét, akkor a $\xi = \sigma\eta + m$ változó eloszlásfüggvénye:

$$F_{\xi}(x) = P(\xi < x) = P(\sigma\eta + m < x) = P\left(\eta < \frac{x - m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x - m}{\sigma}\right)$$

Ez az összefüggés lehetővé teszi, hogy bármely normális eloszlás valószínűségeit a standard normális eloszlás táblázata segítségével számoljuk ki.

Paraméterek jelentése A transzformációban szereplő paraméterek a valószínűségi változó momentumai:

- m a várható érték ($E\xi = m$).
- σ^2 a szórásnégyzet ($D^2\xi = \sigma^2$), illetve σ a szórási.

Önellenőrző kérdések

Válaszoljon az alábbi kérdésekre a fejezet anyaga alapján:

1. Hogyan definiáljuk a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényét?
2. Mi a kapcsolat a standard normális eloszlásfüggvénye ($\Phi(x)$) x és $-x$ helyen felvett értékei között?
3. Mennyi a standard normális eloszlás várható értéke és szórása?
4. Hogyan írható fel az általános (m, σ) paraméterű normális eloszlás sűrűségfüggvénye?
5. Mi a standardizálás, és milyen képlettel számolható ki egy $N(m, \sigma^2)$ eloszlású változó esetén?

10 Bevezetés a valószínűségszámítás határeloszlástételeibe

A valószínűségszámítás során gyakran nem ismerjük egy valószínűségi változó pontos eloszlását, csak annak bizonyos paramétereit (mint például a várható értéket vagy a szórást). Ilyen esetekben egyenlőtlenségek segítségével tudunk becsléseket adni arra vonatkozóan, hogy a valószínűségi változó milyen eséllyel vesz fel bizonyos értékeket. Ezen becslések képezik az alapját a nagy számok törvényeinek is, amelyek a tapasztalati megfigyelések és az elméleti paraméterek közötti kapcsolatot írják le nagy mintaelemszám esetén. Az alábbiakban áttekintjük a legfontosabb egyenlőtlenségeket és konvergencia-típusokat, majd ezeket felhasználva bemutatjuk a nagy számok gyenge és erős törvényeit.

Markov-egyenlőtlenség

Ha a ξ egy véges várható értékkel rendelkező nemnegatív valószínűségi változó, és $c > 0$ (vagy $\delta > 0$) egy tetszőleges konstans, akkor a várható érték és a valószínűség között az alábbi kapcsolat áll fenn:

$$P(\xi \geq c) \leq \frac{E(\xi)}{c}$$

Diszkrét esetre:

Tegyük fel, hogy ξ diszkrét valószínűségi változó, melynek lehetséges értékei $0 \leq x_1 < x_2 < \dots$, és felvett valószínűségeik $p_i = P(\xi = x_i)$. A várható érték definíciója alapján az összegzés minden tagja nemnegatív, így ha az összegből elhagyjuk azokat a tagokat, ahol $x_i < c$, az összeg biztosan nem nő:

$$E(\xi) = \sum_i x_i p_i \geq \sum_{i: x_i \geq c} x_i p_i$$

Ezen a szűkített összegben belül minden $x_i \geq c$. Ha tehát minden x_i helyére a kisebb (vagy egyenlő) c értéket írjuk be, azzal tovább kicsinyítjük (vagy változatlanul hagyjuk) az összeget:

$$\sum_{i: x_i \geq c} x_i p_i \geq \sum_{i: x_i \geq c} c p_i = c \sum_{i: x_i \geq c} p_i$$

Mivel $\sum_{i: x_i \geq c} p_i$ pontosan annak a valószínűsége, hogy $\xi \geq c$, adódik a bizonyítandó állítás: $E(\xi) \geq c \cdot P(\xi \geq c)$.

Abszolút folytonos esetre:

Ha ξ abszolút folytonos, legyen a sűrűségfüggvénye $f(x)$. Mivel ξ nemnegatív, $x < 0$ esetén $f(x) = 0$ (egy nullmértékű halmaztól eltekintve). A várható érték ekkor integrállal fejezhető ki, és a tartományt a diszkrét esethez hasonlóan megbontva becsülhetjük:

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} x f(x) dx \geq \int_c^{\infty} x f(x) dx$$

Mivel ezen az integrálási tartományon $x \geq c$, az x -et c -vel helyettesítve tovább csökkentjük az integrál értékét:

$$\int_c^\infty x f(x) dx \geq \int_c^\infty c f(x) dx = c \int_c^\infty f(x) dx = c \cdot P(\xi \geq c)$$

Az egyenlőtlenséget leosztva megkapjuk a tételt.

Csebisev-egyenlőtlenség

Ha a ξ egy véges szórással rendelkező valószínűségi változó, akkor a várható értékétől (melyet jelöljünk $E(\xi)$ -vel) való eltérésre minden $\varepsilon > 0$ rögzített szám esetén fennáll:

$$P(|\xi - E(\xi)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D^2(\xi)}{\varepsilon^2}$$

A bizonyítás igen elegáns, ugyanis közvetlenül visszavezethető a Markov-egyenlőtlenségre. Vezessünk be egy új valószínűségi változót: $\eta := (\xi - E(\xi))^2$, valamint egy konstans: $c := \varepsilon^2$. Mivel η egy valós kifejezés négyzete, garantáltan nemnegatív valószínűségi változó, a c pedig pozitív szám. Így η -ra és c -re maradéktalanul teljesülnek a Markov-egyenlőtlenség feltételei:

$$P(\eta \geq c) \leq \frac{E(\eta)}{c}$$

Most helyettesítsük vissza az eredeti változókat az egyenlőtlenség mindkét oldalán:

- **A bal oldal:** $P(\eta \geq c) = P((\xi - E(\xi))^2 \geq \varepsilon^2)$. Mivel mindkét oldal nemnegatív, négyzetgyököt vonhatunk, ami ekvivalenssé teszi a $P(|\xi - E(\xi)| \geq \varepsilon)$ kifejezéssel.
- **A jobb oldal:** Az $E(\eta)$ nem más, mint $E((\xi - E(\xi))^2)$, ami pontosan a szórásnégyzet, azaz a $D^2(\xi)$ definíciója. A c helyére pedig ε^2 kerül.

Ezeket visszaírva a felírt Markov-egyenlőtlenségbe, rögtön meg is kapjuk a Csebisev-egyenlőtlenséget:

$$P(|\xi - E(\xi)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D^2(\xi)}{\varepsilon^2}$$

Sztochasztikus konvergencia

Azt mondjuk, hogy egy $\eta_1, \eta_2, \dots$ (vagy $\xi_1, \xi_2, \dots$) valószínűségi változókból álló sorozat sztochasztikusan konvergál az η (vagy ξ) valószínűségi változóhoz, ha tetszőlegesen választott $\varepsilon > 0$ esetén igaz, hogy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\eta_n - \eta| > \varepsilon) = 0$$

(vagy $\geq \varepsilon$ relációval megadva). Ennek a konvergenciatípusnak a jelölésére szokás a $P - \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = \eta$ formulát használni. A szakirodalom gyakran hivatkozik rá valószínűségben való (vagy mértékben való) konvergenciaként is.

Majdnem biztos konvergencia

Azt mondjuk, hogy az $\eta_1, \eta_2, \dots$ valószínűségi változó sorozat majdnem biztosan konvergál az η valószínűségi változóhoz, ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n(\omega) = \eta(\omega), \quad \text{ha } \omega \in \Omega \setminus N, \text{ ahol } P(N) = 0$$

Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy a sorozat – egy nulla valószínűségű N halmaz kivételével – pontonként konvergál az η -hoz. Ennek a konvergenciának a más elnevezése az 1 valószínűséggel való konvergencia, illetve (mértékelméleti nyelven) a majdnem mindenütti konvergencia.

A nagy számok gyenge törvénye (Csebisev-alak)

A nagy számok gyenge törvénye azt mondja ki, hogy a megfigyelések átlaga sztochasztikusan konvergál az elméleti átlaghoz.

Legyen az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőben $\xi_1, \xi_2, \dots$ szórással rendelkező, azonos eloszlású és páronként független valószínűségi változók sorozata. Legyen $m := E(\xi_i)$ és $\sigma := D(\xi_i)$ minden $i \in \mathbb{Z}^+$ esetén, valamint a részletösszeg $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Ekkor minden tetszőleges $\varepsilon > 0$ valós szám esetén:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

melyből következik, hogy az $\frac{S_n}{n}$ átlag sztochasztikusan konvergál az m várható értékhez.

Az azonos eloszlás miatt az m és σ definíciója korrekt. Az S_n/n valószínűségi változóra alkalmazzuk a Csebisev-egyenlőtlenséget:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D^2\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}$$

A várható érték és a szórás tulajdonságai alapján a következőket kapjuk:

$$E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(\xi_i) = \frac{1}{n}nm = m$$

$$D^2\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}D^2\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n D^2(\xi_i) = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

(Megjegyzés: A szórásnégyzetek összegzése a páronkénti függetlenség miatt tehető meg.)

Behelyettesítve ezeket az értékeket a Csebisev-egyenlőtlenségbe, adódik a tételben szereplő egyenlőtlenség:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} = 0$, ebből következik a sztochasztikus konvergencia.

A nagy számok Bernoulli-féle törvénye

Ez a törvény a nagy számok gyenge törvényének egy speciális esete (amikor $m = p$ és $\sigma^2 = pq$), és arra ad választ, hogy a relatív gyakoriság hogyan közelíti a valószínűséget.

Legyen adott egy Bernoulli-féle valószínűségi mező $\Omega = \{\omega_0, \omega_1\}$ eseménytérrel, $p := P(\{\omega_1\})$ és $q := 1 - p$. Ha a kísérletet n -szer függetlenül elvégezve az ω_1 esemény ϱ_n -szer következik be, akkor a ϱ_n/n relatív gyakoriságra minden $\varepsilon > 0$ esetén teljesül:

$$P\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

Legyen $\varepsilon > 0$ adott. A Csebisev-egyenlőtlenség feltételeit az $n\varepsilon$ és a ϱ_n teljesítik. Mivel a ϱ_n binomiális eloszlású, tudjuk, hogy $E(\varrho_n) = np$ és a szórásnégyzete $D^2(\varrho_n) = npq$. Ezt behelyettesítve a Csebisev-egyenlőtlenségbe:

$$0 \leq P(|\varrho_n - np| \geq n\varepsilon) = P\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{npq}{(n\varepsilon)^2} = \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

A $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{pq}{n\varepsilon^2} = 0$ határérték miatt a relatív gyakoriság sztochasztikusan konvergál a valószínűséghez. Fontos hangsúlyozni, hogy ez sztochasztikus konvergenciát jelent, tehát a két szám távolsága egy tetszőleges pozitív értéknél nagyobb nullához konvergáló valószínűséggel vehet fel.

A nagy számok erős törvényei

Míg a gyenge törvények "csak" sztochasztikus konvergenciát mondanak ki, az erős törvények az 1 valószínűséggel való (vagy majdnem biztos) konvergenciát állítják, ami azt jelenti, hogy a sorozat – egy nulla valószínűségű halmaz kivételével – pontonként konvergál.

Kolmogorov-féle erős törvény: Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ (teljesen) független, azonos eloszlású valószínűségi változók, és tegyük fel, hogy az abszolút értékük várható értéke véges ($E|\xi_i| < \infty$). Ekkor az átlag majdnem biztosan konvergál a várható értékhez:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = m \quad \text{majdnem biztosan.}$$

Etemadi tétele: Később kiderült, hogy nem szükséges a teljes függetlenség megkövetelése. Ha a $\xi_1, \xi_2, \dots$ valószínűségi változók csak páronként függetlenek, de azonos eloszlásúak és $E|\xi_i| < \infty$, az átlaguk akkor is majdnem biztosan tart az m várható értékhez.

Önellenőrző kérdések

Válaszoljon az alábbi kérdésekre a fejezet anyaga alapján:

1. Mi a szerepe a Markov- és Csebisev-egyenlőtlenségeknek a valószínűségszámításban, ha nem ismerjük egy valószínűségi változó pontos eloszlását?
2. Hogyan szól a Markov-egyenlőtlenség, és milyen feltételeknek kell teljesülnie a valószínűségi változóra a használatához?
3. Mit mond ki a Csebisev-egyenlőtlenség, és milyen extra információt igényel a Markov-egyenlőtlenséghez képest?
4. Magyarázza el saját szavaival a sztochasztikus konvergencia jelentését!
5. Mi a különbség a sztochasztikus konvergencia és a majdnem biztos konvergencia között?
6. Hogyan definiáljuk egy valószínűségi változó sorozat majdnem biztos konvergenciáját?
7. Állapítsa meg a nagy számok gyenge törvényét (Csebisev-alak) és a hozzá tartozó feltételeket!
8. Milyen matematikai egyenlőtlenséget használunk a nagy számok gyenge törvényének bizonyításához, és hogyan alkalmazzuk azt a részletösszegek átlagára?
9. Melyik korábban tanult eloszlásra épül a nagy számok Bernoulli-féle törvénye, és hogyan értelmezhető az eredménye a relatív gyakoriság és a valószínűség kapcsolatában?
10. Mi Etemadi tételének jelentősége a Kolmogorov-féle erős törvényhez képest a függetlenség szempontjából?

11 A központi határeloszlás-tétel

A centrális (vagy központi) határeloszlás-tétel a következőképpen szól: Ha az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőben $\xi_1, \xi_2, \dots$ nemnulla szórással rendelkező, azonos eloszlású és független valószínűségi változók, melyeknek várható értéke $m = E(\xi_1)$ és szórása $\sigma = D(\xi_1) > 0$, akkor az $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ részletösszegek standardizáltjára igaz, hogy az eloszlásfüggvénye a standard normális eloszlásfüggvényhez tart:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} < x\right) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

minden valós x esetén. Speciális esetként – Bernoulli-féle valószínűségi mezőn alkalmazva – ebből a tételből kapjuk meg a Moivre–Laplace-tételt is.

A tétel bizonyítását itt mellőzzük, mivel az a karakterisztikus függvények elméletére támaszkodik, ami túlmutat a jelen kurzus és jegyzet keretein.

A központi határeloszlás-tétel gyakorlati és elméleti haszna

A tétel legfőbb jelentősége, hogy rávilágít a normális eloszlás (Gauss-görbe) kitüntetett és központi szerepére a valószínűségszámításban. Segítségével megmagyarázható, hogy miért lehet bizonyos feltételek mellett (amikor sok független hatás összegződik) egy teljesen ismeretlen eloszlást normális eloszlással megközelíteni.

Ez az eredmény alapozza meg a matematikai statisztikát, ugyanis a statisztikai módszerek jelentős része eleve arra a feltevésre épül, hogy a megfigyelt mennyiségek normális eloszlásúak. A tétel elméletileg is alátámasztja azt a rengetegszer tapasztalt tényt, hogy a gyakorlatban vizsgált véletlen mennyiségek (pl. mérési hibák, biológiai jellemzők) igen gyakran megközelítőleg normális eloszlást követnek. Szintén ezen a tételen alapul a Moivre–Laplace-tétel is, amely lehetővé teszi, hogy nagy esetszám esetén a binomiális eloszlást egyszerűen és pontosan közelítsük normális eloszlással.

Szemléltetés számítógépes szimulációval

A tétel működése kiválóan szemléltethető a szimmetrikus véletlen bolyongás modellezésével.

Képzeljünk el egy kísérletet, ahol egy részecske lépked egy vonalon. Minden egyes lépésnél azonos, 0,5 valószínűséggel lép egy egységet előre (+1), vagy egy egységet hátra (−1). Ennek a lépésnek a várható értéke 0, a szórásnégyzete pedig 1. Ha n számú lépést tesz meg, az eddigi lépések összege adja meg a végpozícióját. A központi határeloszlás-tétel azt állítja, hogy ha az n lépésszám elég nagy, akkor ez a pozíció (megfelelően normálva) közelítőleg standard normális eloszlást fog követni.

Kísérletileg ezt úgy láthatjuk, ha az ábrázolást számítógéppel szimuláljuk:

- Engedjük a részecskét mondjuk $n = 100$ lépésig bolyongani, majd jegyezzük fel, hol "csapódik be" egy 100 lépésnél felhúzott képzeletbeli függőleges falba.
- Ezt a 100 lépéses kísérletet ismételjük meg nagyon sokszor (például 300-szor).

Ha megnézzük a falon lévő becsapódási pontok sűrűségét, azt fogjuk tapasztalni, hogy a sok hosszú bolyongás végpontjainak gyakoriságát jelző oszlopok vizuálisan is tökéletesen kidomborítják a normális eloszlásra jellemző haranggörbét. A becsapódások a 0 pozíció körül a legsűrűbbek, és onnan távolodva egyre ritkábbak lesznek.

Önellenőrző kérdések

Válaszoljon az alábbi kérdésekre a fejezet anyaga alapján:

1. Mit mond ki a központi határeloszlás-tétel, és miért van kiemelkedő szerepe a valószínűségszámításban, illetve a matematikai statisztikában?
2. Milyen feltételeknek kell teljesülnie a valószínűségi változókra ahhoz, hogy alkalmazható legyen rájuk a központi határeloszlás-tétel?
3. Mi a kapcsolat a központi határeloszlás-tétel és a Moivre–Laplace-tétel között?
4. Hogyan szemléltethető a központi határeloszlás-tétel működése a véletlen bolyongás számítógépes szimulációjával?

Tárgymutató

- abszolút folytonos valószínűségi változó, 44
- additivitás, 44
- alapértelmezett eloszlásfüggvény, 44
- aszimptota, 44
- balról folytonosság, 44
- Bernoulli-féle kísérletsorozat, 44
- Bernoulli-féle nagy számok törvénye, 44
- Bernoulli-változó, 44
- Biemaymé-azonosság, 44
- binomiális együttható, 44
- binomiális eloszlás, 44
 - szórásnégyzete, 44
 - várható értéke, 44
- Borel-mérhető függvény, 44
- Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség, 44
- centrális határeloszlás-tétel, 44
- Csebisev-egyenlőtlenség, 44
- diszkrét valószínűségi változó, 44
- eloszlás, 44
- eloszlásfüggvény, 44
 - határértékei, 44
 - monotonitása, 44
- emlékezetnélküli tulajdonság, 44
- erős törvény, 44
- Etemadi tétele, 44
- exponenciális eloszlás, 44
 - szórása, 44
 - sűrűségfüggvénye, 44
 - várható értéke, 44
- faktoriális momentum, 44
- folytonos valószínűségi változó, 44
- független valószínűségi változók, 44
- Gauss-eloszlás, 44
- Gauss-görbe, 44
- geometria eloszlás, 44
 - szórásnégyzete, 44
 - várható értéke, 44
- gyenge törvény, 44
- haranggörbe, 44
- határeloszlás-tétel, 44
- hipergeometrikus eloszlás, 44
 - szórásnégyzete, 44
 - várható értéke, 44
- indikátorváltozó, 44
- intervallumba esés valószínűsége, 44
- Kolmogorov-féle erős törvény, 44
- központi határeloszlás-tétel, 44
- lineáris transzformáció, 44
- majdnem biztos konvergencia, 44
- Markov-egyenlőtlenség, 44
- Moivre–Laplace-tétel, 44
- momentum, 44
- monoton nemcsökkenő függvény, 44
- második momentum, 44
- nagy számok törvénye, 44
- negatív binomiális eloszlás, 44
 - szórásnégyzete, 44
 - várható értéke, 44
- normális eloszlás, 44
 - standardizálása, 44
 - sűrűségfüggvénye, 44
 - várható értéke, 44
- parciális integrálás, 44
- Poisson-eloszlás, 44
 - szórásnégyzete, 44
 - várható értéke, 44
- Poisson-tétel, 44
- páronkénti függetlenség, 44
- relatív gyakoriság, 44
- ritka események törvénye, 44
- standard normális eloszlás, 44
 - eloszlásfüggvénye, 44
 - sűrűségfüggvénye, 44
- standardizálás, 44
- Steiner-formula, 44
- szimmetria, 44
- sztochasztikus konvergencia, 44
- szórás, 44

szórásnégyzet, 44
sűrűségfüggvény, 44
Taylor-sorfejtés, 44
valószínűségi mező, 44
valószínűségi változó, 44
Vandermonde-azonosság, 44
variancia, 44
visszatevés nélküli mintavétel, 44
visszatevésees mintavétel, 44
várható érték, 44
 linearitása, 44
általános normális eloszlás, 44
önellenőrző kérdések, 44
örökifjú tulajdonság, 44

Hivatkozások

- [1] Rényi Alfréd: *Valószínűségszámítás*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1968.
- [2] Denkinger Géza: *Valószínűségszámítási gyakorlatok*, Tankönyvkiadó, Budapest.

„Valószínűségszámítás II.” jegyzet, a felsőoktatás első (alapképzési) szintjének levelező tagozatos hallgatói számára, tudományterület: 01 Neveléstudomány, 014.09 Középfokú oktatás (Informatika), képzési program: „Informatika” / Összeállította: Kucsinka K. J. – Beregszász: II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Egyetem, 2025. – 30 old.

Az oktatási folyamatban történő felhasználását jóváhagyta a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Egyetem Matematika és Informatika Tanszéke
(2026. április 16 7. számú jegyzőkönyv).

Megjelentetésre javasolta a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Egyetem Oktatási és Módszertani Tanácsa
(2026. _____, ____ . számú jegyzőkönyv).

Elektronikus formában (PDF fájlformátumban) történő kiadásra javasolta a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Egyetem Tudományos Tanácsa
(2026. -----., ---. számú jegyzőkönyv).

Kiadásra előkészítette a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Egyetem Matematika és Informatika Tanszéke, valamint Kiadói Részlege.

A módszertani útmutató kidolgozója:

KUCSINKA Katalin – PhD, a fizikai és matematikai tudományok kandidátusa, docens, a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Egyetem Matematika és Informatika Tanszékének tanszékvezetője és docense

Szakmai lektorok:

Nagy György – fizika-matematika tudományok kandidátusa, a Természettudományok Tanszék vezetője, Tokaj-Hegyalja Egyetem

Daróci Ádám – PhD, a Matematika és Informatika Tanszék vezető tanára, II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola

A kiadásért felelnek:

SZTOJKA Mirosláv – PhD, a fizikai és matematikai tudományok kandidátusa, docens, a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Egyetem Matematika és Informatika Tanszékének tanszékvezetője és docense

DOBOS Sándor – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Egyetem Kiadói Részlegének vezetője

A segédlet tartalmáért kizárólag a módszertani útmutató kidolgozója felel.

Kiadó: II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Egyetem (cím: 90 202, Beregszász, Kossuth tér 6. E-mail: foiskola@kmf.uz.ua)

© Kucsinka Katalin, 2026

© A II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Egyetem Matematika és Informatika Tanszéke, 2026

Виробничо-практичне видання

« ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ II.»

Курс лекції

II. модуль

2026 р.

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики ЗУЕ ім. Ф.Ракоці II
(протокол № від «16» травня 2026 року)

Розглянуто та рекомендовано Навчально-методичною радою
ЗУЕ ім. Ференца Ракоці II
(протокол №5 25 травня 2026 року)

Рекомендовано до видання в електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради ЗУЕ імені Ференца Ракоці II
(протокол №5 27 травня 2026 року)

Підготовлено до видання в електронній формі (PDF) кафедрою математики та інформатики
спільно з Видавничим відділом ЗУЕ імені Ференца Ракоці II (50 с., угорською мовою)

Укладач:

Каталін Кучінка – кандидат фіз.-мат. наук, доцент, завідувач кафедри математики та інформатики ЗУЕ ім. Ференца Ракоці II

Рецензенти:

Дердь Надь– канд. фіз.-мат. наук, завідувач кафедри природничі науки Токайський університет

Адам Доровці– доктор філософії, доцент кафедри математики та інформатики ЗУЕ ім. Ференца Ракоці II

повідальні за випуск:

Мирослав СТОЙКА – завідувач кафедри математики та інформатики ЗУЕ імені Ференца Ракоці II, доцент, кандидат фізико-математичних наук

Олександр ДОБОШ – начальник Видавничого відділу ЗУЕ ім. Ф.Ракоці II

За зміст методичних вказівок відповідальність несе розробник.

Видавництво: ЗУЕ імені Ференца Ракоці II (адреса: пл. Кошута 6, м. Берегове, 90202.
Електронна пошта: foiskola@kmf.uz.ua) Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції Серія ДК ____ від ____ 2025 року

Розмір сторінок методичних вказівок: А4 (210x297мм)