ЗАКАРПАТСЬКИЙ УГОРСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ФЕРЕНЦА РАКОЦІ ІІ
II. RÁKÓCZI FERENC KÁRPÁTALJAI MAGYAR EGYETEM

Кафедра математики та інформатики
Matematika és Informatika Tanszék

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ / MATEMATIKAI ANALÍZIS

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ / MÓDSZERTANI ÚTMUTATÓ

до практичних занять / gyakorlati foglalkozásokhoz
та самостійної роботи / önálló munkához

(для студентів 2-го курсу спеціальності А4.04 Середня освіта (Математика))

ЧАСТИНА І / I. RÉSZ

Перший (бакалаврський) / Alapképzés (BSc)
(ступінь вищої освіти / felsőoktatás szintje)

А Освіта / A Oktatás
(галузь знань / képzési ág)

А4 СЕРЕДНЯ ОСВІТА / Középfokú oktatás
(спеціальність / szak)

СЕРЕДНЯ ОСВІТА (МАТЕМАТИКА) / Középfokú oktatás (Matematika)
(освітня програма / képzési program)

Берегове / Beregszász

2026 р. / 2026

Методичні вказівки підготовлено для студентів ІІ курсу денної та заочної форм навчання предметної спеціальності А4.04 «Середня освіта (Математика)» Закарпатського угорського університету імені Ференца Ракоці ІІ. Метою методичних вказівок є забезпечення практичних занять і самостійної роботи студентів у ІІІ семестрі з навчальної дисципліни «Математичний аналіз», а також розвиток їхнього математичного мислення, умінь розв'язувати задачі та здійснювати математичні доведення. Зміст видання зосереджено на практичному опрацюванні числових рядів, функціональних послідовностей і функціональних рядів, степеневих рядів, а також диференціального числення функцій багатьох змінних. Методичні вказівки містять тематику практичних занять, короткі теоретичні відомості, розв'язані приклади, завдання різного рівня складності, короткі розв'язання та контрольні запитання. Наприкінці документа наведено зразки завдань для модульного контролю, а також список науково-методичної літератури й цифрових ресурсів, що сприяють самостійній підготовці студентів.

Затверджено до використання у навчальному процесі
на засіданні кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського
університету ім. Ф. Ракоці ІІ
(протокол № 1 від «24» *серпня* 2026 року)

Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості вищої освіти
Закарпатського угорського університету ім. Ф. Ракоці ІІ
(протокол № 8 від « 22 » *вересня* 2026 року)

Рекомендовано до видання в електронній формі (PDF)
рішенням Вченої ради Закарпатського угорського університету ім. Ф. Ракоці ІІ
(протокол № 114 від «24» *вересня* 2026 року)

Підготовлено до видання в електронній формі (PDF) кафедрою математики та
інформатики спільно з Видавничим відділом Закарпатського угорського університету
імені Ференца Ракоці ІІ

Розробники методичних вказівок:
Еніке ЯКОБ – старший викладач кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського університету імені Ференца Ракоці ІІ, доктор філософії (PhD)

Рецензенти:
Dr. Sipos Dóra Fruzsina – старший викладач кафедри кількісних методів Інституту методології та цифровізації бізнесу факультету економіки Дебреценського університету, доктор філософії (PhD).
Вікторія *ДЗЯМКО* – доцент кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського університету імені Ференца Ракоці ІІ, кандидат педагогічних наук, доцент

За зміст методичних вказівок відповідальність несуть розробники.
Відповідальний за випуск:
Мирослав СТОЙКА – завідувач кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського університету *імені Ференца Ракоці ІІ, кандидат фізико-математичних наук, доцент*
Олександр ДОБОШ – начальник Видавничого відділу Закарпатського угорського університет ім. Ф. Ракоці ІІ

Видавництво: Закарпатський угорський університет імені Ференца Ракоці ІІ (адреса: пл. Кошута 6, м. Берегове, 90202. Електронна пошта: foiskola@kmf.org.ua)

© Еніке ЯКОБ, 2026
© Кафедра математики та інформатики Закарпатського угорського університету імені Ференца Ракоці II, 2026

A módszertani útmutató a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Egyetem nappali és levelező tagozatos, A4.04 Középfokú oktatás (Matematika) II. évfolyamos hallgatói számára készült. Az útmutató célja, hogy támogassa a „Matematikai analízis” című tantárgy III. félévi gyakorlati foglalkozásait és a hallgatók önálló munkáját, valamint fejlessze matematikai gondolkodásukat, problémamegoldó és bizonyítási készségüket. A kiadvány tartalma a numerikus sorok, a függvénysorozatok és függvénysorok, a hatványsorok, továbbá a többváltozós függvények differenciálszámításának gyakorlati feldolgozására összpontosít. Az útmutató tartalmazza a gyakorlati foglalkozások tematikáját, rövid elméleti összefoglalókat, kidolgozott mintapéldákat, különböző nehézségi szintű feladatsorokat, rövid megoldásokat és ellenőrző kérdéseket. A dokumentum végén modulzáró mintafeladatok, valamint a hallgatók önálló felkészülését segítő szakirodalmi és digitális források jegyzéke található.

A módszertani útmutató oktatási folyamatban történő felhasználását jóváhagyta
a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Egyetem Matematika és Informatika Tanszéke
(2026. augusztus 24., 1. számú jegyzőkönyv)

Megjelentetésre javasolta a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Egyetem
Felsőoktatási Minőségbiztosítási Tanácsa
(2026. szeptember 22., 8. számú jegyzőkönyv)

Elektronikus formában (PDF fájlformátumban) történő kiadásra javasolta
a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Egyetem Tudományos Tanácsa
(2026. szeptember 24., 114. számú jegyzőkönyv)

Kiadásra előkészítette a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Egyetem
Matematika és Informatika Tanszéke, valamint Kiadói Részlege.

A módszertani útmutató kidolgozói:
JAKAB Enikő –a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Egyetem Matematika és Informatika Tanszékének adjunktusa, Doktor (PhD) Matematika és Számítástudományok

Szakmai lektorok:
Dr. Sipos Dóra Fruzsina – Debreceni Egyetem, Gazdaságtudományi Kar, Módszertani és Üzleti Digitalizáció Intézet, Kvantitatív Módszertani nem önálló Tanszék, adjunktus
DZJÁMKO Viktória – a pedagógia tudományok kandidátusa, docens, a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Egyetem Matematika és Informatika Tanszékének docense
A segédlet tartalmáért kizárólag a módszertani útmutató kidolgozói viselnek felelősséget.

A kiadásért felel:
SZTOJKA Miroszláv – a fizikai és matematikai tudományok kandidátusa, docens, a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Egyetem Matematika és Informatika Tanszékének tanszékvezetője és docense
DOBOS Sándor – a II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Egyetem Kiadói Részlegének vezetője
Kiadó: II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Egyetem (cím: 90202, Beregszász, Kossuth tér 6. E-mail: foiskola@kmf.uz.ua)

© Jakab Enikő, 2026
© A RE Matematika és Informatika Tanszéke, 2026

ЗМІСТ

Вступ 7

1. Огляд навчальної дисципліни та основна інформація 11

1.1. Місце дисципліни в освітній програмі 11

1.2. Основні відомості та розподіл годин 12

1.3. Мета та завдання навчальної дисципліни 12

1.4. Загальні та фахові компетентності (ЗК, ФК) 13

1.5. Програмні результати навчання (ПРН) 15

2. Числові ряди 18

2.1. Числові ряди, частинні суми та критерій Коші 18

2.2. Ряди з додатними членами: ознаки порівняння та інтегральна ознака 23

2.3. Ознаки Д’Аламбера, Коші та Раабе 29

2.4. Знакозмінні ряди. Абсолютна та умовна збіжність 35

2.5. Нескінченні добутки 41

3. Функціональні та степеневі ряди 49

3.1. Функціональні послідовності та функціональні ряди 49

3.2. Степеневі ряди та радіус збіжності 55

3.3. Ряди Тейлора і Маклорена 59

4. Функції багатьох змінних 65

4.1. Границя, неперервність і частинні похідні функцій багатьох змінних 65

4.2. Повний диференціал, похідні вищих порядків і формула Тейлора 69

4.3. Екстремуми, неявні функції, дотична і нормаль 73

Зразки завдань модульного контролю та критерії оцінювання 79

Рекомендована література та онлайн-джерела 85

TARTALOM

Bevezetés 9

1. Tantárgyi áttekintés és alapinformációk 11

1.1. A tantárgy helye a képzési programban 11

1.2. Alapadatok és óraelosztás 12

1.3. Tantárgy célja és feladatai 12

1.4. Általános és szakmai kompetenciák (ÁK, SZK) 13

1.5. Tervezett tanulási eredmények (TTE) 15

2. Számsorok 18

2.1. Numerikus sorok, részletösszegek és a Cauchy-kritérium 18

2.2. Pozitív tagú sorok: összehasonlítás és integrálkritérium 23

2.3. D'Alembert-, Cauchy- és Raabe-kritérium 29

2.4. Váltakozó sorok. Abszolút és feltételes konvergencia 35

2.5. Végtelen szorzatok 41

3. Függvény- és hatványsorok 49

3.1. Függvénysorozatok és függvénysorok 49

3.2. Hatványsorok és konvergenciasugár 55

3.3. Taylor- és Maclaurin-sorok 59

4. Többváltozós függvények 65

4.1. Többváltozós határérték, folytonosság és parciális derivált 65

4.2. Teljes differenciál, magasabb deriváltak és Taylor-képlet 69

4.3. Szélsőértékek, implicit függvények, érintő és normális 73

Modulzáró mintafeladatok és értékelési útmutató 79

Ajánlott irodalom, online források 85

ВСТУП

Методичні вказівки створено для підтримки практичних занять та самостійної роботи студентів з дисципліни «Математичний аналіз». Насамперед вони розраховані на студентів ІІ курсу, які навчаються за спеціальністю «А4 Математика», проте водночас можуть бути корисними для всіх студентів, які бажають поглибити своє математичне мислення, навички розв’язування задач та культуру доведення.

Мета вказівок — слугувати практичним довідником для успішного засвоєння дисципліни. Документ містить типові приклади, тренувальні вправи та завдання, рекомендовані для самостійної роботи, які допомагають у застосуванні математичних понять і теорем під час розв’язування задач. Вказівки сприяють практичному опрацюванню, застосуванню та глибшому розумінню теоретичного матеріалу лекцій.

Завдання практичних занять полягає у розвитку в студентів навичок свідомого розв’язання проблем, математичного аргументування та доведення. Під час розв’язування задач студенти повинні розпізнати тип проблеми, вибрати відповідне визначення, теорему або метод дослідження, перевірити умови їх застосування, а потім точно сформулювати висновок. У підготовці вчителів особливо важливо, щоб майбутні вчителі математики не лише отримували правильний результат, але й могли логічно, зрозуміло та точною математичною мовою подати хід розв’язання.

Структура вказівок надає практико-орієнтовану підтримку в опрацюванні окремих тем. Розв’язані типові приклади демонструють найчастіше використовувані методи розв’язування, а завдання різного рівня складності дають можливість для диференційованого тренування. Короткі вказівки до розв’язання та контрольні запитання сприяють самоперевірці, а також свідомому застосуванню методів розв’язування задач.

Рекомендації щодо використання вказівок

Перед практичним заняттям рекомендується переглянути теоретичний матеріал, опрацьований на лекції, пригадати пов’язані з темою визначення та теореми, а також ознайомитися з умовами їх застосування. Під час заняття студенти за допомогою розв’язаних типових прикладів та призначених завдань можуть попрактикуватися у виборі та застосуванні відповідних методів розв’язування.

Завдання можуть опрацьовуватися в рамках індивідуальної роботи, роботи в парах або в малих групах. Під час спільного обговорення доцільно порівняти різні варіанти розв’язання, виявити причини типових помилок та сформулювати критерії, за якими можна вибрати той чи інший метод. Після практичного заняття розв’язування завдань,

рекомендованих для самостійної роботи, допомагає поглибити здобуті знання та розвинути обчислювальні навички.

Протягом семестру вказівки можна використовувати як збірник задач та як довідник для самостійної підготовки. Розв'язуючи завдання, студенти можуть підготуватися до практичних перевірок знань, модульних контрольних робіт та іспиту, водночас розвиваючи свою математичну комунікацію та здатність до самоперевірки.

Зв'язок з теоретичним матеріалом

Методичні вказівки тісно пов'язані з теоретичним матеріалом, що вивчається на лекціях з дисципліни. Практичні завдання дають можливість застосовувати визначення, теореми та критерії в конкретних проблемах, перевіряти їх умови, а також інтерпретувати отримані результати.

Під час використання вказівок особливу увагу слід звернути на те, щоб студенти не лише механічно застосовували формули та процедури, але й розуміли математичне підґрунтя обраного методу. Це сприяє встановленню зв'язку між теоретичними знаннями та практичним розв'язуванням задач, а також розвитку точного й послідовного математичного мислення, необхідного для подальшої викладацької роботи.

BEVEZETÉS

A módszertani útmutató a „Matematikai analízis” című tantárgy gyakorlati foglalkozásainak és a hallgatók önálló munkájának támogatására készült. Elsősorban a II. évfolyamos matematikatanár szakos hallgatóknak szól, ugyanakkor hasznos lehet minden olyan hallgató számára, aki szeretné elmélyíteni matematikai gondolkodását, feladatmegoldó készségét és bizonyítási kultúráját.

Az útmutató célja, hogy gyakorlati segédletként szolgáljon a tantárgy eredményes elsajátításához. A dokumentum olyan mintapéldákat, gyakorlófeladatokat és önálló munkára javasolt feladatokat tartalmaz, amelyek segítik a matematikai fogalmak és tételek feladatmegoldásban történő alkalmazását. Az útmutató az előadások elméleti anyagának gyakorlati feldolgozását, alkalmazását és mélyebb megértését támogatja.

A gyakorlati foglalkozások feladata, hogy fejlesszék a hallgatók tudatos problémamegoldását, matematikai érvelését és bizonyítási készségét. A feladatok megoldása során a hallgatóknak fel kell ismerniük a probléma típusát, ki kell választaniuk a megfelelő definíciót, tételt vagy vizsgálati módszert, ellenőrizniük kell annak alkalmazási feltételeit, majd pontosan meg kell fogalmazniuk a következtetést. A tanárképzésben különösen fontos, hogy a leendő matematikatanárok ne csupán helyes eredményre jussanak, hanem a megoldás gondolatmenetét is logikusan, érthetően és szabatos matematikai nyelven tudják bemutatni.

Az útmutató felépítése gyakorlatorientált támogatást nyújt az egyes témakörök feldolgozásához. A kidolgozott mintapéldák bemutatják a leggyakrabban alkalmazott megoldási eljárásokat, a különböző nehézségi szintű feladatok pedig lehetőséget adnak a differenciált gyakorlásra. A rövid megoldási útmutatók és az ellenőrző kérdések segítik az önellenőrzést, valamint a feladatmegoldási módszerek tudatos alkalmazását.

A jegyzet használatának javasolt módja

A gyakorlati foglalkozás előtt ajánlott áttekinteni az előadáson feldolgozott elméleti anyagot, feleleveníteni a témához kapcsolódó definíciókat és tételeket, valamint megismerni azok alkalmazási feltételeit. A foglalkozás során a hallgatók a kidolgozott mintapéldák és a kijelölt feladatok segítségével gyakorolhatják a megfelelő megoldási módszerek kiválasztását és alkalmazását.

A feladatok egyéni, páros vagy kiscsoportos munka keretében is feldolgozhatók. A közös megbeszélés során célszerű összehasonlítani a különböző megoldási lehetőségeket, feltárni a tipikus hibák okait, és megfogalmazni azokat a szempontokat, amelyek alapján az adott módszer kiválasztható. A gyakorlati foglalkozás után az önálló munkára javasolt feladatok megoldása segíti a megszerzett ismeretek elmélyítését és a számítási készség fejlesztését.

A jegyzet a félév során feladatgyűjteményként és az önálló felkészülést segítő útmutatóként is használható. A hallgatók a feladatok megoldásával felkészülhetnek a gyakorlati számonkérésekre, a modulzáró dolgozatokra és a vizsgára, miközben fejlődik matematikai kommunikációjuk és önellenőrzési képességük.

Kapcsolódás az elméleti anyaghoz

A módszertani útmutató szorosan kapcsolódik a tantárgy előadásain feldolgozott elméleti anyaghoz. A gyakorlati feladatok lehetőséget biztosítanak a definíciók, tételek és kritériumok konkrét problémákban történő alkalmazására, feltételeik ellenőrzésére, valamint a kapott eredmények értelmezésére.

Az útmutató használata során különös figyelmet kell fordítani arra, hogy a hallgatók ne csupán mechanikusan alkalmazzák a képleteket és eljárásokat, hanem értsék is a választott módszer matematikai alapját. Ez hozzájárul az elméleti ismeretek és a gyakorlati feladatmegoldás közötti kapcsolat kialakításához, valamint a későbbi tanári munkához szükséges pontos és következetes matematikai gondolkodás fejlődéséhez.

1. TANTÁRGYI ÁTTEKINTÉS ÉS ALAPINFORMÁCIÓK / ОГЛЯД ДИСЦИПЛІНИ ТА ЗАГАЛЬНА ІНФОРМАЦІЯ

1.1. A tantárgy helye a képzési programban / Місце дисципліни в освітній програмі

A Matematikai analízis az A4.04 Középfokú oktatás (Matematika) alapképzési program kötelező képzési komponense. A tantárgy a klasszikus analízis fogalomrendszerére épül, és elméleti, valamint gyakorlati alapot biztosít a későbbi matematikai, modellezési és módszertani tárgyakhoz. A 3. félévi tananyagrész a számsorok, a függvény- és hatványsorok, valamint a többváltozós függvények differenciálszámításának témaköreit foglalja össze.

A tárgy tanulása feltételezi az egyváltozós függvények, a határérték, a folytonosság és a differenciálszámítás alapjainak ismeretét. A gyakorlati foglalkozások az elméleti előadásokkal párhuzamosan haladnak, és a fogalmak alkalmazását, a számítási eljárások tudatos kiválasztását, valamint a bizonyítási gondolatmenetek felépítését támogatják.

«Математичний аналіз» є обов’язковим освітнім компонентом освітньої програми бакалаврату А4.04 Середня освіта (Математика). Дисципліна ґрунтується на понятійному апараті класичного аналізу та забезпечує теоретичну і практичну базу для подальших математичних, моделювальних і методичних дисциплін. Навчальний матеріал 3-го семестру охоплює теми числових рядів, функціональних і степеневих рядів, а також диференціального числення функцій багатьох змінних.

Вивчення дисципліни передбачає знання основ функцій однієї змінної, границі, неперервності та диференціального числення. Практичні заняття проводяться паралельно з теоретичними лекціями і сприяють застосуванню понять, свідомому вибору методів обчислення, а також побудові логіки доведення.

Előtanulmányi követelmények / Вимоги до попереднього навчання (пререквізити)

A tantárgy felvételéhez szükséges a korábbi félév „*Matematika analízis*” tantárgyának teljesítése. Az ott elsajátított ismeretek, az egyváltozós függvények, a határérték, a folytonosság, a differenciál- és integrálszámítás alapjai biztosítják azt az elméleti és gyakorlati alapot, amelyre a jelen félév tananyaga épül.

Для вивчення дисципліни необхідно успішно завершити вивчення дисципліни «Математичний аналіз» у попередньому семестрі. Засвоєні там знання, основи функцій однієї змінної, границі, неперервності, диференціального та інтегрального числення забезпечують ту теоретичну і практичну базу, на якій ґрунтується навчальний матеріал поточного семестру.

1.2. Alapadatok és óraelosztás / Основні дані та розподіл годин

Ez a szakasz áttekintést nyújt a tantárgy formális adatairól és az órák, valamint az önálló munka arányáról, amely segíti a hallgatókat a tanulási folyamat megtervezésében és a rendelkezésre álló idő optimális kihasználásában.

Цей розділ надає огляд формальних даних про дисципліну та співвідношення аудиторних годин і самостійної роботи, що допомагає студентам у плануванні процесу навчання та оптимальному використанні наявного часу.

<table>
<tr><td rowspan="2">Найменування показників /
A jellemzők megnevezése</td><td colspan="2">Характеристика навчальної дисципліни /
A tantárgy jellemzői</td></tr>
<tr><td>денна форма навчання /
nappali tagozat</td><td>заочна форма навчання/
levelező tagozat</td></tr>
<tr><td rowspan="15">Кількість кредитів /
Kreditszám – 5</td><td colspan="2">Обов’язкова / Kötelező</td></tr>
<tr><td colspan="2">Курс / Évfolyam:</td></tr>
<tr><td colspan="2">II</td></tr>
<tr><td colspan="2">Семестр / Félév</td></tr>
<tr><td colspan="2">3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Лекції / Előadások</td></tr>
<tr><td>24 год / 24 óra</td><td>10 год / 10 óra</td></tr>
<tr><td colspan="2">Практичні, семінарські/ Gyakorlati, szemináriumi</td></tr>
<tr><td>26 год/ 26 óra</td><td>6 год/ 6 óra</td></tr>
<tr><td colspan="2">Лабораторні / Laboratóriumi</td></tr>
<tr><td>0 год/ 0 óra</td><td>0 год/ 0 óra</td></tr>
<tr><td colspan="2">Самостійна робота / Önálló munka</td></tr>
<tr><td>100 год/ 100 óra</td><td>100 год/ 100 óra</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вид контролю: / Az ellenőrzés formája:
Іспит/Vizsga</td></tr>
</table>

1.3. Tantárgy célja és feladatai / Мета та завдання навчальної дисципліни

A tantárgy célja

Az *„Matematika analízis”* tantárgy célja, hogy rendszerezett ismereteket nyújtson a hallgatóknak az egy- és többváltozós függvények klasszikus analízisének alapjairól, valamint fejlessze elméleti és gyakorlati feladatmegoldó készségüket. A kurzus arra törekszik, hogy a hallgatók képesek legyenek a matematikai analízis fogalmait, tételeit és módszereit tudatosan alkalmazni különböző problémák megoldása során, továbbá megszerezzék a későbbi matematikai tanulmányaikhoz és szakmai tevékenységükhöz szükséges biztos alapokat.

Мета курсу: надання систематичних знань студентам з основ класичного аналізу для функцій однієї і декількох змінних, оволодіння студентами необхідними теоретичними і практичними знаннями даного курсу, який є фундаментом при вивченні навчальних дисциплін, що потребують знання дисципліни «*Математичний аналіз*», з метою високопрофесійної підготовки спеціалістів.

A tantárgy feladatai

A tantárgy feladatai a hallgatók elméleti tudásának elmélyítésére és gyakorlati készségeinek fejlesztésére irányulnak az alábbi területeken:

- A sorozat és a függvény fogalma, a határértékszámítás, a többváltozós függvények differenciál- és integrálszámítása, valamint a sorok belső fejlődési logikájának bemutatása.
- A matematikai analízis fogalmainak és tételeinek konkrét feladatok megoldásában történő alkalmazása.

Завдання дисципліни

Завдання дисципліни спрямовані на поглиблення теоретичних знань та розвиток практичних навичок студентів у таких сферах:

- простежити внутрішню логіку розвитку поняття послідовності, функції, теорії границь, теорії диференціального та інтегрального числення функцій багатьох змінних, теорії рядів;
- показати застосування понять та фактів математичного аналізу до розв'язання конкретних задач

1.4. Általános és szakmai kompetenciák (ÁK, SZK) / Загальні та фахові компетентності (ЗК, ФК)

Általános kompetenciák (ÁK) / Загальні компетентності (ЗК):

- Képes az absztrakt gondolkodásra, elemzésre és szintetizálásra, valamint a tudás gyakorlati helyzetekben történő alkalmazására.
  Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу, до застосування знань у практичних ситуаціях.
- Képes az államnyelven való szóbeli és írásbeli kommunikációra, továbbá idegen nyelvű szakmai kommunikációra.

Здатність спілкуватися державною мовою як усно, так і письмово, до комунікації іноземною мовою за предметом спеціальності.

A szakterülethez tartozó szakmai kompetenciák (SZK) / Фахові компетентності (ФК):

- Képesség a tudományos ismeretrendszer átültetésére a szakmai tevékenységbe és a tantárgyi síkra.

  Здатність перенесення системи наукових знань у професійну діяльність та в площину навчального предмету.
- Képes a problémák matematikai és szimbolikus formában történő megfogalmazására, elemzésük és megoldásuk egyszerűsítése érdekében.

  Здатність формулювати проблеми математично та в символічній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання.
- Képesség következtetések levonására és gondolatmenetek elkülönítésére a matematikai bizonyításokban az axiomatikus megközelítés alapján, valamint azok logikai sorrendbe állítására, beleértve az alapvető elméletek megkülönböztetését a részletektől és a technikai levezetésektől; képes formális bizonyítások felépítésére axiómákból és posztulátumokból, továbbá a valószínűsíthető érvek megkülönböztetésére a formálisan hibátlanoktól.

  Здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, у тому числі відрізняти основні ідеї від деталей і технічних викладок; здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганних.
- Képesség a matematikai struktúrák elemzésére, beleértve az alkalmazott matematikai megközelítések megalapozottságának és hatékonyságának értékelését.

  Здатність до аналізу математичних структур, у тому числі до оцінювання обґрунтованості й ефективності використовуваних математичних підходів.
- Képesség az általános- és középiskolai matematika tananyaghoz kapcsolódó, különböző nehézségi szintű feladatok megoldására, és azok megoldásának elmagyarázására a tanulóknak.

  Здатність розв'язувати задачі шкільного курсу математики базової і середньої школи різного рівня складності і пояснювати їх розв'язання учням.
- Képesség a tanulók oktatásának megszervezésére az oktatási intézmény nyelvi környezetének sajátosságait figyelembe véve.

Здатність забезпечувати здобуття учнями освіти з урахуванням особливостей мовного середовища в закладі освіти.

1.5. Tervezett tanulási eredmények (TTE) / Програмні результати навчання (ПРН)

- Képes a tanulókat államnyelven oktatni, valamint a tantárgyi és az integrált oktatás eszközeivel fejleszteni nyelvi-kommunikációs ismereteiket és készségeiket.

  Демонструє вміння навчати учнів державною мовою; формувати та розвивати їх мовно-комунікативні уміння і навички засобами навчального предмету та інтегрованого навчання.
- Megnevezi és elemzi a kompetenciaalapú megközelítésre épülő oktatási és nevelési folyamat célkitűzési, tervezési és szervezési módszereit, figyelembe véve a tanulók oktatási szükségleteit; osztályozza a tantárgy oktatásának formáit, módszereit és eszközeit az általános középfokú oktatási intézményekben.

  Називає і аналізує методи цілепокладання, планування та проектування процесів навчання і виховання учнів на основі компетентнісного підходу з урахуванням їх освітніх потреб; класифікує форми, методи і засоби навчання предмету в закладах загальної середньої освіти.
- Kiválasztja és alkalmazza a tanulók tantárgyi kompetenciáinak kialakítását szolgáló korszerű oktatási technológiákat és módszereket; kritikusan értékeli a tanulási eredményeket és a tanóra hatékonyságát.

  Здійснює добір і застосовує сучасні освітні технології та методики для формування предметних компетентностей учнів; критично оцінює результати їх навчання та ефективність уроку.
- Ismeri a szakterületnek megfelelő alap- és alkalmazott tudományok alapjait, valamint megfelelően használja a szakterület alapvető kategóriáit és fogalmait.

  Демонструє знання основ фундаментальних і прикладних наук (відповідно до предметної спеціальності), оперує базовими категоріями та поняттями предметної області спеціальності.
- Megalapozott szakmai véleményt fogalmaz meg a szakemberek és a szélesebb nyilvánosság számára államnyelven és idegen nyelven egyaránt.

  Генерує обґрунтовані думки в галузі професійних знань як для фахівців, так і для широкого загалу державною та іноземною мовами.
- Elemzi saját pedagógiai tevékenységét és annak eredményeit, továbbá objektív önértékelést végez, és szükség esetén korrigálja szakmai tevékenységét.

Аналізує власну педагогічну діяльність та її результати, здійснює об’єктивну самооцінку і самокорекцію своїх професійних якостей.

- Ismerteti a matematikai ismeretek és paradigmák történeti fejlődésének főbb szakaszait, valamint bemutatja a matematika korszerű irányzatait.

  Пояснює основні етапи історичного розвитку математичних знань і парадигм, описує сучасні тенденції в математиці.
- Elméleti szinten ismeri a fundamentális matematika alapjait, és alkalmazza az algebra, a matematikai analízis, az analitikus és differenciálgeometria, a topológia, a funkcionálanalízis, a differenciálegyenletek, a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika, valamint a komplex függvénytan módszereit a képzési program további tanulási eredményeinek elérése érdekében.

  Демонструє знання фундаментальної математики на рівні теоретичних основ і застосовує методи алгебри, математичного аналізу, аналітичної та диференціальної геометрії, топології, функціонального аналізу й теорії диференціальних рівнянь, теорії ймовірностей і математичної статистики, теорії функцій комплексної змінної для досягнення інших результатів освітньої програми.
- Ismeri a modus ponens – a logikai állítások következtetési szabálya – és a modus tollens – az indirekt bizonyítás – elvét, továbbá megfelelően alkalmazza a matematikai állítások feltételeit, megfogalmazásait, következtetéseit, bizonyításait és következményeit.

  Називає принципи modus ponens (правило виведення логічних висловлювань) та modus tollens (доведення від супротивного) і використовує умови, формулювання, висновки, доведення та наслідки математичних тверджень.
- Képes a formalizált formában megadott konkrét matematikai feladatok megoldására; alapvető átalakításokat végez különböző sajátos helyzetekben, valamint alkalmazza az információkezelés és a számítógépes statisztikai adatelemzés eszközeit.

  Демонструє навички розв’язувати конкретні математичні задачі, які сформульовано у формалізованому вигляді; виконує базові перетворення для специфічних ситуацій, застосовує навички управління інформацією і комп’ютерних засобів статистичного аналізу даних.
- Megnevezi és ismerteti a természeti és/vagy társadalmi folyamatok matematikai modellezésére szolgáló módszerek lényegét.

  Називає і описує суть методів математичного моделювання природничих та/або соціальних процесів.

- Képes a matematikai analízis, az algebra, a differenciál- és integrálegyenletek, valamint az optimalizálás tipikus feladatainak numerikus módszerekkel történő megoldására.

  Демонструє навички розв’язувати типові задачі математичного аналізу, алгебри, диференціальних та інтегральних рівнянь, оптимізації за допомогою чисельних методів.
- Megnevezi, osztályozza és elemzi az iskolai matematika különböző nehézségi szintű feladatait, és képes azok megoldására.

  Називає, класифікує і аналізує задачі шкільного курсу математики різних рівнів складності, демонструє здатність їх розв’язувати.
- Megkeresi a szükséges tudományos és műszaki információkat a szakirodalomban, a módszertani kiadványokban, az adatbázisokban és más információforrásokban, idegen nyelvű forrásokat is felhasználva.

  Знаходить потрібну науково-технічну інформацію у спеціальній науковій і методичній літературі, базах даних та інших джерелах інформації, зокрема іноземною мовою.
- Kiválasztja a feladatok megoldásához megfelelő matematikai módszereket, figyelembe veszi a matematikai állítások alkalmazási feltételeit, helyesen terjeszti ki a feltételeket és állításokat új objektumosztályokra, valamint elemzi és rendszerezi a kitűzött feladat és az ismert modellek közötti kapcsolatokat.

  Вибирає математичні методи розв’язування задач, враховує умови виконання математичних тверджень, коректно проектує умови та твердження на нові класи об’єктів, аналізує і упорядковує відповідності між поставленою задачею й відомими моделями.
- Kialakítja a tanulókban a matematikai modellezés alapjainak megértését és a modellezés feladatmegoldásban történő alkalmazására való készséget, ezáltal elősegítve matematikai kompetenciáik fejlődését.

  Генерує в учнів розуміння основ математичного моделювання, готовність до застосування моделювання для розв’язування задач, формування математичних компетентностей учнів.

2. SZÁMSOROK / ЧИСЛОВІ РЯДИ

A fejezet a számsorok vizsgálatához szükséges legfontosabb fogalmakat és konvergencia-kritériumokat dolgozza fel. Az elméleti rész minden témában csak a gyakorlati feladatok megoldásához nélkülözhetetlen definíciókat, tételeket és képleteket tartalmazza.

Розділ охоплює основні поняття та ознаки збіжності, необхідні для дослідження числових рядів. Теоретична частина кожної теми містить лише ті означення, теореми та формули, які потрібні для виконання практичних завдань.

2.1. Számsorok, részletösszegek és a Cauchy-kritérium / Числові ряди, частинні суми та критерій Коші

Rövid elméleti összefoglaló / Короткий теоретичний огляд

Számsor / Числовий ряд. Ha (a_n) valós vagy komplex számok sorozata, akkor az

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

kifejezést számsornak nevezzük. Az a_n a sor n-edik vagy általános tagja; n a futóindex.

Якщо (a_n) — послідовність дійсних або комплексних чисел, то наведений вираз називають числовим рядом. Число a_n є n-м, або загальним, членом ряду; n — індекс підсумовування.

Részletösszeg / Частинна сума. A sor első N tagjának összege:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Az (S_N) sorozatot a részletösszegek sorozatának nevezzük.

Послідовність (S_N) називають послідовністю частинних сум.

Konvergencia és divergencia / Збіжність і розбіжність. A $\sum a_n$ sor konvergens, ha létezik véges

$$S = \lim_{N\to\infty} S_N.$$

Ekkor S a sor összege, és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Ha a részletösszegek sorozatának nincs véges határértéke, a sor divergens.

Ряд $\sum a_n$ збігається, якщо існує наведена вище скінченна границя. Число S називають сумою ряду. Якщо скінченної границі немає, ряд розбігається.

Maradéktag / Залишок ряду. Konvergens sor esetén az N-edik részletösszeg hibája:

$$R_N = S - S_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n.$$

A konvergencia szükséges feltétele / Необхідна умова збіжності. Ha $\sum a_n$ konvergens, akkor

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

A megfordítás nem igaz: $a_n \to 0$ önmagában nem biztosítja a sor konvergenciáját.

Обернене твердження неправильне: умова $a_n \to 0$ сама по собі не гарантує збіжності ряду.

Cauchy-kritérium / Критерій Коші. A $\sum a_n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > m \geq N$ esetén

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon.$$

Vagyis a sor elegendően távoli, tetszőleges véges „darabjának” összege abszolút értékben tetszőlegesen kicsivé tehető.

Тобто модуль суми будь-якого скінченного відрізка достатньо віддалених членів ряду можна зробити як завгодно малим.

Geometriai sor / Геометричний ряд. Az

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\, q^{,n-1}$$

sor pontosan akkor konvergens, ha $|q| < 1$. Ekkor

$$S_N = a\frac{1-q^N}{1-q}, \qquad S = \frac{a}{1-q}.$$

Itt a az első tag, q a hányados.

Тут a — перший член, q — знаменник геометричної прогресії.

Kidolgozott mintapéldák / Розв’язані зразки

1. mintapélda / Зразок 1

Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ sort, és határozzuk meg az összegét. / Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ та знайти його суму.

Megoldás / Розв’язання.

Írjuk ki az első néhány tagot: / Запишемо кілька перших членів:

$$3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \cdots.$$

Minden tagot az előzőből $\frac{1}{2}$-del való szorzással kapunk, tehát a hányados $q = \frac{1}{2}$. Ez geometriai sor, első tagja $a = 3$. / Кожний наступний член одержуємо множенням попереднього на $\frac{1}{2}$, тому знаменник прогресії $q = \frac{1}{2}$. Отже, це геометричний ряд із першим членом $a = 3$.

A részletösszeg felírása / Запис частинної суми. Az első N tag összege / Сума перших N членів

$$S_N = 3\frac{1-(1/2)^N}{1-1/2} = 6(1-2^{-N}).$$

Mivel $|q| = \frac{1}{2} < 1$, ezért $\left(\frac{1}{2}\right)^N = 2^{-N} \to 0$. Оскільки $|q| = \frac{1}{2} < 1$, маємо $\left(\frac{1}{2}\right)^N = 2^{-N} \to 0$.

Így / Тому

$$S = \lim_{N\to\infty} S_N = 6\lim_{N\to\infty}(1-2^{-N}) = 6.$$

A sor konvergens, és az összege $S = 6$. / Ряд збігається, а його сума дорівнює $S = 6$.

2. mintapélda / Зразок 2

Határozzuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ sor összegét. / Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

Megoldás / Розв'язання.

Parciális törtekre bontás / Розклад на прості дроби. Az elemi törtek alakjának felírása / Запис розкладу на прості дроби. Keressük azokat az A és B együtthatókat, amelyekre / Знайдемо коефіцієнти A і B, для яких

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}.$$

Közös nevezőre hozva a jobb oldalt: / Зводимо праву частину до спільного знаменника:

$$\frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)} = \frac{(A+B)n+A}{n(n+1)}.$$

Az együtthatók meghatározása / Визначення коефіцієнтів. A számlálók minden n esetén csak akkor egyenlők, ha az n együtthatója 0, a konstans tag pedig 1. Ezért / Чисельники рівні для кожного n лише тоді, коли коефіцієнт при n дорівнює 0, а вільний член — 1. Отже,

$$\begin{cases} A+B=0, \\ A=1. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A=1, \quad B=-1.$$

Így valóban / Таким чином,

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

A részletösszeg felírása / Запис частинної суми. A kapott felbontást az első N tag összegében alkalmazzuk: / Застосовуємо отриманий розклад до суми перших N членів:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

A kifejtésben

$$S_N = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right),$$

így minden közbülső tag kiesik. / Після розкриття суми

$$S_N = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right),$$

усі проміжні доданки взаємно скорочуються.

Határérték képzése / Обчислення границі. Mivel $\frac{1}{(N+1)} \to 0$, ezért / Оскільки $\frac{1}{(N+1)} \to 0$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1.$$

A sor teleszkopikus, konvergens, és az összege $S = 1$. / Ряд є телескопічним і збіжним, його сума дорівнює $S = 1$. (Király B., *Analízis. Gyakorlat támogató jegyzet*, 2011, 87–88. o. alapján átdolgozva / адаптовано)

3. mintapélda / Зразок 3

Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ sor konvergenciáját. / Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$.

Megoldás / Розв'язання.

Ha egy számsor konvergens, akkor általános tagjának nullához kell tartania. Ezért kiszámítjuk: / Якщо числовий ряд збігається, його загальний член повинен прямувати до нуля. Тому обчислюємо:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0.$$

A kapott határérték 1, nem pedig 0. / Отримана границя дорівнює 1, а не 0.

A konvergencia szükséges feltétele nem teljesül, ezért a sor divergens. / Необхідна умова збіжності не виконується, тому ряд розбігається.

4. mintapélda / Зразок 4

Mutassuk meg a Cauchy-kritériummal, hogy a harmonikus sor divergens. / За допомогою критерію Коші довести, що гармонічний ряд розбігається.

Megoldás / Розв'язання.

A Cauchy-kritérium cáfolatához szükséges részösszeg kiválasztása / Вибір відрізка ряду для заперечення умови Коші. Legyen $m = N$ és $n = 2N$. Ekkor az $N+1$-ediktől a $2N$-edik tagig terjedő összegben pontosan N darab tag van. / Нехай $m = N$, $n = 2N$. Тоді сума від $(N+1)$-го до $2N$-го члена містить рівно N доданків.

Alsó becslés / Оцінка знизу. Minden $N < k \leq 2N$ esetén $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{(2N)}$, ezért / Для кожного $N < k \leq 2N$ маємо $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{(2N)}$, отже

$$\sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} \geq N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}.$$

A Cauchy-feltétel vizsgálata / Перевірка умови Коші. Válasszuk $\varepsilon = \frac{1}{3}$ értéket. A fenti összeg minden N mellett legalább $\frac{1}{2}$, tehát nem lehet ε-nál kisebb. / Візьмемо $\varepsilon = \frac{1}{3}$. Для кожного N отримана сума не менша за $\frac{1}{2}$, тому вона не може бути меншою за ε.

A Cauchy-kritérium nem teljesül, ezért a harmonikus sor divergens. / Критерій Коші не виконується, тому гармонічний ряд розбігається.

Gyakorlófeladatok / Тренувальні завдання

A1. Írjuk fel a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$ sor első négy tagját és S_4 részletösszegét. / Записати перші чотири члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$ і знайти S_4.

Válasz / Відповідь: $\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81}$; $S_4 = \frac{80}{81}$.

A2. Döntsük el a szükséges feltétel alapján, hogy konvergens lehet-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{2n+3}$ sor. / За необхідною умовою визначити, чи може збігатися ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{2n+3}$.

Válasz / Відповідь: Nem / Ні, mert / оскільки $a_n \to 2 \neq 0$; a sor divergens / ряд розбігається.

A3. Határozzuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ sor konvergenciáját és összegét. / Визначити збіжність і суму ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

Válasz / Відповідь: Konvergens / Збіжний; $S = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$.

A4. Adjuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ sor N-edik részletösszegét és összegét. / Знайти N-ту частинну суму та суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Válasz / Відповідь: $S_N = \frac{1}{2} - \frac{1}{N+2}$; $S = \frac{1}{2}$.

B1. Határozzuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)}$ sor összegét. / Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)}$.

Válasz / Відповідь: $\frac{2}{n(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$; $S = \frac{3}{2}$.

B2. Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{5n-1}$ sort. / Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{5n-1}$.

Válasz / Відповідь: Divergens, mert / Розбіжний оскільки $a_n \to \frac{3}{5} \neq 0$.

B3. Határozzuk meg, hány tagot kell összeadni a $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ geometriai sorból ahhoz, hogy a maradéktag abszolút értéke kisebb legyen 10^{-4}-nél. / Визначити, скільки членів геометричного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ треба взяти, щоб модуль залишку був меншим за 10^{-4}.

Válasz / Відповідь: $R_N = \frac{4}{3}\,4^{-N} < 10^{-4}$; a legkisebb / найменше $N = 7$.

B4. Döntsük el a részletösszegek alapján a $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ sor viselkedését. / За послідовністю частинних сум дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$.

Válasz / Відповідь: $S_{2k} = 0$, $S_{2k-1} = 1$; a sor divergens / ряд розбігається.

C1. Bizonyítsuk be, hogy véges számú tag megváltoztatása nem változtatja meg egy sor konvergens vagy divergens jellegét. / Довести, що зміна скінченної кількості членів ряду не впливає на його збіжність або розбіжність.

Válasz / Відповідь: Egy rögzített indextől kezdve a két sor megfelelő részletösszegei csak egy állandóban különböznek; ezért vagy mindkettőnek van véges határértéke, vagy egyiknek sincs. / Починаючи з деякого індексу, відповідні частинні суми двох рядів відрізняються лише на сталу, тому обидва ряди одночасно збігаються або розбігаються.

C2. A Cauchy-kritérium segítségével bizonyítsuk be, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ sor $|q| < 1$ esetén konvergens. / За критерієм Коші довести збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ за умови $|q| < 1$.

Válasz / Відповідь: $\left|\sum_{k=m+1}^{n} q^k\right| \le \frac{|q|^{m+1}}{1-|q|} \to 0$ ha / якщо $m \to \infty$.

Ellenőrző kérdések / Перевірте питання

1. Mi a különbség az (a_n) sorozat és a $\sum a_n$ sor között? / У чому різниця між послідовністю (a_n) і рядом $\sum a_n$?
2. Mit fejez ki a részletösszegek sorozata? / Що виражає послідовність частинних сум?
3. Miért csak szükséges, de nem elégséges feltétel az $a_n \to 0$ összefüggés? / Чому умова $a_n \to 0$ є необхідною, але не достатньою?
4. Fogalmazzuk meg saját szavainkkal a Cauchy-kritériumot. / Сформулюйте критерій Коші власними словами.
5. Milyen szerkezeti jel alapján ismerhető fel egy teleszkopikus sor? / За якою структурною ознакою можна розпізнати телескопічний ряд?
6. Mi a geometriai sor konvergenciájának feltétele, és hogyan számítjuk ki az összegét? / Яка умова збіжності геометричного ряду і як обчислюють його суму?

2.2. Pozitív tagú sorok: összehasonlítás és integrálkritérium / Ряди з додатними членами: ознаки порівняння та інтегральна ознака

A hallgatók minden vizsgálat előtt ellenőrizzék a tagok pozitivitását. Racionális kifejezéseknél a számláló és a nevező legmagasabb fokú tagjai jelzik a természetes összehasonlító p-sort. Az integrálkritérium alkalmazásakor a pozitivitás mellett a folytonosságot és a monoton csökkenést is rögzíteni kell.

Перед застосуванням ознаки слід перевірити додатність членів. Для раціональних виразів старші степені чисельника і знаменника підказують відповідний p-ряд. Застосовуючи інтегральну ознаку, необхідно окремо зазначити додатність, неперервність і монотонне спадання функції.

Rövid elméleti összefoglaló / Короткий теоретичний огляд

Pozitív tagú sor / Ряд з додатними членами. Olyan sor, amelyre $a_n \geq 0$ minden elegendően nagy n esetén. A véges számú kezdeti tag nem befolyásolja a konvergenciát. / Ряд, для якого $a_n \geq 0$ при всіх достатньо великих n. Скінченна кількість початкових членів не впливає на збіжність.

p-sor / p-ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{konvergens / збігається}, & p > 1, \\ \text{divergens / розбігається}, & p \leq 1. \end{cases}$$

Közvetlen összehasonlítás / Пряма ознака порівняння. Tegyük fel, hogy $0 \leq a_n \leq b_n$ minden elegendően nagy n-re.

- Ha $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ is konvergens. / Якщо $\sum b_n$ збігається, то $\sum a_n$ також збігається.
- Ha $0 \leq b_n \leq a_n$ és $\sum b_n$ divergens, akkor $\sum a_n$ is divergens. / Якщо $0 \leq b_n \leq a_n$ і $\sum b_n$ розбігається, то $\sum a_n$ також розбігається.

Határértékes összehasonlítás / Гранична ознака порівняння. Ha $a_n > 0$, $b_n > 0$ és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c, \qquad 0 < c < \infty,$$

akkor $\sum a_n$ és $\sum b_n$ egyszerre konvergens vagy egyszerre divergens. / Тоді ряди $\sum a_n$ і $\sum b_n$ одночасно збігаються або одночасно розбігаються.

Cauchy-féle integrálkritérium / Інтегральна ознака Коші. Legyen f pozitív, folytonos és monoton csökkenő az : $[N, \infty)$ intervallumon, továbbá $a_n = f(n)$. Ekkor

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \; sor \quad \text{és} \quad \int_N^{\infty} f\,(x)\,dx$$

improprius integral egyszerre konvergens vagy egyszerre divergens. / Якщо f додатна, неперервна, монотонно спадна і $a_n = f(n)$, то ряд та відповідний невласний інтеграл збігаються або розбігаються одночасно.

A maradék becslésére csökkenő f esetén használható:

$$\int_{N+1}^{\infty} f\,(x)\,dx \leq R_N \leq \int_{N}^{\infty} f\,(x)\,dx.$$

Для оцінки залишку при спадній f можна використати наведені нерівності.

Kidolgozott mintapéldák / Розв'язані зразки

1. mintapélda / Зразок 1

Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3}$ sort. / Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3}$.

Megoldás / Розв'язання.

Összehasonlító sor választása / Вибір ряду для порівняння. A nevezőben n^2 a meghatározó tag, ezért a konvergens $\sum \frac{1}{n^2}$ p-sorral hasonlítunk. / У знаменнику визначальним є член n^2, тому порівнюємо з p-рядом $\sum \frac{1}{n^2}$, який збігається.

A megfelelő egyenlőtlenség felírása / Запис відповідної нерівності. Minden $n \geq 1$ esetén / Для кожного $n \geq 1$

$$0 < \frac{1}{n^2+3} < \frac{1}{n^2}.$$

A kritérium alkalmazása / Застосування ознаки. Mivel $0 < a_n < \frac{1}{n^2}$, és a nagyobb tagú $\sum \frac{1}{n^2}$ sor konvergens, a közvetlen összehasonlítás szerint az eredeti sor is konvergens. / Оскільки $0 < a_n < \frac{1}{n^2}$а ряд із більшими членами $\sum \frac{1}{n^2}$ збігається, за прямою ознакою порівняння даний ряд також збігається.

A sor konvergens. / Ряд збігається. (OpenStax, *Calculus Volume 2*, 5.4 alapján átdolgozva / адаптовано.)

2. mintapélda / Зразок 2

Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+2}$ sort. / Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+2}$.

Megoldás / Розв'язання.

A számláló foka 1, a nevezőé 3, ezért a_n nagyságrendje $\frac{1}{n^2}$. Válasszuk $b_n = \frac{1}{n^2}$-et. / Степінь чисельника дорівнює 1, а знаменника — 3, тому a_n має порядок $\frac{1}{n^2}$. Виберемо $b_n = \frac{1}{n^2}$.

Kiszámítjuk az $\frac{a_n}{b_n}$ hányados határértékét: / Обчислюємо границю відношення $\frac{a_n}{b_n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n+1}{n^3+2}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+n^2}{n^3+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n^3}}=3.$$

Az utolsó alakot úgy kaptuk, hogy a számlálót és a nevezőt n^3-tel osztottuk. Így jól látható, hogy a kisebb rendű tagok eltűnnek a határértékben. / Останній вираз одержано діленням чисельника і знаменника на n^3. Тепер видно, що члени нижчого порядку не впливають на границю.

A kapott határérték 3, tehát pozitív és véges. Emiatt $\sum a_n$ és $\sum b_n$ egyszerre konvergens vagy divergens. Mivel $\sum\frac{1}{n^2}$ konvergens, az eredeti sor is konvergens. / Отримана границя дорівнює 3, тобто є додатною і скінченною. Тому ряди $\sum a_n$ і $\sum b_n$ мають однаковий характер збіжності. Оскільки $\sum\frac{1}{n^2}$ збігається, даний ряд також збігається.

A vizsgált sor konvergens. / Досліджуваний ряд збігається.

3. mintapélda / Зразок 3

Vizsgáljuk meg integrálkritériummal a következő sor konvergenciáját: / Дослідити збіжність ряду за допомогою інтегральної ознаки: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

Megoldás / Розв'язання.

Legyen $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{lnx}}$. Ez a függvény $x\geq 2$ esetén pozitív és folytonos. A monotonitást deriválással ellenőrizzük: / Нехай $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{lnx}}$. При $x\geq 2$ ця функція додатна й неперервна. Монотонність перевіримо за допомогою похідної:

$$f'(x)=-\frac{2\ln x+1}{2x^2\sqrt{(\ln x)^3}}<0\qquad(x\geq 2).$$

Tehát f monoton csökkenő, így az integrálkritérium minden feltétele teljesül. / Отже, f монотонно спадає, тому всі умови інтегральної ознаки виконано.

A megfelelő improprius integrál kiszámítása / Обчислення відповідного невласного інтеграла. Először véges felső határral számolunk. A $u=\ln x$, $du=\frac{dx}{x}$ helyettesítéssel / Спочатку обчислюємо інтеграл зі скінченною верхньою межею. Після підстановки $u=\ln x$, $du=\frac{dx}{x}$ одержуємо

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}=\lim_{A\to\infty}\int_2^{A}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}=\lim_{A\to\infty}\int_2^{A}\frac{dlnx}{\sqrt{\ln x}}=\lim_{A\to\infty}2\sqrt{lnx}\Big|_2^A=$$

$$=2\lim_{A\to\infty}\left(\sqrt{lnA}-\sqrt{ln2}\right)=\infty$$

vagy $\lim_{A\to\infty}\int_{\ln 2}^{\ln A} u^{-1/2}\,du$. Az integrál primitív függvénye $2\sqrt{u}$, így / Первісною функцією є $2\sqrt{u}$, тому $\lim_{A\to\infty} 2\left(\sqrt{\ln A}-\sqrt{\ln 2}\right)=\infty$.

Az integrál értéke végtelenhez tart, tehát az improprius integrál divergens. / Значення інтеграла прямує до нескінченності, отже невласний інтеграл розбігається.

A megfelelő improprius integrál divergens, ezért az integrálkritérium alapján a számsor is divergens. / Відповідний невласний інтеграл розбігається, тому за інтегральною ознакою числовий ряд також розбігається. *(Станішевський С. О., Мордовцев С. М., Якунін А. В., Бистрова Л. О., Ситникова В. С. Ряди та їх застосування. Харків: ХНАМГ, 2009. С. 14, átdolgozva / адаптовано.)*

4. mintapélda / Зразок 4

Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$ sort, és becsüljük meg az R_N maradékot. / Дослідити ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$ та оцінити залишок R_N.

Megoldás / Розв'язання.

Az integrálkritérium feltételei / Умови інтегральної ознаки. Az $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^2}$ függvény $x\geq 2$ esetén pozitív és folytonos. Deriváltja / Функція $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^2}$ при $x\geq 2$ є додатною й неперервною. Її похідна

$$f'(x)=-\frac{\ln x+2}{x^2(\ln x)^3}<0 \qquad (x\geq 2),$$

ezért f monoton csökkenő. / тому f монотонно спадає.

A $u=\ln x$, $du=\frac{dx}{x}$ helyettesítést alkalmazva / Застосувавши підстановку $u=\ln x$, $du=\frac{dx}{x}$, маємо

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2}=\lim_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^T=\lim_{T\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln T}+\frac{1}{\ln 2}\right)=\frac{1}{\ln 2}<\infty.$$

Az integrál véges, ezért a sor konvergens. / Інтеграл має скінченне значення, тому ряд збігається.

A maradék becslése / Оцінка залишку. Legyen $R_N=S-S_N=\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n$. Csökkenő f esetén az integrálkritérium maradékbecslése szerint / Нехай $R_N=S-S_N=\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n$. Для спадної функції f за оцінкою залишку в інтегральній ознаці

$$\frac{1}{\ln(N+1)}\leq R_N\leq\frac{1}{\ln N}.$$

A sor konvergens, és az N-edik részletösszeg hibája a fenti két érték közé esik. / Ряд збігається, а похибка наближення його суми N-ю частинною сумою міститься між наведеними двома значеннями.

Gyakorlófeladatok / Тренувальні завдання

A1. Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ sort közvetlen összehasonlítással. / Дослідити ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ прямим порівнянням. (Таційй Р. М., Трусевич О. *Ряди*, 2024, с. 20, átdolgozva / адаптовано.)

Válasz / Відповідь: Konvergens / Збіжний, mert / оскільки $0 < \frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n}$, és / а $\sum \frac{1}{2^n}$ konvergens geometriai sor / збіжний геометричний ряд.

A2. Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ sort. / Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Válasz / Відповідь: Divergens p-sor / Розбіжний p-ряд, $p = \frac{1}{2} \leq 1$.

A3. Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^4+2}$ sort. / Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^4+2}$.

Válasz / Відповідь: Konvergens / Збіжний; $0 < a_n < \frac{5}{n^4}$.

A4. Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ sort. / Дослідити ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$.

Válasz / Відповідь: Divergens / Розбіжний az integrálkritérium szerint / за інтегральною ознакою.

B1. Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{n^4+3n}$ sort határértékes összehasonlítással. / Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{n^4+3n}$ граничним порівнянням.

Válasz / Відповідь: $b_n = \frac{1}{n^2}$; $\frac{a_n}{b_n} \to 2$; konvergens / збіжний.

B2. Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n^2-1}$ sort. / Дослідити ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n^2-1}$.

Válasz / Відповідь: $a_n = \frac{1}{n-1}$; harmonikus típusú, divergens / гармонічного типу, розбіжний.

B3. Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$ sort. / Дослідити ряд $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$.

Válasz / Відповідь: Konvergens, mert / Збіжний, оскільки $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^3} = \frac{1}{2(ln3)^2} < \infty$.

B4. Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n}{n^3+3n^2+1}$ sort. / Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n}{n^3+3n^2+1}$. (OpenStax, *Calculus Volume 2*, 5.6, Example 5.25 alapján átdolgozva / адаптовано.)

Válasz / Відповідь: $\frac{a_n}{\frac{1}{n}} \to 1$; divergens / розбіжний.

C1. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$. Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ sort. / Нехай $\alpha \in \mathbb{R}$. Дослідити ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$.

Válasz / Відповідь: Pontosan akkor konvergens, ha / Збігається тоді й лише тоді, коли $\alpha > 1$.

C2. Bizonyítsuk be a közvetlen összehasonlítási kritérium konvergens esetét a részletösszegek segítségével. / Довести збіжну частину прямої ознаки порівняння за допомогою частинних сум.

Válasz / Відповідь: $0 \leq S_N^{(a)} \leq S_N^{(b)} \leq \sum b_n$; az $\left(S_N^{(a)}\right)$ sorozat monoton növekvő és felülről korlátos / послідовність $\left(S_N^{(a)}\right)$ монотонно зростає й обмежена зверху.

C3. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor esetén adjunk olyan N-et, amely biztosítja, hogy $R_N < 0{,}01$. / Для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ знайти таке N, що гарантує $R_N < 0{,}01$.

Válasz / Відповідь: $R_N \leq \int_N^{\infty} x^{-2}\, dx = \frac{1}{N}$; elegendő / достатньо $N = 101$ (már / уже $N > 100$).

Ellenőrző kérdések / Перевірте питання

1. Milyen esetben célszerű közvetlen, és mikor határértékes összehasonlítást alkalmazni? / Коли доцільно застосовувати пряму, а коли граничну ознаку порівняння?
2. Hogyan választunk összehasonlító sort racionális kifejezés esetén? / Як вибрати ряд для порівняння у випадку раціонального виразу?
3. Mely feltételeket kell ellenőrizni az integrálkritérium alkalmazása előtt? / Які умови треба перевірити перед застосуванням інтегральної ознаки?
4. Mikor konvergens a p-sor? / За яких значень p збігається p-ряд?
5. Hogyan becsülhető az integrálkritériummal egy konvergens sor maradéka? / Як за інтегральною ознакою оцінити залишок збіжного ряду?
6. Miért nem befolyásolja a konvergenciát véges számú kezdeti tag? / Чому скінченна кількість початкових членів не впливає на збіжність?

2.3. D’Alembert-, Cauchy- és Raabe-kritérium / Ознаки Д’Аламбера, Коші та Раабе

Faktoriálisok és exponenciális tényezők esetén rendszerint a D’Alembert-kritérium, n-edik hatványt tartalmazó tagoknál a Cauchy-féle gyökkritérium a leghatékonyabb. Ha a hányados határértéke 1, pozitív tagú soroknál a Raabe-kritérium finomabb vizsgálatot adhat.

Для членів із факторіалами та експоненціальними множниками зазвичай найзручніша ознака Д’Аламбера, а для виразів у n-му степені — радикальна ознака Коші. Якщо границя відношення дорівнює 1, для додатних рядів корисною може бути точніша ознака Раабе.

Rövid elméleti összefoglaló / Короткий теоретичний огляд

D’Alembert-kritérium (hányadoskritérium) / Ознака Д’Аламбера. Legyen $a_n \neq 0$ és létezzen

$$q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

- Ha $q < 1$, akkor $\sum a_n$ abszolút konvergens. / Якщо $q < 1$, ряд збігається абсолютно.
- Ha $q > 1$ vagy $q = \infty$, akkor a sor divergens. / Якщо $q > 1$ або $q = \infty$, ряд розбігається.
- Ha $q = 1$, a kritérium nem dönt. / Якщо $q = 1$, ознака не дає відповіді.

Cauchy-féle gyökkritérium / Радикальна ознака Коші. Legyen

$$q = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Ha $q < 1$, a sor abszolút konvergens; ha $q > 1$, divergens; $q = 1$ esetén a kritérium nem dönt. Ha a közönséges határérték létezik, a felső határérték helyett ez a közönséges határérték használható. / Якщо $q < 1$, ряд збігається абсолютно; якщо $q > 1$, розбігається; при $q = 1$ ознака не дає відповіді. Якщо звичайна границя існує, замість верхньої границі можна використовувати цю звичайну границю.

Raabe-kritérium / Ознака Раабе. Pozitív tagú sor esetén tegyük fel, hogy létezik

$$R = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right).$$

- Ha $R > 1$, a sor konvergens. / Якщо $R > 1$, ряд збігається.
- Ha $R < 1$, a sor divergens. / Якщо $R < 1$, ряд розбігається.
- Ha $R = 1$, a kritérium nem dönt. / Якщо $R = 1$, ознака не дає відповіді.

Kidolgozott mintapéldák / Розв’язані зразки

1. mintapélda / Зразок 1

Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ sort. / Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

Megoldás / Розв’язання.

A tagban faktoriális szerepel, ezért célszerű a D'Alembert-féle hányadoskritériumot alkalmazni. Legyen $a_n = \frac{2^n}{n!}$. Оскільки загальний член містить факторіал, доцільно застосувати ознаку Д'Аламбера. Нехай $a_n = \frac{2^n}{n!}$.

Felhasználjuk, hogy / Використовуємо рівність $(n+1)! = n!\,(n+1)$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{2^n}{n!} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \to 0 < 1.$$

A hányados határértéke $q = 0 < 1$. / Границя відношення дорівнює $q = 0 < 1$.

Következtetés / Висновок. A D'Alembert-kritérium alapján a sor konvergens. / За ознакою Д'Аламбера ряд збігається. (OpenStax, *Calculus Volume 2*, 5.6, Example 5.23 alapján átdolgozva / адаптовано.)

2. mintapélda / Зразок 2

Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ sort. / Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

Megoldás / Розв'язання.

Mivel az egész tört az n-edik hatványon áll, a Cauchy-féle gyökkritérium közvetlenül alkalmazható. / Оскільки весь дріб піднесено до n-го степеня, безпосередньо застосовуємо радикальну ознаку Коші.

Az n-edik gyök kiszámítása / Обчислення кореня n-го степеня. Legyen $a_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$. Ekkor az n-edik gyök eltünteti a külső n-edik hatványt: / Нехай $a_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$. Тоді корінь n-го степеня усуває зовнішній степінь n:

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2+\frac{1}{n}} \to \frac{1}{2} < 1.$$

Az átalakítás során a számlálót és a nevezőt n-nel osztottuk, ebből közvetlenül látható a $\frac{1}{2}$ határérték. / Під час перетворення чисельник і знаменник поділено на n, звідки безпосередньо видно границю $\frac{1}{2}$.

Mivel $q = \frac{1}{2} < 1$, a sor konvergens. / Оскільки $q = \frac{1}{2} < 1$, ряд збігається.

A Cauchy-féle gyökkritérium szerint a sor konvergens. / За радикальною ознакою Коші ряд збігається. (Бондаренко Н. В., Отрашевська В. В. *Числові та функціональні ряди*, 2024, с. 20, átdolgozva / адаптовано.)

3. mintapélda / Зразок 3

Vizsgáljuk meg a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right)^3$$

sort Raabe-kritériummal. / Дослідити за ознакою Раабе ряд із наведеним загальним членом.

Megoldás / Розв'язання.

Jelölje a zárójelben álló szorzatot c_n, és legyen $a_n = c_n^3$. Az egymást követő szorzatok között $c_{n+1} = c_n \frac{(2n+1)}{(2n+2)}$ kapcsolat áll fenn. / Позначимо добуток у дужках через c_n і покладемо $a_n = c_n^3$. Для сусідніх добутків маємо $c_{n+1} = c_n \frac{(2n+1)}{(2n+2)}$.

Ebből / Звідси

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^3 = \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^3.$$

A binomiális képletet teljesen kiírva / Повністю розкриємо куб за формулою бінома:

$$\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^3 - 1 = \frac{3}{2n+1} + \frac{3}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^3}.$$

Ezért / Тому

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^3 - 1\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{2n+1} + \frac{3n}{(2n+1)^2} + \frac{n}{(2n+1)^3}\right) \\ &= \frac{3}{2} + 0 + 0 = \frac{3}{2} > 1. \end{aligned}$$

Mivel $R = \frac{3}{2} > 1$, a Raabe-kritérium alapján a sor konvergens. / Оскільки $R = \frac{3}{2} > 1$, за ознакою Раабе ряд збігається.

4. mintapélda / Зразок 4

Vizsgáljuk meg ugyanennek a szorzatnak az első hatványából képzett sort:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}.$$

/ Дослідити ряд, у якому відповідний добуток піднесено до першого степеня.

Megoldás / Розв'язання.

Most $a_n = c_n$. Az $(n+1)$-edik tag az n-edik tagból az új $\frac{2n+1}{2n+2}$ tényezővel való szorzással keletkezik: / Тепер $a_n = c_n$. Щоб одержати $(n+1)$-й член з n-го, потрібно домножити на новий множник $\frac{2n+1}{2n+2}$:

$$a_{n+1} = a_n \frac{2n+1}{2n+2}.$$

Innen / Звідси

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2n+2}{2n+1} = 1 + \frac{1}{2n+1},$$

Behelyettesítünk a Raabe-kifejezésbe: / Підставляємо у вираз Раабе:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Mivel $R = \frac{1}{2} < 1$, a Raabe-kritérium alapján a sor divergens. / Оскільки $R = \frac{1}{2} < 1$, за ознакою Раабе ряд розбігається.

Gyakorlófeladatok / Тренувальні завдання

A1. Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ sort. / Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$.

Válasz / Відповідь: $a_{n+1}/a_n = 3/(n+1) \to 0$; konvergens / збіжний.

A2. Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{5n+2}\right)^n$ sort. / Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{5n+2}\right)^n$.

Válasz / Відповідь: $\sqrt[n]{a_n} \to \frac{2}{5} < 1$; konvergens / збіжний.

A3. Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{4^n}$ sort. / Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{4^n}$.

Válasz / Відповідь: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)}{4} \to \infty$; divergens / розбіжний.

A4. Mit mond a D'Alembert-kritérium a $\sum \frac{1}{n^2}$ sorról? / Що дає ознака Д'Аламбера для ряду $\sum \frac{1}{n^2}$?

Válasz / Відповідь: A hányados határértéke / Границя відношення 1; a kritérium nem dönt / ознака не дає відповіді.

B1. Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ sort. / Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Válasz / Відповідь: $a_{n+1}/a_n = (n+1)^2/[(2n+2)(2n+1)] \to 1/4$; konvergens / збіжний.

B2. Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ sort. / Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Válasz / Відповідь: $\sqrt[n]{a_n} = \left(n/(n+1)\right)^n \to e^{-1} < 1$; konvergens / збіжний.

B3. Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$ sort. / Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$. (OpenStax, *Calculus Volume 2*, 5.6, Checkpoint 5.21 alapján átdolgozva / адаптовано.)

Válasz / Відповідь: $a_{n+1}/a_n = \left((n+1)/n\right)^3/3 \to 1/3$; konvergens / збіжний.

B4. Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ sort. / Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

Válasz / Відповідь: $a_{n+1}/a_n = (1+1/n)^n \to e > 1$; divergens / розбіжний. (OpenStax, *Calculus Volume 2*, 5.6, Example 5.23 alapján átdolgozva / адаптовано.)

C1. Legyen $\alpha > 0$, és

$$a_n = \left(\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n}\right)^{\alpha}.$$

Állapítsuk meg, mit mond a Raabe-kritérium a $\sum a_n$ sorról. / Нехай $\alpha > 0$. Визначити, який висновок дає ознака Раабе для ряду $\sum a_n$.

Válasz / Відповідь: $R = \alpha/2$; konvergens, ha / збігається при $\alpha > 2$; divergens, ha / розбігається при $0 < \alpha < 2$; $\alpha = 2$ esetén a Raabe-kritérium nem dönt / при $\alpha = 2$ ознака Раабе не дає відповіді.

C2. Mutassunk egy konvergens és egy divergens sort, amelyeknél a D'Alembert-kritérium határértéke egyaránt 1. / Навести один збіжний і один розбіжний ряд, для яких границя в ознаці Д'Аламбера дорівнює 1

Válasz / Відповідь: Például / Наприклад $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens / збіжний, $\sum \frac{1}{n}$ divergens / розбіжний; mindkettőnél / в обох випадках $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$.

C3. Bizonyítsuk be, hogy ha a gyökkritériumban $q < 1$, akkor a sor abszolút konvergens. / Довести, що при $q < 1$ у радикальній ознаці Коші ряд збігається абсолютно.

Válasz / Відповідь: Válasszunk $q < r < 1$ számot; elegendően nagy n-re $\sqrt[n]{|a_n|} < r$, tehát $|a_n| < r^n$, majd alkalmazzuk a geometriai sorral való összehasonlítást. / Вибрати $q < r < 1$; для достатньо великих n маємо $|a_n| < r^n$, після чого застосувати порівняння з геометричним рядом.

Ellenőrző kérdések / Перевірте питання

1. Milyen alakú tagok esetén célszerű a D'Alembert-kritérium? / Для яких членів доцільно застосовувати ознаку Д'Аламбера?
2. Mikor előnyös a Cauchy-féle gyökkritérium? / Коли зручна радикальна ознака Коші?
3. Mit jelent, ha a vizsgált határérték 1? / Що означає, якщо відповідна границя дорівнює 1?
4. Miben finomabb a Raabe-kritérium a hányadoskritériumnál? / У чому ознака Раабе точніша за ознаку Д'Аламбера?
5. Miért adnak ezek a kritériumok $q < 1$ esetén abszolút konvergenciát? / Чому при $q < 1$ ці ознаки дають абсолютну збіжність?
6. Milyen sorrendben érdemes kritériumot választani faktoriálist, n-edik hatványt vagy racionális kifejezést tartalmazó tag esetén? / У якій послідовності доцільно вибирати ознаку для членів із факторіалом, n-м степенем або раціональним виразом?

2.4. Váltakozó sorok. Abszolút és feltételes konvergencia / Знакозмінні ряди. Абсолютна та умовна збіжність

Rövid elméleti összefoglaló / Короткий теоретичний огляд

Előjelváltó és váltakozó előjelű sorok / Знакозмінні та знакопочергові ряди. Előjelváltó sornak nevezzük azt a számsort, amelyben pozitív és negatív tagok egyaránt előfordulnak. A váltakozó előjelű sor ennél speciálisabb: bármely két szomszédos tagja ellentétes előjelű. A pozitív taggal kezdődő váltakozó előjelű sor alakja / Знакозмінним називають числовий ряд, у якому є як додатні, так і від'ємні члени. Знакопочерговий ряд є його окремим випадком: будь-які два сусідні члени мають протилежні знаки. Знакопочерговий ряд, що починається з додатного члена, має вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots, \qquad u_n > 0.$$

Ha a sor negatív taggal kezdődik, akkor / Якщо ряд починається з від'ємного члена, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\,u_n = -u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \cdots, \qquad u_n > 0.$$

Mindkét képletben u_n az n-edik tag pozitív nagysága; az előjelet a $(-1)^{n-1}$, illetve a $(-1)^n$ tényező adja meg. / В обох формулах u_n — додатна величина n-го члена, а множник $(-1)^{n-1}$ або $(-1)^n$ визначає його знак.

A konvergencia szükséges feltétele / Необхідна умова збіжності. Ha a váltakozó előjelű sor konvergens, akkor általános tagjának nullához kell tartania. Mivel $u_n > 0$, ez azzal egyenértékű, hogy a tagok nagysága nullához tart: / Якщо знакопочерговий ряд збігається, то його загальний член повинен прямувати до нуля. Оскільки $u_n > 0$, це рівносильно тому, що модулі членів прямують до нуля:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,u_n \text{ konvergens} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Ha ez a határérték nem nulla, vagy nem létezik, akkor a sor divergens. A tagok nagyságának nullához tartása önmagában még nem elegendő a konvergenciához; további kritériumot is alkalmazni kell. / Якщо ця границя не дорівнює нулю або не існує, ряд розбігається. Прямування модулів членів до нуля саме по собі ще не є достатнім для збіжності; потрібно застосувати додаткову ознаку.

Leibniz-kritérium / Ознака Лейбніца. Tekintsük a / Розглянемо знакопочерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,u_n, \qquad u_n > 0,$$

váltakozó előjelű sort. A sor konvergens, ha valamely indextől kezdve egyszerre teljesül a következő két feltétel:

Ряд збігається, якщо починаючи з деякого номера одночасно виконуються дві умови:

$$u_{n+1} \leq u_n \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Az első feltétel azt jelenti, hogy a tagok pozitív nagysága nem növekszik; a második azt, hogy ezek a nagyságok nullához tartanak. A váltakozó előjel önmagában nem biztosít konvergenciát. Ha a második feltétel nem teljesül, a sor divergens. Ha csak a monotonitás nem igazolható, a Leibniz-kritérium önmagában nem ad döntést.

Перша умова означає, що додатні величини членів не зростають; друга — що вони прямують до нуля. Саме чергування знаків не гарантує збіжності. Якщо друга умова не виконується, ряд розбігається. Якщо не вдається встановити лише монотонність, ознака Лейбніца сама по собі не дає висновку.

Abszolút konvergencia / Абсолютна збіжність. A váltakozó előjelű sor tagjainak abszolút értékeiből a pozitív tagú sort kapjuk: / Із модулів членів знакопочергового ряду одержуємо додатний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n-1} u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

A $\sum(-1)^{n-1}u_n$ sor abszolút konvergens, ha $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergens. Minden abszolút konvergens sor konvergens. / Ряд $\sum(-1)^{n-1}u_n$ збігається абсолютно, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Абсолютна збіжність завжди тягне звичайну збіжність.

Feltételes konvergencia / Умовна збіжність. A $\sum(-1)^{n-1}u_n$ sor feltételesen konvergens, ha maga a sor konvergens, de $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ divergens. / Ряд збігається умовно, якщо він збігається, але ряд з модулів його членів розбігається.

Leibniz-féle hibabecslés / Оцінка похибки за Лейбніцем. Legyen S a Leibniz-kritérium feltételeit teljesítő végtelen sor összege, S_N az első N tag összege, azaz / Нехай S — сума нескінченного ряду, що задовольняє умови ознаки Лейбніца, а S_N — сума його перших N членів:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} u_n,$$

és legyen $R_N = S - S_N$ a közelítés hibája, vagyis a maradék. Ekkor / Позначимо через $R_N = S - S_N$ похибку наближення, тобто залишок. Тоді

$$|R_N| = |S - S_N| \leq u_{N+1}.$$

Ezért legfeljebb ε hiba eléréséhez olyan N-et választunk, amelyre $u_{N+1} \leq \varepsilon$. / Отже, для похибки не більшої за ε вибирають таке N, для якого $u_{N+1} \leq \varepsilon$.

(Бондаренко Н. В., Отрашевська В. В. *Числові та функціональні ряди: конспект лекцій.* Київ: КНУБА, 2024, 24–29. o. / с. 24–29.; Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут». *Знакозмінні числові ряди.* 2022, 1–6. o. / с. 1–6.)

Kidolgozott mintapéldák / Розв'язані зразки

1. mintapélda / Зразок 1

Vizsgáljuk meg a váltakozó harmonikus sort: / Дослідити знакопочерговий гармонічний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots.$$

Megoldás / Розв'язання. A tagok előjele szabályosan váltakozik, nagyságuk pedig $u_n = 1/n$. Először az eredeti sor konvergenciáját vizsgáljuk. A tagok nagysága csökken, mert

Модулі членів дорівнюють $u_n = 1/n$. Спочатку перевіримо дві умови ознаки Лейбніца. Для кожного $n \geq 1$

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = u_n,$$

és a határértékük nulla:

отже модулі членів спадають. Крім того,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Mindkét feltétel teljesül, ezért az eredeti sor konvergens. Az abszolút konvergencia eldöntéséhez elhagyjuk az előjeleket:

Обидві умови виконуються, тому початковий ряд збігається. Для перевірки абсолютної збіжності розглянемо ряд із модулів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Ez a harmonikus sor, amely divergens. Az eredeti sor tehát konvergens, de az abszolút értékekből képzett sor divergens, ezért a váltakozó harmonikus sor **feltételesen konvergens**.

Це гармонічний ряд, який розбігається. Отже, початковий ряд збігається, а ряд із модулів розбігається, тому знакопочерговий гармонічний ряд **збігається умовно**.

(Бондаренко Н. В., Отрашевська В. В., 2024, 24–27. o. / с. 24–27.; a levezetés részletesebben kifejtve / розв'язання деталізовано.)

2. mintapélda / Зразок 2

Vizsgáljuk meg az alábbi váltakozó geometriai sort: / Дослідити наведений знакопочерговий геометричний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \cdots.$$

Megoldás / Розв'язання. Először az abszolút értékekből képzett sort vizsgáljuk:

Спочатку дослідимо ряд із модулів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Ez geometriai sor, amelynek első tagja $1/2$, hányadosa pedig $1/2$. Mivel a hányados abszolút értéke kisebb egynél, a pozitív tagú geometriai sor konvergens. Ezért az eredeti váltakozó sor **abszolút konvergens**. A sor összege is könnyen meghatározható: az eredeti sor geometriai sor $q = -1/2$ hányadossal, így

Це геометричний ряд із першим членом $1/2$ і знаменником $1/2$. Оскільки модуль знаменника менший за одиницю, додатний геометричний ряд збігається. Тому початковий знакопочерговий ряд **збігається абсолютно**. Його суму також легко знайти: початковий ряд є геометричним зі знаменником $q = -1/2$, отже

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{3}.$$

3. mintapélda / Зразок 3

Vizsgáljuk meg az alábbi sort: / Дослідити ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1}.$$

Megoldás / Розв'язання. A tagok pozitív nagysága $u_n = n/(n+1)$. Először a konvergencia szükséges feltételét ellenőrizzük:

Додатні величини членів дорівнюють $u_n = n/(n+1)$. Спочатку перевіримо необхідну умову збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) = 1.$$

A tagok nagysága nem nullához, hanem egyhez tart. Emiatt az eredeti sor általános tagja sem tarthat nullához: az előjel ugyan váltakozik, de a tagok nagysága egyhez közelít. A

konvergencia szükséges feltétele nem teljesül, ezért a sor **divergens**. Ebben az esetben a Leibniz-kritérium további vizsgálatára nincs szükség.

Модулі членів прямують не до нуля, а до одиниці. Тому загальний член початкового ряду також не може прямувати до нуля: його знак чергується, але модуль наближається до одиниці. Необхідна умова збіжності не виконується, отже ряд **розбігається**. Перевіряти інші умови ознаки Лейбніца вже не потрібно.

4. mintapélda / Зразок 4

Közelítsük az alábbi sor összegét legfeljebb $0{,}01$ hibával: / Знайти наближене значення суми ряду з похибкою не більшою за $0{,}01$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}.$$

Megoldás / Розв'язання. A tagok pozitív nagysága $u_n = 1/n^3$. Mivel

Додатні величини членів дорівнюють $u_n = 1/n^3$. Оскільки

$$u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^3} < \frac{1}{n^3} = u_n \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to\infty} u_n = 0,$$

a Leibniz-kritérium alkalmazható. Legyen S a sor pontos összege, S_N pedig az első N tag összege. Ekkor

можна застосувати ознаку Лейбніца. Нехай S — точна сума ряду, а S_N — сума перших N членів. Тоді

$$|S - S_N| \le u_{N+1} = \frac{1}{(N+1)^3}.$$

Olyan N-et keresünk, amelyre

Потрібно вибрати таке N, щоб

$$\frac{1}{(N+1)^3} \le 0{,}01.$$

Négy tag megtartása elegendő, mert ekkor az első elhagyott tag az ötödik, és

Достатньо залишити чотири члени, бо першим відкинутим буде п'ятий член і

$$\frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} = 0{,}008 < 0{,}01.$$

Az első négy tag összege / Сума перших чотирьох членів дорівнює

$$S_4 = 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{27} - \frac{1}{64} = \frac{1549}{1728} \approx 0{,}89641.$$

Ezért a sor összege $0{,}01$ pontossággal $S \approx 0{,}89641$. A Leibniz-féle becslés szerint a tényleges hiba legfeljebb $0{,}008$, tehát kisebb a megengedett $0{,}01$ értéknél.

Отже, з точністю $0{,}01$ маємо $S \approx 0{,}89641$. За оцінкою Лейбніца фактична похибка не перевищує $0{,}008$, тобто вона менша за допустиме значення $0{,}01$.
(Бондаренко Н. В., Отрашевська В. В., 2024, 25–26. o. / с. 25–26.; a megoldás részletesebben kifejtve / розв'язання деталізовано.)

Gyakorlófeladatok / Тренувальні завдання

A1. Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$ sort. / Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$.

Válasz / Відповідь: Feltételesen konvergens / Збігається умовно.

A2. Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n}$ sort. / Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n}$.

Válasz / Відповідь: Abszolút konvergens geometriai sor / Абсолютно збіжний геометричний ряд; $S = \frac{1}{4}$.

A3. Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$ sort. / Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$.

Válasz / Відповідь: Divergens, mert az általános tag nem tart nullához. / Розбіжний, оскільки загальний член не прямує до нуля.

A4. Becsüljük meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ sor S_5 részletösszegének hibáját. / Оцінити похибку частинної суми S_5 ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

Válasz / Відповідь: $|R_5| \le \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$.

B1. Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ sort. / Дослідити ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Válasz / Відповідь: Feltételesen konvergens / Збігається умовно; $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergens / розбігається.

B2. Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$ sort. / Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$.

Válasz / Відповідь: Feltételesen konvergens / Збігається умовно; a sorozat csökken és nullához tart / послідовність спадає і прямує до нуля, és $\frac{n}{(n^2+1)} \sim \frac{1}{n}$.

B3. Hány tagot kell megtartani a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ sorból, hogy a hiba kisebb legyen 10^{-5}-nél? / Скільки членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ треба взяти, щоб похибка була меншою за 10^{-5}?

Válasz / Відповідь: $\frac{1}{(N+1)^2} < 10^{-5}$; a legkisebb / найменше $N = 316$.

B4. Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ sort. / Дослідити ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$.

Válasz / Відповідь: Feltételesen konvergens / Збігається умовно; Leibniz szerint konvergens, a modulussor integrálkritériummal divergens / збігається за Лейбніцем, а ряд модулів розбігається за інтегральною ознакою.

C1. Legyen $p > 0$. Osztályozzuk a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ sor konvergenciáját. / Нехай $p > 0$. Класифікувати збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$.

Válasz / Відповідь: Abszolút konvergens / Абсолютно збіжний, ha / якщо $p > 1$; feltételesen konvergens / умовно збіжний, ha / якщо $0 < p \leq 1$.

C2. Adjunk példát olyan váltakozó előjelű sorra, amely divergens annak ellenére, hogy tagjainak abszolút értéke csökken. / Навести приклад знакозмінного ряду, який розбігається, хоча модулі його членів спадають.

Válasz / Відповідь: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)$; a modulus csökken, de nem tart a nullához / модулі спадають, але не прямують до нуля.

Ellenőrző kérdések / Перевірте питання

1. Mely két feltételt kell ellenőrizni a Leibniz-kritériumban? / Які дві умови треба перевірити в ознаці Лейбніца?
2. Mit jelent az abszolút konvergencia? / Що означає абсолютна збіжність?
3. Mikor beszélünk feltételes konvergenciáról? / Коли збіжність називають умовною?
4. Hogyan becsülhető egy Leibniz-típusú sor maradéka? / Як оцінити залишок ряду типу Лейбніца?
5. Miért nem elég az előjelek váltakozása a konvergenciához? / Чому самого чергування знаків недостатньо для збіжності?
6. Hogyan osztályozzuk a $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ sort a p paraméter szerint? / Як класифікувати ряд $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ залежно від параметра p?

2.5. Végtelen szorzatok / Нескінченні добутки

A végtelen szorzatot a végtelen sorhoz hasonlóan határértékkel definiáljuk, de itt a nem nulla véges határérték a szokásos konvergencia része. A hallgatók mindig ellenőrizzék, hogy nincs-e nulla tényező. Az $1 + u_n$ alakú tényezőknél a logaritmus a szorzatot sorrá alakítja; kis u_n esetén $\ln(1 + u_n) \sim u_n$.

Нескінченний добуток, як і ряд, визначається за допомогою границі, але у стандартному означенні збіжності границя має бути скінченною і відмінною від нуля. Спочатку слід перевірити відсутність нульового множника. Для множників виду $1 + u_n$ логарифм перетворює добуток на ряд; при малих u_n маємо $\ln(1 + u_n) \sim u_n$.

Rövid elméleti összefoglaló / Короткий теоретичний огляд

A végtelen szorzat fogalma / Поняття нескінченного добутку. Végtelen szorzatnak nevezzük az / Нескінченним добутком називають вираз

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots$$

alakú kifejezést. A szorzatot a részletszorzatok sorozata segítségével vizsgáljuk. Az első N tényező szorzata / Добуток досліджують за допомогою послідовності частинних добутків. Добуток перших N множників дорівнює

$$P_N = \prod_{n=1}^{N} a_n = a_1 a_2 \cdots a_N.$$

Ha létezik a részletszorzatok véges és nem nulla határértéke,

Якщо існує скінченна ненульова границя частинних добутків,

$$\lim_{N\to\infty} P_N = P,$$

akkor a végtelen szorzatot konvergensnek nevezzük, a P számot pedig a szorzat értékének. Ha a részletszorzatok nem tartanak véges, nem nulla határértékhez, akkor a szorzat divergens. A gyakorlati feladatokban külön meg szoktuk nevezni azt az esetet is, amikor $P_N \to 0$: ilyenkor a szorzat nullához tart.

то нескінченний добуток називають збіжним, а число P — його значенням. Якщо частинні добутки не прямують до скінченної ненульової границі, то добуток розбігається. У практичних завданнях окремо зазначають випадок, коли $P_N \to 0$: тоді кажуть, що добуток прямує до нуля.

A konvergencia szükséges feltétele / Необхідна умова збіжності. Ha a végtelen szorzat nem nulla számhoz konvergál, akkor a tényezőknek egyhez kell tartaniuk:

Якщо нескінченний добуток збігається до ненульового числа, то його множники повинні прямувати до одиниці:

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens és } P \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Ez csak szükséges feltétel. Abból, hogy $a_n \to 1$, még nem következik a végtelen szorzat konvergenciája. Például a $\prod_{n=2}^{\infty}(1 - 1/n)$ szorzat tényezői egyhez tartanak, de maga a szorzat nullához tart.

Це лише необхідна умова. Із того, що $a_n \to 1$, ще не випливає збіжність нескінченного добутку. Наприклад, у добутку $\prod_{n=2}^{\infty}(1 - 1/n)$ множники прямують до одиниці, але сам добуток прямує до нуля.

Kapcsolat a számsorokkal / Зв'язок із числовими рядами. A pozitív tényezőjű végtelen szorzatokat gyakran logaritmálással vizsgáljuk. Ha $a_n > 0$, akkor a

Додатні нескінченні добутки часто зручно досліджувати логарифмуванням. Якщо $a_n > 0$, то добуток

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n$$

szorzatnak pontosan akkor van véges, nem nulla határértéke, ha a

має скінченну ненульову границю тоді й тільки тоді, коли збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$$

sor konvergens. Ha $\sum \ln a_n \to -\infty$, akkor a részletszorzatok nullához tartanak; ha $\sum \ln a_n \to +\infty$, akkor a részletszorzatok korlátlanul nőnek.

Якщо $\sum \ln a_n \to -\infty$, то частинні добутки прямують до нуля; якщо $\sum \ln a_n \to +\infty$, то частинні добутки необмежено зростають.

Az $\prod(1+u_n)$ alakú szorzatok / Добутки вигляду $\prod(1+u_n)$. A gyakorlatban a tényezőket többnyire $a_n = 1 + u_n$ alakban írjuk fel. Ha $u_n \geq 0$, akkor a

На практиці множники найчастіше записують у вигляді $a_n = 1 + u_n$. Якщо $u_n \geq 0$, то добуток

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$$

szorzat pontosan akkor konvergál nem nulla számhoz, ha a

має скінченну ненульову границю тоді й тільки тоді, коли збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

sor konvergens. Ha ez a sor divergens, akkor a részletszorzatok végtelenhez tartanak. Ha $0 \leq u_n < 1$, akkor a

Якщо цей ряд розбігається, частинні добутки необмежено зростають. Якщо $0 \leq u_n < 1$, то добуток

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - u_n)$$

szorzat akkor konvergál nem nulla számhoz, ha $\sum u_n$ konvergens; ha $\sum u_n$ divergens, akkor a szorzat nullához tart.

має ненульову границю тоді, коли збігається ряд $\sum u_n$; якщо ряд $\sum u_n$ розбігається, добуток прямує до нуля.

Abszolút konvergencia / Абсолютна збіжність. Ha a tényezők $1 + u_n$ alakúak, és teljesül, hogy / Якщо множники мають вигляд $1 + u_n$ і виконується

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| < \infty, 1 + u_n \neq 0$$

akkor a / то добуток

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$$

szorzat abszolút konvergens. Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy a szorzat konvergenciáját biztosítani tudjuk az u_n tagok abszolút értékeiből képzett sor konvergenciájával.

збігається абсолютно. На практиці це означає, що збіжність добутку можна обґрунтувати збіжністю ряду, утвореного з модулів членів u_n.

Kidolgozott mintapéldák / Розв'язані зразки

1. mintapélda / Зразок 1

Vizsgáljuk meg a következő végtelen szorzatot: / Дослідити нескінченний добуток:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Megoldás / Розв'язання. Tekintsük az első N tényező szorzatát. Mivel

Розглянемо добуток перших N множників. Оскільки

$$1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n},$$

ezért / то

$$P_N = \prod_{n=1}^{N} \frac{n+1}{n} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{N+1}{N}.$$

Ebben a szorzatban minden közbülső tényező kiesik: a számlálóban álló 2 egyszerűsödik a következő nevezőben álló 2-vel, a 3 a következő nevezővel, és így tovább. Ezért

У цьому добутку всі проміжні множники скорочуються: число 2 у чисельнику скорочується з наступним знаменником 2, число 3 — з наступним знаменником і так далі. Тому

$$P_N = N + 1.$$

Ha $N \to \infty$, akkor $P_N \to \infty$. A végtelen szorzatnak tehát nincs véges, nem nulla határértéke, ezért divergens.

Коли $N \to \infty$, то $P_N \to \infty$. Отже, нескінченний добуток не має скінченної ненульової границі і є розбіжним.

A szorzat divergens, mert $P_N = N + 1 \to \infty$. / Добуток розбігається, бо $P_N = N + 1 \to \infty$.

2. mintapélda / Зразок 2

Számítsuk ki a következő végtelen szorzatot: / Обчислити нескінченний добуток:

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

Megoldás / Розв'язання. Először alakítsuk át az általános tényezőt: / Спочатку перетворимо загальний множник:

$$1-\frac{1}{n^2}=\frac{n^2-1}{n^2}=\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}.$$

Ezért az $n = 2$-től $n = N$-ig vett részletszorzat így írható: / Тоді частинний добуток від $n = 2$ до $n = N$ можна записати так:

$$P_N=\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\prod_{n=2}^{N}\frac{n-1}{n}\cdot\prod_{n=2}^{N}\frac{n+1}{n}.$$

Az első szorzat teleszkopikus: / Перший добуток є телескопічним:

$$\prod_{n=2}^{N}\frac{n-1}{n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{N-1}{N}=\frac{1}{N}.$$

A második szorzatban is egyszerűsödnek a közbülső tényezők: / Другий добуток також скорочується:

$$\prod_{n=2}^{N}\frac{n+1}{n}=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{N+1}{N}=\frac{N+1}{2}.$$

Így / Отже,

$$P_N=\frac{1}{N}\cdot\frac{N+1}{2}=\frac{N+1}{2N}.$$

Határértéket véve: / Переходимо до границі:

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{N\to\infty}P_N=\lim_{N\to\infty}\frac{N+1}{2N}=\frac{1}{2}.$$

A szorzat konvergens, értéke $\frac{1}{2}$. / Добуток збігається, його значення дорівнює $\frac{1}{2}$.

3. mintapélda / Зразок 3

Vizsgáljuk meg a szorzatot: / Дослідити добуток:

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Megoldás / Розв'язання. Írjuk fel az N-edik részletszorzatot: / Запишемо N-й частинний добуток:

$$P_N = \prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \prod_{n=2}^{N}\frac{n-1}{n}.$$

Az első néhány tényezőt kiírva: / Розпишемо перші множники: / Усі проміжні множники скорочуються, тому

$$P_N = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{N-1}{N}.$$

Minden közbülső tényező egyszerűsödik, ezért / Усі проміжні множники скорочуються, тому

$$P_N = \frac{1}{N}.$$

Ha $N \to \infty$, akkor / Коли $N \to \infty$, маємо

$$\lim_{N\to\infty} P_N = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N} = 0.$$

A részletszorzatok tehát nullához tartanak. Ez a példa azt mutatja, hogy az $a_n \to 1$ feltétel önmagában nem elég a végtelen szorzat nem nulla konvergenciájához.

Отже, частинні добутки прямують до нуля. Цей приклад показує, що умови $a_n \to 1$ самої по собі недостатньо для ненульової збіжності нескінченного добутку.

A szorzat nullához tart: $P_N = \frac{1}{N} \to 0$. / Добуток прямує до нуля: $P_N = \frac{1}{N} \to 0$.

Gyakorlófeladatok / Тренувальні завдання

A1. Írjuk fel a $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n+1}$ szorzat P_N részletszorzatát, és vizsgáljuk a konvergenciát. / Записати частковий добуток P_N для $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n+1}$ і дослідити збіжність.

Válasz / Відповідь: $P_N = \frac{(N+2)}{2} \to \infty$; divergens / розбіжний.

A2. Vizsgáljuk meg a $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$ szorzatot. / Дослідити добуток $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$.

Válasz / Відповідь: Konvergens / Збіжний, mert / оскільки $\sum\frac{1}{n^3}$ konvergens / збігається.

A3. Teljesül-e a konvergencia szükséges feltétele a $\prod_{n=1}^{\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)$ szorzatra? / Чи виконується необхідна умова збіжності для добутку $\prod_{n=1}^{\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)$?

Válasz / Відповідь: Nem / Ні, mert a tényezők / оскільки множники $2 + 1/n \to 2 \neq 1$.

A4. Számítsuk ki a $\prod_{n=1}^{N}\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ részletszorzatot. / Обчислити частковий добуток $\prod_{n=1}^{N}\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

Válasz / Відповідь: $P_N = \frac{N+2}{2(N+1)}$.

B1. Határozzuk meg a $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ szorzat értékét. / Знайти значення добутку $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

Válasz / Відповідь: $P = 1/2$.

B2. Vizsgáljuk meg a $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^3}\right)$ szorzatot. / Дослідити добуток $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^3}\right)$.

Válasz / Відповідь: Konvergens / Збіжний, mert / оскільки $\sum \frac{1}{n^3}$ konvergens / збігається, és a tényezők pozitívak / а множники додатні.

B3. Vizsgáljuk meg a $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n\ln n}\right)$ szorzatot. / Дослідити добуток $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n\ln n}\right)$.

Válasz / Відповідь: Divergens / Розбіжний; $\ln(1 + u_n) \sim u_n$, és / а $\sum \frac{1}{nlnn}$ divergens / розбігається.

B4. Vizsgáljuk meg a $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n\ln n}\right)$ szorzatot. / Дослідити добуток $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n\ln n}\right)$.

Válasz / Відповідь: A részletszorzatok nullához tartanak / Часткові добутки прямують до нуля, mert / оскільки $\ln(1 - u_n) \sim -u_n$ és / та $\sum u_n$ divergens / розбігається.

C1. Legyen $u_n > -1$ és $u_n \to 0$. Bizonyítsuk be, hogy ha $\sum |u_n|$ konvergens, akkor $\prod(1 + u_n)$ konvergens. / Нехай $u_n > -1$ і $u_n \to 0$. Довести, що зі збіжності $\sum |u_n|$ випливає збіжність $\prod(1 + u_n)$.

Válasz / Відповідь: Kis $|u|$ esetén / Для малих $|u|$ маємо $|\ln(1 + u)| \leq C|u|$; ezért / тому $\sum |\ln(1 + u_n)|$ konvergens / збігається, majd logaritmálással következik a szorzat konvergenciája / а після логарифмування випливає збіжність добутку.

C2. Legyen $c > 0$. Vizsgáljuk meg a $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{c}{n}\right)$ szorzatot. / Нехай $c > 0$. Дослідити добуток $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{c}{n}\right)$.

Válasz / Відповідь: Divergens, és a részletszorzatok végtelenhez tartanak / Розбіжний, часткові добутки прямують до нескінченності, mert / оскільки $\ln\left(1 + \frac{c}{n}\right) \sim \frac{c}{n}$.

Ellenőrző kérdések / Перевірте питання

1. Hogyan definiáljuk egy végtelen szorzat részletszorzatát? / Як визначають частковий добуток нескінченного добутку?
2. Mit jelent a végtelen szorzat konvergenciája? / Що означає збіжність нескінченного добутку?
3. Mi a $\prod(1 + u_n)$ szorzat konvergenciájának szükséges feltétele? / Яка необхідна умова збіжності добутку $\prod(1 + u_n)$?

4. Hogyan kapcsolódik a $\prod p_n$ szorzat a $\sum \ln p_n$ sorhoz? / Як пов'язаний добуток $\prod p_n$ з рядом $\sum \ln p_n$?
5. Miért hasznos a $\ln(1+u_n) \sim u_n$ ekvivalencia? / Чому корисна еквівалентність $\ln(1+u_n) \sim u_n$?
6. Milyen lépésekből áll egy teleszkopikus végtelen szorzat kiszámítása? / З яких кроків складається обчислення телескопічного нескінченного добутку?

3. FÜGGVÉNY- ÉS HATVÁNYSOROK /ФУНКЦІОНАЛЬНІ ТА СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

A fejezet a függvénysorozatok, függvénysorok, hatványsorok, valamint Taylor- és Maclaurin-sorok gyakorlati alkalmazásához szükséges alapfogalmakat és módszereket foglalja össze. Az elméleti rész csak azokat a definíciókat, tételeket és képleteket tartalmazza, amelyek a gyakorlati feladatok megoldásához szükségesek.

Розділ узагальнює основні поняття та методи, необхідні для практичного застосування функціональних послідовностей, функціональних рядів, степеневих рядів, а також рядів Тейлора і Маклорена. Теоретична частина містить лише ті означення, теореми та формули, які потрібні для розв'язування практичних завдань.

3.1. Függvénysorozatok és függvénysorok / Функціональні послідовності та функціональні ряди

Rövid elméleti összefoglaló / Короткий теоретичний огляд

Függvénysorozat / Функціональна послідовність. Függvénysorozatnak nevezzük az olyan sorozatot, amelynek tagjai függvények: / Функціональною послідовністю називають послідовність, членами якої є функції:

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots.$$

A függvénysorozat pontonként konvergál az $f(x)$ függvényhez az A halmazon, ha minden $x \in A$ esetén teljesül, hogy / Функціональна послідовність збігається поточково до функції $f(x)$ на множині A, якщо для кожного $x \in A$ виконується

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Ilyenkor minden rögzített x értéknél számsorozatot vizsgálunk. A konvergencia lehetősége és a határfüggvény alakja függhet attól, hogy az x milyen értéket vesz fel.

У цьому випадку для кожного фіксованого значення x досліджують числову послідовність. Можливість збіжності та вигляд граничної функції можуть залежати від значення x.

Függvénysor / Функціональний ряд. Függvénysornak nevezzük az / Функціональним рядом називають ряд вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

alakú sort. A részletösszeg-függvény / Функція частинної суми має вигляд

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x).$$

A sor pontonként konvergens az A halmazon, ha minden $x \in A$ esetén konvergens a hozzá tartozó számsor. A konvergenciahalmaz azoknak az x értékeknek a halmaza, amelyeknél a függvénysor konvergens. A sor összege ezen a halmazon az /

Ряд збігається поточково на множині A, якщо для кожного $x \in A$ збігається відповідний числовий ряд. Областю збіжності називають множину всіх значень x, для яких функціональний ряд збігається. Сумою ряду на цій множині є функція

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n\,(x)$$

függvény.

Egyenletes konvergencia és Weierstrass-kritérium / Рівномірна збіжність та ознака Вейєрштрасса. A függvénysor egyenletes konvergenciája erősebb tulajdonság, mint a pontonkénti konvergencia. Gyakorlati feladatokban gyakran a Weierstrass-kritériumot használjuk. Ha az A halmazon /

Рівномірна збіжність функціонального ряду є сильнішою властивістю, ніж поточкова збіжність. У практичних завданнях часто застосовують ознаку Вейєрштрасса. Якщо на множині A

$$|u_n(x)| \leq M_n$$

minden $x \in A$ és minden n esetén, továbbá a pozitív tagú számsor / для всіх $x \in A$ і всіх n, а додатний числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$$

konvergens, akkor a / збігається, то функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n\,(x)$$

függvénysor abszolút és egyenletesen konvergens az A halmazon. / збігається абсолютно і рівномірно на множині A.

(Lektsiya-1_05_2020.pdf, „Функціональні ряди”; Трусевич, Тацій, Ряди.pdf, 2.1. fejezet / розділ 2.1.)

Kidolgozott mintapéldák / Розв’язані зразки

1. mintapélda / Зразок 1

Határozzuk meg az $f_n(x) = x^n$ függvénysorozat pontonkénti határfüggvényét a $[0,1]$ intervallumon. / Знайти поточкову граничну функцію послідовності $f_n(x) = x^n$ на відрізку $[0,1]$.

Megoldás / Розв'язання. Rögzítsünk egy $x \in [0,1]$ értéket. Ha $0 \le x < 1$, akkor az x^n hatványsorozat nullához tart, mert egy egynél kisebb nemnegatív szám egyre magasabb hatványait vesszük. Ezért

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \qquad (0 \le x < 1).$$

Ha viszont $x = 1$, akkor minden n esetén $x^n = 1^n = 1$, tehát

$$\lim_{n\to\infty} 1^n = 1.$$

A határfüggvény tehát nem egyetlen képlettel, hanem két esetben adható meg:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Зафіксуємо значення $x \in [0,1]$. Якщо $0 \le x < 1$, то послідовність степенів x^n прямує до нуля, бо підносимо до дедалі вищого степеня невід'ємне число, менше за одиницю. Тому

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \qquad (0 \le x < 1).$$

Якщо $x = 1$, то для кожного n маємо $x^n = 1^n = 1$, отже

$$\lim_{n\to\infty} 1^n = 1.$$

Тому граничну функцію записуємо за випадками:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

A határfüggvény $f(x) = 0$ ha $0 \le x < 1$, és $f(1) = 1$. / Гранична функція: $f(x) = 0$ при $0 \le x < 1$, і $f(1) = 1$.

2. mintapélda / Зразок 2

Határozzuk meg a

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

függvénysor konvergenciahalmazát és összegét. / Знайти область збіжності та суму функціонального ряду.

Megoldás / Розв'язання. Rögzített x mellett a sor geometriai sor, amelynek első tagja 1, hányadosa pedig x. A geometriai sor pontosan akkor konvergens, ha a hányados abszolút értéke kisebb egynél:

Для фіксованого x заданий ряд є геометричним рядом з першим членом 1 і знаменником x. Геометричний ряд збігається тоді й тільки тоді, коли модуль знаменника менший за одиницю:

$$|x| < 1.$$

Ez azt jelenti, hogy a konvergenciahalmaz $(-1,1)$. Ezen az intervallumon a geometriai sor összege

Отже, область збіжності дорівнює $(-1,1)$. На цьому інтервалі сума геометричного ряду має вигляд

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

A végpontokat külön ellenőrizzük. Ha $x = 1$, akkor $\sum 1$ adódik, amely divergens. Ha $x = -1$, akkor $\sum(-1)^n$ adódik, amelynek részletösszegei nem tartanak határértékhez. Ezért a végpontok nem tartoznak a konvergenciahalmazhoz.

Кінці інтервалу перевіряємо окремо. При $x = 1$ одержуємо ряд $\sum 1$, який розбігається. При $x = -1$ одержуємо ряд $\sum(-1)^n$, частинні суми якого не мають границі. Тому кінці не належать до області збіжності.

A konvergenciahalmaz $(-1,1)$, az összeg $S(x) = \frac{1}{(1-x)}$. / Область збіжності $(-1,1)$, сума $S(x) = \frac{1}{(1-x)}$.

3. mintapélda / Зразок 3

Igazoljuk, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

függvénysor egyenletesen konvergens a valós számok halmazán. / Довести, що функціональний ряд рівномірно збігається на множині дійсних чисел.

Megoldás / Розв'язання. Minden valós x és minden n esetén teljesül, hogy $|\sin nx| \leq 1$. Ezért / Для всіх дійсних x і всіх n виконується $|\sin nx| \leq 1$. Тому

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

A jobb oldalon álló majoráló számsor / Мажорантний числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

konvergens, mert p-sor $p = 2$ kitevővel. A Weierstrass-kritérium alapján az eredeti függvénysor abszolút és egyenletesen konvergens minden valós x esetén. /

збігається, бо це p-ряд з показником $p = 2$. За ознакою Вейєрштрасса початковий функціональний ряд збігається абсолютно і рівномірно для всіх дійсних x.

A sor egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$-en. / Ряд рівномірно збігається на $\mathbb{R}$.

Gyakorlófeladatok / Тренувальні завдання

A1. Határozzuk meg az $f_n(x) = \frac{x}{n}$ függvénysorozat pontonkénti határfüggvényét a $\mathbb{R}$ halmazon. / Знайти поточкову граничну функцію послідовності $f_n(x) = \frac{x}{n}$ на множині $\mathbb{R}$.

Válasz / Відповідь: $f(x) = 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. / $f(x) = 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

A2. Határozzuk meg az $f_n(x) = x^n$ függvénysorozat pontonkénti határfüggvényét a $(-1,1)$ intervallumon. / Знайти поточкову граничну функцію послідовності $f_n(x) = x^n$ на інтервалі $(-1,1)$.

Válasz / Відповідь: $f(x) = 0$ minden $x \in (-1,1)$ esetén. / $f(x) = 0$ для всіх $x \in (-1,1)$.

A3. Határozzuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ függvénysor konvergenciahalmazát és összegét. / Знайти область збіжності та суму функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$.

Válasz / Відповідь: A konvergenciahalmaz $(-1,1)$, az összeg $S(x) = \frac{x}{(1-x)}$. / Область збіжності $(-1,1)$, сума $S(x) = \frac{x}{(1-x)}$.

A4. Igazoljuk a Weierstrass-kritériummal, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cosnx}{n^2}$ egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$-en. / Довести за ознакою Вейєрштрасса, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cosnx}{n^2}$ рівномірно збігається на $\mathbb{R}$.

Válasz / Відповідь: Mivel $\left|\frac{cosnx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$, és $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens, a sor egyenletesen konvergens. / Оскільки $\left|\frac{cosnx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum \frac{1}{n^2}$ збігається, ряд рівномірно збігається.

B1. Határozzuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ függvénysor konvergenciahalmazát. / Знайти область збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Válasz / Відповідь: $[-1,1)$. A belső pontokban $|x| < 1$ miatt konvergens; $x = 1$-nél harmonikus sor, $x = -1$-nél váltakozó harmonikus sor adódik. / $[-1,1)$. Усередині $|x| < 1$; при $x = 1$ маємо гармонічний ряд, при $x = -1$ — знакопочерговий гармонічний ряд.

B2. Határozzuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ függvénysor konvergenciahalmazát. / Знайти область збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

Válasz / Відповідь: $[-1,1]$. A belső pontokban abszolút konvergens, a végpontokban $\sum \frac{1}{n^2}$, illetve $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ adódik, mindkettő konvergens. / $[-1,1]$. Усередині ряд абсолютно збігається; у кінцях маємо $\sum \frac{1}{n^2}$ та $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$, обидва ряди збігаються.

B3. Vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^2+x^2}$ függvénysor egyenletes konvergenciáját a $[0,1]$ intervallumon. / Дослідити рівномірну збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^2+x^2}$ на відрізку $[0,1]$.

Válasz / Відповідь: Egyenletesen konvergens, mert $0 \le x \le 1$ esetén $\left|\frac{x}{(n^2+x^2)}\right| \le \frac{1}{n^2}$, és $\sum\frac{1}{n^2}$ konvergens. / Рівномірно збігається, бо при $0 \le x \le 1$ маємо $\left|\frac{x}{(n^2+x^2)}\right| \le \frac{1}{n^2}$а ряд $\sum\frac{1}{n^2}$ збігається.

B4. Határozzuk meg az $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ függvénysorozat pontonkénti határfüggvényét a $[0,1]$ intervallumon. / Знайти поточкову граничну функцію послідовності $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ на відрізку $[0,1]$.

Válasz / Відповідь: $f(0) = 0$, és ha $0 < x \le 1$, akkor $f_n(x) \to 0$, tehát $f(x) = 0$ az egész $[0,1]$ intervallumon. / $f(0) = 0$, а якщо $0 < x \le 1$, то $f_n(x) \to 0$, отже $f(x) = 0$ на всьому відрізку $[0,1]$.

C1. Bizonyítsuk be, hogy ha $|u_n(x)| \le M_n$ minden $x \in A$ esetén, és $\sum M_n$ konvergens, akkor $\sum u_n(x)$ minden $x \in A$ esetén abszolút konvergens. / Довести, що якщо $|u_n(x)| \le M_n$ для всіх $x \in A$ і ряд $\sum M_n$ збігається, то $\sum u_n(x)$ абсолютно збігається для кожного $x \in A$.

Válasz / Відповідь: Rögzített x mellett $\sum|u_n(x)| \le \sum M_n$, ezért a közvetlen összehasonlítási kritérium alapján $\sum|u_n(x)|$ konvergens. / Для фіксованого x маємо $\sum|u_n(x)| \le \sum M_n$, тому за прямою ознакою порівняння ряд $\sum|u_n(x)|$ збігається.

C2. Adjunk példát olyan függvénysorozatra, amely pontonként konvergens a $[0,1]$ intervallumon, de nem egyenletesen konvergens. / Навести приклад функціональної послідовності, яка поточково збігається на $[0,1]$, але не збігається рівномірно.

Válasz / Відповідь: Például $f_n(x) = x^n$. A határfüggvény 0 ha $0 \le x < 1$, és 1 ha $x = 1$, ezért a konvergencia nem egyenletes. / Наприклад, $f_n(x) = x^n$. Гранична функція дорівнює 0 при $0 \le x < 1$ і 1 при $x = 1$, тому збіжність не є рівномірною.

Ellenőrző kérdések / Перевірте питання

1. Mit nevezünk függvénysorozatnak? / Що називають функціональною послідовністю?
2. Mit jelent a pontonkénti konvergencia? / Що означає поточкова збіжність?
3. Mit nevezünk függvénysornak? / Що називають функціональним рядом?
4. Mit jelent a függvénysor konvergenciahalmaza? / Що означає область збіжності функціонального ряду?
5. Mire használható a Weierstrass-kritérium? / Для чого застосовують ознаку Вейєрштрасса?

6. Miért nem ugyanaz a pontonkénti és az egyenletes konvergencia? / Чому поточкова і рівномірна збіжність не є однаковими?

3.2. Hatványsorok és konvergenciasugár / Степеневі ряди та радіус збіжності

Rövid elméleti összefoglaló / Короткий теоретичний огляд

Hatványsor / Степеневий ряд. Hatványsornak nevezzük az / Степеневим рядом називають функціональний ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

alakú függvénysort. Itt a_n a sor együtthatója, x_0 a középpont, x pedig a változó. Ha $x_0 = 0$, akkor a sor alakja / Тут a_n — коефіцієнт ряду, x_0 — центр ряду, а x — змінна. Якщо $x_0 = 0$, то ряд має вигляд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Konvergenciasugár / Радіус збіжності. A hatványsor konvergenciája a középpont körül alakul ki. Létezik egy $R \geq 0$ szám, amelyet konvergenciasugárnak nevezünk. Ha $|x - x_0| < R$, akkor a hatványsor abszolút konvergens; ha $|x - x_0| > R$, akkor divergens. A végpontokat, vagyis az $x = x_0 - R$ és $x = x_0 + R$ pontokat mindig külön kell vizsgálni.

Збіжність степеневого ряду розглядають навколо його центра. Існує число $R \geq 0$, яке називають радіусом збіжності. Якщо $|x - x_0| < R$, то степеневий ряд збігається абсолютно; якщо $|x - x_0| > R$, то розбігається. Кінці інтервалу, тобто точки $x = x_0 - R$ і $x = x_0 + R$, завжди потрібно перевіряти окремо.

A konvergenciasugár kiszámítása / Обчислення радіуса збіжності. Ha létezik a következő határérték, akkor gyakran használható a hányadosképlet: / Якщо існує відповідна границя, часто застосовують формулу через відношення коефіцієнтів:

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Másik gyakori alak a gyökképlet: / Інший поширений спосіб — формула через корінь:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

ha a nevezőben álló határérték létezik. A gyakorlati feladatokban először a belső intervallumot határozzuk meg, majd külön megvizsgáljuk a végpontokat.

якщо границя в знаменнику існує. У практичних завданнях спочатку визначають внутрішній інтервал збіжності, а потім окремо перевіряють кінці.

Kidolgozott mintapéldák / Розв'язані зразки

1. mintapélda / Зразок 1

Határozzuk meg a hatványsor konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát. / Знайти радіус та область збіжності степеневого ряду.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^n$$

Megoldás / Розв'язання. Itt $a_n = n$. A hányadosképletet használjuk: / Тут $a_n = n$. Застосуємо формулу через відношення коефіцієнтів:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Ezért a sor biztosan abszolút konvergens, ha $|x| < 1$, és divergens, ha $|x| > 1$. A végpontokat külön ellenőrizzük. Ha $x = 1$, akkor / Отже, ряд абсолютно збігається при $|x| < 1$ і розбігається при $|x| > 1$. Кінці перевіряємо окремо. При $x = 1$ маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} n$$

adódik, amely divergens, mert az általános tag nem tart nullához. Ha $x = -1$, akkor / цей ряд розбігається, бо загальний член не прямує до нуля. При $x = -1$ маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,(-1)^n$$

adódik, amely szintén divergens, mert az általános tag itt sem tart nullához. Így a konvergenciahalmaz $(-1,1)$.

цей ряд також розбігається, бо загальний член не прямує до нуля. Тому область збіжності дорівнює $(-1,1)$.

$R = 1$, a konvergenciahalmaz $(-1,1)$. / $R = 1$, область збіжності $(-1,1)$.

2. mintapélda / Зразок 2

Határozzuk meg a hatványsor konvergenciahalmazát. / Знайти область збіжності степеневого ряду.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$$

Megoldás / Розв'язання. A sor középpontja $x_0 = 2$, az együttható $a_n = 1/n$. A hányadosképlet szerint / Центр ряду $x_0 = 2$, коефіцієнт $a_n = 1/n$. За формулою через відношення коефіцієнтів

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1/(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1.$$

A belső konvergenciafeltétel: / Внутрішня умова збіжності:

$$|x-2| < 1.$$

Ebből $1 < x < 3$. A végpontokat külön vizsgáljuk. Ha $x = 1$, akkor $x - 2 = -1$, tehát / Звідси $1 < x < 3$. Кінці перевіряємо окремо. Якщо $x = 1$, то $x - 2 = -1$, тому маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

adódik, amely a Leibniz-kritérium alapján konvergens. Ha $x = 3$, akkor $x - 2 = 1$, tehát / цей ряд збігається за ознакою Лейбніца. Якщо $x = 3$, то $x - 2 = 1$, тому маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

adódik, amely divergens. Ezért a konvergenciahalmaz $[1,3)$.

цей ряд розбігається. Отже, область збіжності дорівнює $[1,3)$.

A konvergenciahalmaz $[1,3)$. / Область збіжності $[1,3)$.

3. mintapélda / Зразок 3

Határozzuk meg a hatványsor konvergenciasugarát. / Знайти радіус збіжності степеневого ряду.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Megoldás / Розв'язання. Itt $a_n = \frac{1}{n!}$. A hányadosképletet alkalmazzuk: / Тут $a_n = \frac{1}{n!}$. Застосуємо формулу через відношення коефіцієнтів:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

Ez azt jelenti, hogy a hatványsor minden valós x esetén konvergens. / Це означає, що степеневий ряд збігається для всіх дійсних x.

$R = \infty$, a konvergenciahalmaz $\mathbb{R}$. / $R = \infty$, область збіжності $\mathbb{R}$.

Gyakorlófeladatok / Тренувальні завдання

A1. Határozzuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ hatványsor konvergenciasugarát. / Знайти радіус збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$.

Válasz / Відповідь: $R = 1$.

A2. Határozzuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n\, x^n$ hatványsor konvergenciasugarát. / Знайти радіус збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n\, x^n$.

Válasz / Відповідь: $R = \frac{1}{3}$.

A3. Határozzuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n}$ hatványsor konvergenciahalmazát. / Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n}$.

Válasz / Відповідь: $[-2,0)$.

A4. Határozzuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hatványsor konvergenciasugarát. / Знайти радіус збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Válasz / Відповідь: $R = \infty$.

B1. Határozzuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} n\,(x-1)^n$ hatványsor konvergenciahalmazát. / Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} n\,(x-1)^n$.

Válasz / Відповідь: $(0,2)$. A végpontokban az általános tag nem tart nullához. / $(0,2)$. У кінцях загальний член не прямує до нуля.

B2. Határozzuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$ hatványsor konvergenciahalmazát. / Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$.

Válasz / Відповідь: $[1,3]$. Mindkét végpontban abszolút konvergens p-sor adódik. / $[1,3]$. В обох кінцях отримуємо абсолютно збіжний p-ряд.

B3. Határozzuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(x+3)^n}{n}$ hatványsor konvergenciahalmazát. / Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(x+3)^n}{n}$.

Válasz / Відповідь: $\left[-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right)$. A bal végpontban váltakozó harmonikus sor, a jobb végpontban harmonikus sor adódik. / $\left[-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right)$. У лівому кінці маємо знакопочерговий гармонічний ряд, у правому — гармонічний ряд.

B4. Határozzuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n n^2}$ hatványsor konvergenciahalmazát. / Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n n^2}$.

Válasz / Відповідь: $[-3,3]$. A végpontokban $\sum \frac{1}{n^2}$, illetve $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ adódik, mindkettő konvergens. / $[-3,3]$. У кінцях маємо $\sum \frac{1}{n^2}$ та $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$, обидва ряди збігаються.

C1. Magyarázzuk meg, miért kell a hatványsor konvergenciaintervallumának végpontjait külön megvizsgálni. / Пояснити, чому кінці інтервалу збіжності степеневого ряду потрібно перевіряти окремо.

Válasz / Відповідь: A konvergenciasugár csak a $|x - x_0| < R$ és $|x - x_0| > R$ esetekben dönt. A $|x - x_0| = R$ végpontokban különböző típusú számsorok adódhatnak, ezért külön vizsgálat szükséges. / Радіус збіжності дає висновок лише для $|x - x_0| < R$ і $|x - x_0| > R$. При $|x - x_0| = R$ можуть виникати різні числові ряди, тому потрібна окрема перевірка.

C2. Legyen $p > 0$. Osztályozzuk a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$ hatványsor végpontjainak viselkedését. / Нехай $p > 0$. Класифікувати поведінку степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$ у кінцях інтервалу збіжності.

Válasz / Відповідь: $R = 1$. $x = 1$-nél $\sum \frac{1}{n^p}$ adódik, amely $p > 1$ esetén konvergens. $x = -1$-nél váltakozó sor adódik, amely minden $p > 0$ esetén konvergens, és $p > 1$ esetén abszolút konvergens. / $R = 1$. При $x = 1$ маємо $\sum \frac{1}{n^p}$, що збігається при $p > 1$. При $x = -1$ маємо знакопочерговий ряд, який збігається для всіх $p > 0$ і абсолютно збігається при $p > 1$.

Ellenőrző kérdések / Перевірте питання

7. Mit nevezünk hatványsornak? / Що називають степеневим рядом?
8. Mit jelent a hatványsor középpontja? / Що означає центр степеневого ряду?
9. Mit nevezünk konvergenciasugárnak? / Що називають радіусом збіжності?
10. Miért kell külön vizsgálni a végpontokat? / Чому кінці інтервалу потрібно перевіряти окремо?
11. Milyen képletekkel számítható a konvergenciasugár? / За якими формулами можна обчислити радіус збіжності?
12. Mi a különbség a konvergenciasugár és a konvergenciahalmaz között? / У чому різниця між радіусом збіжності та областю збіжності?

3.3. Taylor- és Maclaurin-sorok / Ряди Тейлора і Маклорена

Rövid elméleti összefoglaló / Короткий теоретичний огляд

Taylor-sor / Ряд Тейлора. Ha az f függvénynek egy x_0 pont környezetében minden rendű deriváltja létezik, akkor a hozzá tartozó Taylor-sor alakja / Якщо функція f має похідні всіх порядків в околі точки x_0, то її ряд Тейлора має вигляд

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Itt $f^{(n)}(x_0)$ az n-edik derivált értéke az x_0 pontban. A jelölés arra figyelmeztet, hogy a Taylor-sor felírása önmagában még nem mindig jelenti azt, hogy a sor valóban az $f(x)$ függvényhez konvergál. Gyakorlati feladatokban az ismert elemi függvényeknél ezt a feltételt általában használhatjuk.

Тут $f^{(n)}(x_0)$ — значення похідної n-го порядку в точці x_0. Запис нагадує, що формальне побудування ряду Тейлора саме по собі ще не завжди гарантує збіжність ряду до функції $f(x)$. У практичних завданнях для основних елементарних функцій цю властивість зазвичай використовують.

Maclaurin-sor / Ряд Маклорена. A Maclaurin-sor a Taylor-sor speciális esete, amikor $x_0 = 0$: / Ряд Маклорена — це окремий випадок ряду Тейлора, коли $x_0 = 0$:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Gyakran használt Maclaurin-sorok / Часто використовувані ряди Маклорена. A gyakorlatban a következő alapsorokat használjuk leggyakrabban: / На практиці найчастіше використовують такі базові ряди:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad |x| < 1.$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \qquad -1 < x \leq 1.$$

Kidolgozott mintapéldák / Розв'язані зразки

1. mintapélda / Зразок 1

Írjuk fel az $f(x) = e^x$ függvény Maclaurin-sorát. / Записати ряд Маклорена функції $f(x) = e^x$.

Megoldás / Розв'язання. Az e^x függvény minden deriváltja önmaga: Функція e^x має похідні всіх порядків, і кожна похідна дорівнює самій функції:

$$f^{(n)}(x) = e^x.$$

Ezért az $x = 0$ helyen minden derivált értéke / Тому в точці $x = 0$ маємо

$$f^{(n)}(0) = e^0 = 1.$$

A Maclaurin-sor képletébe helyettesítve: / Підставляємо у формулу Маклорена:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Kiírva az első néhány tagot: / Перші члени ряду:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

2. mintapélda / Зразок 2

Fejtsük Maclaurin-sorba a $\sin(3x)$ függvényt. / Розвинути в ряд Маклорена функцію $\sin(3x)$.

Megoldás / Розв'язання. Kiindulunk a $\sin x$ ismert Maclaurin-sorából: / Використаємо відомий ряд Маклорена для $\sin x$:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

A $\sin(3x)$ függvényhez az x helyére $3x$-et írunk. Így / Для функції $\sin(3x)$ замість x підставляємо $3x$. Тоді

$$\sin(3x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Az első néhány tag: / Перші члени ряду:

$$\sin(3x) = 3x - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} - \cdots.$$

A sor minden valós x esetén konvergens, mert a szinusz Maclaurin-sora minden valós számon konvergens. / Ряд збігається для всіх дійсних x, бо ряд Маклорена функції синуса збігається на всій множині дійсних чисел.

A keresett sor / Шуканий ряд:

$$\sin(3x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

3. mintapélda / Зразок 3

Írjuk fel az $\ln(1+x)$ Maclaurin-sorát, majd adjuk meg az első négy nem nulla tagot. / Записати ряд Маклорена для $\ln(1+x)$ і подати перші чотири ненульові члени.

Megoldás / Розв'язання. A geometriai sorból indulunk ki: / Виходимо з геометричного ряду:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots, \qquad |t| < 1.$$

Integráljuk tagonként 0-tól x-ig: / Інтегруємо почленно від 0 до x:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \cdots)\, dt.$$

A bal oldal $\ln(1+x)$. A jobb oldalon tagonként integrálva: / Ліва частина дорівнює $\ln(1+x)$. У правій частині після почленного інтегрування маємо

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots.$$

Általános alakban: / У загальному вигляді:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \qquad -1 < x \leq 1.$$

A keresett sor első tagjai / Перші члени шуканого ряду:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots.$$

(Lektsiya-1_05_2020.pdf alapján átdolgozva / адаптовано за матеріалом.)

Gyakorlófeladatok / Тренувальні завдання

A1. Írjuk fel a $\cos x$ Maclaurin-sorának első négy nem nulla tagját. / Записати перші чотири ненульові члени ряду Маклорена для $\cos x$.

Válasz / Відповідь: $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$.

A2. Fejtsük sorba az e^{-x} függvényt. / Розвинути в ряд функцію e^{-x}.

Válasz / Відповідь: $e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$.

A3. Fejtsük sorba az e^{-x^2} függvényt. / Розвинути в ряд функцію e^{-x^2}.

Válasz / Відповідь: $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$.

A4. Írjuk fel a $\frac{1}{1+x}$ függvény Maclaurin-sorát. / Записати ряд Маклорена для функції $\frac{1}{1+x}$.

Válasz / Відповідь: $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, $|x| < 1$.

B1. Írjuk fel a $\sin(2x)$ Maclaurin-sorának általános tagját. / Записати загальний член ряду Маклорена для $\sin(2x)$.

Válasz / Відповідь:

$$\sin(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

B2. Írjuk fel az $\ln(1-x)$ Maclaurin-sorát. / Записати ряд Маклорена для $\ln(1-x)$.

Válasz / Відповідь:

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \qquad |x| < 1.$$

B3. Fejtsük sorba a $\cos(x^2)$ függvényt. / Розвинути в ряд функцію $\cos(x^2)$.

Válasz / Відповідь: $\cos(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!}$. / $\cos(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!}$.

B4. Fejtsük sorba az e^{2x} függvényt. / Розвинути в ряд функцію e^{2x}.

Válasz / Відповідь: $e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$. / $e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$.

C1. Az e^x Maclaurin-sorának első négy tagjával közelítsük $e^{0.1}$ értékét. / За першими чотирма членами ряду Маклорена для e^x наближено обчислити $e^{0.1}$.

Válasz / Відповідь: Az első négy taggal / За першими чотирма членами:

$$e^{0.1} \approx 1 + 0.1 + \frac{0.1^2}{2} + \frac{0.1^3}{6} = 1.105166 \ldots.$$

C2. Vezessük le az $\arctan x$ Maclaurin-sorát a $\frac{1}{1+x^2}$ sorának integrálásával. / Вивести ряд Маклорена для $\arctan x$ інтегруванням ряду для $\frac{1}{1+x^2}$.

Válasz / Відповідь: A kiinduló sor / Вихідний ряд:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots.$$

Integrálás után / Після інтегрування:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

A sor $|x| \leq 1$ esetén konvergens, a végpontokban feltételesen. / Ряд збігається при $|x| \leq 1$, у кінцях умовно.

Ellenőrző kérdések / Перевірте питання

1. Mit nevezünk Taylor-sornak? / Що називають рядом Тейлора?
2. Mit nevezünk Maclaurin-sornak? / Що називають рядом Маклорена?
3. Mi a különbség a Taylor- és a Maclaurin-sor között? / У чому різниця між рядом Тейлора і рядом Маклорена?

4. Melyik alapsorból vezethető le a $\ln(1+x)$ sora? / З якого базового ряду можна вивести ряд для $\ln(1+x)$?
5. Miért hasznosak a Taylor- és Maclaurin-sorok közelítő számításokban? / Чому ряди Тейлора і Маклорена корисні в наближених обчисленнях?
6. Mire kell figyelni, amikor ismert alapsorba x helyére összetettebb kifejezést helyettesítünk? / На що треба звертати увагу, коли в відомий базовий ряд замість x підставляють складніший вираз?

4. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK / ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

A fejezet a többváltozós függvények vizsgálatához szükséges alapfogalmakat és módszereket foglalja össze. A gyakorlati feladatokban a hallgatók határértéket, folytonosságot, parciális deriváltakat, teljes differenciált, magasabb rendű deriváltakat, Taylor-közelítést, szélsőértékeket, implicit deriváltakat, valamint érintőket és normálisokat határoznak meg.

Розділ узагальнює основні поняття та методи, необхідні для дослідження функцій багатьох змінних. У практичних завданнях студенти визначають границі, неперервність, частинні похідні, повний диференціал, похідні вищих порядків, наближення за формулою Тейлора, екстремуми, неявні похідні, а також дотичні та нормалі.

4.1. Többváltozós határérték, folytonosság és parciális derivált / Границя, неперервність і частинні похідні функцій багатьох змінних

Rövid elméleti összefoglaló / Короткий теоретичний огляд

Többváltozós függvény / Функція багатьох змінних. Kétváltozós függvénynek nevezzük az olyan hozzárendelést, amely az (x, y) számpárhoz egy valós számot rendel:

$$f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad z = f(x, y).$$

A függvény értelmezési tartománya azoknak a pontoknak a halmaza, amelyekre a képlet értelmezhető.

Функцією двох змінних називають відповідність, яка кожній парі чисел (x, y) ставить у відповідність одне дійсне число:

$$f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad z = f(x, y).$$

Областю визначення функції є множина тих точок, у яких формула має зміст.

Határérték és folytonosság / Границя і неперервність. Azt mondjuk, hogy

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L,$$

ha az (x, y) pont az (a, b) ponthoz közeledve a függvényértékek az L számhoz közelednek. A határértéknek minden úton ugyanahhoz az értékhez kell tartania. A függvény folytonos az (a, b) pontban, ha értelmezve van ott, létezik a határértéke, és

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

Кажуть, що

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L,$$

якщо при наближенні точки (x, y) до точки (a, b) значення функції наближаються до числа L. Границя має бути однаковою для всіх шляхів наближення. Функція неперервна в точці (a, b), якщо вона там визначена, границя існує і

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

Parciális deriváltak / Частинні похідні. A parciális derivált azt mutatja meg, hogyan változik a függvény az egyik változó szerint, miközben a másik változót rögzítjük:

Частинна похідна показує, як змінюється функція за однією змінною, якщо іншу змінну фіксуємо:

$$f_x(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h},$$

$$f_y(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}.$$

A parciális deriváltak létezése önmagában még nem jelenti azt, hogy a függvény folytonos vagy differenciálható. Ezért a gyakorlati feladatokban mindig figyelni kell arra, pontosan melyik tulajdonságot kell igazolni.

Саме існування частинних похідних ще не гарантує неперервності або диференційовності функції. Тому в практичних завданнях потрібно уважно перевіряти, яку саме властивість треба довести.

Kidolgozott mintapéldák / Розв'язані зразки

1. mintapélda / Зразок 1

Határozzuk meg az függvény értelmezési tartományát, és mondjuk meg, hol folytonos. / Знайти область визначення функції і вказати, де вона неперервна.

$$f(x,y) = \ln(4 - x^2 - y^2)$$

Megoldás / Розв'язання. A logaritmus csak pozitív argumentum esetén értelmezett, ezért a zárójelben álló kifejezésnek pozitívnak kell lennie:

Логарифм визначений лише тоді, коли його аргумент додатний, тому вираз у дужках має бути додатним:

$$4 - x^2 - y^2 > 0.$$

Ebből / Звідси отримуємо

$$x^2 + y^2 < 4$$

adódik. Ez a síkban a középpontú, 2 sugarú kör belseje. A logaritmus és a polinomok a saját értelmezési tartományukon folytonosak, ezért az összetett függvény is folytonos minden olyan pontban, ahol $x^2 + y^2 < 4$.

Це внутрішність круга з центром у початку координат і радіусом 2. Логарифм і поліноми неперервні у своїх областях визначення, тому складена функція неперервна в усіх точках, де $x^2 + y^2 < 4$.

Az értelmezési tartomány $D = \{(x, y): x^2 + y^2 < 4\}$, és a függvény ezen a tartományon folytonos. / Область визначення $D = \{(x, y): x^2 + y^2 < 4\}$, і функція неперервна на цій області.

2. mintapélda / Зразок 2

Számítsuk ki a következő határértéket: / Обчислити границю:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Megoldás / Розв'язання. A nevező $x^2 + y^2$, amely nemnegatív, és a $(0,0)$ pont kivételével pozitív. A kifejezést becsléssel vizsgáljuk. Mivel

Знаменник $x^2 + y^2$ невід'ємний і додатний у всіх точках, крім $(0,0)$. Дослідимо вираз за допомогою оцінки. Оскільки

$$0 \le \frac{x^2}{x^2 + y^2} \le 1,$$

ezért / то

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = |y| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \le |y|.$$

Ha $(x, y) \to (0,0)$, akkor $|y| \to 0$. A rendőrelv alapján az eredeti kifejezés határértéke is 0.

Якщо $(x, y) \to (0,0)$, то $|y| \to 0$. За теоремою про двох міліціонерів початкова границя також дорівнює 0.

A határérték 0. / Границя дорівнює 0.

3. mintapélda / Зразок 3

Határozzuk meg az függvény parciális deriváltjait, majd számítsuk ki azokat az $(1,0)$ pontban. / Знайти частинні похідні функції а потім обчислити їх у точці $(1,0)$.

$$f(x, y) = x^2 y + \sin(xy)$$

Megoldás / Розв'язання. Az x szerinti deriváláskor y-t állandónak tekintjük. Így / При диференціюванні за x змінну y вважаємо сталою. Тому

$$f_x(x, y) = 2xy + y\cos(xy).$$

Az y szerinti deriváláskor x állandó, ezért / При диференціюванні за y сталою є змінна x, отже

$$f_y(x, y) = x^2 + x\cos(xy).$$

Most behelyettesítjük az $(1,0)$ pontot. Mivel $xy = 0$, ezért $\cos(xy) = \cos 0 = 1$. Így / Підставляємо точку $(1,0)$. Оскільки $xy = 0$, то $\cos(xy) = \cos 0 = 1$. Маємо

$$f_x(1,0) = 2 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0,$$

$$f_y(1,0) = 1^2 + 1 \cdot 1 = 2.$$

$f_x(x,y) = 2xy + y\cos(xy)$, $f_y(x,y) = x^2 + x\cos(xy)$; $f_x(1,0) = 0$, $f_y(1,0) = 2$.

Gyakorlófeladatok / Тренувальні завдання

A1. Határozzuk meg az $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ függvény értelmezési tartományát. / Знайти область визначення функції $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Válasz / Відповідь: $x^2 + y^2 \leq 9$. / $x^2 + y^2 \leq 9$.

A2. Döntsük el, létezik-e a $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ határérték. / Визначити, чи існує границя $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

Válasz / Відповідь: Nem létezik; az $y = 0$ úton 0, az $y = x$ úton $1/2$ adódik. / Не існує; вздовж $y = 0$ маємо 0, а вздовж $y = x$ маємо $1/2$.

A3. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^3 + y^2$ parciális deriváltjait. / Знайти частинні похідні функції $f(x,y) = x^3 + y^2$.

Válasz / Відповідь: $f_x = 3x^2$, $f_y = 2y$.

A4. Hol folytonos az $f(x,y) = \frac{x+y}{1+x^2+y^2}$ függvény? / Де неперервна функція $f(x,y) = \frac{x+y}{1+x^2+y^2}$?

Válasz / Відповідь: Minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban, mert a nevező mindig pozitív. / У всіх точках $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, бо знаменник завжди додатний.

B1. Számítsuk ki a $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2 + y^2}$ határértéket. / Обчислити границю $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2 + y^2}$.

Válasz / Відповідь: 0.

B2. Határozzuk meg az $f(x,y) = \ln(y - x^2)$ értelmezési tartományát. / Знайти область визначення функції $f(x,y) = \ln(y - x^2)$.

Válasz / Відповідь: $y > x^2$.

B3. Határozzuk meg az $f(x,y) = e^{xy}$ parciális deriváltjait. / Знайти частинні похідні функції $f(x,y) = e^{xy}$.

Válasz / Відповідь: $f_x = ye^{xy}$, $f_y = xe^{xy}$.

B4. Döntsük el, létezik-e a $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$ határérték. / Визначити, чи існує границя $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$.

Válasz / Відповідь: Nem létezik; az $y = 0$ úton 1, az $x = 0$ úton 0 adódik. / Не існує; вздовж $y = 0$ маємо 1, а вздовж $x = 0$ маємо 0.

C1. Fogalmazzuk meg, hogyan cáfolható egy kétváltozós határérték létezése különböző utak segítségével. / Сформулювати, як можна спростувати існування границі функції двох змінних за допомогою різних шляхів.

Válasz / Відповідь: Ha két különböző úton más határértéket kapunk, akkor a kétváltozós határérték nem létezik. / Якщо вздовж двох різних шляхів отримуємо різні границі, то границя функції двох змінних не існує.

C2. Adjunk példát olyan függvényre, amelynek az origóban léteznek a parciális deriváltjai, de nem folytonos ott. / Навести приклад функції, яка має частинні похідні в початку координат, але не є неперервною там.

Válasz / Відповідь: Például $f(0,0) = 0$, és ha $(x, y) \neq (0,0)$, akkor $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Az origóban a parciális deriváltak léteznek, de az $y = x$ úton a függvény $\frac{1}{2}$-hez tart, ezért nem folytonos. / Наприклад, $f(0,0) = 0$, а при $(x, y) \neq (0,0)$ legyen $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. У початку координат частинні похідні існують, але вздовж $y = x$ функція прямує до $\frac{1}{2}$, тому вона не є неперервною.

Ellenőrző kérdések / Перевірте питання

1. Mit nevezünk kétváltozós függvénynek? / Що називають функцією двох змінних?
2. Mit jelent egy kétváltozós függvény értelmezési tartománya? / Що означає область визначення функції двох змінних?
3. Miért kell több úton is vizsgálni a kétváltozós határértéket? / Чому границю функції двох змінних треба перевіряти вздовж різних шляхів?
4. Mikor folytonos egy kétváltozós függvény egy pontban? / Коли функція двох змінних неперервна в точці?
5. Mit jelent a parciális derivált? / Що означає частинна похідна?
6. Miért nem elég a parciális deriváltak létezése a folytonosság igazolásához? / Чому існування частинних похідних не достатнє для доведення неперервності?

4.2. Teljes differenciál, magasabb deriváltak és Taylor-képlet / Повний диференціал, похідні вищих порядків і формула Тейлора

Rövid elméleti összefoglaló / Короткий теоретичний огляд

Teljes differenciál / Повний диференціал. Ha az $f(x, y)$ függvény differenciálható, akkor kis változások esetén a függvény megváltozása közelíthető a teljes differenciállal:

$$df = f_x(x, y)\,dx + f_y(x, y)\,dy.$$

Ez azt jelenti, hogy ha x és y kicsit változik, akkor az f értékének változását első közelítésben a parciális deriváltak segítségével becsüljük.

Якщо функція $f(x,y)$ диференційовна, то при малих змінах змінних зміну функції можна наближено описати повним диференціалом:

$$df = f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy.$$

Це означає, що при малих змінах x і y зміну значення функції в першому наближенні оцінюють за допомогою частинних похідних.

Magasabb rendű deriváltak / Похідні вищих порядків. A második parciális deriváltak: / Другі частинні похідні мають вигляд:

$$f_{xx}, \qquad f_{xy}, \qquad f_{yx}, \qquad f_{yy}.$$

Ha a vegyes második deriváltak folytonosak egy pont környezetében, akkor / Якщо змішані похідні другого порядку неперервні в околі точки, то

$$f_{xy} = f_{yx}.$$

Taylor-képlet két változó esetén / Формула Тейлора для двох змінних. Az (a,b) pont környezetében a másodrendű Taylor-közelítés alakja: / У околі точки (a,b) наближення Тейлора другого порядку має вигляд:

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) &\\ &\approx f(a,b) + f_x(a,b)h + f_y(a,b)k \\ &+ \frac{1}{2}\big(f_{xx}(a,b)h^2 + 2f_{xy}(a,b)hk + f_{yy}(a,b)k^2\big). \end{aligned}$$

Kidolgozott mintapéldák / Розв’язані зразки

1. mintapélda / Зразок 1

Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2y + e^y$ függvény teljes differenciálját az $(1,0)$ pontban. / Знайти повний диференціал функції $f(x,y) = x^2y + e^y$ у точці $(1,0)$.

Megoldás / Розв’язання. Először kiszámítjuk a parciális deriváltakat: / Спочатку обчислюємо частинні похідні:

$$f_x(x,y) = 2xy,$$
$$f_y(x,y) = x^2 + e^y.$$

Az $(1,0)$ pontban / У точці $(1,0)$ маємо

$$f_x(1,0) = 0,$$
$$f_y(1,0) = 1 + 1 = 2.$$

A teljes differenciál képlete szerint / За формулою повного диференціала

$$df = f_x(1,0)\,dx + f_y(1,0)\,dy = 2\,dy.$$

$df = 2\,dy$ az $(1,0)$ pontban. / $df = 2\,dy$ у точці $(1,0)$.

2. mintapélda / Зразок 2

Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2y + y^3$ függvény második parciális deriváltjait. / Знайти другі частинні похідні функції $f(x,y) = x^2y + y^3$.

Megoldás / Розв'язання. Először az első parciális deriváltakat számítjuk ki:/ Спочатку знайдемо перші частинні похідні:

$$f_x = 2xy,$$
$$f_y = x^2 + 3y^2.$$

Ezután ezeket ismét deriváljuk. Az f_x függvényt x szerint deriválva: / Потім знову диференціюємо ці похідні. Диференціюючи f_x за x, маємо

$$f_{xx} = 2y.$$

Az f_x függvényt y szerint deriválva: / Диференціюючи f_x за y, маємо

$$f_{xy} = 2x.$$

Az f_y függvényt x szerint deriválva: / Диференціюючи f_y за x, маємо

$$f_{yx} = 2x.$$

Az f_y függvényt y szerint deriválva: / Диференціюючи f_y за y, маємо

$$f_{yy} = 6y.$$

Látható, hogy $f_{xy} = f_{yx}$. / Бачимо, що $f_{xy} = f_{yx}$.

$f_{xx} = 2y$, $f_{xy} = 2x$, $f_{yx} = 2x$, $f_{yy} = 6y$.

3. mintapélda / Зразок 3

Írjuk fel az $f(x,y) = e^{x+y}$ függvény másodrendű Taylor-közelítését a $(0,0)$ pont környezetében. / Записати наближення Тейлора другого порядку для функції $f(x,y) = e^{x+y}$ в околі точки $(0,0)$.

Megoldás / Розв'язання. A függvény és minden első, illetve második parciális deriváltja az $(0,0)$ pontban 1, mert $e^{0+0} = 1$. Ezért / Функція та всі її перші й другі частинні похідні в точці $(0,0)$ дорівнюють 1, бо $e^{0+0} = 1$. Тому

$$f(0,0) = 1,$$
$$f_x(0,0) = 1, \qquad f_y(0,0) = 1,$$
$$f_{xx}(0,0) = 1, \qquad f_{xy}(0,0) = 1, \qquad f_{yy}(0,0) = 1.$$

A másodrendű Taylor-képletbe $a = 0,\ b = 0,\ h = x,\ k = y$ értékeket helyettesítünk: / У формулу Тейлора другого порядку підставляємо $a = 0, b = 0, h = x, k = y$:

$$f(x,y) \approx 1 + x + y + \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2).$$

$e^{x+y} \approx 1 + x + y + \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2)$.

Gyakorlófeladatok / Тренувальні завдання

A1. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2 + y^2$ teljes differenciálját. / Знайти повний диференціал функції $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Válasz / Відповідь: $df = 2x\,dx + 2y\,dy$.

A2. Határozzuk meg az $f(x,y) = \ln(xy)$ teljes differenciálját. / Знайти повний диференціал функції $f(x,y) = \ln(xy)$.

Válasz / Відповідь: $df = \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{y}\,dy, xy > 0$.

A3. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2y^3$ második parciális deriváltjait. / Знайти другі частинні похідні функції $f(x,y) = x^2y^3$.

Válasz / Відповідь: $f_{xx} = 2y^3$, $f_{xy} = 6xy^2$, $f_{yx} = 6xy^2$, $f_{yy} = 6x^2y$.

A4. Írjuk fel az $f(x,y) = \sqrt{x+y}$ lineáris közelítését az $(1,3)$ pont környezetében. / Записати лінійне наближення функції $f(x,y) = \sqrt{x+y}$ в околі точки $(1,3)$.

Válasz / Відповідь: $f(1,3) = 2$, $f_x(1,3) = f_y(1,3) = 1/4$, ezért $f(x,y) \approx 2 + \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{4}(y-3)$.

B1. Határozzuk meg az $f(x,y) = xe^y$ teljes differenciálját a $(2,0)$ pontban. / Знайти повний диференціал функції $f(x,y) = xe^y$ у точці $(2,0)$.

Válasz / Відповідь: $df = dx + 2dy$.

B2. Teljes differenciál segítségével közelítsük az $f(x,y) = x^2 + y^2$ értékét az $(1.02,1.98)$ pontban az $(1,2)$ pontból kiindulva. / За допомогою повного диференціала наближено обчислити значення $f(x,y) = x^2 + y^2$ у точці $(1.02,1.98)$, виходячи з точки $(1,2)$.

Válasz / Відповідь: $f(1,2) = 5$, $df = 2 \cdot 1 \cdot 0.02 + 2 \cdot 2 \cdot (-0.02) = -0.04$, ezért $f(1.02,1.98) \approx 4.96$.

B3. Igazoljuk, hogy az $f(x,y) = x^2y^3 + \cos(x+y)$ függvény esetén $f_{xy} = f_{yx}$. / Довести, що для функції $f(x,y) = x^2y^3 + \cos(x+y)$ виконується $f_{xy} = f_{yx}$.

Válasz / Відповідь: Mindkét vegyes derivált $6xy^2 - \cos(x+y)$. / Обидві змішані похідні дорівнюють $6xy^2 - \cos(x+y)$.

B4. Írjuk fel az $f(x,y)=\ln(1+x+y)$ másodrendű Taylor-közelítését az origó környezetében. / Записати наближення Тейлора другого порядку для $f(x,y)=\ln(1+x+y)$ в околі початку координат.

Válasz / Відповідь: $\ln(1+x+y)\approx x+y-\frac{1}{2}(x+y)^2$.

Ellenőrző kérdések / Перевірте питання

1. Mit nevezünk teljes differenciálnak? / Що називають повним диференціалом?
2. Hogyan használható a teljes differenciál közelítő számításban? / Як повний диференціал використовують у наближених обчисленнях?
3. Mit jelentenek a második parciális deriváltak? / Що означають другі частинні похідні?
4. Milyen feltétel mellett egyezik meg f_{xy} és f_{yx}? / За якої умови збігаються f_{xy} і f_{yx}?
5. Milyen tagokat tartalmaz a kétváltozós másodrendű Taylor-képlet? / Які члени містить формула Тейлора другого порядку для двох змінних?
6. Mire kell figyelni Taylor-közelítés alkalmazásakor? / На що потрібно звертати увагу при застосуванні наближення Тейлора?

4.3. Szélsőértékek, implicit függvények, érintő és normális / Екстремуми, неявні функції, дотична і нормаль

Rövid elméleti összefoglaló / Короткий теоретичний огляд

Szélsőérték / Екстремум. Ha az $f(x,y)$ differenciálható függvénynek belső pontban lokális szélsőértéke van, akkor szükséges feltétel, hogy

$$f_x(a,b)=0, \qquad f_y(a,b)=0.$$

Az ilyen pontokat kritikus pontoknak nevezzük. A második deriváltak alapján gyakran a Hess-féle determinánst használjuk:

$$D=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-\Big(f_{xy}(a,b)\Big)^2.$$

Ha $D>0$ és $f_{xx}(a,b)>0$, akkor lokális minimum van. Ha $D>0$ és $f_{xx}(a,b)<0$, akkor lokális maximum van. Ha $D<0$, akkor nyeregpont van. Ha $D=0$, a próba nem dönt.

Якщо диференційовна функція $f(x,y)$ має локальний екстремум у внутрішній точці, то необхідною умовою є

$$f_x(a,b)=0, \qquad f_y(a,b)=0.$$

Такі точки називають критичними. Для дослідження часто використовують визначник Гессе:

$$D=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-\Big(f_{xy}(a,b)\Big)^2.$$

Якщо $D > 0$ і $f_{xx}(a,b) > 0$, то маємо локальний мінімум. Якщо $D > 0$ і $f_{xx}(a,b) < 0$, то маємо локальний максимум. Якщо $D < 0$, то маємо сідлову точку. Якщо $D = 0$, ознака не дає відповіді.

Implicit függvény / Неявна функція. Ha egy görbét az

$$F(x,y) = 0$$

egyenlet ad meg, és $F_y(a,b) \neq 0$, akkor a görbe közelében y kifejezhető x függvényeként, és

$$y' = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Якщо крива задана рівнянням

$$F(x,y) = 0,$$

і $F_y(a,b) \neq 0$, то поблизу цієї точки y можна розглядати як функцію від x, причому

$$y' = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Érintő és normális / Дотична і нормаль. Az $F(x,y) = 0$ szintgörbe érintőegyenlete az (a,b) pontban:

$$F_x(a,b)(x-a) + F_y(a,b)(y-b) = 0.$$

A gradiensvektor a görbe normálisának irányát adja. A $z = f(x,y)$ felület érintősíkja az $\big(a,b,f(a,b)\big)$ pontban:

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b).$$

A felület normálvektora választható így:

$$\vec{n} = \big(-f_x(a,b), -f_y(a,b), 1\big).$$

Дотична до лінії рівня $F(x,y) = 0$ у точці (a,b) має рівняння

$$F_x(a,b)(x-a) + F_y(a,b)(y-b) = 0.$$

Вектор градієнта задає напрям нормалі до кривої. Дотична площина до поверхні $z = f(x,y)$ у точці $\big(a,b,f(a,b)\big)$ має вигляд

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b).$$

Нормальний вектор до поверхні можна вибрати так:

$$\vec{n} = \big(-f_x(a,b), -f_y(a,b), 1\big).$$

Kidolgozott mintapéldák / Розв’язані зразки

1. mintapélda / Зразок 1

Határozzuk meg az függvény lokális szélsőértékét. / Знайти локальний екстремум функції

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y.$$

Megoldás / Розв'язання. Először kiszámítjuk az első parciális deriváltakat: / Спочатку знайдемо перші частинні похідні:

$$f_x = 2x - 2,$$
$$f_y = 2y + 4.$$

A kritikus pont feltétele $f_x = 0$ és $f_y = 0$. Innen / У критичній точці $f_x = 0$ і $f_y = 0$. Звідси

$$2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1,$$
$$2y + 4 = 0 \Rightarrow y = -2.$$

A második deriváltak: / Другі похідні:

$$f_{xx} = 2, \qquad f_{yy} = 2, \qquad f_{xy} = 0.$$

Ezért / Тому

$$D = 2 \cdot 2 - 0^2 = 4 > 0,$$

és $f_{xx} = 2 > 0$, tehát lokális minimum van. A minimumérték: / а $f_{xx} = 2 > 0$, отже маємо локальний мінімум. Значення мінімуму:

$$f(1, -2) = 1 + 4 - 2 - 8 = -5.$$

A függvénynek lokális minimuma van az $(1, -2)$ pontban, értéke -5. / Функція має локальний мінімум у точці $(1, -2)$, його значення -5.

2. mintapélda / Зразок 2

Az $x^2 + y^2 = 25$ körön határozzuk meg az implicit deriváltat, majd számítsuk ki az érintő meredekségét a $(3,4)$ pontban. / Для кола $x^2 + y^2 = 25$ знайти неявну похідну і обчислити кутовий коефіцієнт дотичної в точці $(3,4)$.

Megoldás / Розв'язання. Írjuk a görbét $F(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$ alakba. Ekkor / Запишемо криву у вигляді $F(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$. Тоді

$$F_x = 2x,$$
$$F_y = 2y.$$

Az implicit deriválás képlete szerint За формулою неявного диференціювання

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

A $(3,4)$ pontban / У точці $(3,4)$ маємо

$$y'(3,4) = -\frac{3}{4}.$$

$y' = -x/y$, az érintő meredeksége a $(3,4)$ pontban $-3/4$. / $y' = -x/y$, кутовий коефіцієнт дотичної в точці $(3,4)$ дорівнює $-3/4$.

3. mintapélda / Зразок 3

Írjuk fel a $z = x^2 + y^2$ felület érintősíkját és egy normálisának irányvektorát az $(1,2,5)$ pontban. / Записати дотичну площину до поверхні $z = x^2 + y^2$ і напрямний вектор нормалі в точці $(1,2,5)$.

Megoldás / Розв'язання. A felületet $z = f(x, y)$ alakban adjuk meg, ahol / Поверхню подано у вигляді $z = f(x, y)$, де

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

A parciális deriváltak: / Частинні похідні:

$$f_x = 2x,$$
$$f_y = 2y.$$

Az $(1,2)$ pontban / У точці $(1,2)$ маємо

$$f_x(1,2) = 2,$$
$$f_y(1,2) = 4.$$

Az érintősík képlete: / Формула дотичної площини:

$$z = f(1,2) + f_x(1,2)(x - 1) + f_y(1,2)(y - 2).$$

Mivel $f(1,2) = 5$, ezért / Оскільки $f(1,2) = 5$, то

$$z = 5 + 2(x - 1) + 4(y - 2).$$

A normális irányvektora választható így: / Напрямний вектор нормалі можна вибрати так:

$$\vec{n} = (-2, -4,1).$$

Az érintősík $z = 5 + 2(x - 1) + 4(y - 2)$, egy normális irányvektora $(-2, -4,1)$. / Дотична площина $z = 5 + 2(x - 1) + 4(y - 2)$, напрямний вектор нормалі $(-2, -4,1)$.

Gyakorlófeladatok / Тренувальні завдання

A1. Keressük meg az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvény kritikus pontját és típusát. / Знайти критичну точку і тип екстремуму функції $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Válasz / Відповідь: Kritikus pont $(0,0)$, lokális minimum. / Критична точка $(0,0)$, локальний мінімум.

A2. Osztályozzuk az $f(x, y) = x^2 - y^2$ függvény $(0,0)$ pontját. / Класифікувати точку $(0,0)$ для функції $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Válasz / Відповідь: Nyeregpont, mert $D < 0$. / Сідлова точка, бо $D < 0$.

A3. Határozzuk meg az implicit deriváltat az $xy + y^2 = 3$ egyenletből. / Знайти неявну похідну з рівняння $xy + y^2 = 3$.

Válasz / Відповідь: $y' = -\frac{y}{x+2y}$.

A4. Írjuk fel az $x^2 + y^2 = 1$ kör érintőjét az $(1,0)$ pontban. / Записати дотичну до кола $x^2 + y^2 = 1$ у точці $(1,0)$.

Válasz / Відповідь: $x = 1$.

B1. Keressük meg és osztályozzuk az $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ függvény kritikus pontját. / Знайти й класифікувати критичну точку функції $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$.

Válasz / Відповідь: Kritikus pont $(0,0)$, lokális minimum; $D = 3 > 0$, $f_{xx} = 2 > 0$. / Критична точка $(0,0)$, локальний мінімум; $D = 3 > 0$, $f_{xx} = 2 > 0$.

B2. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1$ függvény lokális szélsőértékét. / Знайти локальний екстремум функції $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1$.

Válasz / Відповідь: Lokális minimum az $(-1,2)$ pontban, értéke -4. / Локальний мінімум у точці $(-1,2)$, значення -4.

B3. Írjuk fel a $z = xy$ felület érintősíkját az $(1,2,2)$ pontban. / Записати дотичну площину до поверхні $z = xy$ у точці $(1,2,2)$.

Válasz / Відповідь: $z = 2 + 2(x-1) + (y-2)$.

B4. Adjunk meg egy normális irányvektort a $z = x^2 + y^2$ felülethez az $(1,1,2)$ pontban. / Подати напрямний вектор нормалі до поверхні $z = x^2 + y^2$ у точці $(1,1,2)$.

Válasz / Відповідь: $\vec{n} = (-2,-2,1)$.

C1. Magyarázzuk meg, mit jelent, ha a Hess-féle determináns $D = 0$. / Пояснити, що означає випадок, коли визначник Гессе $D = 0$.

Válasz / Відповідь: A második deriváltak próbája ilyenkor nem dönt; külön vizsgálat szükséges. / Ознака за другими похідними не дає відповіді; потрібне окреме дослідження.

C2. Miért merőleges a gradiensvektor az $F(x,y) = 0$ szintgörbe érintőjére? / Чому вектор градієнта перпендикулярний до дотичної лінії рівня $F(x,y) = 0$?

Válasz / Відповідь: A görbe mentén F állandó, ezért az érintőirány szerinti derivált nulla. Ez azt jelenti, hogy a gradiens skaláris szorzata az érintő irányvektorával nulla, tehát merőlegesek. / Уздовж кривої функція F є сталою, тому похідна в напрямі дотичної дорівнює нулю. Це означає, що скалярний добуток градієнта і напрямного вектора дотичної дорівнює нулю, отже вони перпендикулярні.

Ellenőrző kérdések / Перевірте питання

7. Mi a lokális szélsőérték szükséges feltétele differenciálható függvény esetén? / Яка необхідна умова локального екстремуму для диференційовної функції?
8. Mit nevezünk kritikus pontnak? / Що називають критичною точкою?
9. Hogyan használjuk a Hess-féle determinánst? / Як використовують визначник Гессе?

10. Mi az implicit deriválás alapképlete? / Яка основна формула неявного диференціювання?
11. Hogyan írjuk fel egy szintgörbe érintőjét? / Як записують дотичну до лінії рівня?

MODULZÁRÓ MINTAFELADATOK / ЗРАЗКИ ЗАВДАНЬ МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЮ

A modulzáró mintafeladatok célja, hogy a hallgatók áttekintsék a félév gyakorlati anyagának legfontosabb feladattípusait. A feladatsorok a számsorok, a függvény- és hatványsorok, a Taylor- és Maclaurin-sorok, valamint a többváltozós függvények alapvető vizsgálati módszereit kapcsolják össze. A mintafeladatok nem kizárólagos vizsgafeladatok, hanem gyakorlási és önellenőrzési célt szolgálnak.

Мета зразків завдань модульного контролю полягає в тому, щоб студенти узагальнили найважливіші типи практичних завдань семестру. Варіанти поєднують числові ряди, функціональні та степеневі ряди, ряди Тейлора і Маклорена, а також основні методи дослідження функцій багатьох змінних. Зразки завдань не є єдино можливими контрольними завданнями, а призначені для тренування та самоперевірки.

1. feladat / Завдання 1. Vizsgáljuk meg a következő sor konvergenciáját határértékes összehasonlítási kritériummal: / Дослідити збіжність ряду за допомогою граничної ознаки порівняння:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2.$$

Rövid megoldás / Коротке розв'язання. Nagy n esetén a számláló fő tagja n^2, a nevező fő tagja n^3, ezért a sor általános tagja az $1/n^2$ sor tagjához hasonlítható. A határérték:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+n^3}{1+n^3}\right)^2=1.$$

Mivel a határérték pozitív és véges, valamint a $\sum\frac{1}{n^2}$ sor konvergens, az adott sor is konvergens. / Оскільки границя додатна і скінченна, а ряд $\sum\frac{1}{n^2}$ збіжний, то даний ряд також збіжний.

2. feladat / Завдання 2. Vizsgáljuk meg D'Alembert-kritériummal a következő sort: / Дослідити ряд за ознакою Д'Аламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,(2n+1)!}{(3n)!}.$$

Rövid megoldás / Коротке розв'язання. Jelöljük az általános tagot a_n-nel. D'Alembert-kritériumhoz az a_{n+1}/a_n hányadost számítjuk:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!\,(2n+3)!}{(3n+3)!}\cdot\frac{(3n)!}{n!\,(2n+1)!}=\frac{(n+1)(2n+2)(2n+3)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}.$$

A határérték:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+2)(2n+3)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}=\frac{4}{27}<1.$$

Ezért a sor konvergens. / Отже, за ознакою Д'Аламбера ряд збіжний.

3. feladat / Завдання 3. Vizsgáljuk meg az abszolút és feltételes konvergenciát: / Дослідити абсолютну та умовну збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}.$$

Rövid megoldás / Коротке розв'язання. A pozitív tagokból álló $b_n=\frac{n}{n^2+1}$ sorozat nullához tart, és $n\geq 2$ esetén csökkenő. Ezért a Leibniz-kritérium alapján az eredeti váltakozó sor konvergens. Az abszolút konvergenciához a $\sum\frac{n}{n^2+1}$ sort kell vizsgálni. Mivel $\frac{n}{n^2+1}\sim\frac{1}{n}$, ez a harmonikus sorral összehasonlítva divergens. Így az eredeti sor feltételesen konvergens. / За ознакою Лейбніца знакозмінний ряд збіжний, але ряд з модулів розбігається, бо його члени еквівалентні $\frac{1}{n}$. Отже, ряд збігається умовно.

4. feladat / Завдання 4. Határozzuk meg a hatványsor konvergenciatartományát és összegfüggvényét: / Знайти область збіжності степеневого ряду та його суму:

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots.$$

Rövid megoldás / Коротке розв'язання. Ez az $\arctan x$ ismert Maclaurin-sora. A sor sugara $R=1$. A végpontokat külön kell ellenőrizni. Ha $x=1$, akkor a sor $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$, amely Leibniz-kritériummal konvergens. Ha $x=-1$, akkor $-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\cdots$, amely szintén konvergens. Ezért a konvergenciatartomány $[-1,1]$, és

$$S(x)=\arctan x \qquad (x\in[-1,1]).$$

Отже, область збіжності $[-1,1]$, а сума ряду дорівнює $\arctan x$.

5. feladat / Завдання 5. Írjuk fel az $f(x)=\sqrt{x^3}=x^{3/2}$ függvény Taylor-sorának első négy tagját az $x_0=1$ pont környezetében. / Записати перші чотири члени ряду Тейлора функції $f(x)=\sqrt{x^3}=x^{\frac{3}{2}}$ в околі точки $x_0=1$.

Rövid megoldás / Коротке розв'язання. Az $x^{\frac{3}{2}}$ függvényt az $x=1$ pont körül binomiális alakban írhatjuk:

$$x^{\frac{3}{2}}=\big(1+(x-1)\big)^{\frac{3}{2}}.$$

A binomiális sor első tagjai alapján:

$$x^{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{3}{8}(x-1)^2 - \frac{1}{16}(x-1)^3 + \cdots.$$

Ez a kért Taylor-közelítés első négy tagja. / Це перші чотири члени розкладу Тейлора.

6. feladat / Завдання 6. Számítsuk ki a határértéket: / Обчислити границю:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}.$$

Rövid megoldás / Коротке розв'язання. Mivel $x^2 + y^2 > 0$ az origó kivételével, és $x^2 \le x^2 + y^2$, ezért

$$\left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| \le |y|.$$

Ha $(x,y) \to (0,0)$, akkor $|y| \to 0$, ezért a rendőr-elv alapján a keresett határérték 0. / За теоремою про двох міліціонерів границя дорівнює 0.

7. feladat / Завдання 7. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2 y + e^y$ függvény teljes differenciálját az $(1,0)$ pontban, majd számítsuk ki a másodrendű parciális deriváltakat ugyanebben a pontban. / Знайти повний диференціал функції $f(x,y) = x^2 y + e^y$ у точці $(1,0)$, а також обчислити частинні похідні другого порядку в цій точці.

Rövid megoldás / Коротке розв'язання. Először kiszámítjuk az első parciális deriváltakat:

$$f_x = 2xy, \qquad f_y = x^2 + e^y.$$

Az $(1,0)$ pontban $f_x(1,0) = 0$, $f_y(1,0) = 2$, ezért

$$df(1,0) = 0\,dx + 2\,dy = 2\,dy.$$

A másodrendű parciális deriváltak:

$$f_{xx} = 2y, \qquad f_{xy} = 2x, \qquad f_{yx} = 2x, \qquad f_{yy} = e^y.$$

Az $(1,0)$ pontban ezek értékei: $f_{xx} = 0$, $f_{xy} = 2$, $f_{yx} = 2$, $f_{yy} = 1$. / У точці $(1,0)$ маємо $f_{xx} = 0$, $f_{xy} = 2$, $f_{yx} = 2$, $f_{yy} = 1$.

8. feladat / Завдання 8. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y$ függvény lokális szélsőértékét. / Знайти локальний екстремум функції $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y$.

Rövid megoldás / Коротке розв'язання. Az első parciális deriváltak:

$$f_x = 2x - 2, \qquad f_y = 2y + 4.$$

A kritikus pont feltétele $f_x = 0$ és $f_y = 0$, innen $x = 1$, $y = -2$. A másodrendű deriváltak: $f_{xx} = 2$, $f_{yy} = 2$, $f_{xy} = 0$, ezért

$$D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 4 > 0,$$

és $f_{xx} > 0$, tehát lokális minimum van. Az érték:

$$f(1,-2) = 1 + 4 - 2 - 8 = -5.$$

A függvénynek lokális minimuma van az $(1,-2)$ pontban, értéke -5. / Функція має локальний мінімум у точці $(1,-2)$, його значення дорівнює -5.

9. feladat / Завдання 9. Vizsgáljuk meg integrálkritériummal a következő sort: / Дослідити ряд за інтегральною ознакою:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+3}.$$

Rövid megoldás / Коротке розв'язання. A $f(x)=\frac{2}{x^2+3}$ függvény pozitív, folytonos és csökkenő az $[1,\infty)$ intervallumon. Az integrál:

$$\int_1^{\infty} \frac{2}{x^2+3}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}\Big|_1^{\infty} < \infty.$$

Mivel az improprius integrál konvergens, az adott pozitív tagú sor is konvergens. / Оскільки невласний інтеграл збіжний, то даний додатний ряд також збіжний.

10. feladat / Завдання 10. Vizsgáljuk meg a következő sor konvergenciáját határértékes összehasonlítással: / Дослідити збіжність ряду за допомогою граничної ознаки порівняння:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right).$$

Rövid megoldás / Коротке розв'язання. Racionalizáljuk az általános tagot:

$$\sqrt{n}-\sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}.$$

Ez nagy n esetén az $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ taggal ekvivalens. Mivel a $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ p-sor $p=\frac{1}{2}<1$ miatt divergens, ezért az adott sor is divergens. / Оскільки даний ряд еквівалентний розбіжному ряду $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$, він розбігається.

11. feladat / Завдання 11. Vizsgáljuk meg a végtelen szorzat konvergenciáját: / Дослідити збіжність нескінченного добутку:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right).$$

Rövid megoldás / Коротке розв'язання. A végtelen szorzat konvergenciáját a hozzá kapcsolódó sorral vizsgáljuk. Itt $u_n=\frac{1}{n^2}$, és

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

konvergens. Mivel $u_n > 0$ és a $\sum u_n$ sor konvergens, a $\prod(1+u_n)$ végtelen szorzat is konvergens, mégpedig pozitív véges számhoz tart. / Оскільки ряд $\sum \frac{1}{n^2}$ збіжний, то нескінченний добуток збігається до додатного скінченного числа.

12. feladat / Завдання 12. Igazoljuk, hogy a következő függvénysor egyenletesen konvergens az $[-1,1]$ **intervallumon: / Довести, що функціональний ряд рівномірно збіжний на відрізку** $[-1,1]$**:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}.$$

Rövid megoldás / Коротке розв'язання. Ha $x \in [-1,1]$, akkor $|x^n| \leq 1$, ezért

$$\left|\frac{x^n}{n(n+2)}\right| \leq \frac{1}{n(n+2)} \leq \frac{1}{n^2}.$$

A $\sum \frac{1}{n^2}$ sor konvergens. Így a Weierstrass-kritérium alapján az adott függvénysor egyenletesen konvergens az $[-1,1]$ intervallumon. / За ознакою Вейєрштрасса функціональний ряд рівномірно збіжний на $[-1,1]$.

13. feladat / Завдання 13. Írjuk fel az $(1+x)^x$ **függvény Maclaurin-sorának első öt nem nulla tagját. / Записати перші п'ять ненульових членів ряду Маклорена функції** $(1+x)^x$**.**

Rövid megoldás / Коротке розв'язання. A függvényt exponenciális alakba írjuk:

$$(1+x)^x = e^{x\ln(1+x)}.$$

Mivel

$$x\ln(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} + \cdots,$$

az exponenciális sor első szükséges tagjait felhasználva kapjuk:

$$(1+x)^x = 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5x^4}{6} - \frac{3x^5}{4} + \cdots.$$

Ez az első öt nem nulla tag. / Це перші п'ять ненульових членів розкладу Маклорена.

14. feladat / Завдання 14. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2y + \sin(xy)$ **függvény parciális deriváltjait az** $(1,0)$ **pontban. / Знайти частинні похідні функції** $f(x,y) = x^2y + \sin(xy)$ **у точці** $(1,0)$**.**

Rövid megoldás / Коротке розв'язання. A parciális deriváltak:

$$f_x = 2xy + y\cos(xy), \qquad f_y = x^2 + x\cos(xy).$$

Az $(1,0)$ pontban $f_x(1,0) = 0$, mert mindkét tagban szerepel y, és $f_y(1,0) = 1 + 1 = 2$. / У точці $(1,0)$ маємо $f_x(1,0) = 0$, $f_y(1,0) = 2$.

15. feladat / Завдання 15. Írjuk fel az $f(x,y)=e^{x+y}$ függvény másodrendű Taylor-közelítését az $(0,0)$ pont környezetében. / Записати наближення Тейлора другого порядку для функції $f(x,y)=e^{x+y}$ в околі точки $(0,0)$.

Rövid megoldás / Коротке розв'язання. Az $(0,0)$ pontban a függvény értéke és az első, illetve második parciális deriváltak értékei egyaránt 1. Ezért a másodrendű Taylor-közelítés:

$$e^{x+y} \approx 1 + x + y + \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2).$$

Отже, шукане наближення: $1 + x + y + \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2)$.

16. feladat / Завдання 16. Határozzuk meg az $x^2+y^2=25$ implicit görbe érintőjének egyenletét a $(3,4)$ pontban. / Знайти рівняння дотичної до неявної кривої $x^2+y^2=25$ у точці $(3,4)$.

Rövid megoldás / Коротке розв'язання. Legyen $F(x,y)=x^2+y^2-25$. Ekkor $F_x=2x$, $F_y=2y$, tehát

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{x}{y}.$$

A $(3,4)$ pontban $y'=-3/4$. Az érintő egyenlete:

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x-3).$$

Отже, рівняння дотичної: $y-4=-\frac{3}{4}(x-3)$.

AJÁNLOTT IRODALOM, ONLINE FORRÁSOK

Alapművek

1. Філевич, П. В., Андрусяк, І. В., Бродяк, О. Я., Гошко, Л. В., Квіт, Р. І., & Орищин, О. Г. (2022). *Математичний аналіз. Частина 2: Підручник*. Растр-7. 334 с.
2. Бобик, І. О., Бродяк, О. Я., Веселовська, О. В., Вовк, М. І., Дрогомирецька, Х. Т., Клапчук, М. І., Рибицька, О. М., & Сало, Т. М. (2022). *Збірник задач з математичного аналізу. Частина 1*. Растр-7. 408 с.
3. Denkinger, G. (1997). *Analízis* (5. kiad.). Nemzeti Tankönyvkiadó. 414 p.
4. Rudin, W. (1976). *Principles of mathematical analysis* (3rd ed.). McGraw-Hill. 342 p.
5. Stewart, J. (2016). *Calculus: Early transcendentals* (8th ed.). Cengage Learning. 1368 p.
6. Apostol, T. M. (1967). *Calculus. Volume 1: One-variable calculus, with an introduction to linear algebra* (2nd ed.). John Wiley & Sons. 666 p.
7. Apostol, T. M. (1969). *Calculus. Volume 2: Multi-variable calculus and linear algebra, with applications to differential equations and probability* (2nd ed.). John Wiley & Sons. 673 p.

Kiegészítő olvasmányok

1. Denkinger, G., & Gyurkó, L. (1997). *Analízis: Gyakorlatok* (6. kiad.). Nemzeti Tankönyvkiadó. 379 p.
2. Журавська, Г. В., Копась, І. М., Кулик, Г. М., Рева, Н. В., & Степаненко, Н. В. (2013). *Методичні вказівки та варіанти типово-розрахункових робіт з вищої математики: Ряди*. НТУУ «КПІ». 52 с.
3. Бондаренко, Н. В., & Отрашевська, В. В. (2024). *Числові та функціональні ряди: Конспект лекцій*. Київський національний університет будівництва і архітектури. 84 с.
4. Тацій, Р. М., & Трусевич, О. М. (2024). *Ряди: Навчальний посібник*. Львівський державний університет безпеки життєдіяльності. 109 с.
5. Назаренко, М. О., Нестеренко, О. Н., Петрова, Т. О., & Чайковський, А. В. (Упоряд.). (2023). *Збірник типових задач з математичного аналізу: Функції однієї змінної. Частина 3*. Київський національний університет імені Тараса Шевченка. 56 с.
6. Abbott, S. (2015). *Understanding analysis* (2nd ed.). Springer. 312 p.
7. Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2011). *Introduction to real analysis* (4th ed.). John Wiley & Sons. 402 p.

Internetes, elektronikus források

1. Бондаренко, Н. В., & Отрашевська, В. В. (2023). Числові та функціональні ряди: Конспект лекцій. Київський національний університет будівництва і архітектури. https://repositary.knuba.edu.ua/items/6d4c66ea-082f-49d4-9f9d-886246e1238e

2. Чернєй, М. І., Новикова, Г. К., & Денисенко, Н. Л. (2016). Числові та функціональні ряди. Ряди Фур'є: Методичні вказівки. НТУУ «КПІ». https://ela.kpi.ua/items/1301d90a-9244-47b7-9dfe-0d3837349f80

3. Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей КПІ ім. Ігоря Сікорського. (é. n.). Дидактичні та методичні матеріали з математичного аналізу. https://matan.kpi.ua/uk/files.html

4. Monostory, I. (é. n.). Matematika példatár 5. Többváltozós valós függvények. Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem. https://math.bme.hu/jegyzetek/040804_Monostory_ivan_Matematika_Peldatar_V._Kotet.pdf

5. Szabó, T. (2014). Valós függvénytan: Elektronikus tananyag. Szegedi Tudományegyetem. https://eta.bibl.u-szeged.hu/1334/1/valos_fuggvenytan.pdf

6. Strang, G., & Herman, E. J. (2016). Calculus. Volume 2. OpenStax. https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/index?utm_source=chatgpt.com

7. Strang, G., & Herman, E. J. (2016). Calculus. Volume 3. OpenStax. https://openstax.org/books/calculus-volume-3/pages/1-introduction?utm_source=chatgpt.com

8. GeoGebra. (é. n.). 3D grafikus számológép. https://www.geogebra.org/3d

Математичний аналіз: методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти, галузь знань: «А Освіта», спеціальність: «А4 Середня освіта», освітня програма: «Середня освіта (Математика)». Частина І. Розробник: Еніке Якоб. Берегове: Закарпатський угорський університет ім. Ф. Ракоці ІІ, 2026. – 88 с. (угорською та українською мовами).

Навчально-методичне видання підготовлено на основі освітньої програми підготовки здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за галуззю знань: «А Освіта», спеціальністю: «А4 Середня освіта», освітньою програмою: «Середня освіта (Математика)». Метою видання є забезпечення здобувачів денної та заочної форм навчання Закарпатського угорського університету ім. Ф. Ракоці ІІ методичними матеріалами до практичних занять та самостійної роботи з дисципліни «Математичний аналіз».

У посібнику подано методичні матеріали до опрацювання тем, передбачених для І частини курсу: числові ряди, функціональні та степеневі ряди, ряди Тейлора і Маклорена, а також функції багатьох змінних. Видання містить короткі теоретичні відомості, розв’язані зразки, тренувальні завдання з відповідями, питання для самоконтролю, зразки завдань модульного контролю, а також список рекомендованої літератури й електронних ресурсів.

Виробничо-практичне видання

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ / MATEMATIKAI ANALÍZIS

Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи

(для студентів 2-го курсу спеціальності А4.04 Середня освіта (Математика))

ЧАСТИНА І / I. RÉSZ

2026 р.

Затверджено до використання у навчальному процесі на засіданні кафедри математики та інформатики
Закарпатського угорського університет *ім. Ф. Ракоці II (протокол № 1 від «24» серпня 2026 року)*

Розглянуто та рекомендовано Радою із забезпечення якості вищої освіти Закарпатського угорського університет ім. Ф. Ракоці II (протокол № 8 від 22 вересня 2026 року)

Рекомендовано до видання в електронній формі (PDF) рішенням Вченої ради Закарпатського угорського університет ім. Ф. Ракоці II (протокол № 114 від 24 вересня 2026 року)

Підготовлено до видання в електронній формі (PDF) кафедрою математики та інформатики спільно з Видавничим відділом Закарпатського угорського університету імені Ференца Ракоці II

Розробники методичних вказівок:

Еніке ЯКОБ – старший викладач кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського університету імені Ференца Ракоці II, доктор філософії (PhD) у галузі природничих наук

Рецензенти:

Dr. Sipos Dóra Fruysina – старший викладач кафедри кількісних методів Інституту методології та цифровізації бізнесу факультету економіки Дебреценського університету, доктор філософії (PhD).

Вікторія *ДЗЯМКО* – доцент кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського університету імені Ференца Ракоці II, кандидат педагогічних наук, доцент

Відповідальний за випуск:

Мирослав СТОЙКА – завідувач кафедри математики та інформатики Закарпатського угорського університету *імені Ференца Ракоці II, кандидат фізико-математичних наук, доцент*

Олександр ДОБОШ – начальник Видавничого відділу Закарпатського угорського університет ім. Ф. Ракоці II

За зміст методичних вказівок відповідальність несуть розробники.

Видавництво: Закарпатський угорський університет імені Ференца Ракоці II (адреса: пл. Кошута 6, м. Берегове, 90202. Електронна пошта: foiskola@kmf.org.ua) *Статут «Закарпатського угорського* університету *імені Ференца Ракоці II» (Прийнято Загальними зборами ЗУІ ім. Ф. Ракоці II, протокол №2 від 11.11.2019 р., зареєстровано в реєстрі за №6179 приватним нотаріусом І. В. Мацолою)*

Шрифт «Times New Roman». Розмір сторінок методичних вказівок: А4 (210х297мм)

8. sz. melléklet

NYILATKOZAT a mesterséges intelligencia eszközeinek alkalmazásáról

Alulírott, Jakab Enikő,
(a hallgató / oktató-kutató neve)
kijelentem, hogy a(z)

Matematikai analízis. Módszertani útmutató gyakorlati foglalkozásokhoz és önálló munkához. I. rész / Математичний аналіз Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи частина I

(a szakdolgozat / diplomamunka / cikk / monográfia / egyéb munka címe)

elkészítése során mesterséges intelligencia alapú eszközöket alkalmaztam, nevezetesen:

ChatGPT

(az eszközök felsorolása: pl. ChatGPT, Gemini, Claude, Grok, egyéb)

Az alkalmazott generálási módszertan rövid leírása: a tartalom strukturálása, a kétnyelvű (magyar-ukrán) szakfordítás, valamint a gyakorlófeladatok és mintapéldák vázlatainak kidolgozása céljából.

A mesterséges intelligencia (MI) alkalmazása kiegészítő jellegű volt, és az akadémiai integritás elveinek betartásával történt. Ezúton megerősítem, hogy:

- a munka tartalma saját szerzői alkotásom;
- az eredmények, a következtetések és a szerkezeti megoldások saját önálló döntéseim eredményei;
- az MI-eszközök használata nem helyettesítette saját szellemi munkámat;
- az MI segítségével generált minden anyagot ellenőriztem, szerkesztettem, és szükség esetén megfelelően átfogalmaztam;
- a közzétett források felhasználása során betartottam a hivatkozási szabályokat.

Az MI-eszközöket az alábbi kiegészítő feladatokhoz használtam (a lista kiegészíthető):

- egyes mondatok és bekezdések megfogalmazásának pontosítása;
- a szöveg nyelvtani és stilisztikai ellenőrzése;
- a magyar–ukrán fordítás és a matematikai szakterminológia egységesítése;
- feladatötletek, megoldásvázlatok és ellenőrző kérdések előzetes megtervezéséhez;
- a felhasznált forrásanyagok releváns részeinek összegzése későbbi önálló elemzés céljából.

Jelen nyilatkozat a fent említett munka elkészítése során alkalmazott MI-eszközök használatának hivatalos elismeréséül szolgál.

2026. 08. 24
Dátum

Szerző aláírása